



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ  
ΕΛΕΓΧΟΥ”

## ‘Επίλυση Εξισώσεων Riccati με Εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου’

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ελευθερία Γ. Καφαράκη

**Επιβλέπουσα:** Μαρία Γουσίδου-Κουτίτα  
Επικ. Καθηγήτρια Α.Π.Θ

Θεσσαλονίκη, Φεβρουάριος 2006



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ  
ΕΛΕΓΧΟΥ”

## **‘Επίλυση Εξισώσεων Riccati με Εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου’**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Ελευθερία Γ. Καφαράκη**

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 22/12/2005

.....  
Μ. Γουσίδου-Κουτίτα  
Επίκουρη Καθηγήτρια  
Α.Π.Θ.

.....  
Ν. Καραμπετάκης  
Επίκουρος Καθηγητής  
Α.Π.Θ.

.....  
Α. Βαρδουλάκης  
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Φεβρουάριος 2006

.....  
Ελευθερία Γ. Καφαράκη  
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

Copyright © Ελευθερία Γ. Καφαράκη, 2006.  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.



*Jacopo Francesco Riccati (1676-1754)*

**‘Επίλυση Εξισώσεων Riccati με Εφαρμογές στην  
Θεωρία Ελέγχου’**



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την εξίσωση Riccati, όλες τις μεθόδους επίλυσής της, τόσο σε συνεχές όσο και σε διακριτό χρόνο, καθώς και τις εφαρμογές της στον τομέα της Θεωρίας Ελέγχου.

Συγκεκριμένα στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο γίνεται μια αναφορά στη ζωή του κόμη Riccati, στην πρώτη επαφή του με τις διαφορικές εξισώσεις και στην ανακάλυψη της εξίσωσης που έφερε στην συνέχεια το όνομά του. Επίσης γίνεται λόγος για την στενή σχέση της εξίσωσης Riccati με τον Λογισμό Μεταβολών, τον Βέλτιστο Έλεγχο και τα Φίλτρα. Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναφέρονται κάποιες βασικές έννοιες που συνδέονται με τον Αυτόματο Έλεγχο και που κρίνονται απαραίτητες για την κατανόηση της εργασίας. Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο γίνεται εκτενής ανάλυση όλων των μεθόδων επίλυσης της εξίσωσης, όπως είναι η μέθοδος Newton, η μέθοδος της συνάρτησης του πρόσημου πίνακα, καθώς και μια σύγκριση αυτών. Τέλος στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναφέρονται κάποιες εφαρμογές της στον Βέλτιστο Έλεγχο, όπως το πρόβλημα του Βέλτιστου Τετραγωνικού Ρυθμιστή και το Φίλτρο Kalman.

## ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Riccati, Βέλτιστος Έλεγχος, Φίλτρα.

## **ABSTRACT**

This thesis is a study of the Riccati equation, of all the computation methods for its solution in both continuous and discrete time and its Theory Control applications.

In the first chapter, there is a reference to the life of count Riccati, his first experience with differential equations and the eventual discovery of the very equation bearing his name. The close relationship between the equation Riccati and the Calculus of Variations is commented as well as with the Optimal Control and Filtering. The second chapter deals with some basic concepts on Automatic Control deemed necessary for the comprehension of the research in this thesis. Continuing to the third chapter, an in-depth analysis of all the computation methods for the solution of the equation is carried out. Such methods are the Newton's method, the 'matrix sign function method'. Additionally, a comparison between the analysed computation methods concludes the chapter. Finally, in the fourth chapter, some of the equation's applications in Optimal Control are presented, like the Linear Quadratic Regulator Problem and the Kalman Filter.

## **KEYWORDS**

Riccati, Optimal Control, Filtering.

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Από καρδιάς θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους όσους με βοήθησαν στην πραγματοποίηση αυτής της εργασίας. Καταρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου κα Μαρία Γουσίδου-Κουτίτα που μου κίνησε το ενδιαφέρον για τις αριθμητικές μεθόδους, καθώς και τον καθηγητή κ. Αντώνη-Ιωάννη Βαρδουλάκη για το υλικό που μου δάνεισε απ' την προσωπική του βιβλιοθήκη.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επίκουρο καθηγητή κ. Νικόλαο Καραμπετάκη για την σωστή καθοδήγηση του, το πλούσιο υλικό που μου υπέδειξε, καθώς και την αμέριστη συμπαράστασή του.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά την μητέρα μου Λένα, που είναι πάντα δίπλα μου και στην οποία αφιερώνω αυτήν την εργασία, καθώς και τον άνθρωπο που θα περάσω την υπόλοιπη ζωή μου μαζί του.





## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	5
ABSTRACT.....	6
ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	7
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	9

<b>Κεφάλαιο</b>	<b>Σελίδα</b>
1. Οι πρώτες μέρες της εξίσωσης Riccati.....	11
1.1 Εισαγωγή.....	11
1.2 Μια ματιά στη ζωή του Riccati.....	11
1.3 Ο Riccati και οι διαφορικές εξισώσεις.....	12
1.4 Ιστορία και προϊστορία της εξίσωσης Riccati.....	13
1.5 Η εξίσωση Riccati στον Λογισμό Μεταβολών, Βέλτιστος Έλεγχος και Φίλτρα.....	15
2. Βασικές έννοιες.....	20
2.1 Διανύσματα και Πίνακες.....	20
2.2 Νόρμες διανύσματος και πίνακα.....	24
2.3 Γραμμικά συστήματα ελέγχου.....	26
2.3.1 Περιγραφή (χώρου καταστάσεων) state space συστημάτων ελέγχου σε συνεχή χρόνο.....	26
2.3.2 Περιγραφή (χώρου καταστάσεων) state space συστημάτων ελέγχου σε διακριτό χρόνο.....	28
2.3.3 Ιδιόμορφα συστήματα.....	28
2.3.4 Ευστάθεια συστήματος συνεχούς χρόνου.....	29
2.3.5 Ευστάθεια συστήματος διακριτού χρόνου.....	31
2.4 Ελεγκσιμότητα και Παρατηρησιμότητα.....	32

2.4.1	Ελεγχιμότητα συστήματος συνεχούς χρόνου.....	32
2.4.2	Ελεγχιμότητα συστήματος διακριτού χρόνου.....	33
2.4.3	Παρατηρησιμότητα συστήματος συνεχούς χρόνου.....	33
2.4.4	Παρατηρησιμότητα συστήματος διακριτού χρόνου.....	33
2.4.5	Σταθεροποιησιμότητα και Ανιχνευσιμότητα.....	34
2.5	Στοιχειώδεις Ορθογώνιοι Μετασχηματισμοί.....	34
2.6	Ορθογώνια Τριγωνοποίηση-QR Παραγοντοποίηση.....	38
3.	Επίλυση Αλγεβρικών Εξισώσεων Riccati .....	44
3.1	Μέθοδος Newton.....	52
3.2	Μέθοδος της συνάρτησης του πρόσημου πίνακα.....	60
3.3	Μέθοδος των ιδιοσυστημάτων.....	70
3.3.1	Μέθοδος του ιδιοδιανύσματος.....	70
3.4	Μέθοδος Schur.....	76
3.5	Μέθοδος γενικευμένου ιδιοσυστήματος.....	79
3.5.1	Μέθοδος γενικευμένου ιδιοσυστήματος για την διακριτή εξίσωση Riccati.....	80
3.5.2	Γενικευμένη μέθοδος Schur για αποφυγή αντιστροφής του πίνακα ελέγχου βαρύτητας.....	87
3.6	Συμπλεκτική μέθοδος.....	93
3.7	Σύγκριση μεθόδων για την λύση των εξισώσεων Riccati.....	99
3.8	Επιλεγμένα Λογισμικά.....	102
3.8.1	Matlab Control System Toolbox.....	102
3.8.2	Mat control.....	105
4.	Εφαρμογές εξίσωσης Riccati στην Θεωρία Ελέγχου.....	106
4.1	Εισαγωγή.....	106
4.2	Τετραγωνικά Προβλήματα Βελτιστοποίησης.....	106
4.2.1	Πρόβλημα Γραμμικού Τετραγωνικού Ρυθμιστή (LQR) σε συνεχή χρόνο.....	106
4.2.2	Πρόβλημα Γραμμικού Τετραγωνικού Ρυθμιστή σε διακριτό χρόνο.....	111
4.2.3	Υπολογισμός Βέλτιστης Κατάστασης: Το Φίλτρο Kalman	113
4.2.4	Φίλτρο Kalman για Σύστημα Διακριτού χρόνου.....	117
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	119
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ	120

## 1 ΟΙ ΠΡΩΤΕΣ ΜΕΡΕΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ RICCATI

### 1.1 Εισαγωγή

Στα τέλη του 17<sup>ου</sup> αιώνα, όταν το μπαρόκ έδινε την θέση του στον διαφωτισμό, γεννήθηκε στην Δημοκρατία της Βενετίας ένας ευγενής, με το όνομα Jacopo Francesco Riccati. Την παγωμένη Πρωτοχρονιά του 1720, έγραψε ένα γράμμα στον φίλο του Giovanni Rizzetti, όπου του πρότεινε δύο νέες διαφορικές εξισώσεις. Με σύγχρονα σύμβολα, αυτές οι εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\dot{x} = ax^2 + \beta t^m \quad (1.1)$$

$$\dot{x} = ax^2 + \beta t + \gamma^2 \quad (1.2)$$

όπου  $m$  είναι σταθερά. Αυτό είναι πιθανόν το πρώτο έγγραφο που μαρτυρά τις ‘πρώτες μέρες’ της εξίσωσης Riccati, μιας εξίσωσης που υπήρξε εξαιρετικής σημασίας στους αιώνες που ακολούθησαν.

### 1.2 Μια ματιά στην ζωή του Riccati

Ο κόμης Jacopo Riccati γεννήθηκε στην Βενετία στις 28 Μαΐου του 1676. Ο πατέρας του, ένας ευγενής, πέθανε όταν ήταν μόλις δέκα χρονών. Το αγόρι ανατράφηκε από την μητέρα του, που δεν ξαναπαντρεύτηκε και από έναν θείο του, που υπήρξε γι’ αυτόν πατρική φιγούρα. Ο θείος του αναγνώρισε σε αυτόν ασυνήθιστες ικανότητες και έπεισε την μητέρα του να τον στείλει σ’ ένα κολέγιο Ιησουϊτών στην Μπρέσια.

Ο νεαρός Riccati γράφτηκε στο κολέγιο το 1687, πιθανόν χωρίς πρόθεση να γίνει κάποτε επιστήμονας. Πράγματι, στο τέλος των σπουδών του απ’ το κολέγιο το 1693, γράφτηκε στο Πανεπιστήμιο της Πάντουα ως φοιτητής νομικής. Ωστόσο ακολουθώντας την φυσική του κλίση, παρακολούθησε ακόμα μαθήματα αστρονομίας από τον Πατέρα Stefano degli Angeli, έναν πρώην μαθητή του Bonaventura Cavalieri. Ο Πατέρας Stefano αγαπούσε την ‘Philosophiae Naturalis Principia’ του Isaac Newton και αυτήν

την αγάπη πέρασε στον νεαρό Riccati γύρω στο 1695. Αυτό είναι πιθανόν το γεγονός που προκάλεσε την στροφή του Riccati από την νομική στην επιστήμη.

Αφού αποφοίτησε στις 7 Ιουνίου του 1696, παντρεύτηκε την Elisabetta dei Conti d' Onigo, στις 15 Οκτωβρίου του 1696, η οποία γέννησε 18 παιδιά, εκ των οποίων επέζησαν τα εννέα. Αξίζει να αναφερθούν ο Vincenzo (1707-1775), φυσικομαθηματικός, και ο Giordano (1709-1790), μελετητής με πολλά ταλέντα, αλλά με κύρια ενδιαφέροντα την αρχιτεκτονική και τη μουσική.

Ο Riccati πέρασε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στην Castelfranco Veneto, μια μικρή πόλη στην εξοχή κοντά στην Βενετία. Είχε αναλάβει τη φροντίδα της οικογένειάς του και τη διαχείριση της μεγάλης περιουσίας του, ενώ παράλληλα ήταν υπεύθυνος της διοίκησης του Castelfranco Veneto, ως πρόεδρος της πόλης για εννέα χρόνια, κατά την περίοδο 1698-1729. Ακόμα είχε στην κατοχή του ένα σπίτι στην γειτονική πόλη Τρεβίζο, όπου και μετακόμισε μετά τον θάνατο της γυναίκας του το 1749.

Ο κόμης Riccati ήταν ένας δυνατός και σκληρά εργαζόμενος άνθρωπος με γόνιμο μυαλό καθ' όλη την διάρκεια της ζωής του. Στις 2 Απριλίου του 1754 ανέβασε ξαφνικά πυρετό και στις 15 Απριλίου απεβίωσε.

### 1.3 Ο Riccati και οι διαφορικές εξισώσεις

Το κύριο ενδιαφέρον του Riccati στον τομέα των διαφορικών εξισώσεων, επικεντρώθηκε στις μεθόδους διαχωρισμού των μεταβλητών. Ιδιαίτερα το ενδιαφέρον του κέντρισαν εξισώσεις του τύπου:

$$\dot{x} = ax^2 + bx + c$$

με παραμέτρους μεταβλητές στον χρόνο ή σταθερές.

Εκτός απ' τις εξισώσεις (1.1) και (1.2) ασχολήθηκε και με άλλες διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης όπως:

$$\dot{x} = at^p x^2 + bt^m \quad (1.3)$$

$$\dot{x} = at^p x^q + bt^m \quad (1.4)$$

όπου (m,p,q) είναι σταθερές. Προφανώς η σχέση (1.1) είναι ειδική περίπτωση της σχέσης (1.3) και η (1.3) είναι ειδική περίπτωση της (1.4). Ένα από τα προβλήματα που οδήγησε τον Riccati στην ανάλυση αυτών των εξισώσεων, ήταν η μελέτη της συμπεριφοράς της κλίσης της καμπύλης που συνδέει την αρχή των αξόνων μ' ένα σημείο του οποίου οι συντεταγμένες να ικανοποιούν γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Όσον αφορά τις εξισώσεις δεύτερης τάξης, ασχολήθηκε ιδιαίτερα με την εξίσωση:

$$\ddot{x} = at^m$$

την οποία αποκαλούσε 'equazione ingannatrice' (παραπλανητική εξίσωση).

#### 1.4 Ιστορία και προΐστορία της εξίσωσης Riccati

Είναι πολύ πιθανόν πως ο Riccati άρχισε να συλλαμβάνει και να μελετάει τις εξισώσεις (1.1)-(1.4) το 1715. Δυστυχώς, κατά την προσφιλή του συνήθεια, δεν εξέδωσε αμέσως την δουλειά του. Η πρώτη απόδειξη αυτών των σπουδών, απ' όσο μπορούμε να γνωρίζουμε, έγινε γύρω στο 1719, όταν ο Riccati συνάντησε τον Nicolaus II Bernoulli. Σε αυτήν την συνάντηση του παρουσίασε τις διαφορικές του εξισώσεις και τις μεθόδους επίλυσης που γνώριζε. Συγκεκριμένα έθεσε το ερώτημα να βρεθούν τέτοιες τριάδες (m,p,q) για τις οποίες να είναι δυνατός ο διαχωρισμός των μεταβλητών.

Την 1<sup>η</sup> Απριλίου του 1719 ο Nicolaus II έγραψε ένα ενδιαφέρον γράμμα στον Pierre Remond de Monfort όπου συζητούσε τις περιπτώσεις διαχωρισμού των μεταβλητών, όπως προέκυψαν από τις συζητήσεις του με τον Riccati, πιο συγκεκριμένα η ειδική περίπτωση για q=2 και m+3p=-4.

Ο Nicolaus III, ένα άλλο μέλος της οικογένειας Bernoulli συναντήθηκε μερικές φορές στην Βενετία με τον Riccati και κατόπιν επικοινωνούσαν συχνά μέσω αλληλογραφίας. Η επαφή αυτών των δύο πιθανόν έγινε ύστερα από το γράμμα που έστειλε ο Riccati το 1720 στον Giovanni Rizzetti. Σε αυτό το σημαντικό έγγραφο ο Riccati αναφέρεται στην συνάντηση που είχε στην Μπολόνια με τον Gabriele Manfredi, με τον οποίο συζήτησε αρκετά ερωτήματα και ιδιαίτερα το πρόβλημα διαχωρισμού των μεταβλητών στις διαφορικές εξισώσεις. Ο Riccati στο γράμμα του ανέφερε επίσης τις εξισώσεις (1.1) και (1.2) και ότι μέχρι τότε δεν είχε καταφέρει να διαχωρίσει τις μεταβλητές στους παραπάνω τύπους με γενικό τρόπο και δεν ήξερε αν τελικά ήταν εφικτό. Ωστόσο, γράφει ότι είχε βρει άπειρες τιμές του ακεραίου  $m$  όπου οι μεταβλητές μπορούν να διαχωριστούν.

Από τα γράμματα που στάλθηκαν από τον Nicolaus III στον Riccati, είναι φανερό ότι ο Nicolaus III αντιμετώπισε πολλές δυσκολίες για να αποδείξει ότι οι μεταβλητές ήταν διαχωρίσιμες για την ακολουθία ακεραίων  $m$  του Riccati. Τελικά ο Nicolaus III σ' ένα γράμμα του προς τον Riccati γράφει ότι κατάφερε να βρει τις ίδιες περιπτώσεις διαχωρισμού των μεταβλητών που είχε αναφέρει ο Riccati σε μια συνάντησή τους. Στη συνέχεια του παρουσίασε τον δικό του συλλογισμό για να αποδείξει ότι στην εξίσωση (1.3) ο διαχωρισμός ήταν δυνατός για  $m = -3p - 4$  και  $m = (-p - 4)/3$ .

Στο ίδιο γράμμα ο Nicolaus III καλεί τον Riccati να δημοσιεύσει μια μελέτη στην 'Acta Eruditorum Lipsiae', ώστε να παρουσιάσει το πρόβλημα του σε όλους τους μαθηματικούς, που όπως χαρακτηριστικά αναφέρει, 'μετά τον θάνατο του Leibnitz και άλλων, είχαν αρχίσει να μαραζώνουν'.

Ο Riccati αποδέχτηκε την πρόταση του Nicolaus III και δημοσίευσε μια μελέτη επτά σελίδων γραμμένη στα λατινικά, όπου ανάγει μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης στην εξίσωση (1.3). Στην συνέχεια έθεσε το ερώτημα να βρεθούν όλοι οι εκθέτες  $m$  και  $p$  για τους οποίους ο διαχωρισμός των μεταβλητών ήταν εφικτός.

Αυτή η μελέτη, που δημοσιεύτηκε το 1724, θεωρείται το πρώτο επίσημο έγγραφο της εξίσωσης Riccati.

## 1.5 Η εξίσωση Riccati στον Λογισμό Μεταβολών, Βέλτιστος Έλεγχος και Φίλτρα

Καθώς οι μέρες του Riccati είχαν περάσει, η εξίσωσή του μελετήθηκε από πολλούς, ιδιαίτερα από τον Euler (γύρω στο 1760) και τον Jacques Liouville (γύρω στο 1840). Ωστόσο, στον 20<sup>ο</sup> αιώνα η εξίσωση αποκτά μείζονα σημασία, ιδίως για την ανάπτυξη του Λογισμού Μεταβολών, Βέλτιστου Ελέγχου και Φίλτρων.

Οι ρίζες του Λογισμού Μεταβολών πηγαινούν πίσω στην αρχή του Fermat του ελαχίστου χρόνου (1662). Εντούτοις, το πρόβλημα το οποίο πρωτοέδωσε ώθηση στο πεδίο της ανάπτυξης, ήταν το πολύκροτο ‘βραχυστόχρονο πρόβλημα’ που διατυπώθηκε απ’ τον Galileo (1638) και λύθηκε απ’ τον John Bernoulli (1697). Το βραχυστόχρονο πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως:

Θεωρούμε μια καμπύλη  $\sigma$  ένα κάθετο επίπεδο η οποία αρχίζει από δοσμένο σημείο  $a$  και τελειώνει  $\sigma$  ένα άλλο δοσμένο σημείο  $b$  με μικρότερη τεταγμένη. Μια σημειακή μάζα ακολουθεί μια τέτοια καμπύλη υπό την επίδραση της βαρύτητας και κινείται απ’ το  $a$  στο  $b$  σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (χρόνος μεταφοράς). Το ερώτημα που τίθεται είναι για το ποια είναι η καμπύλη που συνδέει το  $a$  με το  $b$  στον ελάχιστο δυνατό χρόνο μεταφοράς.

Ακολουθώντας την επιτυχημένη λύση του βραχυστόχρονου προβλήματος, πολλά άλλα προβλήματα μεταβολών μελετήθηκαν στους μεταγενέστερους αιώνες, από την έρευνα γεωδαιτικών γραμμών ως τα ισοπεριμετρικά προβλήματα, από ναυτικές οδούς σε στατικά θαλάσσια ρεύματα έως το πρόβλημα πλοήγησης του Zermelo.

Ωστόσο, είναι κυρίως με την ανάπτυξη των μεθόδων δεύτερων μεταβολών που η εξίσωση Riccati εισέρχεται στο πεδίο, ιδιαίτερα κατά τις πρώτες δεκαετίες του 20<sup>ου</sup> αιώνα. Μια απ’ τις βασικές διατυπώσεις των προβλημάτων μεταβολών είναι η ακόλουθη:

Θεωρούμε το συναρτησιακό:



$$J[x] = \int_a^b F(t, x, \dot{x}) dt$$

όπου  $F$  είναι μια συνεχής συνάρτηση, πάνω στο επίπεδο της καμπύλης  $x(t)=t$  με τελικά σημεία:

$$x(a)=A \quad , \quad x(b)=B$$

Το αντικείμενο για την εύρεση συνθηκών για τον χαρακτηρισμό της λύσης, επιδιώκεται δίνοντας στην συνάρτηση  $x(t)$  μια ελάχιστη μεταβολή  $h(t)$  έτσι ώστε:

$$h(a)=0 \quad , \quad h(b)=0$$

Το ανάπτυγμα Taylor της  $F$  οδηγεί στο:

$$\Delta J[h] = J[x+h] - J[x] = \delta J[h] + \delta^2 J[h] + \varepsilon$$

όπου:

$$\delta J[h] = \int_a^b (F_x h + F_{\dot{x}} \dot{h}) dt$$

είναι η ονομαζόμενη πρώτη μεταβολή του  $J[h]$  και

$$\delta^2 J[h] = \frac{1}{2} \int_a^b (F_{xx} h^2 + 2F_{x\dot{x}} h\dot{h} + F_{\dot{x}\dot{x}} \dot{h}^2) dt \quad \text{είναι η δεύτερη μεταβολή και } \varepsilon \text{ ένα}$$

απειροελάχιστο μεγαλύτερης τάξης. Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, λαμβάνουμε ότι:

$$\delta^2 J[h] = \int_a^b (P\dot{h}^2 + Qh^2) dt \quad (1.5)$$

όπου:

$$P = P(t) = \frac{1}{2} F_{\dot{x}\dot{x}} \quad Q = Q(t) = \frac{1}{2} (F_{xx} - \frac{d}{dx} F_{x\dot{x}})$$

Μπορεί να δειχθεί ότι μια αναγκαία συνθήκη για να έχει το συναρτησιακό  $J[x]$  ελάχιστο, είναι η δεύτερη μεταβολή  $\delta^2 J[h]$  να είναι μη-αρνητική. Αυτό άνοιξε το δρόμο σε μια απέραντη βιβλιογραφία, αφιερωμένη στην μελέτη του σήματος της παραπάνω έκφρασης (1.5) για  $\delta^2 J[h]$ . Τώρα στην σχέση (1.5) ο όρος  $P\dot{h}^2$  παίζει κυρίαρχο ρόλο, όπως εύκολα μπορεί να φανεί. Γι' αυτό μπορεί να ειπωθεί ότι η συνθήκη  $P(t) \geq 0$  (δηλαδή  $F_{xx} \geq 0$ ) είναι αναγκαία έτσι ώστε  $x(t)$  να είναι η λύση του προβλήματος.

Ιδιαίτερη προσοχή έχει επίσης δοθεί από αρκετούς εξαιρετικούς επιστήμονες για το αν η συνθήκη  $F_{xx} > 0$  είναι επαρκής για ένα ελάχιστο. Αυτό το ερώτημα μπορεί να εξηγηθεί σύμφωνα με τις ακόλουθες απόψεις, που πηγάζουν απ' το έργο του Legendre. Παίρνουμε μια αυθαίρετη συνάρτηση  $w(t)$  και σημειώνουμε ότι καθώς  $h(a) = h(b) = 0$ ,

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(wh^2)dt = \int_a^b (\dot{w}h^2 + 2wh\dot{h})dt = 0$$

Γι' αυτό:

$$\delta^2 J[h] = \int_a^b [P\dot{h}^2 + 2wh\dot{h} + (Q + \dot{w})h^2]dt \quad (1.6)$$

Τώρα θεωρούμε ότι η  $w(t)$  ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης:

$$\dot{w} = \frac{w^2}{P} - Q \quad (1.7)$$

Τότε το ολοκλήρωμα της (1.6) θα πάρει την τέλεια τετραγωνική έκφραση:

$$\delta^2 J[h] = \int_a^b \frac{(P\dot{h} + wh)^2}{P} dt \quad \text{με } P(t) > 0.$$

Όπως γνώριζε ο Legendre, το 'κόλπο' με το τέλειο τετράγωνο δεν λειτουργεί πάντα, καθώς η εξίσωση (1.7) μπορεί να μην έχει παραδεκτή λύση στο διάστημα  $[a, b]$ .

Αυτό το ζήτημα διασαφηνίστηκε μεταγενέστερα από τους Lagrange και Jacobi, χωρίς να μιλήσουμε για τον Hamilton, ο οποίος απέδειξε ότι η συνθήκη  $F_{xx} > 0$  από μόνη της δεν είναι επαρκής γενικά και εισήγαγε μια πιο προσεγμένη συνθήκη εμπλέκοντας την έννοια των συζυγών σημείων.

Τώρα, σίγουρα αναγνωρίζουμε στην σχέση (1.7) μια βαθμωτή εξίσωση Riccati. Εάν ένας πιο γενικός δείκτης απόδοσης με  $n$  αγνώστους  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  ληφθεί υπόψη, τότε η εξίσωση Riccati σε μορφή πίνακα:

$\dot{W} = WP^{-1}W - Q$  θα μπει στο 'σενάριο', όπου  $W$  είναι ένας συμμετρικός πίνακας συνεχών συναρτήσεων διάστασης  $n \times n$ .

Ενώ η βιβλιογραφία πάνω στις μεθόδους δεύτερης μεταβολής στον Λογισμό Μεταβολών αναπτύχθηκε κυρίως στο πρώτο μισό του 20<sup>ου</sup> αιώνα, ο Βέλτιστος Έλεγχος και τα Φίλτρα έκαναν την είσοδο τους στο επιστημονικό προσκήνιο με την συμβολή του Kalman κυρίως κατά την διάρκεια της δεκαετίας 1960-1970 και διέγειραν την ερευνητική δραστηριότητα για το υπόλοιπο του αιώνα. Το πρόβλημα που αντιμετωπίστηκε σε αυτό το νέο πεδίο είναι επίσης συναρτησιακό πρόβλημα βελτιστοποίησης, αλλά υπάρχει μια νέα πρόκληση. Η παρουσία εξωγενών μεταβλητών, επηρεάζουν την δυναμική ενός φαινομένου που περιγράφεται σε μορφή χώρου καταστάσεων. Κάτω απ' την επίδραση της δουλειάς του Kalman, μια τέτοια μοντελοποίηση του πραγματικού κόσμου, έμελλε να γίνει μείζονος σημασίας για διαφορετικά πεδία έρευνας και μηχανικών εφαρμογών στα χρόνια που ακολούθησαν. Χάρη σ' ένα τέτοιο συγκεντρωτικό μοντέλο, φαινόμενα, εγκαταστάσεις, μηχανές, διαδικασίες δεν χρειάζονταν πλέον εννοιολογικό διαχωρισμό. Έγιναν απλά 'το Σύστημα' και όλο το φυσικό φόντο από πίσω ξεθώριασε, έχοντας περιοριστεί ο ρόλος του στην προκαταρκτική φάση μοντελοποίησης. Ένα άλλο χαρακτηριστικό της μοντελοποίησης του Kalman, είναι η δυνατότητα που προσφέρει να συμπεριλάβουμε εύκολα το φαινόμενο διαταραχών, ένα κύριο συστατικό για τα απαγορευτικά επικοινωνιακά και πληροφοριακά προβλήματα του 20<sup>ου</sup> αιώνα. Τέλος πρέπει να σημειώσουμε ότι ενώ η ανεξάρτητη μεταβλητή στον Λογισμό Μεταβολών θεωρείται

τυπικά σαν μια συντεταγμένη χρόνου, η τυπική ανεξάρτητη μεταβλητή του Βέλτιστου Ελέγχου και Φίλτρων, είναι ο χρόνος.

Με τις αναπαραστάσεις χώρου καταστάσεων, οι συνθήκες βελτιστοποίησης εκφράζονται με τις εξισώσεις Riccati. Ένα παράδειγμα Βέλτιστου Ελέγχου το επονομαζόμενο γραμμικό τετραγωνικό Gaussian πρόβλημα, υπάρχει στη βελτιστοποίηση μιας τετραγωνικής συνάρτησης κόστους που σχετίζεται με γραμμικά δυναμικά συστήματα, περιγραφόμενα σε μορφή χώρου κατάστασης και υπόκειται σε επιρόσθετες διαταραχές που φαίνονται σαν λευκοί και Gaussian ήχοι. Αυτό το πρόβλημα απαιτεί την λύση δύο εξισώσεων Riccati σε μορφή πίνακα, μια που να σχετίζεται με τα φίλτρα και μια δεύτερη που να σχετίζεται με τον έλεγχο.

Το γνήσιο ενδιαφέρον του Riccati ήταν ασφαλώς για τις διαφορικές εξισώσεις. Επίσης ο Λογισμός Μεταβολών ήταν ουσιαστικά ένα θέμα εξισώσεων συνεχούς χρόνου. Αντίθετα, στον Βέλτιστο Έλεγχο και στα Φίλτρα υπάρχει ένα αξιοσημείωτο ενδιαφέρον για μια διαφορετική εκδοχή του βέλτιστου προβλήματος, που οδηγεί στην εκδοχή της εξίσωσης Riccati σε διακριτό χρόνο, που επίσης ονομάζεται παγκοσμίως Riccati.

Οι λύσεις των προβλημάτων Βέλτιστου Ελέγχου και Φίλτρων, είναι γενικές συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής. Σε πολλές περιπτώσεις οι λύσεις των εξισώσεων Riccati συγκλίνουν. Το ασυμπτωτικό σημείο σύγκλισης, είναι η λύση μιας αλγεβρικής εξίσωσης, της ονομαζόμενης αλγεβρικής εξίσωσης Riccati. Μεγάλη προσοχή έχει δοθεί σε μια τέτοια εξίσωση, επειδή είναι η βάση για μια λύση ανεξάρτητη χρόνου.

Διαφορικές και αλγεβρικές εξισώσεις Riccati, έχουν μελετηθεί εκτενώς στην βιβλιογραφία συστημάτων και ελέγχου και οι ιδιότητες τους είναι τώρα κατανοητές, όπως αναλύεται σε δημοσιεύσεις και βιβλία.

Χωρίς αμφιβολία, αυτή η ενεργός έρευνα των τελευταίων ετών θα συνεχίσει για αρκετές ακόμη δεκαετίες. Απομένει μόνο να περιμένουμε τις εξελίξεις στην ‘εντυπωσιακή’ αυτή εξίσωση που συλλήφθηκε από τον κόμη Riccati πριν από ένα τέταρτο χιλιετίας.

## 2 Βασικές έννοιες

### 2.1 Διανύσματα και Πίνακες

Σε αυτήν την παράγραφο, δίνουμε σημειώσεις και ορισμούς για διανύσματα και πίνακες που χρησιμοποιούνται σε όλη την εργασία.

Ένα διατεταγμένο σύνολο αριθμών καλείται διάνυσμα και οι αριθμοί αυτοί καλούνται στοιχεία του διανύσματος. Ένα διάνυσμα  $x$  με  $n$  στοιχεία έχει την μορφή:

$$x = [x_i] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Για ευκολία, το παραπάνω διάνυσμα  $x$  μπορεί μερικές φορές να γραφεί ως:

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$$

Μια συλλογή  $nm$  στοιχείων διατεταγμένα σε ορθογώνια μορφή με  $n$  γραμμές και  $m$  στήλες καλείται πίνακας τάξης  $n \times m$ . Ένας πίνακας συμβολίζεται με κεφαλαίο γράμμα και έχει μορφή:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Ένας  $n \times m$  πίνακας απεικονίζεται επίσης ως:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_m] \quad , \quad (2.3)$$

όπου το  $n$ -διάνυσμα  $a_j$  είναι η  $j$  στήλη του πίνακα  $A$ .

Όλα τα διανύσματα και οι πίνακες ορίζονται πάνω στο σύνολο  $\mathfrak{R}$  των πραγματικών αριθμών (δηλαδή τα στοιχεία τους είναι πραγματικοί αριθμοί), εκτός αν δηλώνεται κάτι διαφορετικό.

Αν όλα τα μέρη ενός διανύσματος είναι μηδέν, τότε καλείται **μηδενικό διάνυσμα** και δηλώνεται ως  $0$ . Αντίστοιχα, ένας πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με το μηδέν καλείται **μηδενικός πίνακας** και δηλώνεται επίσης ως  $0$ .

Οι  $n \times m$  πίνακες με  $n \neq m$  αναφέρονται ως **ορθογώνιοι**. Οι  $n \times n$  πίνακες καλούνται **τετραγωνικοί** και  $n$  είναι η τάξη τέτοιων πινάκων.

Ο πίνακας:

$$A^T = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

είναι ο **ανάστροφος** του πίνακα (2.2). Εάν  $A = [a_{ij}]$  είναι ένας μιγαδικός πίνακας (δηλαδή πίνακας με μιγαδικά στοιχεία), τότε ο **συζυγής ανάστροφος** του  $A$  ορίζεται ως:  $A^H = [\bar{a}_{ji}]$ , όπου  $\bar{a}$  είναι ο συζυγής μιγαδικός του  $a$ . Αντίστοιχα για τα διανύσματα ο  $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  είναι ο ανάστροφος του διανύσματος (2.1).

Ο  $n \times n$  **ταυτοτικός** (ή μοναδιαίος) πίνακας συμβολίζεται ως  $I_n$  και έχει μορφή:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Για έναν δοσμένο τετραγωνικό πίνακα  $A$ , ο πίνακας  $B$  που ικανοποιεί την σχέση  $AB=I$  καλείται **αντίστροφος** του  $A$  και συμβολίζεται ως  $A^{-1}$ . Όποτε ο  $A^{-1}$  υπάρχει, ο

πίνακας  $A$  αναφέρεται ως ομαλός, αλλιώς ο  $A$  καλείται μη ομαλός. Η έκφραση  $A^{-T}$  χρησιμοποιείται για  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ .

Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  δηλώνεται ως  $\det(\mathbf{A})$ .

Ένας τετραγωνικός πίνακας καλείται:

- **διαγώνιος** αν  $a_{ij} = 0$  για  $i \neq j$
- **τριδιαγώνιος** αν  $a_{ij} = 0$  για  $|i - j| > 1$
- **άνω τριγωνικός** αν  $a_{ij} = 0$  για  $i > j$
- **αυστηρά άνω τριγωνικός** αν  $a_{ij} = 0$  για  $i \geq j$
- **άνω Hessenberg** αν  $a_{ij} = 0$  για  $i > j + 1$

Ένας διαγώνιος πίνακας  $A$  συμβολίζεται ως:

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

Αν τα διαγώνια στοιχεία ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίσα με 1, τότε ο πίνακας καλείται μοναδιαίος τριγωνικός.

Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι:

- **συμμετρικός** αν  $A^T = A$
- **θετικά ορισμένος** αν  $x^T Ax > 0$  για  $x \neq 0$
- **θετικά ημιορισμένος** (ή μη αρνητικά ορισμένος)  
αν  $x^T Ax \geq 0$  για  $x \neq 0$
- **μηδενοδύναμος** αν  $A^k = 0$  για κάποιον ακέραιο  $k \geq 0$

Εάν ο  $A$  είναι θετικά ημιορισμένος, τότε υπάρχει ένας μοναδικά ημιορισμένος πίνακας  $B$ , έτσι ώστε  $B^2 = A$ . Ο πίνακας  $B$  αναφέρεται ως τετραγωνική ρίζα του  $A$ . Εάν ο  $A$  είναι θετικά ορισμένος τότε είναι και  $B$ .

Ένας μιγαδικός πίνακας  $A$  είναι **Ερμιτιανός** αν  $A^H = A$ .

Για έναν  $n \times n$  μιγαδικό πίνακα  $A$ , υπάρχει ένας ομαλός πίνακας  $T$ , έτσι ώστε:

$$T^{-1}AT = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_k)$$

όπου:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

είναι  $m_i \times m_i$  και  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ .

Οι πίνακες  $J_i$  καλούνται **Jordan πίνακες** ή **Jordan blocks** και  $J$  καλείται η Jordan κανονική μορφή του πίνακα  $A$ . Για κάθε  $j = 1, 2, \dots, k$   $\lambda_j$  είναι η ιδιοτιμή του  $A$  με αλγεβρική πολλαπλότητα  $m_j$ . Η ίδια ιδιοτιμή μπορεί να εμφανισθεί σε περισσότερα από ένα block.

Ένας πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο είναι πίνακας, καλείται **block πίνακας**. Block διαγώνιος πίνακας, είναι ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο είναι πίνακας. Η Jordan κανονική μορφή είναι ένα παράδειγμα block διαγώνιου πίνακα. Αντίστοιχα ορίζεται ο block τριγωνικός πίνακας.



Αν  $A \in C^{m \times n}$  και  $B \in C^{r \times s}$ , τότε ο  $mr \times ns$  πίνακας που ορίζεται ως:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

καλείται **προϊόν Kronecker** των A και B.

## 2.2 Νόρμες διανύσματος και πίνακα

Δουλεύοντας με διανύσματα ή πίνακες είναι ‘βολικό’ να έχουμε μοναδικούς αριθμούς που με κάποιον τρόπο να χαρακτηρίζουν το μέγεθος τους. Γι’ αυτόν τον λόγο συγκεκριμένες συναρτήσεις διανύσματος ή στοιχεία πίνακα έχουν χρησιμοποιηθεί και καλούνται **νόρμες**.

Η νόρμα ενός πραγματικού n-διανύσματος x συμβολίζεται ως  $\|x\|$ , και όλες οι νόρμες διανύσματος ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\|x\| \geq 0 \quad \text{η ισότητα ισχύει αν-ν } x=0$$

$$\|cx\| = |c|\|x\| \quad \text{για έναν αυθαίρετο αριθμό } c$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Οι παρακάτω νόρμες διανύσματος είναι συχνά χρησιμοποιήσιμες:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x^T x}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$$

Η νόρμα  $\|x\|_2$  είναι η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος  $x$ . Αυτή η νόρμα είναι αναλλοίωτη κάτω από ορθογώνιους μετασχηματισμούς, και αν  $Q$  είναι ένας ορθογώνιος πίνακας ( $Q^T Q = I_n$ ) τότε:

$$\|Qx\|_2^2 = x^T Q^T Q x = x^T x = \|x\|_2^2$$

Παρόμοια, η νόρμα ενός πραγματικού  $m \times n$  πίνακα  $A$  συμβολίζεται ως  $\|A\|$  και όλες οι νόρμες πίνακα ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\|A\| \geq 0 \text{ με την ισότητα να ισχύει αν-ν } A=0$$

$$\|cA\| = |c|\|A\| \text{ για έναν αυθαίρετο αριθμό } c$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

Οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες νόρμες πίνακα είναι οι Frobenius νόρμες.

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

και οι  $p$ -νόρμες ( $p = 1, 2, \dots, \infty$ )

$$\|A\|_p = \max \left\{ \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} : x \neq 0 \right\}$$

Όλες αυτές οι νόρμες ικανοποιούν την ανισότητα:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad (2.4)$$

Μπορεί να δειχθεί ότι:

$$\|A\|_1 = \max \left\{ \sum_{i=1}^m |a_{ij}| : j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

$$\|A\|_{\infty} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| : i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

Η νόρμα  $\|A\|_2$  μερικές φορές καλείται φασματική νόρμα.

Η νόρμα πίνακα που ικανοποιεί την σχέση (2.4) είναι υποδεέστερη απ' την αντίστοιχη νόρμα διανύσματος. Αντίθετα, η Frobenius νόρμα δεν είναι υποδεέστερη από καμία νόρμα διανύσματος.

Σύμφωνα με την σχέση (2.4) η νόρμα διανύσματος και η υποδεέστερη νόρμα πίνακα ικανοποιούν:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad (2.5)$$

Κάθε νόρμα πίνακα και διανύσματος για την οποία ισχύει η (2.5) καλείται σταθερή. Η Frobenius νόρμα είναι σταθερή με την 2-νόρμα διανύσματος, δηλαδή:

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$$

Είναι φανερό ότι αν ένα  $n$ -διάνυσμα  $x$  θεωρηθεί σαν ένας  $n \times 1$  πίνακας, τότε

$$\|x\|_2 = \|x\|_F.$$

## 2.3 Γραμμικά συστήματα ελέγχου

### 2.3.1 Περιγραφή (χώρου καταστάσεων) state space συστημάτων ελέγχου σε συνεχή χρόνο.

Ένα γραμμικό σύστημα ελέγχου συνεχούς αναλλοίωτου χρόνου περιγράφεται από ένα σύνολο διαφορικών και αλγεβρικών εξισώσεων γραμμικές με μορφή διανύσματος-πίνακα:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.6)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.7)$$

όπου  $x(t)$  είναι ένα  $n$ -διάνυσμα καταστάσεων,  $u(t)$  είναι ένα  $m$ -διάνυσμα εισόδων (ελέγχων) και  $y(t)$  είναι ένα  $r$ -διάνυσμα εξόδων. Η διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης  $x(t)$ , αναφέρεται ως η τάξη του συστήματος και συνήθως ικανοποιείται ότι:  $m \leq n$ ,  $r \leq n$ . Οι πίνακες  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  έχουν πραγματικά σταθερά στοιχεία και είναι διάστασης  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $r \times n$  και  $r \times m$  αντίστοιχα. Ο πίνακας  $A$  αναφέρεται ως πίνακας κατάστασης, ο  $B$  ως πίνακας (ελέγχου) εισόδου και ο  $C$  ως πίνακας εξόδου.

Η εξίσωση (2.6) αναφέρεται ως εξίσωση κατάστασης και η εξίσωση (2.7) ως εξίσωση εξόδου.

Η κατάσταση  $x_0$  του συστήματος κατά την χρονικά στιγμή  $t_0$ , περιέχει σημαντική πληροφορία, που μαζί με την πληροφορία για την συμπεριφορά της εισόδου στο διάστημα  $(t_0, t)$ , μας επιτρέπει να προβλέψουμε την συμπεριφορά της εξόδου για κάθε  $t \geq t_0$ . Το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  ανήκει σε ένα  $n$ -διάστατο γραμμικό διάνυσμα κατάστασης που αναφέρεται ως χώρος κατάστασης (state space).

Οι εξισώσεις (2.6) και (2.7) είναι γνωστές ως περιγραφή χώρου καταστάσεων ενός γραμμικού συστήματος συνεχούς χρόνου ή ως μοντέλο χώρου καταστάσεων.

Αν  $m=1$  ( $r=1$ ) το σύστημα καλείται μοναδικής εισόδου (μοναδικής εξόδου). Αν  $m>1$  ( $r>1$ ) τότε το σύστημα καλείται πολλαπλών εισόδων (πολλαπλών εξόδων).

Σχηματικά το μοντέλο μπορεί να παρασταθεί:



### 2.3.2 Περιγραφή (χώρου καταστάσεων) state space συστημάτων ελέγχου σε διακριτό χρόνο.

Ένα σύστημα ελέγχου διακριτού αναλλοίωτου χρόνου μπορεί να παρασταθεί από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.8)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (2.9)$$

Όπως προηγουμένως  $x(k)$  είναι ένα  $n$ -διάστατο διάνυσμα κατάστασης,  $u(k)$  είναι ένα  $m$ -διάστατο διάνυσμα εισόδου και  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  είναι χρονικά αναλλοίωτοι πίνακες, διάστασης  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $r \times n$ ,  $r \times m$  αντίστοιχα.

### 2.3.3 Ιδιόμορφα συστήματα

Το σύστημα που περιγράφεται απ' τις εξισώσεις (2.6), (2.7) είναι ειδική περίπτωση ενός πιο γενικού συστήματος γνωστό ως ιδιόμορφο σύστημα.

Ένα γραμμικό ιδιόμορφο σύστημα συνεχούς χρόνου έχει την μορφή:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.10)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.11)$$

όπου ο πίνακας  $E$  δεν είναι απαραίτητα αντιστρέψιμος.

Αντίστοιχα ένα γραμμικό ιδιόμορφο σύστημα διακριτού χρόνου έχει την μορφή:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.12)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (2.13)$$

### 2.3.4 Ευστάθεια συστήματος συνεχούς χρόνου

Η ευστάθεια ενός συστήματος καθορίζεται με βάση την κατάσταση ισορροπίας.

#### **Ορισμός 2.1**

Η κατάσταση ισορροπίας ενός συστήματος

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.14)$$

είναι το διάνυσμα  $x_e$  που ικανοποιεί:

$$Ax_e = 0$$

Προφανώς,  $x_e = 0$  είναι μια κατάσταση ισορροπίας και είναι η μοναδική κατάσταση ισορροπίας αν-ν ο πίνακας  $A$  είναι ομαλός.

#### **Ορισμός 2.2**

Η κατάσταση ισορροπίας  $x_e$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, αν για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση, το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  προσεγγίζει το  $x_e$  με την αύξηση του χρόνου.

Το σύστημα (2.14) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν-ν η κατάσταση ισορροπίας  $x_e = 0$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Δηλαδή, το σύστημα (2.14) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν-ν  $x(t) \rightarrow 0$  όταν  $t \rightarrow \infty$ .

### Κριτήριο ιδιοτιμών για την ευστάθεια συστήματος συνεχούς χρόνου

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα κριτήριο για την ασυμπτωτική ευστάθεια ενός συστήματος συνεχούς χρόνου.

#### **Θεώρημα 2.1**

Το σύστημα (2.14) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν-ν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.

#### **Ορισμός 2.3**

Ένας πίνακας  $A$  καλείται **ευσταθής** αν όλες οι ιδιοτιμές του  $A$  έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.

Ένας ευσταθής πίνακας είναι επίσης γνωστός στην γλώσσα ελέγχου ως **Hurwitz** πίνακας. Αναλογικά, μια ιδιοτιμή με αρνητικό πραγματικό μέρος καλείται **ευσταθής ιδιοτιμή**.

#### **Ορισμός 2.4**

Έστω  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  οι ιδιοτιμές ενός ευσταθή πίνακα  $A$ . Τότε η απόσταση  $\min\{-\operatorname{Re}(\lambda_i) : i = 1, \dots, n\}$  απ' τον φανταστικό άξονα καλείται **ευσταθής άκρη** του  $A$ .

**Θεώρημα 2.2 (θεώρημα ευστάθειας Lyapunov)**

Το σύστημα :  $\dot{x}(t) = Ax(t)$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν-ν, για κάθε συμμετρικό θετικά ορισμένο πίνακα M, υπάρχει ένας μοναδικά ορισμένος πίνακας X που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$XA + A^T X = -M \quad (2.15)$$

**2.3.5 Ευστάθεια συστήματος διακριτού χρόνου**

Θεωρούμε το σύστημα διακριτού χρόνου:

$$x_{k+1} = Ax_k \quad (2.16) \quad \text{με αρχική τιμή } x_0.$$

**Θεώρημα 2.3**

Το σύστημα (2.16) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν-ν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι μέσα σε μοναδιαίο κύκλο.

**Ορισμός 2.5**

Ένας πίνακας A που έχει όλες τις ιδιοτιμές του μέσα σε μοναδιαίο κύκλο, καλείται **διακριτός ευσταθής πίνακας**, ή συγκλίνων πίνακας ή **Schur** πίνακας.

**Θεώρημα 2.4 (θεώρημα ευστάθειας διακριτού χρόνου Lyapunov)**

Το σύστημα διακριτού χρόνου (2.16) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν-ν, για κάθε θετικά ορισμένο πίνακα M, υπάρχει ένας μοναδικά ορισμένος πίνακας X που ικανοποιεί την διακριτή εξίσωση Lyapunov:

$$X - A^T X A = M \quad (2.17)$$



Ένα σύστημα είναι σε **αρρωστημένη κατάσταση** όταν είναι πολύ δύσκολο ή σχεδόν αδύνατο να βρεθεί λύση. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως και στην **αριθμητική αστάθεια** υπολογιστικών μεθόδων που έχουμε μεγάλη αύξηση σφάλματος, λαμβάνουμε μη-ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Ο **ευσταθής αλγόριθμος** παρέχει ικανοποιητικά αποτελέσματα και δίνει ειδοποίηση όταν εισάγονται μεγάλα σφάλματα.

## 2.4 Ελεγχιμότητα και Παρατηρησιμότητα

### 2.4.1 Ελεγχιμότητα συστήματος συνεχούς χρόνου

#### Ορισμός 2.6

Το σύστημα:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.18)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

λέγεται ότι είναι ελέγξιμο, αν ξεκινώντας από μια αρχική τιμή  $x(0)$ , το σύστημα μπορεί να οδηγηθεί σε μια τελική κατάσταση  $x_1 = x(t_1)$  σε κάποιον τελικό χρόνο  $t_1$ , επιλέγοντας κατάλληλα την μεταβλητή εισόδου  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ .

2.4.2 Ελεγχιμότητα συστήματος διακριτού χρόνου**Ορισμός 2.7**

Το σύστημα διακριτού χρόνου:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (2.19)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

λέγεται ότι είναι ελέγξιμο αν για κάθε δύο καταστάσεις  $x_0$  και  $x_1$ , υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία εισόδων  $\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$ , που μεταφέρει το  $x_0$  στο  $x_1$ , έτσι ώστε  $x(N) = x_1$ .

2.4.3 Παρατηρησιμότητα συστήματος συνεχούς χρόνου**Ορισμός 2.8**

Το σύστημα συνεχούς χρόνου (2.18) λέγεται ότι είναι παρατηρήσιμο εάν υπάρχει  $t_1 > 0$ , έτσι ώστε η αρχική κατάσταση  $x(0)$  να μπορεί να καθορισθεί μοναδικά από την γνώση των  $u(t)$  και  $y(t)$  για κάθε  $t$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ .

2.4.4 Παρατηρησιμότητα συστήματος διακριτού χρόνου**Ορισμός 2.9**

Το σύστημα διακριτού χρόνου (2.19) λέγεται ότι είναι παρατηρήσιμο αν υπάρχει ένας δείκτης  $N$ , έτσι ώστε η αρχική κατάσταση  $x_0$  να μπορεί να καθορισθεί πλήρως από την γνώση των εισόδων  $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$  και των εξόδων  $y_0, y_1, \dots, y_N$ .

2.4.5 Σταθεροποιησιμότητα και Ανιχνευσιμότητα

Ένα σύστημα της μορφής (2.18), (2.19) λέγεται ότι είναι **stabilizable** (σταθεροποιήσιμο) αν-ν μπορούμε να επανατοποθετήσουμε τους θετικούς του πόλους (δηλαδή τις θετικές ιδιοτιμές του πίνακα A) και συνεπώς να το κάνουμε ευσταθή.

Ένα σύστημα της μορφής (2.18), (2.19) λέγεται ότι είναι **detectable** (ανιχνεύσιμο) αν οι μη ευσταθείς του πόλοι είναι παρατηρήσιμοι.

2.5 Στοιχειώδεις Ορθογώνιοι Μετασχηματισμοί

Τα περισσότερα αριθμητικά προβλήματα που σχετίζονται με πίνακες, λύνονται με αναγωγή αυτών των πινάκων σε ειδική μορφή (διαγώνιοι, τριγωνικοί), χρησιμοποιώντας μια ακολουθία στοιχειωδών ορθογώνιων μετασχηματισμών, που εφαρμοζόμενοι διασφαλίζουν την αριθμητική ευστάθεια της αντίστοιχης μεθόδου. Δύο είδη στοιχειωδών ορθογώνιων μετασχηματισμών συνήθως χρησιμοποιούνται, οι επίπεδες περιστροφές (plane rotations) και οι στοιχειώδεις αντανakλάσεις (elementary reflections).

Μια **επίπεδη (ή Givens) περιστροφή** στο (i, j) επίπεδο είναι ένας πίνακας της μορφής:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου:  $p^2 + q^2 = 1$

Η επίπεδη περιστροφή εύκολα εφαρμόζεται σε διάνυσμα. Εάν  $y = Rx$ , τότε το  $y$  διαφέρει απ' το  $x$  μόνο στις  $i$  και  $j$  συνιστώσες οι οποίες δίνονται από:

$$y_i = px_i + qx_j$$

$$y_j = px_j - qx_i$$

Ο κύριος σκοπός της επίπεδης περιστροφής είναι να εισάγει το μηδέν σ' ένα μοναδικό στοιχείο διανύσματος ή πίνακα. Εάν  $a$  είναι ένα δοσμένο διάνυσμα, είναι δυνατόν να κατασκευαστεί μια επίπεδη περιστροφή που μηδενίζει την  $j$  συνιστώσα του  $a$ . Πράγματι δηλώνοντας  $b = Ra$  και θέτοντας:

$$p = \frac{a_i}{\sqrt{(a_i^2 + a_j^2)}}, \quad q = \frac{a_j}{\sqrt{(a_i^2 + a_j^2)}}$$

τότε  $p^2 + q^2 = 1$  και

$$b_i = \sqrt{(a_i^2 + a_j^2)}$$

$$b_j = 0$$

### Παράδειγμα 2.1

Έστω  $a = [6 \ 3 \ -8 \ 2]^T$ . Απαιτείται μηδενισμός του τρίτου στοιχείου του  $a$ . Αυτό μπορεί να γίνει από:

$$R = \begin{bmatrix} p & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου:

$$p = \frac{6}{\sqrt{(6^2 + 8^2)}} = 0.6$$

$$q = \frac{-8}{\sqrt{(6^2 + 8^2)}} = -0.8$$

Άρα  $Ra = [10 \ 3 \ 0 \ 2]^T$ .

Μια ακολουθία από επίπεδες περιστροφές μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή αρκετών μηδενικών σε συγκεκριμένες θέσεις σε διανύσματα ή πίνακες.

Η επίπεδη περιστροφή συνήθως εφαρμόζεται σ' έναν πίνακα προκειμένου να λάβουμε έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό  $RAR^T$ .

$$RA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & \dots & a_{ij} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{i+1,j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

αλλάζει μόνο τις  $i$  και  $(i+1)$  γραμμές του πίνακα  $A$ .

**Αλγόριθμος (αριστερός πολλαπλασιασμός επίπεδης περιστροφής)**

Για  $j=1,2,\dots,n$

θέτουμε  $z=a_{ij}$

$a_{ij} \leftarrow pz+qa_{i+1,j}$

$a_{i+1,j} \leftarrow pa_{i+1,j}-qz$

Μια **στοιχειώδης (ή Householder) αντανάκλαση** είναι ένας πίνακας της μορφής:

$$U = I - \frac{uu^T}{h}$$

όπου  $u$  είναι ένα διάνυσμα και  $h = \frac{1}{2}\|u\|_2^2$

Από αυτόν τον ορισμό προκύπτει ότι ο  $U$  είναι συμμετρικός και ορθογώνιος.

Η στοιχειώδης αντανάκλαση χρησιμοποιείται για να εισάγει ταυτόχρονα αρκετά μηδενικά σ' ένα διάνυσμα ή πίνακα. Για έναν δοσμένο πίνακα  $a$  είναι δυνατόν να βρεθεί μια αντανάκλαση  $U$  έτσι ώστε:

$$Ua = -ge_1 \text{ όπου } e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T.$$

Η σταθερά  $g$  έχει καθοριστεί με πρόσημο απ' το γεγονός ότι  $U$  είναι ορθογώνιος:

$$g = \pm\|a\|_2$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι αν το διάνυσμα  $u$  επιλεγεί ως:

$$u = a + ge_1$$

και αν  $h$  ικανοποιεί την σχέση  $h = \frac{1}{2}\|u\|_2^2$ , τότε  $Ua = -ge_1$ ,  $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$  ευσταθεί.

### **Παράδειγμα 2.2**

Έστω  $a = [2 \quad -6 \quad 5 \quad 4]^T$ . Εάν το πρόσημο στην σχέση  $g = \pm\|a\|_2$  ληφθεί ως θετικό, τότε  $g = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 5^2 + 4^2} = 9$ ,

$$u = a + ge_1 = [2 \quad -6 \quad 5 \quad 4]^T + [9 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T = [11 \quad -6 \quad 5 \quad 4]^T,$$

$$h = \frac{1}{2}(11^2 + (-6)^2 + 5^2 + 4^2) = 99$$

$$uu^T = \begin{bmatrix} 121 & -66 & 55 & 44 \\ -66 & 36 & -30 & -24 \\ 55 & -30 & 25 & 20 \\ 44 & -24 & 20 & 16 \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{99} \begin{bmatrix} -22 & 66 & -55 & -44 \\ 66 & 63 & 30 & 24 \\ -55 & 30 & 74 & -20 \\ -44 & 24 & -20 & 83 \end{bmatrix}$$

$$\text{και } Ua = [-9 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

### 2.6 Ορθογώνια Τριγωνοποίηση-QR Παραγοντοποίηση

Χρησιμοποιώντας μια ακολουθία από στοιχειώδεις ορθογώνιους μετασχηματισμούς, κάθε  $n \times m$  πίνακας μπορεί να αναχθεί σε άνω τριγωνική (εάν  $n \geq m$ ) ή τραπεζοειδή (εάν  $n < m$ ) μορφή. Αυτή η αναγωγή είναι γνωστή ως ορθογώνια τριγωνοποίηση ή Householder αναγωγή. Η ορθογώνια τριγωνοποίηση έχει αρκετές σημαντικές εφαρμογές στην αριθμητική επίλυση των προβλημάτων πινάκων.

Ο αλγόριθμος για ορθογώνια τριγωνοποίηση παράγει στοιχειώδεις αντανάκλασεις  $U_1, U_2, \dots, U_l$  έτσι ώστε το προϊόν  $A_{l+1} = U_l U_{l-1} \dots U_1 A$  να έχει την επιθυμητή άνω τριγωνική (ή τραπεζοειδή) μορφή. Αυτός ο αλγόριθμος είναι ορθογώνια αναλογικός της απαλοιφής Gauss.

Ας θεωρήσουμε ότι  $n > m$ . Αρχικά μια  $n \times n$  στοιχειώδη αντανάκλαση  $U_1$  καθορίζεται έτσι ώστε:

$$U_1 a_1 = [r_{11} \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

όπου  $a_1$  είναι η πρώτη στήλη του πίνακα  $A$ . Όταν αυτή η αντανάκλαση εφαρμοσθεί στον πίνακα  $A$  λαμβάνουμε:

$$A_2 = U_1 A = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_2' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Μια δεύτερη αντανάκλαση  $U_2'$  έχει επιλεγεί να μετασχηματίσει την πρώτη στήλη  $a_2'$  του  $A_2'$  ως:

$$U_2' a_2' = [r_{22} \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

Ο αριστερός πολλαπλασιασμός του  $A_2$  από τον πίνακα:

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{bmatrix}$$

οδηγεί:

$$A_3 = U_2 A_2 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_3' & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

Αυτός ο μετασχηματισμός δεν επηρεάζει την πρώτη στήλη του  $A_2$ .



Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, στο  $m$  βήμα της αναγωγής λαμβάνουμε τον πίνακα:

$$A_{m+1} = U_m A_m = U_m U_{m-1} \dots U_1 A = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & r_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου  $R$  είναι άνω τριγωνικός (σημειώνουμε ότι κάποια απ' τα διαγώνια στοιχεία  $r_{ii}$  μπορεί να είναι ίσα με το μηδέν).

Εάν  $n < m$  η αναγωγή του  $A$  σε άνω τραπεζοειδή μορφή απαιτεί  $n-1$  στοιχειώδεις αντανakλάσεις.

Ας υποθέσουμε ότι ο  $A$  έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες (δηλαδή  $n \geq m$ ). Ορίζοντας τον ορθογώνιο πίνακα  $Q^T = U_m U_{m-1} \dots U_1$ , ο πίνακας  $A_{m+1}$  μπορεί να παρασταθεί ως:

$$A_{m+1} = Q^T A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου  $R$  είναι ένας  $m \times m$  άνω τριγωνικός πίνακας. Εάν ο  $Q$  διαμεριστεί ως  $Q = [Q_1 \quad Q_2]$  όπου  $Q_1$  έχει  $m$  στήλες, τότε:

$$A = Q A_{m+1} = [Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R$$

Η παραπάνω σχέση στην οποία  $Q_1$  έχει ορθογώνιες στήλες και  $R$  είναι άνω τριγωνικός, καλείται QR παραγοντοποίηση του  $A$ .

Ο πίνακας  $R$  λαμβάνεται ρητά από την ορθογώνια τριγωνοποίηση. Ο πίνακας  $Q$  μπορεί να υπολογισθεί ως οι πρώτες  $m$  στήλες του προϊόντος:

$$Q = U_1 U_2 \dots U_m$$

Πρέπει να σημειωθεί ωστόσο, ότι στις περισσότερες εφαρμογές ο πίνακας  $Q$  ή  $Q_1$  δεν απαιτείται σε ρητή μορφή και είναι αρκετό να γνωρίζουμε την παραγοντοποιημένη μορφή  $Q = U_1 U_2 \dots U_m$ .

### Παράδειγμα 2.3 (QR παραγοντοποίηση)

Έστω:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$a = [2 \ 3 \ 1]^T, \quad u = a + g e_1$$

$$g = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = 3.742 \text{ και } e_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$$

$$u = [2 \ 3 \ 1]^T + [3.742 \ 0 \ 0]^T = [5.742 \ 3 \ 1]^T$$

$$h = \frac{1}{2}(5.742^2 + 3^2 + 1^2) \cong 21.486$$

$$uu^T = \begin{bmatrix} 32.971 & 17.226 & 5.742 \\ 17.226 & 9 & 3 \\ 5.742 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$U_1 = \begin{bmatrix} -0.534 & -0.802 & -0.267 \\ -0.802 & 0.581 & -0.139 \\ -0.267 & -0.139 & 0.953 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = U_1 A_1 = \begin{bmatrix} -3.741 & 1.067 & 0.535 \\ 0 & 3.126 & 0.36 \\ 0 & -0.291 & -1.081 \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$A_2' = \begin{bmatrix} 3.126 & 0.36 \\ -0.291 & -1.081 \end{bmatrix}$$

Άρα  $a = [3.126 \quad -0.291]^T$  είναι το διάνυσμα της πρώτης στήλης του πίνακα  $A_2'$ .

$$g = \sqrt{3.126^2 + (-0.291)^2} \cong 3.14$$

$$u = [3.126 \quad -0.291]^T + [3.14 \quad 0]^T = [6.266 \quad -0.291]^T$$

$$h = \frac{1}{2}(6.266^2 + (-0.291)^2) \cong 19.674$$

$$uu^T = \begin{bmatrix} 39.263 & -1.8234 \\ -1.8234 & 0.0847 \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$U_2' = \begin{bmatrix} -0.996 & 0.0926 \\ 0.0926 & 0.996 \end{bmatrix} \text{ και } U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.996 & 0.0926 \\ 0 & 0.0926 & 0.996 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = U_2 A_2 = \begin{bmatrix} -3.741 & 1.067 & 0.535 \\ 0 & -1.0897 & -0.459 \\ 0 & 0 & -1.043 \end{bmatrix} = R$$

Δηλαδή:

$$U_2 U_1 A = R \quad (U_2 U_1 = Q^T \text{ και επειδή είναι στοιχειώδη αντανάκλαση } Q^T = Q^{-1})$$

$$\text{Άρα } A = (U_2 U_1)^{-1} R \Rightarrow A = QR$$

### 3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ RICCATI

Το κύριο υπολογιστικό πρόβλημα που προκύπτει κατά τον τετραγωνισμό βελτιστοποίησης γραμμικών συστημάτων ελέγχου, είναι η λύση των αντίστοιχων εξισώσεων Riccati με μορφή πίνακα. Επειδή η αναλυτική λύση αυτής της εξίσωσης είναι δυνατή μόνο σε περιορισμένες περιπτώσεις, είναι γενικά απαραίτητο να εφαρμόσουμε κάποια αριθμητική μέθοδο. Θα παρουσιάσουμε έξι μεθόδους για την επίλυση των εξισώσεων Riccati και θα μελετήσουμε τις αριθμητικές τους ιδιότητες. Αρχικά θα μελετήσουμε την ευαισθησία της λύσης των εξισώσεων Riccati σε διαταραχές των δεδομένων.

#### Μετατροπές εξισώσεων Riccati με μορφή πίνακα

Ας θεωρήσουμε την συνεχή αλγεβρική εξίσωση Riccati με μορφή πίνακα:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

που προκύπτει απ' τον τετραγωνισμό βελτιστοποίησης γραμμικών συστημάτων ελέγχου.

Για ευκολία θα γράφουμε αυτήν την εξίσωση στην μορφή:

$$A^T P + PA + Q - PSP = 0 \quad (3.1)$$

όπου  $S = BR^{-1}B^T$

Όταν η εξίσωση (3.1) λυθεί στον υπολογιστή, το αποτέλεσμα  $\bar{P}$  θα ικανοποιεί την διαταραγμένη εξίσωση:

$$(A + E)^T \bar{P} + \bar{P}(A + E) + Q + F - \bar{P}(S + G)\bar{P} = 0 \quad (3.2)$$

όπου  $E$ ,  $F$ ,  $G$  είναι πίνακες που έχουν υποστεί μικρή ‘διαταραχή’. Εάν χρησιμοποιήσουμε μια αριθμητικά σταθερή μέθοδο για την λύση της εξίσωσης (3.1), το καλύτερο που μπορούμε να περιμένουμε είναι αυτοί οι πίνακες να ικανοποιούν τις συνθήκες :

$$\|E\| \leq \varepsilon \|A\|, \|F\| \leq \varepsilon \|Q\|, \|G\| \leq \varepsilon \|S\| \quad (3.3)$$

όπου  $\varepsilon$  είναι η σχετική ακρίβεια του υπολογιστή που χρησιμοποιήσαμε. Σε μερικές περιπτώσεις, μικρές διαταραχές μπορεί να προκαλέσουν μεγάλη αλλαγή στην εξίσωση, δηλαδή η εξίσωση Riccati μπορεί να είναι πολύ ευαίσθητη σε διαταραχές των δεδομένων. Σε αυτές τις περιπτώσεις η λύση έχει μεγάλα σφάλματα ακόμα και αν χρησιμοποιηθεί μια αριθμητικά ευσταθής μέθοδος. Παρατηρούμε ότι η ευαισθησία είναι εγγενής στο συγκεκριμένο πρόβλημα και δεν εξαρτάται ούτε απ’ την μέθοδο επίλυσης, ούτε απ’ την αριθμητική μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε.

### Παράδειγμα 3.1

Έστω:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 305.63 & 300.21 & -5.21 \\ 300.21 & 300.07 & -0.07 \\ -5.21 & -0.07 & 5.07 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 101.01 & -101.02 & 102.01 \\ -101.02 & 101.04 & -102.02 \\ 102.01 & -102.02 & 104.01 \end{bmatrix}$$

Η ακριβής λύση της εξίσωσης (3.1) γι’ αυτούς τους πίνακες είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 101.09 & 100.03 & -1.03 \\ 100.03 & 100.01 & -0.01 \\ -1.03 & -0.01 & 1.01 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι ο πίνακας  $S$  διαταράσσεται από

$$G = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.02 & 0.01 \\ -0.02 & 0.04 & -0.02 \\ 0.01 & -0.02 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Η λύση της διαταραγμένης εξίσωσης (3.2) είναι (μέχρι 5 ψηφία)

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 83.378 & 82.318 & -1.0300 \\ 82.318 & 82.298 & -0.0100 \\ -1.0300 & -0.0100 & 1.0100 \end{bmatrix}$$

Έτσι μια σχετική διαταραχή

$$\frac{\|G\|_F}{\|S\|_F} = 1.9646 \times 10^{-4}$$

στον πίνακα  $S$  οδηγεί σε μια σχετική διαταραχή στη λύση ίση με:

$$\frac{\|\bar{P} - P\|_F}{\|P\|_F} = 0.17660$$

δηλαδή η αλλαγή στην λύση είναι μεγαλύτερη κατά  $10^3$  φορές από την αλλαγή στα δεδομένα.

Η ευαισθησία της εξίσωσης Riccati (3.1) μπορεί να υπολογισθεί με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω  $\Delta P = \bar{P} - P$ . Αφαιρώντας την σχέση (3.1) απ' την σχέση (3.2) και παραλείποντας τους όρους με μεγαλύτερη τάξη στο  $\Delta P$  λαμβάνουμε:

$$(A - SP)^T \Delta P + \Delta P(A - SP) + E^T P + PE + F - PGP = 0 \quad (3.4)$$

Η εξίσωση (3.4) είναι η εξίσωση Lyapunov με αναφορά στην διαταραχή  $\Delta P$ . Παρατηρούμε ότι ο πίνακας  $A-SP$ , είναι το κλειστό κύκλωμα του πίνακα  $A-BK$ ,  $K = R^{-1}B^T P$ . Εφαρμόζοντας την ίδια τεχνική που εφάρμοσε ο Konstantinon στην ανάλυση της διαταραχής για την εξίσωση Sylvester λαμβάνουμε ότι:

$$\frac{\|\Delta P\|_F}{\|P\|_F} \leq \frac{2\|E\|_F + \frac{\|F\|_F}{\|P\|_F} + \|G\|_F \|P\|_F}{sep[(A - SP)^T, -(A - SP)]} \quad (3.5)$$

όπου:

$$sep[(A - SP)^T, -(A - SP)] = \min \frac{\|(A - SP)^T X + X(A - SP)\|_F}{\|X\|_F}$$

είναι ο διαχωρισμός μεταξύ των πινάκων  $(A - SP)^T$  και  $-(A - SP)$ .

Η σχέση (3.5) φανερώνει ότι η εξίσωση Riccati μπορεί να είναι πολύ ευαίσθητη, αν η νόρμα της λύσης είναι πολύ μικρή ή πολύ μεγάλη, ή / και ο διαχωρισμός μεταξύ των πινάκων  $(A - SP)^T$  και  $-(A - SP)$  είναι πολύ μικρός.

Η ποσότητα  $sep[(A - SP)^T, -(A - SP)]$  μπορεί να υπολογισθεί ως η μικρότερη απλή ιδιοτιμή του πίνακα:

$$I_n \otimes (A - SP)^T + (A - SP)^T \otimes I_n$$

Αν οι διαταραγμένοι πίνακες  $E, F, G$  ικανοποιούν την εξίσωση (3.3), τότε έχουμε ότι:



$$\frac{\|\Delta P\|_F}{\|P\|_F} \leq \varepsilon \frac{2\|A\|_F + \frac{\|Q\|_F}{\|P\|_F} + \|S\|_F \|P\|_F}{\text{sep}[(A - SP)^T, -(A - SP)]} \quad (3.6)$$

Αυτή η ανισότητα φανερώνει ότι η σχετική διαταραχή της λύσης μπορεί να είναι  $c_R$  φορές μεγαλύτερη απ' την διαταραχή των δεδομένων, όπου:

$$c_R = \frac{2\|A\|_F + \frac{\|Q\|_F}{\|P\|_F} + \|S\|_F \|P\|_F}{\text{sep}[(A - SP)^T, -(A - SP)]}$$

και θα το αναφέρουμε ως αριθμό κατάστασης της εξίσωσης Riccati (3.1). Για την εξίσωση του παραδείγματος (3.1),  $c_R = 5.5351 \times 10^4$ , που φανερώνει ότι η εξίσωση είναι πολύ ευαίσθητη στις διαταραχές. Στην συγκεκριμένη περίπτωση αυτό συμβαίνει γιατί οι νόρμες των πινάκων P και S είναι μεγάλες ενώ και

$$\text{sep}[(A - SP)^T, -(A - SP)] = 1.1072$$

είναι σχετικά μεγάλο.

Πρέπει να τονισθεί ότι σε ορισμένες περιπτώσεις  $\text{sep}[(A - SP)^T, -(A - SP)]$  μπορεί να είναι εξαιρετικά μικρό, οπότε η αντίστοιχη εξίσωση Riccati είναι σε πολύ αρρωστημένη κατάσταση.

Ας θεωρήσουμε τώρα την διακριτή εξίσωση Riccati:

$$A^T P A - P + Q - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A = 0$$

Για ευκολία θα παρουσιάσουμε αυτήν την εξίσωση με την μορφή:

$$Q - P + A^T P (I_n + SP)^{-1} A = 0 \quad (3.7)$$

όπου  $S = BR^{-1}B^T$ . Η διαταραγμένη εξίσωση είναι τότε:

$$Q + F - (P + \Delta P) + (A + E)^T (P + \Delta P) [I_n + (S + G)(P + \Delta P)]^{-1} (A + E) = 0$$

Μια ανάλυση, παρόμοια με την περίπτωση του συνεχή χρόνου οδηγεί:

$$\frac{\|\Delta P\|_F}{\|P\|_F} \leq \frac{2\|A\|_F \|E\|_F + \frac{\|F\|_F}{\|P\|_F} + \|A\|_F^2 \|G\|_F \|P\|_F}{sep_d(A^T, A_C)}$$

όπου:

$$sep_d(A_C^T, A_C) = \min \frac{\|A_C^T X A_C - X\|_F}{\|X\|_F}$$

$$\text{και } A_C = (I_n + SP)^{-1} A = A - B(R + B^T P B)^{-1} B^T P A.$$

Η ποσότητα  $sep_d(A_C^T, A_C)$  μπορεί να υπολογισθεί ως η μικρότερη απλή ιδιοτιμή του πίνακα:

$$A_C^T \otimes A_C^T - I_{n^2}.$$

Για ε διαταραχές των πινάκων A, Q και S έχουμε ότι:

$$\frac{\|\Delta P\|_F}{\|P\|_F} \leq \varepsilon \frac{2\|A\|_F \|E\|_F + \frac{\|F\|_F}{\|P\|_F} + \|A\|_F^2 \|G\|_F \|P\|_F}{sep_d(A^T, A_C)}$$

Η ποσότητα

$$d_R = \frac{2\|A\|_F \|E\|_F + \frac{\|F\|_F}{\|P\|_F} + \|A\|_F^2 \|G\|_F \|P\|_F}{sep_d(A^T C, A_C)}$$

ονομάζεται αριθμός κατάστασης της διακριτής εξίσωσης Riccati.

### **Παράδειγμα 3.2**

Έστω:

$$A = \begin{bmatrix} 0.76 & 0.14 & -0.38 \\ 0.42 & 0.12 & 0.46 \\ 0.06 & 0.34 & 0.72 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0.11 & -0.10 & 0.11 \\ -0.10 & 0.15 & -0.15 \\ 0.11 & -0.15 & 0.16 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1.401 & -2.201 & 1.199 \\ -2.201 & 4.101 & -2.099 \\ 1.199 & -2.099 & 1.101 \end{bmatrix}$$

Η λύση της εξίσωσης (3.7) είναι (μέχρι 5 ψηφία):

$$P = \begin{bmatrix} 0.43925 & -0.32517 & -0.65195 \\ -0.32517 & 0.40219 & 0.58527 \\ -0.65195 & 0.58527 & 2.3927 \end{bmatrix}$$

Αν ο πίνακας S διαταραχτεί από:

$$G = \begin{bmatrix} -0.0005 & 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0005 & -0.0005 & -0.0005 \\ 0.0005 & -0.0005 & -0.0005 \end{bmatrix}$$

τότε η λύση είναι:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0.54327 & -0.42911 & -0.96385 \\ -0.42911 & 0.50506 & 0.89695 \\ -0.96385 & 0.89695 & 3.3279 \end{bmatrix}$$

Με αυτόν τον τρόπο μια σχετική διαταραχή

$$\frac{\|G\|_F}{\|S\|_F} = 2.3321 \times 10^{-4}$$

στον πίνακα  $S$  προκαλεί αλλαγή στην λύση ίση με:

$$\frac{\|\Delta P\|_F}{\|P\|_F} = 0.40861$$

δηλαδή οι αλλαγές στα δεδομένα μεγαθύνουν περίπου 1750 φορές την λύση. Στην συγκεκριμένη περίπτωση:

$$sep_d(A_C^T, A_C) = 1.1265 \times 10^{-2}$$

$$\text{και } d_R = 3.1743 \times 10^3$$

### 3.1 Μέθοδος Newton

Η μέθοδος Newton είναι μια επαναληπτική μέθοδος για την εύρεση μιας ρίζας της μη-γραμμικής εξίσωσης  $f(x) = 0$ . Εφαρμοζόμενη στην εξίσωση Riccati με μορφή πίνακα, αυτή η μέθοδος παράγει μια ακολουθία πινάκων, που κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες προσεγγίζει την θετικά (ημιθετικά) ορισμένη λύση της εξίσωσης. Εδώ θα δούμε την εφαρμογή της μεθόδου Newton για την επίλυση συνεχών και διακριτών εξισώσεων Riccati.

Ας θεωρήσουμε την συνεχούς χρόνου εξίσωση Riccati:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (3.9)$$

όπου το ζεύγος  $(A, B)$  είναι σταθεροποιήσιμο (stabilizable) και το ζεύγος  $(C, A)$  ( $C^T C = Q, \text{rank}(C) = \text{rank}(Q)$ ) είναι ανιχνεύσιμο (detectable). Η μοναδική θετικά ημιορισμένη λύση  $P$  της εξίσωσης (3.9), μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας το ακόλουθο θεώρημα:

#### **Θεώρημα 3.1**

Έστω  $P_k, k = 0, 1, \dots$  είναι η (μοναδική) θετικά ημιορισμένη λύση της γραμμικής εξίσωσης:

$$A_k^T P_k + P_k A_k + Q + K_k^T R K_k = 0 \quad (3.10)$$

όπου:

$$K_k = R^{-1} B^T P_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$A_k = A - B K_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

και όπου  $K_0$ , έχει επιλεγεί ώστε ο πίνακας  $A - BK_0$  να έχει ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη. Τότε:

$$1) 0 \leq P \leq P_{k+1} \leq P_k \leq \dots \leq P_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$2) \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P$$

Με την απόδειξη αυτού του θεωρήματος ασχολήθηκαν οι Kleinman (1968), Sandell (1974) και Wonhan (1986).

Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάτω απ' τις συνθήκες του θεωρήματος (3.1), η σύγκλιση της ακολουθίας  $P_0, P_1, \dots$  σε  $P$  είναι τετραγωνική, δηλαδή

$$\|P_{k+1} - P\| \leq c_1 \|P_k - P\|^2$$

για κάποια σταθερά  $c_1$  και για όλα τα  $k$ . Αυτό εγγυάται γρήγορη σύγκλιση του  $P_k$  σε  $P$  σε μια γειτονιά του  $P$ .

Καθώς το ζεύγος  $(A, B)$  είναι σταθεροποιήσιμο, είναι πάντοτε δυνατό να βρεθεί ένας πίνακας  $K_0$  για τον οποίο  $A - BK_0$  να είναι ευσταθής πίνακας. Αυτό είναι απαραίτητο γιατί αν ο πίνακας  $A - BK_0$  δεν είναι ευσταθής, τότε η επανάληψη μπορεί να συγκλίνει σε μια μη-σταθεροποιητική λύση της εξίσωσης (3.9) ή μπορεί να αποκλίνει. Ο καθορισμός του  $K_0$  μπορεί να γίνει από κάποιους ευσταθείς αλγόριθμους. Η χρησιμοποίηση της μεθόδου προσδιορισμού πόλου είναι επίσης δυνατή. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι διαφορετικές επιλογές του  $K_0$  μπορεί να χρειαστούν ουσιαστικά διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού για την ακρίβεια της λύσης. Αν ο αρχικός πίνακας επιλεγεί έτσι ώστε ο  $P_0$  να είναι μακριά απ' τον  $P$  ( $\|P_0 - P\|/\|P\|$  είναι μεγάλο), τότε η σύγκλιση μπορεί να είναι πολύ αργή.

Αυτή η μέθοδος απαιτεί σε κάθε βήμα την λύση της εξίσωσης Lyapunov (3.10). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αποτελεσματικά με τον αλγόριθμο των Bartels-Stewart που μας επιτρέπει να βρούμε τις ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος πίνακα  $A - BR^{-1}B^T P$ .

Ας θεωρήσουμε τις αριθμητικές ιδιότητες της μεθόδου Newton. Έστω  $\bar{P}_k$  είναι η προσεγγιστική λύση στο  $k$  βήμα της επανάληψης, από μια αριθμητικά σταθερή μέθοδο για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov. Έχουμε ότι:

$$\frac{\|\bar{P}_k - P_k\|_F}{\|P_k\|_F} \leq \varepsilon \frac{2\|A_k\|_F + \frac{\|Q_k\|_F}{\|P_k\|_F}}{\text{sep}(A_k^T, -A_k)}$$

Στην γειτονιά της λύσης πληρείται ότι:

$$\frac{\|\bar{P}_k - P_k\|_F}{\|P_k\|_F} \leq \varepsilon c_R$$

$$\text{όπου } c_R = \frac{2\|A\|_F + \frac{\|Q\|_F}{\|P\|_F} + \|BR^{-1}B^T\|_F \|P\|_F}{\text{sep}[(A - BR^{-1}B^T P)^T, -(A - BR^{-1}B^T P)]}$$

είναι ο αριθμός κατάστασης της συνεχούς εξίσωσης Riccati. Εφεξής η μέθοδος Newton θα συνεχίσει να προσεγγίζει την λύση μέχρις όσπου το μέγεθος του  $\|P_k - P_{k-1}\|_F / \|P_{k-1}\|_F$  να ελαττωθεί στο μέγεθος του  $\varepsilon c_R$ . Περισσότερες εφαρμογές της επανάληψης είναι περιττές, αφού τα σφάλματα στρογγυλοποίησης θα αποτρέπουν την βελτίωση της ακρίβειας της λύσης. Έτσι η προσεγγιστική λύση  $\bar{P}$  της εξίσωσης Riccati θα ικανοποιεί:

$$\frac{\|\bar{P} - P\|_F}{\|P\|_F} \leq \varepsilon c_R$$

Συγκρίνοντας αυτό το αποτέλεσμα με την σχέση (3.6), αποδεικνύεται ότι η μέθοδος Newton είναι μια αριθμητικά σταθερή μέθοδος για την λύση της εξίσωσης Riccati.

### **Παράδειγμα 3.3**

Έστω:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -5 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 95 & 106 & -54 \\ 106 & 258 & 44 \\ -54 & 44 & 109 \end{bmatrix} \quad R = I_2$$

Η ακριβής λύση της εξίσωσης (3.9) είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Η μέθοδος Newton λειτουργεί χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Bartels-Stewart με αριθμητική ακρίβεια  $\varepsilon = 2^{-56} \approx 1,39 \times 10^{-17}$ . Η συμπεριφορά του σχετικού

σφάλματος  $\frac{\|P_k - P\|_F}{\|P\|_F}$

σε κάθε βήμα για τρεις διαφορετικούς αρχικούς πίνακες  $K_0$  είναι:

1.  $K_0 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$



$$2. K_0 = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 26 \\ -8 & -9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$3. K_0 = \begin{bmatrix} -107 & -17 & -10 \\ -198 & -31 & -19 \end{bmatrix}$$

k	$\ P_k - P\ _F / \ P\ _F$		
	1 <sup>st</sup> guess	2 <sup>nd</sup> guess	3 <sup>rd</sup> guess
0	$0.957 \times 10^0$	$0.604 \times 10^1$	$0.190 \times 10^3$
1	$0.155 \times 10^0$	$0.337 \times 10^1$	$0.103 \times 10^3$
2	$0.751 \times 10^{-2}$	$0.115 \times 10^1$	$0.619 \times 10^2$
3	$0.466 \times 10^{-4}$	$0.215 \times 10^0$	$0.422 \times 10^2$
4	$0.187 \times 10^{-8}$	$0.111 \times 10^{-1}$	$0.329 \times 10^2$
5	$0.127 \times 10^{-15}$	$0.320 \times 10^{-4}$	$0.280 \times 10^2$
6	$0.288 \times 10^{-15}$	$0.267 \times 10^{-9}$	$0.239 \times 10^2$
7	$0.647 \times 10^{-15}$	$0.243 \times 10^{-15}$	$0.176 \times 10^2$
8	$0.363 \times 10^{-15}$	$0.112 \times 10^{-15}$	$0.845 \times 10^1$
9	$0.212 \times 10^{-15}$	$0.324 \times 10^{-15}$	$0.279 \times 10^1$
10	$0.235 \times 10^{-15}$	$0.473 \times 10^{-15}$	$0.804 \times 10^0$
11	$0.232 \times 10^{-15}$	$0.278 \times 10^{-15}$	$0.119 \times 10^0$
12	$0.150 \times 10^{-15}$	$0.164 \times 10^{-15}$	$0.349 \times 10^{-2}$
13	$0.828 \times 10^{-16}$	$0.107 \times 10^{-15}$	$0.317 \times 10^{-5}$
14	$0.421 \times 10^{-15}$	$0.212 \times 10^{-15}$	$0.264 \times 10^{-11}$
15	$0.252 \times 10^{-15}$	$0.196 \times 10^{-15}$	$0.274 \times 10^{-15}$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση  $c_R \cong 356.7$  και  $\varepsilon c_R \cong 4.95 \times 10^{-15}$

Η σχέση 
$$\frac{\|P_k - P_{k-1}\|_F}{\|P_{k-1}\|_F} \leq \varepsilon c_R$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν κριτήριο τερματισμού της μεθόδου Newton. Σαν μια προσέγγιση της ακριβής λύσης  $P$  στον υπολογισμό του  $c_R$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα  $P_k$ . Ο υπολογισμός της προσέγγισης του  $\text{sep}[(A - BR^{-1}B^T P)^T, -(A - BR^{-1}B^T P)]$  μπορεί να πραγματοποιηθεί με τον αλγόριθμο του Byers, εκμεταλλευόμενος το γεγονός ότι ο πίνακας  $A_k$  παράγεται απ' την Schur

μορφή στον αλγόριθμο των Bartels-Stewart. Με αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο.

### Αλγόριθμος 3.1

Επίλυση της συνεχούς εξίσωσης Riccati με μορφή πίνακα, με την μέθοδο Newton

Επιλέγουμε  $K_0$ , έτσι ώστε ο πίνακας  $A - BK_0$  να είναι ευσταθής.

Για  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{θέτουμε } A_k = A - BK_k$$

$$Q_k = Q + K_k^T R K_k$$

λύνουμε την  $A_k^T P_k + P_k A_k + Q_k = 0$  ως προς  $P_k$

υπολογίζουμε  $K_{k+1} = R^{-1} B^T P_k$

$$\text{και ορίζουμε } c_R = \frac{2\|A\|_F + \frac{\|Q\|_F}{\|P_k\|_F} + \|BR^{-1}B^T\|_F \|P_k\|_F}{\text{sep}[(A - BK_{k+1})^T, -(A - BK_{k+1})]}$$

$$\text{Αν } \frac{\|P_k - P_{k-1}\|_F}{\|P_{k-1}\|_F} \leq \varepsilon_R \text{ stop}$$

Αν η λύση της εξίσωσης Lyapunov  $A_k^T P_k + P_k A_k + Q_k = 0$  πραγματοποιηθεί με τον αλγόριθμο των Bartels-Stewart, τότε ο αλγόριθμος (3.1) χρειάζεται  $20n^3$  flops σε κάθε βήμα. Έτσι σε μια τυπική περίπτωση που απαιτούνται 10 επαναλήψεις, θα χρειαστούν  $200n^3$  flops, που είναι πολύ ακριβός. Η απαιτούμενη αποθήκευση είναι ανάλογη του  $10n^2$ . Η μέθοδος Newton μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί η θετικά ημιορισμένη λύση P της διακριτής εξίσωσης Riccati με μορφή πίνακα:

$$A^T P A - P + Q - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A = 0 \quad (3.11)$$

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 3.2**

Έστω  $P_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  είναι η λύση της εξίσωσης Lyapunov:

$$A_k^T P_k A_k - P_k + Q + K_k^T R K_k = 0 \quad (3.12)$$

όπου

$$K_k = (R + B^T P_{k-1} B)^{-1} B^T P_{k-1} A \quad k = 1, 2, \dots$$

$$A_k = A - B K_k \quad k = 0, 1, \dots$$

και ο  $K_0$  επιλέγεται έτσι ώστε ο  $A_0$  να είναι ευσταθής πίνακας. Τότε:

$$P \leq P_{k+1} \leq P_k \leq \dots \leq P_0, \quad k = 0, 1, \dots$$

και

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P$$

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος δόθηκε απ' τον Hewer το 1971.

Οι επαναλήψεις στο παραπάνω θεώρημα συγκλίνουν τετραγωνικά, δηλαδή:

$$\|P_{k+1} - P\| \leq c_2 \|P_k - P\|^2$$

όπου  $c_2$  είναι σταθερά, ανεξάρτητη του δείκτη  $k$ . Οι επαναλήψεις πραγματοποιούνται μέχρις ότου ικανοποιηθεί το ακόλουθο:

$$\frac{\|P_k - P_{k-1}\|_F}{\|P_{k-1}\|_F} \leq \varepsilon d_R$$

όπου:

$$d_R = \frac{2\|A\|_F^2 + \frac{\|Q\|_F}{\|P\|_F} + \|A\|_F^2 \|BR^{-1}B^T\|_F \|P\|_F}{sep_d(A_c^T, A_c)}$$

$$(A_c = A - B(R + B^T P B)^{-1} B^T P A)$$

είναι ο αριθμός κατάστασης της διακριτής εξίσωσης Riccati (3.11) και  $sep(A_c^T, A_c)$  είναι η ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα  $A_c^T \otimes A_c - I_{n^2}$ .

Αυτές οι μελέτες συνοψίζονται στον ακόλουθο αλγόριθμο:

### Αλγόριθμος 3.2

Επίλυση της διακριτής εξίσωσης Riccati με μορφή πίνακα, με την μέθοδο Newton.

Επιλέγουμε  $K_0$ , έτσι ώστε  $A - BK_0$  να είναι ευσταθής πίνακας.

Για  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{θέτουμε } A_k = A - BK_k$$

$$Q_k = Q + K_k^T R K_k$$

$$\text{λύνουμε } A_k^T P_k A_k - P_k + Q_k = 0 \text{ ως προς } P_k$$

$$\text{υπολογίζουμε } K_{k+1} = (R + B^T P_k B)^{-1} B^T P_k A$$

και

ορίζουμε

$$d_R = \frac{2\|A\|_F^2 + \frac{\|Q\|_F}{\|P_k\|_F} + \|A\|_F^2 \|BR^{-1}B^T\|_F \|P_k\|_F}{sep_d[(A - BK_{k+1})^T, (A - BK_{k+1})]}$$

$$\text{Εάν } \frac{\|P_k - P_{k-1}\|_F}{\|P_{k-1}\|_F} \leq \varepsilon d_R, \text{ stop}$$

Ο αλγόριθμος (3.2) απαιτεί περίπου  $20n^3$  flops για κάθε επανάληψη και παράγει μια προσεγγιστική λύση  $\bar{P}$  της διακριτής εξίσωσης Riccati που ικανοποιεί:

$$\frac{\|\bar{P} - P\|_F}{\|P\|_F} \leq \varepsilon d_R$$

### 3.2 Μέθοδος της συνάρτησης του πρόσημου πίνακα

Έστω  $A$  είναι ένας  $n \times n$  πίνακας με Jordan κανονική μορφή:

$$J = X^{-1}AX \equiv D + N$$

όπου  $X$  είναι ένας πίνακας που αποτελείται απ' τις ιδιοδιανύσματα και τα κύρια ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$ ,  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας που δέχεται σαν είσοδο τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ , και  $N$  είναι ένας σχεδόν μηδενικός πίνακας. Ο πίνακας της συνάρτησης πρόσημου του  $A$  ορίζεται ως:

$$\text{Sign}(A) = XYX^{-1}$$

$$\text{όπου } Y = \text{diag}(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad y_i = \begin{cases} 1 & \text{εάν } \text{Re}(d_i) > 0 \\ -1 & \text{εάν } \text{Re}(d_i) < 0 \end{cases}$$

Εάν ο πίνακας  $A$  έχει ιδιοτιμές στον φανταστικό άξονα, τότε  $\text{Sign}(A)$  δεν ορίζεται.

Η συνάρτηση πρόσημου πίνακα είναι μια γενίκευση της βαθμωτής συνάρτησης πρόσημου:

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } \text{Re}(a) > 0 \\ -1 & \text{εάν } \text{Re}(a) < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση του πρόσημου πίνακα  $\text{Sign}(A)$  έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1.  $[\text{Sign}(A)]^2 = I_n$
2.  $\text{Sign}(cA) = \text{Sign}(c)\text{Sign}(A)$
3.  $\text{Sign}(TAT^{-1}) = T\text{Sign}(A)T^{-1}$  (3.16)
4.  $A\text{Sign}(A) = \text{Sign}(A)A$
5. Οι ιδιοτιμές του  $\text{Sign}(A)$  είναι  $\pm 1$

Θεωρούμε την εφαρμογή της συνάρτησης πρόσημου πίνακα στην λύση της συνεχούς εξίσωσης Riccati:

$$A^T P + PA + Q - PSP = 0 \quad (3.17)$$

Ορίζουμε τον Χαμιλτονιανό πίνακα που ανταποκρίνεται στις σχέσεις (3.16) ως:

$$H = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad S = BR^{-1}B^T$$

Ο Χαμιλτονιανός πίνακας μετασχηματίζεται ως εξής:

$$H = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ P & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-SP & -S \\ 0 & -(A-SP)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P & I_n \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Εφόσον οι ιδιοτιμές του  $A-SP$  έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, η συνάρτηση του πρόσημου πίνακα του  $H$  ορίζεται. Εφαρμόζοντας αυτήν την συνάρτηση στην (3.18) και χρησιμοποιώντας την τρίτη ιδιότητα της σχέσης (3.16) λαμβάνουμε:

$$W \equiv \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} = \text{Sign}(H) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ P & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_n & Z \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P & I_n \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

όπου  $W_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$  και  $Z$  είναι  $n \times n$  πίνακες. Χρησιμοποιώντας την τέταρτη ιδιότητα της σχέσης (3.16) βρίσκουμε ότι  $Z$  είναι η λύση της εξίσωσης Lyapunov:

$$(A - SP)Z + Z(A - SP)^T = 2S$$

Απ' την εξίσωση (3.19) προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad MP = -N \quad (3.20)$$

$$\text{όπου } M = \begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} + I_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad N = \begin{bmatrix} W_{11} + I_n \\ W_{21} \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση (3.20) είναι ένα σύστημα  $2n^2$  εξισώσεων με  $n^2$  άγνωστες εισόδους του  $P$ . Απ' την (3.19) έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ PZ + 2I_n \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} -P & I_n \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} -P & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ PZ + 2I_n \end{bmatrix} = 2I_n$$

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι:  $\text{rank}(M) = n$

Η εξίσωση (3.20) λύνεται χρησιμοποιώντας την QR παραγοντοποίηση του πίνακα  $M$ .

Η συνάρτηση του πρόσημου πίνακα του Χαμιλτονιανού πίνακα μπορεί να υπολογισθεί με τον ακόλουθο τρόπο. Η 1<sup>η</sup> ιδιότητα της (3.16) δείχνει ότι  $\text{Sign}(H)$  είναι μια τετραγωνική ρίζα του ταυτοτικού πίνακα. Ο Roberts (1980) απέδειξε ότι εφαρμόζοντας την μέθοδο Newton στην τετραγωνική ρίζα του ταυτοτικού πίνακα λαμβάνουμε ότι:

$$W_0 = H \quad (3.21)$$

$$W_{k+1} = \frac{1}{2}(W_k + W_k^{-1})$$

που συγκλίνει στην  $\text{Sign}(H)$  τετραγωνικά. Εάν η  $\text{Sign}(H)$  δεν ορίζεται, τότε είτε η επαναληπτική σχέση (3.21) δεν συγκλίνει, είτε κάποιοι από τους πίνακες  $W_k$  είναι μη αντιστρέψιμοι. Είναι πιθανό να δειχθεί ότι εάν  $H$  είναι ένας Χαμιλτονιανός πίνακας, τότε είναι Χαμιλτονιανοί οι  $H^{-1}$  και  $\frac{1}{2}(H + H^{-1})$ . Με αυτόν τον τρόπο η Χαμιλτονιανή ιδιότητα του  $W_0$  μεταδίδεται στην  $W_{k+1} = \frac{1}{2}(W_k + W_k^{-1})$ .

Περισσότερο ακριβή αποτελέσματα στον υπολογισμό του  $\text{Sign}(H)$  μπορεί να ληφθούν εάν, αντί της σχέσης (3.21), χρησιμοποιήσει κάποιος την έκφραση:

$$W_0 = H \quad (3.22)$$

$$W_{k+1} = W_k - \frac{1}{2}(W_k - W_k^{-1}).$$

Σε αυτήν την περίπτωση τα σφάλματα στρογγύλευσης περιορίζονται σε μικρή διόρθωση  $\frac{1}{2}(W_k - W_k^{-1})$ .

Οι παραπάνω θεωρήσεις συνοψίζονται στον ακόλουθο αλγόριθμο.



- Θέτουμε:  $H = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$
- Υπολογίζουμε  $W = \text{Sign}(H)$  μέσω της σχέσης (3.22).
- Λύνουμε ως προς  $P$  την σχέση (3.20).

Αυτός ο αλγόριθμος είναι μια απ' τις πιο απλές μεθόδους επίλυσης της εξίσωσης Riccati. Απαιτεί μόνο αντιστροφή πινάκων και λύση ενός σταθερού συστήματος εξισώσεων. Σε αντίθεση με την μέθοδο Newton δεν χρειάζεται μια αρχική προσέγγιση της λύσης.

#### **Παράδειγμα 3.4**

Έστω:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 95 & 106 & -54 \\ 106 & 258 & -54 \\ -54 & 44 & 109 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 15 \\ -1 & 34 & -29 \\ 15 & -29 & 65 \end{bmatrix}$$

Η ακριβής λύση της (3.17) είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Μια προσεγγιστική λύση  $P_k$  λαμβάνεται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.22) και (3.20) με αριθμητική ακρίβεια  $\varepsilon = 2^{-56} \approx 1.39 \times 10^{-17}$ . Το σχετικό σφάλμα για κάθε  $k$ , μαζί με τον αριθμό κατάστασης του πίνακα  $W_k$ , φαίνεται στον πίνακα 3.2.

Ο αναδρομικός τύπος (3.22) έχει το μειονέκτημα ότι η αρχική σύγκλιση μπορεί να είναι αργή. Η σύγκλιση μπορεί να επιταχυνθεί κλιμακώνοντας το  $W_k$  σε κάθε επανάληψη, έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του να είναι κοντά στο  $\pm 1$  όσο γίνεται. Ο Byers (1987) απέδειξε ότι η μέγιστη επιτάχυνση πετυχαίνεται αν  $W_k$  κλιμακώνεται από  $|\det(W_k)|^{\frac{-1}{(2n)}}$ , δηλαδή από τον αντίστροφο του γεωμετρικού μέσου των ιδιοτιμών.

Πίνακας 3.2

k	$\text{cond}(W_k)$	$\ P_k - P\ _F / \ P\ _F$
1	377.4	$0.100 \times 10^2$
2	307.3	$0.500 \times 10^1$
3	192.4	$0.146 \times 10^1$
4	101.1	$0.115 \times 10^1$
5	53.2	$0.791 \times 10^0$
6	30.1	$0.328 \times 10^0$
7	19.9	$0.701 \times 10^{-1}$
8	15.6	$0.424 \times 10^{-2}$
9	14.7	$0.168 \times 10^{-4}$
10	14.7	$0.266 \times 10^{-9}$
11	14.7	$0.647 \times 10^{-16}$
12	14.7	$0.329 \times 10^{-16}$

Πίνακας 3.3

k	$\text{cond}(Z_k)$	$\ P_k - P\ _F / \ P\ _F$
1	377.4	$0.100 \times 10^1$
2	35	$0.995 \times 10^{-1}$
3	16.5	$0.448 \times 10^{-2}$
4	14.7	$0.516 \times 10^{-5}$
5	14.7	$0.589 \times 10^{-11}$
6	14.7	$0.203 \times 10^{-15}$
7	14.7	$0.200 \times 10^{-15}$

Ενσωματώνοντας αυτήν την κλιμάκωση στην (3.22) δίνει:

$$W_0 = H$$

$$Z_k = W_k |\det(W_k)|^{-1/(2n)} \quad (3.23)$$

$$W_{k+1} = Z_k - \frac{1}{2}(Z_k - Z_k^{-1})$$

Είναι ενδιαφέρον να εφαρμόσουμε την (3.23) σε μερικές τετριμμένες περιπτώσεις. Εάν για παράδειγμα  $H$  είναι ένας  $1 \times 1$  πραγματικός πίνακας τότε:

$$W_0 / \det(W_0) = W_1 = \text{Sign}(H)$$

έτσι ώστε η (3.23) παράγει  $\text{Sign}(H)$  σε μια επανάληψη. Εάν ο  $H$  είναι ένας  $2 \times 2$  πίνακας με πραγματικές ιδιοτιμές, τότε  $W_1$  έχει δύο ιδιοτιμές με ίσα μέτρα και  $W_2 = \text{Sign}(H)$ .

Τα αποτελέσματα της εφαρμογής της (3.23) στην εξίσωση Riccati που ελήφθησαν στο παράδειγμα 3.4 φαίνονται στον πίνακα 3.3. Στην συγκεκριμένη περίπτωση μια λύση ακριβής στην διαδικασία λαμβάνεται μόνο σε έξι επαναλήψεις.

Η αντιστροφή του μη συμμετρικού πίνακα στην (3.23) μπορεί να αντικατασταθεί από συμμετρική αντιστροφή ως ακολούθως. Λαμβάνοντας υπόψη ότι για

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας  $JZ$  είναι συμμετρικός, ο  $Z_k^{-1}$  μπορεί να υπολογισθεί σαν  $Z_k^{-1} = (JZ_k)^{-1}J$ .

Αυτό μας επιτρέπει να ελαττώσουμε τους απαραίτητους υπολογισμούς και να αποθηκεύσουμε ότι είναι απαραίτητο διπλά. Η επαναληπτική σχέση (3.23) έτσι ξαναοργανώνεται ως εξής:

$$W_0 = H$$

$$Z_k = W_k |\det(W_k)|^{-1/(2n)} \quad (3.24)$$

$$W_{k+1} = Z_k - \frac{1}{2}(Z_k - (JZ_k)^{-1}J)$$

Παρατηρούμε ότι δεν είναι απαραίτητο να εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό του  $JZ_k$ , αρκεί να επανατοποθετήσουμε τις συνιστώσες του  $Z_k$ , αλλάζοντας πρόσημα όπου είναι απαραίτητο.

Ας μελετήσουμε τις αριθμητικές ιδιότητες της επαναληπτικής σχέσης (3.24). Τα περισσότερα σημαντικά σφάλματα στρογγύλευσης συμβαίνουν κατά την αντιστροφή του  $JZ_k$ . Το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό περιορίζεται από το  $c \varepsilon \text{cond}(JZ_k)$ , όπου  $c$  είναι ένα χαμηλού βαθμού πολυώνυμο και  $\text{cond}(JZ_k)$  είναι ο αριθμός κατάστασης του πίνακα  $JZ_k$ . Αυτό συνιστά ότι οι επαναλήψεις θα σταματήσουν όταν:

$$\frac{\|Z_k - (JZ_k)^{-1}J\|}{\|(JZ_k)^{-1}\|} \leq n \varepsilon \text{cond}(JZ_k) \quad (3.25)$$

Μια άλλη δυνατότητα είναι να σταματήσουμε την επανάληψη όταν το  $W_k$  δεν αλλάζει σημαντικά, δηλαδή όταν:

$$\|Z_k - (JZ_k)^{-1}J\| \leq \varepsilon \|Z_k\| \quad (3.26)$$

Η εμπειρία με αυτά τα κριτήρια δείχνει ότι η (3.25) μερικές φορές σταματάει την επανάληψη πιο γρήγορα, ενώ η (3.26) την σταματάει πιο αργά. Στην πράξη πετυχαίνεται ένας συμβιβασμός μεταξύ αυτών των κριτηρίων.

### Αλγόριθμος 3.3

Επίλυση της συνεχούς εξίσωσης πίνακα Riccati χρησιμοποιώντας την συνάρτηση του πρόσημου πίνακα.

- Θέτουμε:  $W = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$

Για  $k=1,2,\dots$

$$c = \text{cond}(JW)$$

$$d = |\det(JW)|^{1/2n}$$

$$Y = d(JW)^{-1}$$

$$Z = W / d$$

$$s = \|Z - YJ\|$$

$$W = Z - (Z - YJ)/2$$

Εάν  $s \leq \varepsilon \|Z\|$  τότε stop

- Χωρίζουμε:

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

- Λύνουμε για P την:

$$\begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} + I_n \end{bmatrix} P = - \begin{bmatrix} W_{11} + I_n \\ W_{21} \end{bmatrix}$$

Υπάρχουν υπορουτίνες για την αντιστροφή του πίνακα  $JW$  και τον υπολογισμό της  $\det(JW)$ .

Ο αλγόριθμος 3.3 απαιτεί  $4n^3$  flops για κάθε επανάληψη. Ο απαραίτητος χώρος αποθήκευσης είναι αναλογικά σε  $6n^2$ , εφόσον μόνο τα τριγωνικά μέρη των συμμετρικών πινάκων Q, S και JW αποθηκεύονται.

Η αριθμητική ανάλυση που έγινε από τον Byers (1986) δείχνει ότι η μέθοδος της συνάρτησης πρόσημου πίνακα από μόνη της δεν είναι αριθμητικά ευσταθής. Ωστόσο, σε συνδυασμό με μια άλλη μέθοδο παράγει μια ικανοποιητικά αριθμητικά ευσταθή διαδικασία για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

Η μέθοδος της συνάρτησης του πρόσημου πίνακα μπορεί να εφαρμοσθεί στη λύση της διακριτούς εξίσωσης Riccati:

$$A^T P A - P + Q - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A = 0 \quad (3.27)$$

με τον ακόλουθο τρόπο. Εάν ο πίνακας A είναι ομαλός, η διακριτή εξίσωση Riccati συνδέεται με τον συμπλεκτικό πίνακα:

$$Z = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^T A^{-T} Q & -BR^{-1}B^T A^{-T} \\ -A^{-T} Q & A^{-T} \end{bmatrix}$$

του οποίου οι ιδιοτιμές είναι  $\lambda_i$   $i = 1, 2, \dots, n$

και

$$\frac{1}{\lambda_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Χρησιμοποιώντας τον διγραμμικό μετασχηματισμό:

$$H = (Z - I)(Z + I)^{-1} \quad (3.28)$$

λαμβάνουμε έναν πίνακα H που είναι Χαμιλτονιανός, καθώς οι ιδιοτιμές του είναι:

$$\frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i + 1} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

και

$$-\frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i + 1} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(Ο πίνακας  $Z+I$  στην (3.28) είναι ομαλός καθώς  $\lambda_i \neq -1$ .)

Ο πίνακας  $H$  συνδέεται με την συνεχή εξίσωση Riccati η οποία έχει την ίδια τιμή με την (3.27). Επομένως η λύση της διακριτούς εξίσωσης Riccati μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο 3.3 όπου  $H$  ορίζεται από την (3.28). Αυτή η μέθοδος ωστόσο, μπορεί να παράγει ένα παραδεκτό αποτέλεσμα μόνο αν  $A$  είναι ένας πίνακας σε καλή κατάσταση ως προς την αντιστροφή.

### 3.3 Μέθοδος των ιδιοσυστημάτων

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε δύο μεθόδους για την επίλυση των εξισώσεων πίνακα Riccati, οι οποίες χρησιμοποιούν το ιδιοσύστημα του Χαμιλτονιανού (συμπλεκτικού) πίνακα.

#### 3.3.1 Μέθοδος του ιδιοδιανύσματος

Θεωρούμε την συνεχή εξίσωση Riccati:

$$A^T P + PA + Q - PSP = 0 \quad (3.29)$$

όπου το ζεύγος  $(A, B)$  ( $(BB^T = S, \text{rank}(B) = \text{rank}(S))$ ) είναι σταθεροποιήσιμο και το ζεύγος  $(C, A)$  ( $(C^T C = Q, \text{rank}(C) = \text{rank}(Q))$ ) είναι ανιχνεύσιμο. Ο Χαμιλτονιανός πίνακας:

$$H = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

που συνδέεται με την (3.29) έχει ιδιοτιμές:

$$-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

όπου  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  είναι ιδιοτιμές με θετικά πραγματικά μέρη. (Κάτω από αυτές τις συνθήκες ο πίνακας  $H$  δεν έχει καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές). Εάν οι στοιχειώδεις διαιρέτες του  $H$  που αντιστοιχούν στις  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  είναι γραμμικοί, τότε ο  $H$  μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαγώνια μορφή:

$$V^{-1}HV = \begin{bmatrix} -\Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}$$

όπου  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

Έστω ότι ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων διαμερίζεται σε  $n \times n$  blocks:

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

όπου  $V_1 = \begin{bmatrix} V_{11}^T & V_{21}^T \end{bmatrix}^T$  είναι ένας πίνακας που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη. Τότε μπορεί να αποδειχθεί, ότι ο πίνακας  $V_{11}$  είναι ομαλός και η μοναδική θετικά ημιορισμένη λύση της (3.29) δίνεται από:

$$P = V_{21}V_{11}^{-1} \quad (3.30)$$



Επιπρόσθετα, οι ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος πίνακα A-SP (οι πόλοι του βέλτιστου συστήματος) είναι  $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$  και  $U_{11}$  είναι ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του A-SP. Παρατηρούμε ότι η πραγματική διάταξη των ιδιοδιανυσμάτων στον πίνακα  $V_1$  δεν είναι σημαντική.

Εάν κάποιες από τις ιδιοτιμές του H είναι μιγαδικές, τότε η σχέση (3.30) εξακολουθεί να ισχύει. Για να αποφύγουμε να χρησιμοποιούμε αριθμητική με μιγαδικούς, αντί των συζυγών μιγαδικών ιδιοδιανυσμάτων  $u_k = y_k + iz_k$  και  $u_{k+1} = y_k - iz_k$  που αντιστοιχούν στις συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές  $\lambda_k = \sigma_k + i\omega_k$  και  $\lambda_{k+1} = \sigma_k - i\omega_k$ , μπορεί κανείς να βάζει συνεχώς στον πίνακα  $V_1$  τα πραγματικά διανύσματα  $y_k$  και  $z_k$ . Τότε στην θέση των  $\lambda_k$  και  $\lambda_{k+1}$  στην διαγώνια μορφή του H θα εμφανισθεί ένας  $2 \times 2$  της μορφής:

$$\begin{bmatrix} \sigma_k & \omega_k \\ -\omega_k & \sigma_k \end{bmatrix}$$

Με αυτόν τον τρόπο η λύση της συνεχούς εξίσωσης Riccati μπορεί να βρεθεί με τον ακόλουθο αλγόριθμο.

- Θέτουμε:

$$H = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

- Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του H με την QR μέθοδο.
- Επιλέγουμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη και τα τοποθετούμε στον πίνακα:

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix}$$

- Λύνουμε  $V_{11}^T P = V_{21}^T$  ως προς P

Ο αλγόριθμος αυτός απαιτεί περίπου  $120n^3$  flops, και χώρο αποθήκευσης  $10n^2$ .

Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου ιδιοδιανύσματος είναι ότι μας επιτρέπει να βρούμε μια λύση  $P$  χωρίς επαναλήψεις στο  $P$ . Ως αποτέλεσμα των υπολογισμών, μπορεί κανείς να λάβει τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A-SP$ . Αυτή η μέθοδος ωστόσο, είναι αριθμητικά ασταθής, όταν ο Χαμιλτονιανός πίνακας είναι σχεδόν ελλiptής (ο  $H$  έχει σχεδόν πολλαπλές ιδιοτιμές) επειδή σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας  $U_{11}$  είναι σε αρρωστημένη κατάσταση, η οποία όμως είναι ανεξάρτητη από την κατάσταση της εξίσωσης Riccati.

Οι δυσκολίες που προκύπτουν από την περίπτωση των μη γραμμικών στοιχειωδών διαιρετών του  $H$  μπορούν να αποφευχθούν εάν ο  $H$  ανάγεται σε Jordan κανονική μορφή. Η λύση είναι ξανά της μορφής (3.30), αλλά ο πίνακας  $V$  πρέπει να αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα και τα κύρια διανύσματα του  $H$ . Ωστόσο, η αναγωγή του  $H$  σε Jordan μορφή απαιτεί περίπου  $n^4$  flops, κάνοντας την αντίστοιχη μέθοδο μη αποτελεσματική. Εκτός αυτού, σε μερικές περιπτώσεις η Jordan μορφή μπορεί να είναι σε αρρωστημένη κατάσταση, που προκαλεί αρρωστημένη κατάσταση του  $V_{11}$ .

### Παράδειγμα 3.5

Έστω:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 53 & 18 & -20 \\ 18 & 12 & -1 \\ -20 & -1 & 14 \end{bmatrix}$$

και

$$S = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Η ακριβής λύση της (3.29) είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 11 & 4 & -4 \\ 4 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές  $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$  του Χαμιλτονιανού πίνακα και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $u_1, u_2, u_3$  υπολογίζονται από την υπορουτίνα COMQR2 από το EISPACK αριθμητικά με  $\varepsilon = 2^{-56} \approx 1.39 \times 10^{-17}$  είναι (μέχρι τέσσερα ψηφία):

$$-\lambda_1 = -3.000 \quad -\lambda_2 = -3.000 \quad -\lambda_3 = -3.000$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} -0.2887 \\ 0.5774 \\ -0.2887 \\ 0.2887 \\ 0.5774 \\ 0.2887 \end{bmatrix} \quad u_2 = 10^7 \begin{bmatrix} 0.4212 \\ -0.8424 \\ 0.4212 \\ -0.4212 \\ -0.8424 \\ -0.4212 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0.5334 \\ -0.5409 \\ 0.5337 \\ 1.572 \\ 0.5121 \\ -0.5337 \end{bmatrix}$$

Η λύση  $\bar{P}$  της (3.29) που υπολογίζεται μέσω της (3.30) έχει σχετικό σφάλμα:

$$\frac{\|\bar{P} - P\|_F}{\|P\|_F} = 7.657 \times 10^{-10}$$

έτσι ώστε προσεγγιστικά επτά ψηφία ακρίβειας έχουν χαθεί κατά τους υπολογισμούς. Αυτό οφείλεται στο ότι οι δυο πρώτες ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε έναν  $2 \times 2$  Jordan block της Jordan μορφής του  $H$  και τα ιδιοδιανύσματα  $u_1$  και  $u_2$  είναι σχεδόν γραμμικά ανεξάρτητα:

$$\text{cond}_2(V_{11}) = 1.432 \times 10^{15}$$

Καθώς ο αριθμός κατάστασης της εξίσωσης Riccati είναι:  $c_R = 67.77$ , το σχετικό σφάλμα στο  $\bar{P}$  είναι περίπου  $8 \times 10^5$  φορές  $\varepsilon_R$ , το οποίο φανερώνει την αριθμητική

αστάθεια της μεθόδου. Εάν, ωστόσο, ο Χαμιλτονιανός πίνακας αναχθεί σε Jordan μορφή, τότε η λύση λαμβάνεται με σχετικό σφάλμα  $1.50 \times 10^{-16}$ .

Η μέθοδος ιδιοδιανύσματος μπορεί επίσης να εφαρμοσθεί στην λύση της διακριτής εξίσωσης Riccati:

$$A^T P A + Q - P - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A = 0 \quad (3.31)$$

δεδομένου ότι ο πίνακας A είναι ομαλός.

Υποθέτουμε ότι το ζεύγος (A,B) είναι σταθεροποιήσιμο και το ζεύγος (A,C) ( $C^T C = Q, rank(C) = rank(Q)$ ) είναι ανιχνεύσιμο, που βεβαιώνει την ύπαρξη μιας μοναδικής θετικά ημιορισμένης λύσης της (3.31). Εάν ο συμπλεκτικός πίνακας:

$$Z = \begin{bmatrix} A + S A^{-T} Q & -S A^{-T} \\ -A^{-T} Q & A^{-T} \end{bmatrix} \quad S = B R^{-1} B^T \quad (3.32)$$

που συνδέεται με την (3.31) έχει γραμμικούς στοιχειώδεις διαιρέτες, μπορεί να αναχθεί σε:

$$V^{-1} Z V = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

όπου  $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  και  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  είναι οι ιδιοτιμές του Z των οποίων τα moduli είναι λιγότερα από 1. Η λύση της (3.31) βρίσκεται από:

$P = V_{21} V_{11}^{-1}$ . Παρατηρούμε ότι είναι δυνατόν να εργασθούμε με τον πίνακα:

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1} S \\ Q A^{-1} & A^T + Q A^{-1} S \end{bmatrix}$$

Σε τέτοια περίπτωση ο πίνακας  $\begin{bmatrix} V_{11}^T & V_{21}^T \end{bmatrix}^T$  πρέπει να αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Πέραν των δυσκολιών που σχετίζονται με τους ελλειείς συμπλεκτικούς πίνακες, η μέθοδος ιδιοδιανύσματος για την λύση της διακριτής εξίσωσης Riccati, έχει το μειονέκτημα ότι μπορεί να εκτελεσθεί μόνο όταν ο  $A$  είναι ένας πίνακας σε καλή κατάσταση.

### 3.4 Μέθοδος Schur

Η συνεχής εξίσωση Riccati μπορεί να λυθεί ανάγοντας τον  $H$  σε σχεδόν τριγωνική real Schur μορφή χρησιμοποιώντας ορθογώνιους ομοιόμορφους μετασχηματισμούς. Έτσι είναι πιθανόν να αποφευχθούν οι αριθμητικές δυσκολίες που σχετίζονται με την χρήση των ιδιοδιανυσμάτων των σχεδόν ελλειπών Χαμιλτονιανών πινάκων.

Υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας  $U$  που μετασχηματίζει τον Χαμιλτονιανό πίνακα  $H$  σε πραγματική Schur μορφή:

$$T = U^T H U = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

όπου  $T_{11}$  και  $T_{22}$  είναι  $n \times n$  πάνω σχεδόν τριγωνικοί πίνακες. Τα blocks στις διαγώνιες των  $T_{11}$  και  $T_{22}$  έχουν διάσταση το πολύ  $2 \times 2$ .

Η αναγωγή (3.33) δεν είναι μοναδική και είναι πάντα δυνατό να διαλέξουμε τον πίνακα  $U$  έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του  $T_{11}$  να έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, ενώ του  $T_{22}$  να έχουν θετικά πραγματικά μέρη.

Έστω ο πίνακας  $U$  διαμερίζεται σε:

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

όπου κάθε block έχει διάσταση  $n \times n$ . Τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι ο πίνακας  $U_{11}$  είναι ομαλός και η θετικά ημιορισμένη λύση της (3.29) βρίσκεται από:

$$P = U_{21}U_{11}^{-1} \quad (3.34)$$

Επιπρόσθετα, οι ιδιοτιμές του  $T_{11}$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A-SP, δηλαδή οι πόλοι του βέλτιστου κλειστού συστήματος οφειλόμενες στην σχέση  $A - SP = U_{11}T_{11}U_{11}^{-1}$ .

Η ορθογώνια αναγωγή του Χαμιλτονιανού πίνακα σε πραγματική Schur μορφή γίνεται με την QR μέθοδο. Καθώς ο πίνακας H δεν είναι συμμετρικός, δεν είναι δυνατόν να εγγυηθούμε μια ειδική διάταξη των ιδιοτιμών στην διαγώνιο της σχεδόν τριγωνικής μορφής. Είναι δυνατόν ωστόσο, να αναδιατάξουμε αυτή την μορφή αυθαίρετα αλλάζοντας συστηματικά γειτονικά ζεύγη ιδιοτιμών, εκτελώντας ορθογώνιους ομοιόμορφους μετασχηματισμούς.

Με αυτόν τον τρόπο παραθέτουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο.

#### Αλγόριθμος 3.4

- Θέτουμε:

$$H = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

Ανάγουμε τον H σε πραγματική Schur μορφή  $T = U^T H U$  χρησιμοποιώντας ορθογώνιους ομοιόμορφους μετασχηματισμούς.

Αναδιατάσσουμε την πραγματική Schur χρησιμοποιώντας ορθογώνιους μετασχηματισμούς, έτσι ώστε το σχεδόν τριγωνικό block  $T_{11}$  του T να έχει ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη και συσσωρεύουμε τους μετασχηματισμούς στο U. Λύνουμε  $U_{11}^T P = U_{21}^T$  ως προς P όπου  $\begin{bmatrix} U_{11}^T & U_{21}^T \end{bmatrix}^T$  είναι τα διανύσματα Schur που αντιστοιχούν στο  $T_{11}$ .

Ο αλγόριθμος 3.4 απαιτεί  $63n^3$  flops εάν η αναδιάταξη της Schur μορφής δεν ληφθεί υπόψη. Καθώς η αναδιάταξη απαιτεί 25% του συνολικού όγκου υπολογισμών,  $75n^3$  flops είναι απαραίτητα για να λυθεί η συνεχής εξίσωση Riccati με την μέθοδο Schur. Η απαραίτητη αποθήκευση είναι αναλογικά  $10n^2$ .

Η μέθοδος Schur έχει αρκετά πλεονεκτήματα πάνω στην μέθοδο ιδιοδιανύσματος. Αρχικά, η αναγωγή σε σχεδόν τριγωνική μορφή είναι ένα ενδιάμεσο βήμα στον υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων με την QR μέθοδο, έτσι ώστε η μέθοδος Schur απαιτεί λιγότερους υπολογισμούς από την μέθοδο ιδιοδιανύσματος. Πιο σημαντικό είναι ότι η μέθοδος Schur δεν 'πάσχει' από τις δυσκολίες στην χρήση των ιδιοδιανυσμάτων ελλειπών ή σχεδόν ελλειπών Χαμιλτονιανών πινάκων. Αυτή η μέθοδος δουλεύει εξίσου ικανοποιητικά στην παρουσία γραμμικών και μη γραμμικών στοιχειωδών διαιρετών του H.

Η μέθοδος Schur είναι σημαντικά γρηγορότερη από την μέθοδο Newton και είναι τόσο γρήγορη όσο η μέθοδος της συνάρτησης πρόσημου πίνακα.

Όπως στην μέθοδο ιδιοδιανύσματος, σαν αποτέλεσμα της λύσης της εξίσωσης Riccati λαμβάνει κανείς τις ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος πίνακα.

### **Παράδειγμα 3.6**

Εάν

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 53 & 18 & -20 \\ 18 & 12 & -1 \\ -20 & -1 & 14 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

τότε ο αλγόριθμος 3.4 παράγει, αριθμητικά με  $\varepsilon = 2^{-56} \approx 1.39 \times 10^{-17}$ , τους πίνακες (μέχρι τέσσερα ψηφία):

$$T_{11} = \begin{bmatrix} -3.000 & 0.5148 & 0.8738 \\ 0 & -3.000 & 0.000 \\ 0 & 0 & -3.000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2887 & -0.3541 & -0.07453 \\ 0.5774 & 0.3293 & 0.03249 \\ -0.2887 & -0.5027 & -0.3268 \\ 0.2887 & -0.5669 & 0.6172 \\ 0.5774 & -0.4284 & -0.2006 \\ 0.2887 & -0.09176 & -0.6822 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 11.000 & 4.000 & -4.000 \\ 4.000 & 3.000 & 0.000 \\ -4.000 & 0.000 & 3.000 \end{bmatrix}$$

το σχετικό σφάλμα στη λύση είναι:

$$\|\bar{P} - P\|_F / \|P\|_F = 1.307 \times 10^{-16}$$

Ο αριθμός κατάστασης του πίνακα  $U_{11}$  είναι:  $\text{cond}_2(U_{11}) = 13.93$ . Εφεξής η ακρίβεια της μεθόδου δεν μειώνεται από την παρουσία του  $2 \times 2$  Jordan block στην Jordan μορφή του  $H$ .

### 3.5 Μέθοδος γενικευμένου ιδιοσυστήματος

Η λύση της εξίσωσης πίνακα Riccati μπορεί να βρεθεί από την λύση του αντίστοιχου προβλήματος γενικευμένων ιδιοτιμών. Αυτό κάνει δυνατό να ληφθεί η λύση σε περιπτώσεις όπου προηγούμενες μέθοδοι αποτυγχάνουν.



3.5.1 Μέθοδος γενικευμένου ιδιοσυστήματος για την διακριτή εξίσωση Riccati

Θεωρούμε την διακριτή εξίσωση Riccati:

$$A^T P A + Q - P - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A = 0 \quad (3.35)$$

όπου το ζεύγος (A,B) είναι σταθεροποιήσιμο και το ζεύγος (C,A) ( $C^T C = Q$ ) είναι ανιχνεύσιμο.

Η εξίσωση (3.35) μπορεί να λυθεί μέσω του προβλήματος γενικευμένων ιδιοτιμών:

$$Mx = \lambda Nx \quad (3.36)$$

όπου:

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -Q & I_n \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} I_n & S \\ 0 & A^T \end{bmatrix}$$

$$S = BR^{-1}B^T$$

Παρατηρούμε ότι αν ο πίνακας A είναι ομαλός, τότε το πρόβλημα γενικευμένων ιδιοτιμών ανάγεται στο συνηθισμένο πρόβλημα ιδιοτιμής:

$$Zx = \lambda x$$

όπου

$$Z = N^{-1}M = \begin{bmatrix} A + SA^{-T}Q & -SA^{-T} \\ -A^{-T}Q & A^{-T} \end{bmatrix}$$

είναι ο συμπλεκτικός πίνακας που συνδέεται με την (3.35)

Αν  $\lambda$  είναι μια ιδιοτιμή του pencil  $M-\lambda N$  με πολλαπλότητα  $r$ , τότε  $1/\lambda$  είναι επίσης ιδιοτιμή με την ίδια πολλαπλότητα. Κάτω από τους περιορισμούς που αναφέρθηκαν παραπάνω, καμία από τις ιδιοτιμές της (3.36) δεν κείται στον μοναδιαίο κύκλο. Εάν ο  $A$  είναι ομαλός, τότε όλες οι γενικευμένες ιδιοτιμές είναι μη μηδενικές. Εάν ο  $A$  είναι μη ομαλός, τότε (3.36) έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή  $\lambda=0$ . Εάν  $\lambda=0$  είναι να ιδιοτιμή με πολλαπλότητα  $r$ , τότε το πρόβλημα (3.36) έχει μόνο  $(2n-r)$  πεπερασμένες ιδιοτιμές. Με αυτόν τον τρόπο όταν  $A$  είναι μη αντιστρέψιμος πίνακας, το πρόβλημα γενικευμένων ιδιοτιμών (3.36) μπορεί να παρασταθεί ως ακολούθως:

$$0, \dots, 0, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n, \frac{1}{\lambda_n}, \dots, \frac{1}{\lambda_{r+1}}, \infty, \dots, \infty$$

$$\text{με } 0 < |\lambda_i| < 1 \quad i = r+1, \dots, n$$

Έστω  $V$  ο πίνακας των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων για το πρόβλημα (3.36) όπου τα πρώτα  $n$  διανύσματα αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές μέσα στον μοναδιαίο κύκλο. (Για απλότητα θεωρούμε ότι οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες). Εάν ο πίνακας  $V$  διαμερίζεται σε  $n \times n$  blocks:

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

τότε μπορεί ναδειχθεί ότι ο πίνακας  $V_{11}$  είναι ομαλός και η θετικά ημιορισμένη λύση της (3.35) δίνεται από:

$$P = V_{21} V_{11}^{-1}$$

Ακολούθως οι πόλοι του κλειστού βρόγχου, δηλαδή οι ιδιοτιμές του:

$$A - B(R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

είναι οι γενικευμένες ιδιοτιμές της (3.36), οι οποίες έχουν μέτρο μικρότερο του 1.

Εφεξής, η λύση της διακριτής εξίσωσης Riccati μπορεί να βρεθεί με τον ακόλουθο αλγόριθμο:

- Θέτουμε:

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -Q & I_n \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} I_n & S \\ 0 & A^T \end{bmatrix}$$

- Υπολογίζουμε τις γενικευμένες ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του pencil  $M-\lambda N$  με την QR μέθοδο.
- Επιλέγουμε τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές με μέτρο μικρότερο του 1 και τα τοποθετούμε στον πίνακα:  $V_1 = \begin{bmatrix} V_{11}^T & V_{21}^T \end{bmatrix}^T$ .
- Λύνουμε  $V_{11}^T P = V_{21}^T$  ως προς P.

Ο αλγόριθμος απαιτεί περίπου  $150n^3$  flops και αποθήκευση αναλογικά με  $15n^3$ .

Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων είναι ότι μας επιτρέπει να λύνουμε την διακριτή εξίσωση Riccati στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι μη αντιστρέψιμος ή σε αρρωστημένη κατάσταση, σε αντίθεση με τη μέθοδο ιδιοτιμών. Το μόνο τίμημα που είναι ο μεγάλος όγκος υπολογισμών. Η μέθοδος καταρρέει εάν υπάρχουν πολλαπλές γενικευμένες ιδιοτιμές στις οποίες αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα. Σε αυτήν την περίπτωση είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε γενικευμένα διανύσματα, αλλά η αντίστοιχη αριθμητική μέθοδος απαιτεί έναν μεγάλο όγκο υπολογισμών.

Όμοια με την περίπτωση συνεχούς χρόνου, οι αριθμητικές δυσκολίες που σχετίζονται με την χρήση γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μπορούν να αποφευχθούν εάν το pencil  $M-\lambda N$  ανάγεται σε γενικευμένη Schur μορφή, χρησιμοποιώντας ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Έστω U και V είναι ορθογώνιοι πίνακες έτσι ώστε

$$\tilde{M} = U M V = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}$$

να είναι σε άνω σχεδόν τριγωνική μορφή και

$$\tilde{N} = U N V = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ 0 & N_{22} \end{bmatrix}$$

να είναι σε άνω τριγωνική μορφή, όπου  $M_{11}, M_{22}, N_{11}, N_{22}$  είναι  $n \times n$  πίνακες. Τα blocks στην διαγώνιο του  $\tilde{M}$  έχουν διάσταση το πολύ  $2 \times 2$ . Είναι πάντα δυνατό να επιλέγουμε πίνακες  $U$  και  $V$  έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του pencil  $M_{11} - \lambda N_{11}$  να είναι μέσα σε μοναδιαίο κύκλο. Εάν ο πίνακας  $V$  διαμερίζεται ως εξής:

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

όπου  $V_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , είναι  $n \times n$  blocks, τότε μπορεί να δειχθεί ότι ο πίνακας  $V_{11}$  είναι ομαλός και η θετικά ημιορισμένη λύση της (3.35) βρίσκεται από:

$$P = V_{21} V_{11}^{-1}$$

Οι γενικευμένες ιδιοτιμές του pencil  $M - \lambda N$  είναι οι πόλοι του κλειστού βρόγχου συστήματος, δηλαδή οι ιδιοτιμές του:

$$A_C = A - B(R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

Η αναγωγή του pencil  $M - \lambda N$  σε γενικευμένη Schur μορφή γίνεται με την QR μέθοδο. Δυστυχώς, η σειρά με την οποία οι γενικευμένες ιδιοτιμές εμφανίζονται στην διαγώνιο της γενικευμένης Schur μορφής μπορεί να είναι αυθαίρετη. Γι αυτό λοιπόν είναι απαραίτητο να αναδιατάξουμε την γενικευμένη Schur μορφή, έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του pencil  $M_{11} - \lambda N_{11}$  να είναι μέσα σε μοναδιαίο κύκλο. Αυτό μπορεί να

γίνει συστηματικά εναλλάσσοντας τα γειτονικά ζεύγη των γενικευμένων ιδιοτιμών χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον ακόλουθο αλγόριθμο.

### Αλγόριθμος 3.5

#### Επίλυση της διακριτής εξίσωσης πίνακα Riccati με την γενικευμένη μέθοδο Schur

- Θέτουμε:

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -Q & I_n \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} I_n & S \\ 0 & A^T \end{bmatrix}$$

- Ανάγουμε το pencil  $M-\lambda N$  σε γενικευμένη Schur μορφή:

$$\tilde{M} - \lambda \tilde{N} = U(M - \lambda N)V$$

χρησιμοποιώντας ορθογώνιους ισοδύναμους μετασχηματισμούς.

- Αναδιατάσσουμε την γενικευμένη Schur μορφή, χρησιμοποιώντας ορθογώνιους ισοδύναμους μετασχηματισμούς, έτσι ώστε το pencil  $M_{11} - \lambda N_{11}$  να έχει ιδιοτιμές με μέτρο μικρότερο από 1, και μετασχηματίζουμε τα  $U$  και  $V$ .
- Λύνουμε  $V_{11}^T P = V_{21}^T$  ως προς  $P$ , όπου  $V_1 = \begin{bmatrix} V_{11}^T & V_{21}^T \end{bmatrix}^T$  είναι τα γενικευμένα Schur διανύσματα, που αντιστοιχούν στο pencil  $M_{11} - \lambda N_{11}$ .

Η ορθογώνια αναγωγή του pencil  $M-\lambda N$  σε γενικευμένη Schur μορφή γίνεται με υπορουτίνες. Ο αλγόριθμος 3.5 απαιτεί περίπου  $180n^3$  flops, ενώ η απαιτούμενη αποθήκευση είναι αναλογικά σε  $15n^2$ .

Το κύριο πλεονέκτημα της γενικευμένης μεθόδου Schur έναντι της μεθόδου γενικευμένου ιδιοδιανύσματος, είναι ότι εργάζεται καλά στην περίπτωση πολλαπλών γενικευμένων ιδιοτιμών.

### Παράδειγμα 3.7

Θεωρούμε την διακριτή εξίσωση Riccati με πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -13 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -12 \\ -6 & 9 & 18 \\ -12 & 18 & 36 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

Ο πίνακας A είναι μη ομαλός και οι ιδιοτιμές του pencil είναι:

$$0, 0, 0, \infty, \infty, \infty$$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο 3.5 με αριθμητική  $\varepsilon = 2^{-56} \approx 1.39 \times 10^{-17}$  λαμβάνουμε (μέχρι τέσσερα ψηφία):

$$M_{11} = \begin{bmatrix} -0.1998 & 0.7257 & 1.244 \\ 0.2667 & -0.9685 & -2.304 \\ 0 & 0 & -0.1494 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$N_{11} = \begin{bmatrix} 0.2240 & 0.1968 & -1.328 \\ 0 & -1.348 & 0.01130 \\ 0 & 0 & 2.058 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03531 & 0.8876 & -0.2165 \\ -0.1684 & 0.1035 & 0.6495 \\ 0.06789 & 0.2614 & -0.3608 \\ 0.2362 & 0.1578 & 0.2887 \\ -0.5051 & 0.3106 & 0.4330 \\ -0.8092 & -0.1086 & -0.3608 \end{bmatrix}$$

και

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 6.000 & -7.000 & -17.00 \\ -7.000 & 10.00 & 21.00 \\ -17.00 & 21.00 & 49.00 \end{bmatrix}$$

Το σχετικό σφάλμα στην λύση είναι:

$$\frac{\|\bar{P} - P\|_F}{\|P\|_F} = 0.2943 \times 10^{-14}$$

Ο αριθμός κατάστασης του πίνακα  $V_{11}$  είναι:

$$\text{cond}_F(V_{11}) = 78.40$$

Οι υπολογισμένες γενικευμένες ιδιοτιμές του pencil  $M_{11} - \lambda N_{11}$  είναι:

$$\bar{\lambda}_{1,2} = 0.3628 \times 10^{-5} \pm 0.6284 \times 10^{-5} i$$

$$\bar{\lambda}_3 = -0.7256 \times 10^{-5}$$

Η μεγάλη διαφορά μεταξύ των υπολογισμένων και των ακριβών γενικευμένων ιδιοτιμών, οφείλεται στην υψηλή ευαισθησία σαν αποτέλεσμα της πολλαπλότητας ( $r=3$ ).

### 3.5.2 Γενικευμένη μέθοδος Schur για αποφυγή αντιστροφής του πίνακα ελέγχου βαρύτητας

Όλες οι μέθοδοι για την λύση της εξίσωσης πίνακα Riccati που έχουμε εξετάσει μέχρι τώρα χρειάζονται αντιστροφή του πίνακα ελέγχου βαρύτητας R. Ωστόσο, σε μερικές περιπτώσεις αυτός ο πίνακας μπορεί να είναι σε αρρωστημένη κατάσταση, έτσι είναι επιθυμητό να αποφευχθεί η αντιστροφή του. Εν συνεχεία, παρουσιάζουμε την γενικευμένη μέθοδο Schur με σκοπό τη λύση των συνεχών και διακριτών εξισώσεων Riccati, στην περίπτωση που ο πίνακας R είναι σε αρρωστημένη κατάσταση.

Θεωρούμε το πρόβλημα των γενικευμένων ιδιοτιμών με τάξη  $(2n+m)$ ,

$$M_0 x = \lambda N_0 x \quad (3.37)$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ -Q & -A^T & 0 \\ 0 & B^T & R \end{bmatrix} \quad N_0 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}$$

που συνδέεται με την συνεχή εξίσωση Riccati:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (3.38)$$

Το πρόβλημα (3.37) μπορεί να αναχθεί σε ένα πρόβλημα τάξης  $2n$ . Για να το επιτύχουμε κατασκευάζουμε έναν  $(n+m) \times (n+m)$  ορθογώνιο πίνακα W έτσι ώστε:

$$W \begin{bmatrix} B \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας W μπορεί να ληφθεί, για παράδειγμα, σαν ένα προϊόν m στοιχειωδών αντανακλάσεων, μηδενίζοντας επιτυχώς τα αντίστοιχα στοιχεία στην m, (m-1), ..., 1<sup>η</sup> στήλη του πίνακα  $\begin{bmatrix} B^T & R^T \end{bmatrix}^T$ .



Διαχωρίζοντας τον πίνακα  $W$  ως εξής:

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

όπου  $W_{11}$  είναι ένα  $n \times n$  block, σχηματίζουμε τον ορθογώνιο πίνακα:

$$W_0 = \begin{bmatrix} W_{11} & \mathbf{0} & W_{12} \\ \mathbf{0} & I_n & \mathbf{0} \\ W_{21} & \mathbf{0} & W_{22} \end{bmatrix}$$

Το πρόβλημα (3.37) είναι τότε ισοδύναμο με το πρόβλημα:

$$W_0 M_0 x = \lambda N_0 x$$

Έχουμε ότι:

$$W_0 M_0 = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \mathbf{0} \\ M_{21} & M_{22} & \mathbf{0} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

όπου:

$$M_{11} = W_{11}A, \quad M_{12} = W_{12}B^T, \quad M_{21} = -Q, \quad M_{22} = -A^T, \quad M_{31} = W_{21}A, \quad M_{32} = W_{22}B^T, \\ M_{33} = \hat{R}$$

Επίσης:

$$W_0 N_0 = \begin{bmatrix} N_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n & \mathbf{0} \\ N_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

όπου:

$$N_{11} = W_{11} \quad \text{και} \quad N_{31} = W_{21}$$

Τώρα κατασκευάζουμε το πρόβλημα γενικευμένων ιδιοτιμών τάξης  $2n$ ,

$$Mx = \lambda Nx \quad (3.39)$$

Μπορεί να δειχθεί ότι οι πίνακες  $M$  και  $N$  παρουσιάζονται ως:

$$M = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} H \quad N = \begin{bmatrix} W_{11} & C \\ 0 & I_n \end{bmatrix} I_{2n}$$

όπου  $H$  είναι ο Χαμιλτονιανός πίνακας που σχετίζεται με την (3.38),

$$H = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad S = BR^{-1}B^T$$

και  $W_{11}$  είναι ομαλός. Εφεξής, το πρόβλημα (3.39) είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα:

$$Hx = \lambda x$$

Με αυτόν τον τρόπο παραθέτουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο για την λύση της (3.38).

- Κατασκευάζουμε έναν ορθογώνιο πίνακα:

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

που συμπυκνώνει τις γραμμές του πίνακα  $\begin{bmatrix} B^T & R^T \end{bmatrix}^T$ .

- Σχηματίζουμε τους πίνακες:

$$M = \begin{bmatrix} W_{11}A & W_{12}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

- Ανάγουμε το pencil  $M-\lambda N$  σε γενικευμένη Schur μορφή:

$$\tilde{M} - \lambda \tilde{N} = U(M - \lambda N)V$$

χρησιμοποιώντας την QR μέθοδο.

- Αναδιατάσσουμε την γενικευμένη μέθοδο Schur χρησιμοποιώντας ορθογώνιους ισοδύναμους μετασχηματισμούς, έτσι ώστε οι ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη να εμφανίζονται πρώτα.
- Λύνουμε  $V_{11}^T P = V_{21}^T$  ως προς P.

Οι αριθμητικές ιδιότητες αυτού του αλγόριθμου είναι όμοιες με τις ιδιότητες του αλγόριθμου 3.5.

Η ίδια προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λυθεί η διακριτή εξίσωση Riccati:

$$A^T P A + Q - P - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A = 0 \quad (3.40)$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση θεωρούμε το πρόβλημα γενικευμένων ιδιοτιμών τάξης  $(2n+m)$ .

$$M_0 x = \lambda N_0 x \quad (3.41)$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & -B \\ -Q & I_n & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad N_0 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & A^T & 0 \\ 0 & B^T & 0 \end{bmatrix}$$

Ας κατασκευάσουμε έναν ορθογώνιο πίνακα  $W$  έτσι ώστε:

$$W \begin{bmatrix} -B \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{R} \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

Το πρόβλημα (3.41) είναι τότε ισοδύναμο με το πρόβλημα:

$$W_0 M_0 x = \lambda W_0 N_0 x$$

όπου:

$$W_0 = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & W_{12} \\ 0 & I_n & 0 \\ W_{21} & 0 & W_{22} \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι:

$$W_0 M_0 = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 \\ M_{31} & 0 & M_{33} \end{bmatrix}$$

όπου:

$$M_{11} = W_{11}A, \quad M_{21} = -Q, \quad M_{22} = I_n, \quad M_{31} = W_{21}A, \quad M_{33} = \hat{R}$$

Επίσης:

$$W_0 N_0 = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_{22} & \mathbf{0} \\ N_{31} & N_{32} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

όπου:

$$N_{11} = W_{11}, \quad N_{12} = W_{12} B^T, \quad N_{22} = A^T, \quad N_{31} = W_{21}, \quad N_{32} = W_{22} B^T$$

Είναι δυνατό να δειχθεί ότι το πρόβλημα γενικευμένων ιδιοτιμών:

$$Mx = \lambda Nx$$

όπου:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & \mathbf{0} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ \mathbf{0} & N_{22} \end{bmatrix}$$

είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα:

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -Q & I_n \end{bmatrix} x = \lambda \begin{bmatrix} I_n & S \\ \mathbf{0} & A^T \end{bmatrix} x$$

που συνδέεται με την (3.40). Αυτό μας οδηγεί στον ακόλουθο αλγόριθμο για την λύση της διακριτής εξίσωσης Riccati.

- Κατασκευάζουμε έναν ορθογώνιο πίνακα:

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

ο οποίος συμπυκνώνει τις γραμμές του  $\begin{bmatrix} -B^T & R^T \end{bmatrix}^T$

- Σχηματίζουμε τους πίνακες:

$$M = \begin{bmatrix} W_{11}A & 0 \\ -Q & I_n \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12}B^T \\ 0 & A^T \end{bmatrix}$$

- Ανάγουμε το pencil  $M-\lambda N$  σε γενικευμένη Schur μορφή:  
 $\tilde{M} - \lambda \tilde{N} = U(M - \lambda N)V$  χρησιμοποιώντας την QR μέθοδο.
- Αναδιατάσσουμε την γενικευμένη Schur μορφή έτσι ώστε οι ιδιοτιμές με μέτρο μικρότερο του 1 να εμφανίζονται πρώτες.
- Λύνουμε  $V_{11}^T P = V_{21}^T$  ως προς P.

Οι ιδιότητες αυτού του αλγόριθμου καλύπτονται από την αριθμητική ανάλυση του αλγόριθμου 3.5.

### 3.6 Συμπλεκτική μέθοδος

Οι μέθοδοι για την λύση της συνεχούς εξίσωσης Riccati που παρουσιάστηκαν στην 3.4 παράγραφο, έχουν το μειονέκτημα ότι δεν εκμεταλλεύονται εξ' ολοκλήρου την ειδική δομή του Χαμιλτονιανού πίνακα H. Σε αυτές τις μεθόδους ο QR αλγόριθμος εφαρμόζεται στον H σαν ένα  $2n \times 2n$  πίνακα, ο οποίος είναι ανεπαρκής τόσο αριθμητικά, όσο και κατά την αποθήκευση. Τα σφάλματα στρογγύλευσης που προέκυψαν με την QR μέθοδο δεν 'σέβονται' την Χαμιλτονιανή δομή του προβλήματος, έτσι ώστε οι υπολογισμένες ιδιοτιμές να μην εμφανίζονται σε θετικά/αρνητικά ζεύγη.

Αυτές οι δυσκολίες μπορούν να υπερνικηθούν αν, για την αναγωγή του Χαμιλτονιανού πίνακα σε Schur μορφή, χρησιμοποιήσει κάποιος παρόμοιους μετασχηματισμούς οι οποίοι είναι μοναδικοί και συμπλεκτικοί. Η αντίστοιχη μέθοδος για την λύση της εξίσωσης Riccati αναφέρεται ως συμπλεκτική μέθοδος.

Η πιο σημαντική ιδιότητα των συμπλεκτικών μετασχηματισμών είναι ότι προστατεύουν την Χαμιλτονιανή δομή. Έστω ότι ο  $2n \times 2n$  πίνακας  $H$  είναι Χαμιλτονιανός, δηλαδή:

$$J^{-1}HJ = -H^H$$

όπου:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad J^{-1} = J^H = J^T = -J$$

και ο  $2n \times 2n$  πίνακας  $Z$  είναι συμπλεκτικός, δηλαδή:

$$J^{-1}ZJ = Z^{-H}$$

Τότε έχουμε:

$$J^{-1}(Z^{-1}HZ)J = (J^{-1}ZJ)^{-1}(J^{-1}HJ)(J^{-1}ZJ) = -Z^H H^H Z^{-H} = -(Z^{-1}HZ)^H$$

Εάν ο  $2n \times 2n$  πίνακας  $U$  είναι μοναδικός και συμπλεκτικός, τότε προκύπτει από  $J^{-1}UJ = U^{-H}$  ότι ο  $U$  έχει την μορφή:

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ -U_2 & U_1 \end{bmatrix}$$

Από την σχέση  $U^H U = I_{2n}$  λαμβάνουμε ότι:

$$U_1^H U_1 + U_2^H U_2 = I_n$$

$$U_1^H U_2 - U_2^H U_1 = 0$$

Παρατηρούμε ότι για την χρήση του πίνακα  $U$  είναι απαραίτητο να αποθηκεύσουμε μόνο τα blocks  $U_1$  και  $U_2$ .

Οι μοναδιαίοι συμπλεκτικοί μετασχηματισμοί μπορούν να εφαρμοσθούν σε συγκεκριμένα μηδενικά στοιχεία διανυσμάτων ή πινάκων. Γι αυτό το σκοπό είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε δύο τύπους μοναδιαίων συμπλεκτικών πινάκων. Οι Householder συμπλεκτικοί πίνακες έχουν την μορφή:

$$U(k, u) = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V \end{bmatrix} \quad 1 \leq k \leq n$$

όπου:

$$V = I_k - 2uu^H / (u^H u)$$

είναι μια μοναδιαία Householder αντανάκλαση  $k$  τάξης. Οι Givens συμπλεκτικοί πίνακες καθορίζονται ως εξής:

$$J(k, c, s) = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$

όπου:

$$C = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-1}, c, 1, 1, \dots, 1)$$

$$S = \text{diag}(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, s, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\text{και } |c|^2 + |s|^2 = 1.$$



Οι Householder συμπλεκτικοί πίνακες μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αρκετές μηδενικές συνιστώσες ενός διανύσματος, ενώ αφήνει τις άλλες αμετάβλητες. Συγκεκριμένα, είναι δυνατό να κατασκευάσουμε έναν πίνακα  $U(k, u)$ , έτσι ώστε για δοσμένο  $k$  και  $n$  διανύσματα  $a, b$

$$U(k, u) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

όπου  $y_i = 0$  για  $i = k + 1, \dots, n$

Οι Givens συμπλεκτικοί πίνακες μπορούν να εκμεταλλευτούν τις μοναδικές μηδενικές εισόδους ενός διανύσματος ή πίνακα. Συγκεκριμένα, για δοσμένο  $k$  και  $n$  διανύσματα  $a, b$  είναι δυνατό να καθορίσουμε έναν πίνακα  $J(k, c, s)$  έτσι ώστε:

$$J(k, c, s) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

όπου  $y_k = 0$

Μπορεί ναδειχθεί ότι κάθε μοναδιαίος συμπλεκτικός πίνακας μπορεί να αναπαρασταθεί ως προϊόν Householder συμπλεκτικών πινάκων και Givens συμπλεκτικών πινάκων.

Το ακόλουθο θεώρημα, αποκαλύπτει την κανονική δομή του Χαμιλτονιανού πίνακα κάτω από την δράση μοναδιαίων συμπλεκτικών μετασχηματισμών.

### **Θεώρημα 3.3 (Χαμιλτονιανή-Schur ανάλυση)**

Έστω  $H$  είναι ένας Χαμιλτονιανός πίνακας του οποίου οι ιδιοτιμές έχουν μη μηδενικά πραγματικά μέρη. Τότε υπάρχει ένας μοναδιαίος συμπλεκτικός πίνακας  $U$  έτσι ώστε:

$$U^H H U = T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & -T_1^H \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

όπου  $T_1$  είναι άνω τριγωνικός και  $T_2$  είναι Ερμιτιανός. Ο πίνακας  $T$  αναφέρεται ως Χαμιλτονιανή τριγωνική μορφή του  $H$ .

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό:

$$H = (Z + I_{2n})(Z - I_{2n})^{-1}$$

είναι εύκολο να αποδείξουμε το ακόλουθο πόρισμα του θεωρήματος 3.3.

### **Πόρισμα (συμπλεκτική-Schur ανάλυση)**

Εάν  $Z$  είναι συμπλεκτικός και δεν έχει ιδιοτιμές μεγέθους 1 τότε υπάρχει μοναδιαίος συμπλεκτικός πίνακας  $U$  έτσι ώστε:

$$U^H Z U = R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & R_1^{-H} \end{bmatrix}$$

όπου  $R_1$  είναι άνω τριγωνικός και  $R_2 R_1^H$  είναι Ερμιτιανός. Ο πίνακας  $R$  καλείται συμπλεκτικός τριγωνικός.

Η ανάλυση (3.42) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την λύση της εξίσωσης Riccati:

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad (3.43)$$

Εάν το ζεύγος  $(A, B)$  είναι σταθεροποιήσιμο και το ζεύγος  $(C, A)$  ( $C^T C = Q$ ) είναι ανιχνεύσιμο, οι συνθήκες του θεωρήματος 3.3 ικανοποιούνται. Εάν ο πίνακας:

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ -U_2 & U_1 \end{bmatrix}$$

έχει επιλεγεί έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του  $T$  να έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε θετικά ημιορισμένη λύση της (3.43) βρίσκεται από:

$$P = -U_2 U_1^{-1}$$

Ο υπολογισμός της Χαμιλτονιανής –Schur ανάλυσης στην γενική περίπτωση είναι ένα δύσκολο πρόβλημα. Για την περίπτωση συστήματος μιας εισόδου ( $\text{rank}(B)=1$ ) υπάρχει μια παραλλαγή του QR αλγόριθμου, που αναφέρεται ως Χαμιλτονιανός QR αλγόριθμος, που μας επιτρέπει να βρούμε την Χαμιλτονιανή τριγωνική μορφή του  $H$ , χρησιμοποιώντας μια σειρά μοναδιαίων συμπλεκτικών μετασχηματισμών. Όπως στον συνηθισμένο QR αλγόριθμο, ο όγκος υπολογισμών μπορεί να μειωθεί σημαντικά, αν ο αρχικός Χαμιλτονιανός πίνακας αναχθεί σε συμπυκνωμένη μορφή. Στην συγκεκριμένη περίπτωση ( $\text{rank}(B)=1$ ) ο Χαμιλτονιανός πίνακας μπορεί να αναχθεί σε Χαμιλτονιανή – Χέξενμπεργκ (Hamiltonian-Hessenberg) μορφή:

$$W^H H W = \begin{bmatrix} F & Y \\ 0 & -F^H \end{bmatrix}$$

όπου  $F$  είναι άνω Hessenberg και  $W$  είναι μοναδιαίος συμπλεκτικός πίνακας. Ο αντίστοιχος αλγόριθμος απαιτεί αναλογικά  $10n^3 / 3$  flops.

Ο Χαμιλτονιανός QR αλγόριθμος που περιέχει αρκετούς μετασχηματισμούς, εφαρμόζεται επαναληπτικά στην Hamiltonian-Hessenberg μορφή του  $H$ . Οι υπολογισμοί μπορούν να ‘τακτοποιηθούν’ έτσι ώστε κάθε βήμα του αλγορίθμου να απαιτεί  $O(n^2)$  flops. Συνήθως  $2n$  επαναλήψεις του αλγορίθμου είναι ικανοποιητικές για να μετατρέψουν τον  $H$  σε Χαμιλτονιανή τριγωνική μορφή.

Ο Χαμιλτονιανός QR αλγόριθμος είναι αριθμητικά σταθερός. Ο υπολογισμένος μετασχηματισμός ομοιότητας πίνακας  $\bar{U}$  και ο τελικός Χαμιλτονιανός τριγωνικός πίνακας  $\bar{T}$  ικανοποιούν:

$$\|H\bar{U} - \bar{U}\bar{T}\| \leq c_1 \varepsilon \|H\|$$

$$\|\bar{U}^H \bar{U} - I_{2n}\| \leq c_2 \varepsilon$$

όπου  $c_1$  και  $c_2$  είναι χαμηλής τάξης πολυώνυμα στο  $n$ . Παρατηρούμε ωστόσο, ότι αυτός ο αλγόριθμος, μπορεί να εισάγει σε μερικές περιπτώσεις μεγάλες ‘ταραχές’ στους πίνακες  $A$ ,  $Q$  και  $BR^{-1}B^T$  οι οποίες μας οδηγούν σε αριθμητική αστάθεια της συνολικής μεθόδου για την λύση της εξίσωσης Riccati.

### 3.7 Σύγκριση μεθόδων για την λύση των εξισώσεων Riccati

Η μόνη υπολογιστική μέθοδος για την λύση εξισώσεων Riccati που αποδείχτηκε ότι είναι αριθμητικά σταθερή, είναι η μέθοδος Newton. Αυτή η μέθοδος ωστόσο, έχει το μειονέκτημα ότι απαιτεί έναν μεγάλο όγκο υπολογισμών, εάν η αρχική προσέγγιση επιλεγεί μακριά από την ακριβή λύση. Ο καθορισμός της αρχικής υπόθεσης απαιτεί εφαρμογή κάποιων αλγορίθμων για την σχεδίαση ευσταθούς πίνακα. Η χρήση της μεθόδου Newton στην περίπτωση ελάχιστων επαναλήψεων μπορεί να παράγει περισσότερο ακριβή αποτελέσματα, αλλά απαιτεί περισσότερους υπολογισμούς και αποθήκευση. Επίσης αν η αρχική τιμή είναι μη συμμετρική, τότε η ελάχιστη μέθοδος παράγει σε κάθε επανάληψη μια προσέγγιση στη λύση η οποία είναι επίσης μη συμμετρική.

Η μέθοδος συνάρτησης πρόσημου πίνακα είναι πιο αποτελεσματική απ’ την μέθοδο Newton και δεν χρειάζεται υπολογισμό μιας σταθερής αρχικής τιμής. Αυτή η μέθοδος είναι αριθμητικά ασταθής, αλλά μπορεί να συνδυαστεί αποτελεσματικά με την μέθοδο Newton για να παράγει έναν αριθμητικά σταθερό τρόπο για την λύση της συνεχούς εξίσωσης Riccati. Η εμπειρία μας δείχνει ότι συνήθως μια ή δυο επαναλήψεις

της μεθόδου Newton είναι επαρκείς για την βελτίωση της λύσης που λαμβάνεται με την συνάρτηση πρόσημου πίνακα μέχρι την μέγιστη επιτρεπτή ακρίβεια.

Μια απ' τις πιο αξιόπιστες και αποτελεσματικές μεθόδους για την λύση της συνεχούς εξίσωσης Riccati είναι ο αλγόριθμος Schur. Αυτός ο αλγόριθμος εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας υψηλής ποιότητας λογισμικό και χρειάζεται σημαντικά λιγότερους υπολογισμούς απ' την μέθοδο Newton. Η αναγωγή του Χαμιλτονιανού πίνακα σε τριγωνική μορφή μας επιτρέπει να λάβουμε εύκολα μια εκτίμηση της συνεχούς εξίσωσης Riccati. Η μέθοδος Schur μπορεί να είναι αριθμητικά ασταθής, αλλά αυτή η κατάσταση είναι εύκολα αναγνωρίσιμη. Η λύση που λαμβάνεται με τον αλγόριθμο Schur μπορεί επίσης να καθοριστεί χρησιμοποιώντας την μέθοδο Newton.

Η γενικευμένη μέθοδος Schur μας επιτρέπει να λύσουμε την διακριτή εξίσωση Riccati στην περίπτωση μη ομαλού ή σε αρρωστημένη κατάσταση πίνακα. Μας δίνει επίσης την δυνατότητα εκτίμησης της κατάστασης αποτελεσματικά. Όμοια με τον αλγόριθμο Schur, αυτή η μέθοδος δεν είναι αριθμητικά ευσταθής και το αποτέλεσμα πρέπει να βελτιώνεται με την μέθοδο Newton. Οι άλλες περιπτώσεις της γενικευμένης μεθόδου Schur που παρουσιάστηκαν, κάνουν δυνατό να λύσουμε την συνεχή και διακριτή εξίσωση Riccati, όταν ο πίνακας ελέγχου βαρύτητας είναι σε αρρωστημένη κατάσταση και έχει παρόμοιες αριθμητικές ιδιότητες.

Οι συμπλεκτικές μέθοδοι για την συνεχή εξίσωση Riccati είναι πιο αποτελεσματικές από τις μεθόδους Schur, αλλά η χρήση τους μέχρι τώρα έχει περιοριστεί σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Αυτές οι μέθοδοι είναι επίσης ασταθείς.

Συνοψίζοντας, η συνεχής εξίσωση Riccati μπορεί να λυθεί σίγουρα με δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι με χρήση της μεθόδου Schur (ή γενικευμένης Schur), βελτιώνοντας την λύση με την μέθοδο Newton. Ο δεύτερος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της συνάρτησης πρόσημου πίνακα σε συνδυασμό με την μέθοδο Newton. Οι δύο τρόποι χρειάζονται περίπου την ίδια δουλειά και χώρο αποθήκευσης.

Ο καλύτερος τρόπος για να λύσουμε την διακριτή εξίσωση Riccati είναι να εφαρμόσουμε τον γενικευμένο Schur αλγόριθμο και ακολούθως την μέθοδο Newton.

Πίνακας σύγκρισης διαφορετικών μεθόδων για την συνεχή αλγεβρική εξίσωση Riccati (care).

Μέθοδος	Σύγκλιση, Ευστάθεια	Παρατηρήσεις
Μέθοδοι ιδιοδιανύσματος και γενικευμένου ιδιοδιανύσματος	Οι μέθοδοι δεν είναι γενικά αριθμητικά σταθεροί. (Γίνονται ασταθείς όταν ο Χαμιλτονιανός πίνακας έχει κοντά πολλαπλές ιδιοτιμές).	Δεν συνίσταται να χρησιμοποιηθεί στην πράξη.
Μέθοδος Schur	Ευσταθής στην πράξη	Χρησιμοποιείται ευρύτατα
Συμπλεκτική Χαμιλτονιανή Schur μέθοδος	Ευσταθής μέθοδος. Απαιτεί λιγότερους υπολογισμούς και αποθήκευση για προβλήματα με μέγεθος μεγαλύτερου του 20.	Λειτουργεί στην περίπτωση μιας εισόδου ή/και μιας εξόδου.
Μέθοδος Newton	Η σύγκλιση είναι τετραγωνική αν η αρχική προσέγγιση είναι κοντά στην λύση. Η σύγκλιση μπορεί να είναι 'βασανιστικά' αργή, αν η αρχική προσέγγιση είναι μακριά απ' την λύση.	Συνήθως χρησιμοποιείται ως επαναληπτική διαδικασία.
Μέθοδος συνάρτησης πρόσημου πίνακα	Γενικά όχι ευσταθής. Σε αντίθεση με την μέθοδο Newton δεν χρειάζεται την γνώση μιας αρχικής	Συνίσταται να χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με την μέθοδο Newton.

	ευσταθούς υπόθεσης.	
Γενικευμένη μέθοδος Schur	Ευσταθής στην πράξη.	Δεν λειτουργεί αν ο πίνακας ελέγχου βαρύτητας R είναι μη ομαλός. Ακόμα και αν ο R είναι θεωρητικά ομαλός, η μέθοδος δεν πρέπει να χρησιμοποιείται αν είναι σε αρρωστημένη κατάσταση.

### 3.8 Επιλεγμένα Λογισμικά

#### 3.8.1 Matlab Control System Toolbox

(Εργαλειοθήκη συστήματος ελέγχου σε περιβάλλον Matlab.)

Το Matlab είναι μια γλώσσα υψηλού επιπέδου, η οποία είναι χρήσιμη για τεχνικούς υπολογισμούς. Συνδυάζει:

- Αριθμητικούς (και συμβολικούς) υπολογισμούς.
- Γραφικά
- Προγραμματισμό

Το σύστημα του Matlab είναι συλλογές από συναρτήσεις του Matlab (M-files) τα οποία επεκτείνουν τις δυνατότητες του στην επίλυση ειδικής κατηγορίας προβλημάτων, π.χ. *Control Systems*, *Simulink*, *Signal Processing*, κ.ά.

**care:** Λύση συνεχών αλγεβρικών εξισώσεων Riccati

$[X,L,G,RR] = \text{CARE}(A,B,Q,R,S,E)$  υπολογίζει την μοναδική συμμετρικά ευσταθή λύση X της συνεχούς χρόνου αλγεβρικής εξίσωσης Riccati:

$$A^T XE + E^T XA - (E^T XB + S)R^{-1}(B^T XE + S^T) + Q = 0$$

ή ισοδύναμα

$$F^T XE + E^T XF - E^T XR^{-1}B^T XE + Q - SR^{-1}S^T = 0 \quad \mu\epsilon \quad F = A - BR^{-1}S^T .$$

Παράδειγμα m-file για λύση συνεχούς εξίσωσης Riccati σε καλή κατάσταση

a=[-1 1 1;0 -2 0;0 0 -3];

b=[1;1;1];

r=1;

q=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];

[x,l,g]=care(a,b,q,r)

x =

0.3732 0.0683 0.0620

0.0683 0.2563 0.0095

0.0620 0.0095 0.1770

l =

-2.9940

-2.0461 + 0.4104i

-2.0461 - 0.4104i

g =

0.5036 0.3341 0.2485

**dare:** Λύση διακριτών αλγεβρικών εξισώσεων Riccati

[X,L,G,RR] = DARE(A,B,Q,R,S,E) υπολογίζει την μοναδική συμμετρικά ευσταθή λύση X της διακριτού χρόνου αλγεβρικής εξίσωσης Riccati:

$$E^T XE = A^T XA - (A^T XB + S)(B^T XB + R)^{-1}(A^T XB + S)^T + Q$$



ή ισοδύναμα (αν R είναι ομαλός)

$$E^T XE = F^T XF - F^T XB(B^T XB + R)^{-1} B^T XF + Q - SR^{-1}S^T \quad \text{με} \quad F = A - BR^{-1}S^T .$$

Τις συναρτήσεις care, dare, καθώς και οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση του Matlab, μπορούμε να την βρούμε αν πάμε στο command window του Matlab και πληκτρολογήσουμε: help care, help dare κτλ.

Παράδειγμα m-file για λύση διακριτής εξίσωσης Riccati σε καλή κατάσταση

```
a=[0.999 2 3;2 3 4;4 6 7];
```

```
b=[1;0;0];
```

```
r=1;
```

```
q=[1 1 1;1 5 3;1 3 5];
```

```
[x,l,g]=dare(a,b,q,r)
```

```
x =
```

```
1.0e+003 *
```

```
0.2930  0.4447  0.5450
```

```
0.4447  0.6794  0.8300
```

```
0.5450  0.8300  1.0199
```

```
l =
```

```
0.0768
```

```
-0.4039
```

```
-0.1100
```

```
g =
```

```
11.4361  17.6540  22.0171
```

### 3.8.2 Matcontrol

Η βιβλιοθήκη Mat control είναι ένα σύνολο από M-files που εφαρμόζουν την πλειοψηφία των αλγορίθμων του βιβλίου:

*Numerical Methods for Linear Control Systems Design and Analysis*, του B. N. Datta,

γράφτηκε από αρκετούς απόφοιτους μαθητές του καθηγητή Datta και διανέμεται μαζί με το βιβλίο του.

**RICEIGC:** Μέθοδος ιδιοδιανύσματος για την συνεχούς χρόνου εξίσωση Riccati

**RICSCHC:** Μέθοδος Schur για την συνεχούς χρόνου εξίσωση Riccati

**RICSCHD:** Μέθοδος Schur για την διακριτού χρόνου εξίσωση Riccati

**RICGEIGD:** Μέθοδος γενικευμένου ιδιοδιανύσματος για την διακριτού χρόνου εξίσωση Riccati

**RICNWTNC:** Μέθοδος Newton για την συνεχούς χρόνου εξίσωση Riccati

**RICNWTND:** Μέθοδος Newton για την διακριτού χρόνου εξίσωση Riccati

**RICSGNC:** Μέθοδος συνάρτησης πρόσημου πίνακα για την συνεχούς χρόνου εξίσωση Riccati

**RICSGND:** Μέθοδος συνάρτησης πρόσημου πίνακα για την διακριτού χρόνου εξίσωση Riccati

## 4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ RICCATI ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

### 4.1 Εισαγωγή

Ένας απ' τους κύριους λόγους που η εξίσωση Riccati και οι γενικεύσεις της έχουν γίνει πολύ σημαντικές στην θεωρία ελέγχου συστημάτων και σημάτων, είναι γιατί εμφανίζεται με πολύ ευθύ τρόπο, στην ανάλυση δύο αξιοσημείωτων προβλημάτων στην σχεδίαση συστήματος ελέγχου και στα φίλτρα.

Ένα θεμελιώδες πρόβλημα στην θεωρία βέλτιστου ελέγχου, είναι η σχεδίαση ενός ρυθμιστή για ένα γραμμικό σύστημα, που ελαχιστοποιεί μια τετραγωνική συνάρτηση κόστους, χαρακτηρίζοντας την προσπάθεια ελέγχου και τις αποκλείσεις της εγκατάστασης από την ιδανική λειτουργία. Απ' την άλλη μεριά, στην ανάλυση σήματος, ένα βασικό πρόβλημα είναι ο βέλτιστος υπολογισμός, με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων, ενός χρήσιμου σήματος από παρατηρήσεις που επηρεάζονται από έναν προσθετικό θόρυβο. Οι λύσεις των δύο προβλημάτων, που αναφέρονται αντίστοιχα ως LQ πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου και ως πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων, εξαρτώνται κατά έναν κρίσιμο τρόπο, απ' την λύση των διαφορικών εξισώσεων Riccati.

### 4.2 Τετραγωνικά Προβλήματα Βελτιστοποίησης

#### 4.2.1 Πρόβλημα Γραμμικού Τετραγωνικού Ρυθμιστή (LQR) σε συνεχή χρόνο

Δοσμένων πινάκων  $Q$  και  $R$ , βρίσκουμε ένα σήμα ελέγχου  $u(t)$ , έτσι ώστε η τετραγωνική συνάρτηση κόστους  $J_c(x) = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$  να ελαχιστοποιείται, με  $\dot{x}(t) = Ax + Bu$ ,  $x(0) = x_0$ .

Οι πίνακες  $Q$  και  $R$  αντιπροσωπεύουν αντίστοιχα βάρη, για τις καταστάσεις και τα διανύσματα ελέγχου. Η τετραγωνική μορφή  $x^T Q x$ , αντιπροσωπεύει την απόκλιση της κατάστασης  $x$  απ' την αρχική κατάσταση, ενώ ο όρος  $u^T R u$  το 'κόστος' ελέγχου.

Οι πίνακες  $Q$  και  $R$ , χρειάζεται να επιλεγούν σύμφωνα με τις απαιτήσεις ενός συγκεκριμένου σχεδιασμού. Σημειώνουμε ότι το μέγεθος σήματος ελέγχου  $u$  μπορεί να είναι ελέγξιμο, επιλέγοντας κατάλληλα τον  $R$ . Στην πραγματικότητα επιλέγοντας μεγάλο  $R$ , το  $u(t)$  μπορεί να γίνει μικρό, το οποίο είναι επιθυμητό. Η επιλογή του  $Q$  σχετίζεται με το ποιες καταστάσεις πρέπει να διατηρηθούν μικρές.

Δυστυχώς, είναι πάλι δύσκολο να καθορίσουμε μια συγκεκριμένη κατευθυντήρια γραμμή για επιλογή των  $Q$  και  $R$ . *‘Η επιλογή αυτών των ποσοτήτων είναι περισσότερο τέχνη παρά επιστήμη’* (Kailath 1980). Για ένα τετραγωνικό πρόβλημα βελτιστοποίησης όμως, θεωρείται ότι  $Q$  είναι ένας συμμετρικά θετικά ημιορισμένος πίνακας και  $R$  ένας θετικά ορισμένος πίνακας.

Η λύση του παραπάνω προβλήματος μπορεί να ληφθεί, μέσω μιας τετραγωνικής εξίσωσης πίνακα, της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati, όπως φαίνεται απ’ το ακόλουθο αποτέλεσμα.

#### **Θεώρημα 4.1 (Θεώρημα LQR σε συνεχή χρόνο)**

Θεωρούμε ότι το ζεύγος  $(A, B)$  είναι σταθεροποιήσιμο και το ζεύγος  $(A, C)$  (όπου  $C^T C = Q$ ) είναι ανιχνεύσιμο. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός βέλτιστος έλεγχος  $u^0(t)$  που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση  $J_C(x)$ . Το διάνυσμα  $u^0(t)$  δίνεται απ’ τον τύπο  $u^0(t) = -Kx(t)$ , όπου  $K = R^{-1} B^T X$  και  $X$  είναι η μοναδικά θετικά ημιορισμένη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati:

$$XA + A^T X + Q - XBR^{-1}B^T = 0 \quad (4.1)$$

Επιπλέον ο κλειστός βρόγχος πίνακα  $A - BK$  είναι ευσταθής και η ελάχιστη τιμή της  $J_C(x)$  είναι ίση με  $x_0^T X x_0$ , όπου  $x_0 = x(0)$ .

**Ορισμός 4.1**

Η συμμετρική λύση  $X$  της CARE έτσι ώστε  $A-BK$  να είναι ευσταθής, καλείται ευσταθής λύση.

**Αλγόριθμος για την LQR σχεδίαση σε συνεχή χρόνο.**

Από το θεώρημα (4.1) προκύπτει αμέσως ο παρακάτω αλγόριθμος για την LQR σχεδίαση.

**Είσοδοι:** Οι πίνακες  $A, B, Q, R$  και  $x_0 = x(0)$

**Έξοδοι:**  $X$ - Η λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati σε συνεχή χρόνο

$K$ - Ο LQR πίνακας ανάδρασης

$J_{C \min}$  - Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κόστους  $J_C(x)$

**Υποθέσεις:**

1.  $(A, B)$  είναι **σταθεροποιήσιμο** και  $(A, C)$  είναι **ανιχνεύσιμο**
2.  $Q$  είναι συμμετρικά θετικά ημιορισμένος πίνακας και  $R$  είναι συμμετρικά θετικά ορισμένος πίνακας

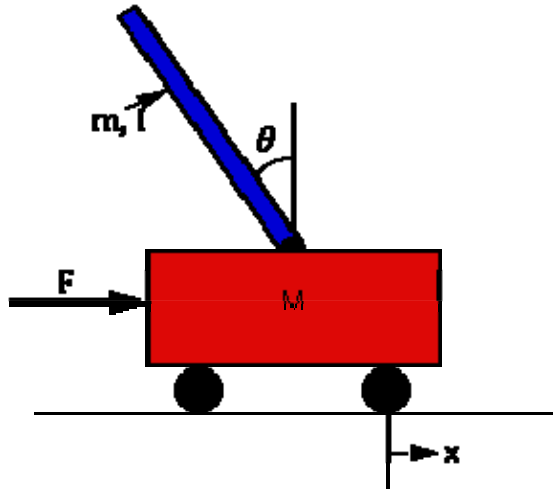
**Βήμα 1<sup>ο</sup>:** Υπολογίζουμε την ευσταθή λύση  $X$  της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati σε συνεχή χρόνο:

$$XA + A^T X - X S X + Q = 0 \quad , \quad S = BR^{-1}B^T$$

**Βήμα 2<sup>ο</sup>:** Υπολογίζουμε τον LQR πίνακα ανάδρασης:

$$K = R^{-1}B^T X$$

**Βήμα 3<sup>ο</sup>:** Υπολογίζουμε την ελάχιστη τιμή της  $J_C(x)$ :  $J_{C \min} = x_0^T X x_0$

**Παράδειγμα 4.1 (LQR σχεδίαση για το αντίστροφο εκκρεμές)**

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται ένα καρότσι με ένα αντίστροφο εκκρεμές που δέχεται μια οριζόντια δύναμη  $F$ .

Θεωρούμε την τετραγωνική συνάρτηση κόστους

$$J_C(x) = \int_0^{\infty} [x^T(t)x(t) + u^T(t)u(t)]dt$$

$$\text{με } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.6720 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22.0320 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0 \\ -0.4 \end{bmatrix} u, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και θέλουμε να πάμε το σύστημα στο  $(0,0,0,0)$  με την ελάχιστη δυνατή είσοδο.

Άρα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.6720 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22.0320 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0 \\ -0.4 \end{bmatrix}$$

$$Q = I_4, \quad R = 1, \quad \text{και } x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 1<sup>ο</sup>:** Η μοναδική θετικά ορισμένη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati σε συνεχή χρόνο (CARE) (που λαμβάνεται χρησιμοποιώντας MATLAB συνάρτηση care) είναι:

$$X = 10^3 \begin{bmatrix} 0.0031 & 0.0042 & 0.0288 & 0.0067 \\ 0.0042 & 0.0115 & 0.0818 & 0.0191 \\ 0.0288 & 0.0818 & 1.8856 & 0.4138 \\ 0.0067 & 0.0191 & 0.4138 & 0.0911 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 2<sup>ο</sup>:** Ο πίνακας ανάδρασης K είναι:

$$K = [-1, -3.0766, -132.7953, -28.7864]$$

**Βήμα 3<sup>ο</sup>:** Η ελάχιστη τιμή της  $J_c(x)$  είναι: 3100.3

Οι ιδιοτιμές του  $A - BK$  είναι:  $-4.8994, -4.5020, -0.4412 \pm 0.3718j$ . Έτσι, X είναι η μοναδική θετικά ορισμένη ευσταθής λύση της CARE.

**Λύση του προβλήματος σε MATLAB**

a=[0 1 0 0;0 0 -3.6720 0;0 0 0 1;0 0 22.0320 0];

b=[0;0.4;0;-0.4];

q=eye(4);

r=1;

x0=[1;1;1;1];

[x,l,g]=care(a,b,q,r)

k=inv(r)\*transpose(b)\*x

Jcmin=transpose(x0)\*x\*x0

eig(a-b\*k)

4.2.2 Πρόβλημα Γραμμικού Τετραγωνικού Ρυθμιστή σε διακριτό χρόνο

Στην περίπτωση διακριτού χρόνου, η συνάρτηση που πρόκειται να ελαχιστοποιηθεί είναι:

$$J_D(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \quad , \quad Q \geq 0, R \geq 0 \quad (4.2)$$

και η συγγενής αλγεβρική εξίσωση Riccati είναι:

$$A^T X A - X + Q - A^T X B (R + B^T X B)^{-1} B^T X A = 0 \quad (4.3)$$

Η παραπάνω εξίσωση καλείται Αλγεβρική Εξίσωση Riccati σε Διακριτό χρόνο (**DARE**).

Ένα θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας του βέλτιστου ελέγχου  $u_k^0$ , παρόμοιο με το θεώρημα 4.1, αναφέρεται στην συνέχεια.

**Θεώρημα 4.2 (Θεώρημα LQR διακριτού χρόνου)**

Έστω  $(A, B)$  είναι ζεύγος διακριτό-σταθεροποιήσιμο και  $(A, C)$  είναι διακριτό-ανιχνεύσιμο. Τότε ο βέλτιστος έλεγχος  $u_k^0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  που ελαχιστοποιεί την  $J_D(x)$  δίνεται απ' τον τύπο  $u_k^0 = -Kx_k$ , όπου  $K = (R + B^T X B)^{-1} B^T X A$  και  $X$  είναι η μοναδική θετικά ημιορισμένη λύση της DARE. Επιπλέον, ο κλειστός βρόγχος του διακριτού συστήματος

$$x_{k+1} = (A - BK)x_k$$

είναι διακριτός-ευσταθής (δηλαδή, όλες οι ιδιοτιμές είναι αυστηρά μέσα στον μοναδιαίο κύκλο) και η ελάχιστη τιμή της  $J_D(x)$  είναι  $x_0^T X x_0$ , όπου  $x_0$  είναι η δοσμένη αρχική τιμή.



**Ορισμός 4.2**

Η συμμετρική λύση  $X$  της DARE που κάνει τον πίνακα  $A-BK$ , όπου  $K = (R + B^T X B)^{-1} B^T X A$ , διακριτό-ευσταθή, καλείται διακριτή ευσταθής λύση της DARE.

**Παράδειγμα 4.2**

Έστω:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

Η λύση  $X$  της DARE (υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την Matlab συνάρτηση dlqr) είναι:

$$X = 10^3 \begin{bmatrix} 0.0051 & -0.0542 & 0.0421 \\ -0.542 & 1.0954 & -0.9344 \\ 0.0421 & -0.9344 & 0.8127 \end{bmatrix}$$

Ο διακριτός LQR πίνακας είναι:

$$K = [-0.0437, 2.5872, -3.4543]$$

Οι ιδιοτιμές του  $A-BK$  είναι: -0.4266, -0.2186, -0.1228. Έτσι,  $X$  είναι η διακριτή ευσταθής λύση.

**Λύση του προβλήματος σε MATLAB**

```
a=[-1 1 1;0 -2 0; 0 0 -3];
```

```
b=[1;2;3];
```

```
q=[1 0 0; 0 1 0;0 0 1];
```

```
r=1;
```

```
[x,l,g]=dare(a,b,q,r)
```

```
[k,s]=dlqr(a,b,q,r)
```

$\text{eig}(a-b*k)$

**Σημείωση MATLAB:** Η MATLAB συνάρτηση **lqrd** υπολογίζει τον πίνακα ανάδρασης διακριτού χρόνου, που δίνεται στο θεώρημα 4.2.

#### 4.2.3 Υπολογισμός Βέλτιστης Κατάστασης: Το Φίλτρο Kalman

Στην σχεδίαση ενός παρατηρητή, συνήθως αγνοούμε τον ‘θόρυβο’ στο σύστημα και υποθέτουμε ότι όλες οι εισοδοί δίνονται ακριβώς και όλες οι έξοδοι μετρώνται ακριβώς χωρίς καθόλου σφάλματα. Αλλά στην πράξη οι μετρήσεις πάντα επηρεάζονται απ’ τον θόρυβο. Γι’ αυτό είναι πιο πρακτικό να θεωρήσουμε ένα σύστημα με θόρυβο. Σε αυτήν την ενότητα θεωρούμε το πρόβλημα εύρεσης μιας βέλτιστης σταθερής κατάστασης υπολογισμού από αυτές από στοχαστικού συστήματος.

Θεωρούμε το στοχαστικό σύστημα:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Fw(t) \quad (4.4)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t)$$

όπου  $w(t)$  και  $v(t)$  παριστάνουν ‘θόρυβο’ στην είσοδο και στην έξοδο αντίστοιχα. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί μια γραμμική προσέγγιση  $\hat{x}(t)$  του  $x(t)$  απ’ όλες τις προηγούμενες και τωρινές εξόδους  $\{y(s), s \leq t\}$  που ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό σφάλμα:

$$E\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2, \quad \text{καθώς } t \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

Θεωρούμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

1. Το σύστημα είναι **ελέγξιμο** και **παρατηρήσιμο**. (4.6)

Σημειώνουμε ότι η υπόθεση ελεγχιμότητας υπονοεί ότι ο ‘θόρυβος’  $w(t)$  επηρεάζει όλες τις καταστάσεις του συστήματος και η παρατηρησιμότητα υπονοεί ότι η αθόρυβη έξοδος  $y(t) = Cx(t)$  περιέχει πληροφορία σχετικά με όλες τις καταστάσεις.

2. Τόσο ο  $w$  όσο και ο  $v$  είναι λευκοί-θόρυβοι, μηδενικών στοχαστικών διαδικασιών. Γι' αυτό για κάθε  $t$  και  $s$ :

$$E[w(t)] = 0 \quad , \quad E[v(t)] = 0 \quad (4.7)$$

$$E[w(t)w^T(s)] = W\delta(t-s) \quad (4.8)$$

$$E[v(t)v^T(s)] = V\delta(t-s) \quad (4.9)$$

όπου  $W$  και  $V$  είναι συμμετρικοί και θετικά ημιορισμένοι πίνακες συνδιασποράς και  $\delta(t-s)$  είναι η εξίσωση δέλτα του Dirac.

3. Οι επεξεργαστές θορύβου  $w$  και  $v$  δεν σχετίζονται ο ένας με τον άλλο. Γι' αυτό:

$$E[w(t)v^T(s)] = 0 \quad (4.10)$$

4. Η αρχική κατάσταση  $x_0$  είναι Gaussian μηδενική μέση τυχαία μεταβλητή με γνωστό πίνακα συνδιασποράς, ενώ  $w$  και  $v$  δεν σχετίζονται. Γι' αυτό:

$$E[x_0] = 0$$

$$E[x_0x_0^T] = S \quad , \quad E[x_0w^T(t)] = 0 \quad , \quad E[x_0v^T(t)] = 0 \quad (4.11)$$

όπου  $S$  είναι θετικά ορισμένος πίνακας συνδιασποράς.

Το ακόλουθο είναι ένα ευρέως γνωστό (σχεδόν κλασσικό) αποτέλεσμα της λύσης του παραπάνω προβλήματος χρησιμοποιώντας την αλγεβρική εξίσωση Riccati.

### **Θεώρημα 4.3**

Λαμβάνοντας υπόψη τις υποθέσεις (4.6-4.11), η καλύτερη τιμή μπορεί να παραχθεί μέσω του φίλτρου Kalman:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - K_f C)\hat{x}(t) + Bu(t) + K_f y(t) \quad , \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (4.12)$$

όπου  $K_f = X_f C^T V^{-1}$  και  $X_f$  είναι η συμμετρική θετικά ημιορισμένη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati:

$$AX + XA^T - XC^T V^{-1} CX + FWF^T = 0 \quad (4.13)$$

**Ορισμός 4.3**

Ο πίνακας  $K_f = X_f C^T V^{-1}$  καλείται **πίνακας φίλτρου**.

**Σημείωση:** Το αποτέλεσμα της εξόδου  $\hat{y}(t)$  δίνεται απ' την σχέση:  $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$ . Το σφάλμα ανάμεσα στην μετρήσιμη έξοδο και στην προβλέψιμη έξοδο  $C\hat{x}(t)$  δίνεται απ' το υπόλοιπο  $r(t)$ :

$$r(t) = y(t) - C\hat{x}(t) \quad , \quad \text{όπου } \hat{x} \text{ παράγεται απ' την (4.12).}$$

**Αλγόριθμος Υπολογισμού Κατάστασης του Στοχαστικού Συστήματος χρησιμοποιώντας το Φίλτρο Kalman**

**Είσοδοι:** 1. Οι πίνακες  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $F$  που καθορίζουν το σύστημα.

2. Οι πίνακες συνδιασποράς  $V$  και  $W$  (συμμετρικοί θετικά ορισμένοι).

**Έξοδοι:** Μια προσέγγιση  $\hat{x}(t)$  του  $x(t)$  έτσι ώστε  $E[\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2]$  να ελαχιστοποιείται καθώς το  $t \rightarrow \infty$ .

**Υποθέσεις:** (4.6)-(4.11)

**Βήμα 1<sup>ο</sup>:** Λαμβάνουμε την μοναδική συμμετρικά θετικά ορισμένη λύση  $X_f$  της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati:

$$AX_f + X_f A^T - X_f C^T V^{-1} C X_f + F W F^T = 0$$

**Βήμα 2<sup>ο</sup>:** Υπολογίζουμε τον πίνακα φίλτρου  $K_f = X_f C^T V^{-1}$ .

**Βήμα 3<sup>ο</sup>:** Λαμβάνουμε το  $\hat{x}(t)$  λύνοντας την (4.12).

Η αλγεβρική εξίσωση Riccati (4.13) είναι δυική με την CARE που προκύπτει απ' την λύση του LQR προβλήματος. Για να την διαχωρίσουμε απ' την CARE θα αναφέρεται ως Φίλτρο Αλγεβρικής Εξίσωσης Riccati συνεχούς χρόνου (CFARE).

**Παράδειγμα 4.3**

Θεωρούμε το στοχαστικό σύστημα:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t)$$

$$\text{όπου } A = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.005 & 2.4 & -32 \\ -0.14 & 0.44 & -1.3 & -30 \\ 0 & 0.018 & -1.6 & 1.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.14 & -0.12 \\ 0.36 & -8.6 \\ 0.35 & 0.009 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57.3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Παίρνουμε } W = BB^T, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = I_{4 \times 4}$$

**Βήμα 1<sup>ο</sup>**: Η συμμετρική θετικά ορισμένη λύση  $X_f$  της CFARE

$$AX + XA^T - XC^T V^{-1} CX + FWF^T = 0$$

είναι:

$$X_f = \begin{bmatrix} 8.3615 & 0.0158 & 0.0187 & -0.0042 \\ 0.0158 & 9.0660 & 0.0091 & -0.0031 \\ 0.0187 & 0.0091 & 0.0250 & 0.0040 \\ -0.0042 & -0.0031 & 0.0040 & 0.0016 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 2<sup>ο</sup>:** Ο πίνακας φίλτρου  $K_f = X_f C^T V^{-1}$  είναι:

$$K_f = \begin{bmatrix} 0.0158 & -0.2405 \\ 9.0660 & -0.1761 \\ 0.0091 & 0.2289 \\ -0.0031 & 0.0893 \end{bmatrix}$$

Ο υπολογισμός της βέλτιστης κατάστασης του  $\hat{x}(t)$  δίνεται από:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - K_f C)\hat{x}(t) + Bu(t) + K_f y(t)$$

Οι ιδιοτιμές φίλτρου, δηλαδή οι ιδιοτιμές του  $A - K_f C$ , είναι  $\{-0.0196, -8.6168, -3.3643 \pm j2.9742\}$ .

**Σημείωση MATLAB:** Η MATLAB συνάρτηση **kalman** σχεδιάζει έναν εκτιμητή κατάστασης Kalman με δεδομένο το μοντέλο χώρου κατάστασης και τα δεδομένα συνδιασποράς διαδικασίας και θορύβου.

#### 4.2.4 Φίλτρο Kalman για Σύστημα Διακριτού χρόνου

Θεωρούμε τώρα το διακριτό στοχαστικό σύστημα:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Fw_k \quad (4.14)$$

$$y_k = Cx_k + v_k$$

όπου  $w$  και  $v$  είναι ο προβλέψιμος και μετρήσιμος θόρυβος. Τότε, κάτω απ' τις ίδιες υποθέσεις όπως στην περίπτωση συνεχούς χρόνου, μπορεί ναδειχθεί ότι η κατάσταση σφάλματος συνδιασποράς ελαχιστοποιείται σε ευσταθή κατάσταση, όταν το φίλτρο δίνεται απ' την σχέση:

$$K_d = X_d C^T (CX_d C^T + V)^{-1} \quad (4.15)$$

όπου  $X_d$  είναι η συμμετρική θετικά ορισμένη λύση της διακριτής εξίσωσης Riccati:

$$X = A(X - XC^T(CXC^T + V)^{-1}CX)A^T + FWF^T \quad (4.16)$$

και  $V$  και  $W$  είναι οι συμμετρικοί θετικά ορισμένοι πίνακες συνδιασποράς, έτσι ώστε:

$$E(v_k v_j^T) = V\delta_{kj} \quad , \quad E(w_k w_j^T) = W\delta_{kj} \quad (4.17)$$

$$\text{και } \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases} \quad (4.18)$$

#### **Ορισμός 4.4**

Αναλογικά με την περίπτωση συνεχούς χρόνου, η διακριτή εξίσωση Riccati αναγόμενη σε διακριτό φίλτρο Kalman, θα καλείται Φίλτρο Αλγεβρικής Εξίσωσης σε διακριτό χρόνο, ή εν συντομία **DFARE**.

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- [1] Sergio Bittanti (Ed) (1989). *The Riccati Equation in Control, Systems and Signals*. Pitagora Editrice, Bologna.
- [2] Sergio Bittanti, Alan J. Laub, Jan C. Willems (Eds) (1991). *The Riccati Equation*. Springer-Verlag, Berlin.
- [3] P. Hr. Petkov, N. D. Christov and M. M. Konstantinov (1991). *Computational Methods for Linear Control Systems*. Prentice Hall, Englewood Clifts, NJ.
- [4] Donald E. Kirk (1998). *Optimal Control Theory, An Introduction*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York.
- [5] Μ. Γουσίδου-Κουτίτα (2002). *Αριθμητικές Μέθοδοι με Εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου (Στοιχεία από το βιβλίο Computational Methods for Linear Control Systems των Petkov, Christov και Konstantinov)*. Θεσσαλονίκη.
- [6] B. N. Datta (2003). *Numerical Methods for Linear Control Systems Design and Analysis*. Illinois.
- [7] *Matlab 6.1- Help Files*

**ΧΡΗΣΙΜΑ SITES**

- [1] [www.ams.org/mathscinet/search](http://www.ams.org/mathscinet/search)
- [2] [anemos.math.auth.gr/datta.zip](http://anemos.math.auth.gr/datta.zip)



**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ**

Στην ενότητα αυτή γίνεται υλοποίηση των αλγορίθμων σε Matlab, για λύση της εξίσωσης Riccati με μορφή πίνακα με την μέθοδο Newton, καθώς και με την μέθοδο συνάρτησης πρόσημου πίνακα που αναφέρονται στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο.

Επίλυση της συνεχούς εξίσωσης Riccati με μορφή πίνακα, με την μέθοδο Newton.

```
a=input('give matrix a=')
b=input('give matrix b=')
q=input('give matrix q=')
r=input('give matrix r=')
h=eig(a)
[x,z]=size(a)
if h<0
    k0=zeros(x,z)
else
    for i=1:size(a,1)
        m(i)=-i
    end
    k0=place(a,b,[m])
end
a0=a-b*k0
q0=q+transpose(k0)*r*k0
p0=lyap(transpose(a0),q0)
k1=inv(r)*transpose(b)*p0
a1=a-b*k1
q1=q+transpose(k1)*r*k1
p1=lyap(transpose(a1),q1)
m= norm(p1-p0,'fro')/norm(p0,'fro')
while norm(p1-p0,'fro')/norm(p0,'fro')>10^(-10)
    p0=p1
```

```

a1=a-b*k1
q1=q+transpose(k1)*r*k1
p1=lyap(transpose(a1),q1)
m= norm(p1-p0,'fro')/norm(p0,'fro')
end
disp ('p1 solution of Riccati equation with Newton method')

```

Στην περίπτωση που θέλουμε να ορίζουμε εμείς το  $K_0$  το πρόγραμμα μετασχηματίζεται ως εξής:

```

a=input ('give matrix a=')
b=input ('give matrix b=')
q=input ('give matrix q=')
r=input ('give matrix r=')
k0=input ('give matrix k0=')
if eig(a-b*k0)<0
    disp ('system stable')
else disp (system unstable, give another k0')
end
a0=a-b*k0
q0=q+transpose(k0)*r*k0
p0=lyap(transpose(a0),q0)
k1=inv(r)*transpose(b)*p0
a1=a-b*k1
q1=q+transpose(k1)*r*k1
p1=lyap(transpose(a1),q1)
m= norm(p1-p0,'fro')/norm(p0,'fro')
while norm(p1-p0,'fro')/norm(p0,'fro')>10^(-10)
    p0=p1
    a1=a-b*k1
    q1=q+transpose(k1)*r*k1
    p1=lyap(transpose(a1),q1)

```

```
m= norm(p1-p0,'fro')/norm(p0,'fro')
end
disp('p1 solution of Riccati equation with Newton method')
```

Εφαρμόζοντας το παραπάνω πρόγραμμα στο παράδειγμα 3.3 βρίσκουμε μια προσεγγιστική λύση της εξίσωσης Riccati:

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -5 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} 95 & 106 & -54 \\ 106 & 258 & 44 \\ -54 & 44 & 109 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k0 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

system stable

$$a0 = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -13 \\ -38 & -30 & 18 \\ 44 & 3 & -39 \end{bmatrix}$$

$$p0 = \begin{bmatrix} 5.1789 & 0.4954 & -2.1615 \\ 0.4954 & 4.8591 & 2.0851 \\ -2.1615 & 2.0851 & 3.4008 \end{bmatrix}$$

$$k1 = \begin{bmatrix} -8.4205 & 3.0943 & 16.6281 \\ -9.8172 & -22.7059 & -4.8632 \end{bmatrix}$$

$$a1 = \begin{bmatrix} 10.0238 & -27.8945 & -41.1195 \\ -72.3478 & -109.2466 & 28.5682 \\ 76.1815 & -4.0484 & -127.1619 \end{bmatrix}$$

$$q1 = \begin{bmatrix} 262.2835 & 302.8538 & -146.2740 \\ 302.8538 & 783.1325 & 205.8766 \\ -146.2740 & 205.8766 & 409.1463 \end{bmatrix}$$

$$p1 = \begin{bmatrix} 2.4823 & 0.9217 & -1.1727 \\ 0.9217 & 3.3041 & 1.2095 \\ -1.1727 & 1.2095 & 2.2597 \end{bmatrix}$$

m=0.4293

$$p0 = \begin{bmatrix} 2.4823 & 0.9217 & -1.1727 \\ 0.9217 & 3.3041 & 1.2095 \\ -1.1727 & 1.2095 & 2.2597 \end{bmatrix}$$

$$a1 = \begin{bmatrix} 10.0238 & -27.8945 & -41.1195 \\ -72.3478 & -109.2466 & 28.5682 \\ 76.1815 & -4.0484 & -127.1619 \end{bmatrix}$$

$$q1 = \begin{bmatrix} 262.2835 & 302.8538 & -146.2740 \\ 302.8538 & 783.1325 & 205.8766 \\ -146.2740 & 205.8766 & 409.1463 \end{bmatrix}$$

$$p1 = \begin{bmatrix} 2.4823 & 0.9217 & -1.1727 \\ 0.9217 & 3.3041 & 1.2095 \\ -1.1727 & 1.2095 & 2.2597 \end{bmatrix}$$

m=0

p1 is best solution of Riccati equation with Newton method.

Επίλυση της διακριτής εξίσωσης Riccati με μορφή πίνακα, με την μέθοδο Newton.

```

a=input('give matrix a=')
b=input('give matrix b=')
q=input('give matrix q=')
r=input('give matrix r=')
k0=input('give matrix k0=')
a0=a-b*k0
q0=q+transpose(k0)*r*k0
p0=dlyap(transpose(a0),q0)
k1=inv(r+transpose(b)*p0*b)*transpose(b)*p0*a
a1=a-b*k1
q1=q+transpose(k1)*r*k1
p1=dlyap(transpose(a1),q1)
while norm(p1-p0,'fro')/norm(p0,'fro')>10^(-6)
    p0=p1
    a1=a-b*k1
    q1=q+transpose(k1)*r*k1
    p1=dlyap(transpose(a1),q1)
end

```

disp ('p1 is best solution of riccati equation')

give matrix a=[-1 1 1;0 -2 0;0 0 -3]

$$a = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

give matrix b=[1;1;1]

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

give matrix q=eye(3)

$$q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

give matrix r=1

r=1

give matrix k0=[-0.0192 2.6154 -6.8077]

$$k0 = [-0.0192 \quad 2.6154 \quad -6.8077]$$

$$a0 = \begin{bmatrix} -0.9808 & -1.6154 & 7.8077 \\ 0.0192 & -4.6154 & 6.8077 \\ 0.0192 & -2.6154 & 3.8077 \end{bmatrix}$$

$$q_0 = \begin{bmatrix} 1.0004 & -0.0502 & 0.1307 \\ -0.0502 & 7.8403 & -17.8049 \\ 0.1307 & -17.8049 & 47.3448 \end{bmatrix}$$

$$p_0 = 10^4 \begin{bmatrix} 0.0008 & -0.0137 & 0.0167 \\ -0.0137 & 0.6795 & -0.9468 \\ 0.0167 & -0.9468 & 1.3338 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = [-0.0302 \quad 4.4702 \quad -9.5370]$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} -0.9698 & -3.4702 & 10.5370 \\ 0.0302 & -6.4702 & 9.5370 \\ 0.0302 & -4.4702 & 6.5370 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1.0009 & -0.1349 & 0.2877 \\ -0.1349 & 20.9825 & -42.6319 \\ 0.2877 & -42.6319 & 91.9536 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 0.0067 & -0.0892 & 0.1028 \\ -0.0892 & 2.0277 & -2.5634 \\ 0.1028 & -2.5634 & 3.3096 \end{bmatrix}$$

$$p_0 = 10^3 \begin{bmatrix} 0.0067 & -0.0892 & 0.1028 \\ -0.0892 & 2.0277 & -2.5634 \\ 0.1028 & -2.5634 & 3.3096 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} -0.9698 & -3.4702 & 10.5370 \\ 0.0302 & -6.4702 & 9.5370 \\ 0.0302 & -4.4702 & 6.5370 \end{bmatrix}$$

$$q1 = \begin{bmatrix} 1.009 & -0.1349 & 0.2877 \\ -0.1349 & 20.9825 & -42.6319 \\ 0.2877 & -42.6319 & 91.9536 \end{bmatrix}$$

$$p1 = 10^3 \begin{bmatrix} 0.0067 & -0.0892 & 0.1028 \\ -0.0892 & 2.0277 & -2.5634 \\ 0.1028 & -2.5634 & 3.3096 \end{bmatrix}$$

p1 is best solution of Riccati equation

Επίλυση της συνεχούς εξίσωσης Riccati με μορφή πίνακα, με την μέθοδο συνάρτησης πρόσημου πίνακα

```

a=input('give matrix a=')
q=input('give matrix q=')
s=input('give matrix s=')
%Ορίζω Χαμιλτονιανό πίνακα
h=[a -s;-q -transpose(a)]
[k,l]=size(a)
w0=h
w1=w0-1/2*(w0-inv(w0))
while norm(w1-w0,'fro')/norm(w0,'fro')>10^(-6)
    w0=w1
    w1=w0-1/2*(w0-inv(w0))
end
disp('w1 sign matrix of h')
w11=w1(1:k,1:k)
w12=w1(1:k,k+1:2*k)
w21=w1(k+1:2*k,1:k)
w22=w1(k+1:2*k,k+1:2*k)
m=[w12;w22+eye(k)]
n=[w11+eye(k);w21]

```



```

% QR-παραγοντοποίηση πίνακα m
% Υπολογίζω στοιχειώδη αντανάκλαση
[x,z]=size(m);
q1=eye(x)
if x>z
    for k=1:z
        g=sign(m(k,k))*norm(m(k:x,k))
        u=m(k:x,k)+g*eye(x+1-k,1)
        U=eye(x+1-k)-[2*u*transpose(u)]/(norm(u))^2

        u=[eye(k-1,x);zeros(length(m(k:x,k)),k-1) U]
        q1=q1*u
    % Ο r είναι πάνω τριγωνικός
        r=inv(q1)*m
    end
    q1=q1(1:x,1:z)
    r=r(1:z,1:z)
    % αν x<z αναγωγή του m σε πάνω τραπεζοειδή

else
    for k=1:x-1
        g=sign(m(k,k))*norm(m(k:x,k));
        u=m(k:x,k)+g*eye(x+1-k,1);
        U=eye(x+1-k)-[2*u*transpose(u)]/(norm(u))^2
        disp(q1)
        disp(r)
    end
end
p=inv(r)*transpose(q1)*(-n)

```

Εφαρμόζοντας το παραπάνω πρόγραμμα στο παράδειγμα 3.4 βρίσκουμε την λύση της συνεχούς εξίσωσης Riccati:

give matrix  $a=[3 \ 1 \ -3; 2 \ -5 \ 3; -1 \ -2 \ 1]$

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

give matrix  $q=[95 \ 106 \ -54; 106 \ 258 \ 44; -54 \ 44 \ 109]$

$$q = \begin{bmatrix} 95 & 106 & -54 \\ 106 & 258 & 44 \\ -54 & 44 & 109 \end{bmatrix}$$

give matrix  $s=[5 \ -1 \ 15; -1 \ 34 \ -29; 15 \ -29 \ 65]$

$$s = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 15 \\ -1 & 34 & -29 \\ 15 & -29 & 65 \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 & -5 & 1 & 15 \\ 2 & -5 & 3 & 1 & -34 & 29 \\ -1 & -2 & 1 & -15 & 29 & -65 \\ -95 & -106 & 54 & -3 & -2 & 1 \\ -106 & -258 & -44 & -1 & 5 & 2 \\ 54 & -44 & -109 & 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$k = 3$$

$$l = 3$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 & -5 & 1 & 15 \\ 2 & -5 & 3 & 1 & -34 & 29 \\ -1 & -2 & 1 & -15 & 29 & -65 \\ -95 & -106 & 54 & -3 & -2 & 1 \\ -106 & -258 & -44 & -1 & 5 & 2 \\ 54 & -44 & -109 & 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$w1 = \begin{bmatrix} 1.2585 & 0.5741 & -1.4111 & -2.5358 & 0.5140 & -7.5139 \\ 1.1334 & -2.5397 & 1.4514 & 0.5140 & -17.0068 & 14.5045 \\ -0.6854 & -0.9466 & 0.5666 & -7.5139 & 14.5045 & -32.5061 \\ -47.8821 & -52.9822 & 27.0929 & -1.2585 & -1.1334 & 0.6854 \\ -52.9822 & -129.0032 & -22.0046 & -0.5741 & 2.5397 & 0.9466 \\ 27.0929 & -22.0046 & -54.5300 & 1.4111 & -1.4514 & -0.5666 \end{bmatrix}$$

$$w0 = \begin{bmatrix} 1.2585 & 0.5741 & -1.4111 & -2.5358 & 0.5140 & -7.5139 \\ 1.1334 & -2.5397 & 1.4514 & 0.5140 & -17.0068 & 14.5045 \\ -0.6854 & -0.9466 & 0.5666 & -7.5139 & 14.5045 & -32.5061 \\ -47.8821 & -52.9822 & 27.0929 & -1.2585 & -1.1334 & 0.6854 \\ -52.9822 & -129.0032 & -22.0046 & -0.5741 & 2.5397 & 0.9466 \\ 27.0929 & -22.0046 & -54.5300 & 1.4111 & -1.4514 & -0.5666 \end{bmatrix}$$

$$w1 = \begin{bmatrix} 0.2370 & 0.4076 & -0.5613 & -1.3264 & 0.2798 & -3.7803 \\ 0.7836 & -1.3347 & 0.6467 & 0.2798 & -8.5152 & 7.2602 \\ -0.6435 & -0.3861 & 0.3917 & -3.7803 & 7.2602 & -16.2658 \\ -24.5641 & -26.4637 & 13.6994 & -0.2370 & -0.7836 & 0.6435 \\ -26.4637 & -64.5147 & -11.0136 & -0.4076 & 1.3347 & 0.3861 \\ 13.6994 & -11.0136 & -27.3197 & 0.5613 & -0.6467 & -0.3917 \end{bmatrix}$$

$$w0 = \begin{bmatrix} 0.2370 & 0.4076 & -0.5613 & -1.3264 & 0.2798 & -3.7803 \\ 0.7836 & -1.3347 & 0.6467 & 0.2798 & -8.5152 & 7.2602 \\ -0.6435 & -0.3861 & 0.3917 & -3.7803 & 7.2602 & -16.2658 \\ -24.5641 & -26.4637 & 13.6994 & -0.2370 & -0.7836 & 0.6435 \\ -26.4637 & -64.5147 & -11.0136 & -0.4076 & 1.3347 & 0.3861 \\ 13.6994 & -11.0136 & -27.3197 & 0.5613 & -0.6467 & -0.3917 \end{bmatrix}$$

$$w1 = \begin{bmatrix} -0.3679 & 0.3537 & -0.1021 & -0.7369 & 0.1684 & -1.9225 \\ 0.6616 & -0.7490 & 0.2246 & 0.1684 & -4.2752 & 3.6426 \\ -0.6940 & -0.0828 & 0.3312 & -1.9225 & 3.6426 & -8.1603 \\ -13.0649 & -13.2038 & 7.0480 & 0.3679 & -0.6616 & 0.6940 \\ -13.2038 & -32.3050 & -5.5360 & -0.3537 & 0.7490 & 0.0828 \\ 7.0480 & -5.5360 & -13.7511 & 0.1021 & -0.2246 & -0.3312 \end{bmatrix}$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} -0.3679 & 0.3537 & -0.1021 & -0.7369 & 0.1684 & -1.9225 \\ 0.6616 & -0.7490 & 0.2246 & 0.1684 & -4.2752 & 3.6426 \\ -0.6940 & -0.0828 & 0.3312 & -1.9225 & 3.6426 & -8.1603 \\ -13.0649 & -13.2038 & 7.0480 & 0.3679 & -0.6616 & 0.6940 \\ -13.2038 & -32.3050 & -5.5360 & -0.3537 & 0.7490 & 0.0828 \\ 7.0480 & -5.5360 & -13.7511 & 0.1021 & -0.2246 & -0.3312 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} -0.6822 & 0.3317 & 0.1307 & -0.4470 & 0.1140 & -1.0029 \\ 0.6094 & -0.4613 & 0.0094 & 0.1140 & -2.1633 & 1.8409 \\ -0.7263 & 0.0768 & 0.3067 & -1.0029 & 1.8409 & -4.1376 \\ -7.3606 & -6.5884 & 3.7493 & 0.6822 & -0.6094 & 0.7263 \\ -6.5884 & -16.2818 & -2.8364 & -0.3317 & 0.4613 & -0.0768 \\ 3.7493 & -2.8364 & -7.0291 & -0.1307 & -0.0094 & -0.3067 \end{bmatrix}$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} -0.6822 & 0.3317 & 0.1307 & -0.4470 & 0.1140 & -1.0029 \\ 0.6094 & -0.4613 & 0.0094 & 0.1140 & -2.1633 & 1.8409 \\ -0.7263 & 0.0768 & 0.3067 & -1.0029 & 1.8409 & -4.1376 \\ -7.3606 & -6.5884 & 3.7493 & 0.6822 & -0.6094 & 0.7263 \\ -6.5884 & -16.2818 & -2.8364 & -0.3317 & 0.4613 & -0.0768 \\ 3.7493 & -2.8364 & -7.0291 & -0.1307 & -0.0094 & -0.3067 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} -0.8336 & 0.3214 & 0.2430 & -0.3074 & 0.0875 & -0.5597 \\ 0.5846 & -0.3230 & -0.1006 & 0.0875 & -1.1227 & 0.9538 \\ -0.7342 & 0.1657 & 0.2977 & -0.5597 & 0.9538 & -2.1849 \\ -4.5527 & -3.3127 & 2.1420 & 0.8336 & -0.5846 & 0.7342 \\ -3.3127 & -8.4320 & -1.5628 & -0.3214 & 0.3230 & -0.1657 \\ 2.1420 & -1.5628 & -3.7870 & -0.2430 & 0.1006 & -0.2977 \end{bmatrix}$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} -0.8336 & 0.3214 & 0.2430 & -0.3074 & 0.0875 & -0.5597 \\ 0.5846 & -0.3230 & -0.1006 & 0.0875 & -1.1227 & 0.9538 \\ -0.7342 & 0.1657 & 0.2977 & -0.5597 & 0.9538 & -2.1849 \\ -4.5527 & -3.3127 & 2.1420 & 0.8336 & -0.5846 & 0.7342 \\ -3.3127 & -8.4320 & -1.5628 & -0.3214 & 0.3230 & -0.1657 \\ 2.1420 & -1.5628 & -3.7870 & -0.2430 & 0.1006 & -0.2977 \end{bmatrix}$$

$$w1 = \begin{bmatrix} -0.8988 & 0.3176 & 0.2916 & -0.2470 & 0.0756 & -0.3675 \\ 0.5743 & -0.2634 & -0.1591 & 0.0756 & -0.6316 & 0.5361 \\ -0.7240 & 0.2251 & 0.2985 & -0.3675 & 0.5361 & -1.3134 \\ -3.2315 & -1.7393 & 1.4142 & 0.8988 & -0.5743 & 0.7240 \\ -1.7393 & -4.8047 & -1.0582 & -0.3176 & 0.2634 & -0.2251 \\ 1.4142 & -1.0582 & -2.3761 & -0.2916 & 0.1591 & -0.2985 \end{bmatrix}$$

$$w0 = \begin{bmatrix} -0.8988 & 0.3176 & 0.2916 & -0.2470 & 0.0756 & -0.3675 \\ 0.5743 & -0.2634 & -0.1591 & 0.0756 & -0.6316 & 0.5361 \\ -0.7240 & 0.2251 & 0.2985 & -0.3675 & 0.5361 & -1.3134 \\ -3.2315 & -1.7393 & 1.4142 & 0.8988 & -0.5743 & 0.7240 \\ -1.7393 & -4.8047 & -1.0582 & -0.3176 & 0.2634 & -0.2251 \\ 1.4142 & -1.0582 & -2.3761 & -0.2916 & 0.1591 & -0.2985 \end{bmatrix}$$

$$w1 = \begin{bmatrix} -0.9179 & 0.3171 & 0.3062 & -0.2288 & 0.0714 & -0.3093 \\ 0.5717 & -0.2460 & -0.1900 & 0.0714 & -0.4345 & 0.3697 \\ -0.7042 & 0.2685 & 0.3046 & -0.3093 & 0.3697 & -1.0201 \\ -2.7058 & -1.0770 & 1.1567 & 0.9179 & -0.5717 & 0.7042 \\ -1.0770 & -3.4361 & -0.9644 & -0.3171 & 0.2460 & -0.2685 \\ 1.1567 & -0.9644 & -1.9443 & -0.3062 & 0.1900 & -0.3046 \end{bmatrix}$$

$$w0 = \begin{bmatrix} -0.9179 & 0.3171 & 0.3062 & -0.2288 & 0.0714 & -0.3093 \\ 0.5717 & -0.2460 & -0.1900 & 0.0714 & -0.4345 & 0.3697 \\ -0.7042 & 0.2685 & 0.3046 & -0.3093 & 0.3697 & -1.0201 \\ -2.7058 & -1.0770 & 1.1567 & 0.9179 & -0.5717 & 0.7042 \\ -1.0770 & -3.4361 & -0.9644 & -0.3171 & 0.2460 & -0.2685 \\ 1.1567 & -0.9644 & -1.9443 & -0.3062 & 0.1900 & -0.3046 \end{bmatrix}$$

$$w1 = \begin{bmatrix} -0.9198 & 0.3174 & 0.3078 & -0.2268 & 0.0707 & -0.3028 \\ 0.5717 & -0.2442 & -0.2001 & 0.0707 & -0.3878 & 0.3307 \\ -0.6936 & 0.2863 & 0.3082 & -0.3028 & 0.3307 & -0.9718 \\ -2.5829 & -0.9083 & 1.1088 & 0.9198 & -0.5717 & 0.6936 \\ -0.9083 & -3.1446 & -0.9832 & -0.3174 & 0.2442 & -0.2863 \\ 1.1088 & -0.9832 & -1.8927 & -0.3078 & 0.2001 & -0.3082 \end{bmatrix}$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} -0.9198 & 0.3174 & 0.3078 & -0.2268 & 0.0707 & -0.3028 \\ 0.5717 & -0.2442 & -0.2001 & 0.0707 & -0.3878 & 0.3307 \\ -0.6936 & 0.2863 & 0.3082 & -0.3028 & 0.3307 & -0.9718 \\ -2.5829 & -0.9083 & 1.1088 & 0.9198 & -0.5717 & 0.6936 \\ -0.9083 & -3.1446 & -0.9832 & -0.3174 & 0.2442 & -0.2863 \\ 1.1088 & -0.9832 & -1.8927 & -0.3078 & 0.2001 & -0.3082 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} -0.9198 & 0.3174 & 0.3079 & -0.2268 & 0.0707 & -0.3027 \\ 0.5717 & -0.2442 & -0.2009 & 0.0707 & -0.3849 & 0.3282 \\ -0.6926 & 0.2877 & 0.3086 & -0.3027 & 0.3282 & -0.9697 \\ -2.5753 & -0.8972 & 1.1063 & 0.9198 & -0.5717 & 0.6926 \\ -0.8972 & -3.1277 & -0.9862 & -0.3174 & 0.2442 & -0.2877 \\ 1.1063 & -0.9862 & -1.8916 & -0.3079 & 0.2009 & -0.3086 \end{bmatrix}$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} -0.9198 & 0.3174 & 0.3079 & -0.2268 & 0.0707 & -0.3027 \\ 0.5717 & -0.2442 & -0.2009 & 0.0707 & -0.3849 & 0.3282 \\ -0.6926 & 0.2877 & 0.3086 & -0.3027 & 0.3282 & -0.9697 \\ -2.5753 & -0.8972 & 1.1063 & 0.9198 & -0.5717 & 0.6926 \\ -0.8972 & -3.1277 & -0.9862 & -0.3174 & 0.2442 & -0.2877 \\ 1.1063 & -0.9862 & -1.8916 & -0.3079 & 0.2009 & -0.3086 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} -0.9198 & 0.3174 & 0.3079 & -0.2268 & 0.0707 & -0.3027 \\ 0.5717 & -0.2442 & -0.2009 & 0.0707 & -0.3849 & 0.3282 \\ -0.6926 & 0.2877 & 0.3086 & -0.3027 & 0.3282 & -0.9697 \\ -2.5752 & -0.8972 & 1.1063 & 0.9198 & -0.5717 & 0.6926 \\ -0.8972 & -3.1276 & -0.9862 & -0.3174 & 0.2442 & -0.2877 \\ 1.1063 & -0.9862 & -1.8916 & -0.3079 & 0.2009 & -0.3086 \end{bmatrix}$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} -0.9198 & 0.3174 & 0.3079 & -0.2268 & 0.0707 & -0.3027 \\ 0.5717 & -0.2442 & -0.2009 & 0.0707 & -0.3849 & 0.3282 \\ -0.6926 & 0.2877 & 0.3086 & -0.3027 & 0.3282 & -0.9697 \\ -2.5753 & -0.8972 & 1.1063 & 0.9198 & -0.5717 & 0.6926 \\ -0.8972 & -3.1277 & -0.9862 & -0.3174 & 0.2442 & -0.2877 \\ 1.1063 & -0.9862 & -1.8916 & -0.3079 & 0.2009 & -0.3086 \end{bmatrix}$$

$$w1 = \begin{bmatrix} -0.9198 & 0.3174 & 0.3079 & -0.2268 & 0.0707 & -0.3027 \\ 0.5717 & -0.2442 & -0.2009 & 0.0707 & -0.3849 & 0.3282 \\ -0.6926 & 0.2877 & 0.3086 & -0.3027 & 0.3282 & -0.9697 \\ -2.5752 & -0.8972 & 1.1063 & 0.9198 & -0.5717 & 0.6926 \\ -0.8972 & -3.1276 & -0.9862 & -0.3174 & 0.2442 & -0.2877 \\ 1.1063 & -0.9862 & -1.8916 & -0.3079 & 0.2009 & -0.3086 \end{bmatrix}$$

w1 sign matrix of h

$$w11 = \begin{bmatrix} -0.9198 & 0.3174 & 0.3079 \\ 0.5717 & -0.2442 & -0.2009 \\ -0.6926 & 0.2877 & 0.3086 \end{bmatrix}$$

$$w12 = \begin{bmatrix} -0.2268 & 0.0707 & -0.3027 \\ 0.0707 & -0.3849 & 0.3282 \\ -0.3027 & 0.3282 & -0.9697 \end{bmatrix}$$

$$w21 = \begin{bmatrix} -2.5752 & -0.8972 & 1.1063 \\ -0.8972 & -3.1276 & -0.9862 \\ 1.1063 & -0.9862 & -1.8916 \end{bmatrix}$$

$$w22 = \begin{bmatrix} 0.9198 & -0.5717 & 0.6926 \\ -0.3174 & 0.2442 & -0.2877 \\ -0.3027 & 0.3282 & -0.9697 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} -0.2268 & 0.0707 & -0.3027 \\ 0.0707 & -0.3849 & 0.3282 \\ -0.3027 & 0.3282 & -0.9697 \\ 1.9198 & -0.5717 & 0.6926 \\ -0.3174 & 1.2442 & -0.2877 \\ -0.3079 & 0.2009 & 0.6914 \end{bmatrix}$$

$$n = \begin{bmatrix} 0.0802 & 0.3174 & 0.3079 \\ 0.5717 & 0.7558 & -0.2009 \\ -0.6926 & 0.2877 & 1.3086 \\ -2.5752 & -0.8972 & 1.1063 \\ -0.8972 & -3.1276 & -0.9862 \\ 1.1063 & -0.9862 & -1.8916 \end{bmatrix}$$

$$q1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g = -2.0073$$

$$u = \begin{bmatrix} -2.2341 \\ 0.0707 \\ -0.3027 \\ 1.9198 \\ -0.3174 \\ -0.3079 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -0.1130 & 0.3052 & -0.1508 & 0.9564 & -0.1581 & -0.1534 \\ 0.0352 & 0.9989 & 0.0048 & -0.0303 & 0.0050 & 0.0049 \\ -0.1508 & 0.0048 & 0.9796 & 0.1296 & -0.0214 & -0.0208 \\ 0.9564 & -0.0303 & 0.1296 & 0.1781 & 0.1359 & 0.1318 \\ -0.1581 & 0.0050 & -0.0214 & 0.1359 & 0.9775 & -0.0218 \\ -0.1534 & 0.0049 & -0.0208 & 0.1318 & -0.0218 & 0.9789 \end{bmatrix}$$



$$u = \begin{bmatrix} -0.1130 & 0.3052 & -0.1508 & 0.9564 & -0.1581 & -0.1534 \\ 0.0352 & 0.9989 & 0.0048 & -0.0303 & 0.0050 & 0.0049 \\ -0.1508 & 0.0048 & 0.9796 & 0.1296 & -0.0214 & -0.0208 \\ 0.9564 & -0.0303 & 0.1296 & 0.1781 & 0.1359 & 0.1318 \\ -0.1581 & 0.0050 & -0.0214 & 0.1359 & 0.9775 & -0.0218 \\ -0.1534 & 0.0049 & -0.0208 & 0.1318 & -0.0218 & 0.9789 \end{bmatrix}$$

$$q1 = \begin{bmatrix} -0.1130 & 0.3052 & -0.1508 & 0.9564 & -0.1581 & -0.1534 \\ 0.0352 & 0.9989 & 0.0048 & -0.0303 & 0.0050 & 0.0049 \\ -0.1508 & 0.0048 & 0.9796 & 0.1296 & -0.0214 & -0.0208 \\ 0.9564 & -0.0303 & 0.1296 & 0.1781 & 0.1359 & 0.1318 \\ -0.1581 & 0.0050 & -0.0214 & 0.1359 & 0.9775 & -0.0218 \\ -0.1534 & 0.0049 & -0.0208 & 0.1318 & -0.0218 & 0.9789 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 2.0073 & -0.8454 & 0.7939 \\ 0 & -0.3559 & 0.2935 \\ 0 & 0.2041 & -0.8212 \\ 0 & 0.2155 & -0.2496 \\ 0 & 1.1141 & -0.1319 \\ 0 & 0.0746 & 0.8425 \end{bmatrix}$$

$$g = -1.4735$$

$$u = \begin{bmatrix} -1.8584 \\ 0.3282 \\ -0.5717 \\ 1.2442 \\ 0.2009 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -0.2612 & 0.2227 & -0.3880 & 0.8444 & 0.1363 \\ 0.2227 & 0.9607 & 0.0685 & -0.1491 & -0.0241 \\ -0.3880 & 0.0685 & 0.8806 & 0.2598 & 0.0419 \\ 0.8444 & -0.1491 & 0.2598 & 0.4347 & 0.0913 \\ 0.1363 & -0.0241 & 0.0419 & -0.0913 & 0.9853 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2612 & 0.2227 & -0.3880 & 0.8444 & 0.1363 \\ 0 & 0.2227 & 0.9607 & 0.0685 & -0.1491 & -0.0241 \\ 0 & -0.3880 & 0.0685 & 0.8806 & 0.2598 & 0.0419 \\ 0 & 0.8444 & -0.1491 & 0.2598 & 0.4347 & 0.0913 \\ 0 & 0.1363 & -0.0241 & 0.0419 & -0.0913 & 0.9853 \end{bmatrix}$$

$$q1 = \begin{bmatrix} -0.1130 & -0.5683 & -0.0442 & 0.7707 & 0.2460 & -0.0881 \\ 0.0352 & -0.2432 & 0.2241 & -0.4124 & 0.8366 & 0.1391 \\ -0.1508 & 0.1458 & 0.9547 & 0.1729 & -0.1158 & -0.0360 \\ 0.9564 & 0.1004 & 0.1065 & 0.2183 & 0.0484 & 0.1177 \\ -0.1581 & 0.7637 & -0.1554 & 0.3693 & 0.4696 & -0.1038 \\ -0.1534 & 0.0580 & -0.0302 & 0.1482 & -0.0574 & 0.9731 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 2.0073 & -0.8454 & 0.7939 \\ 0 & 1.0057 & -0.1593 \\ 0 & -0.0364 & -0.7412 \\ 0 & 0.6344 & -0.3889 \\ 0 & 0.2024 & 0.1712 \\ 0 & -0.0725 & 0.8915 \end{bmatrix}$$

$$g = -1.4075$$

$$u = \begin{bmatrix} -2.3772 \\ 0.6926 \\ -0.2877 \\ 0.6914 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -0.6890 & 0.4921 & -0.2044 & 0.4913 \\ 0.4921 & 0.8566 & 0.0596 & -0.1431 \\ -0.2044 & 0.0596 & 0.9753 & 0.0595 \\ 0.4913 & -0.1431 & 0.0595 & 0.8571 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6890 & 0.4921 & -0.2044 & 0.4913 \\ 0 & 0 & 0.4921 & 0.8566 & 0.0596 & -0.1431 \\ 0 & 0 & -0.2044 & 0.0596 & 0.9753 & 0.0595 \\ 0 & 0 & 0.4913 & -0.1431 & 0.0595 & 0.8571 \end{bmatrix}$$

$$q1 = \begin{bmatrix} -0.1130 & -0.5683 & 0.3162 & 0.6657 & 0.2896 & -0.1930 \\ 0.0352 & -0.2432 & -0.4601 & -0.2130 & 0.7538 & 0.3381 \\ -0.1508 & 0.1458 & -0.5667 & 0.6162 & -0.2999 & 0.4065 \\ 0.9564 & 0.1004 & 0.0820 & 0.2255 & 0.0455 & 0.1248 \\ -0.1581 & 0.7637 & 0.1418 & 0.2827 & 0.5056 & -0.1903 \\ -0.1534 & 0.0580 & 0.5835 & -0.0306 & 0.0169 & 0.7946 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 2.0073 & -0.8454 & 0.7939 \\ 0 & 1.0057 & -0.1593 \\ 0 & 0.2602 & 0.7222 \\ 0 & 0.5480 & -0.8153 \\ 0 & 0.2383 & 0.3483 \\ 0 & -0.1588 & 0.4658 \end{bmatrix}$$

$$q1 = \begin{bmatrix} -0.1130 & -0.5683 & 0.3162 \\ 0.0352 & -0.2432 & -0.4601 \\ -0.1508 & 0.1458 & -0.5667 \\ 0.9564 & 0.1004 & 0.0820 \\ -0.1581 & 0.7637 & 0.1418 \\ -0.1534 & 0.0580 & 0.5835 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 2.0073 & -0.8454 & 0.7939 \\ 0 & 1.0057 & -0.1593 \\ 0 & 0.2602 & 0.7222 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$