



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ”

Ακριβής Μοντελοποίηση του Πολυωνυμικού- Εκθετικού Χώρου Λύσεων ενός Συστήματος

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Όλγα Α. Καλεσιάκη

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2012



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ”

Ακριβής Μοντελοποίηση του Πολυωνυμικού- Εκθετικού Χώρου Λύσεων ενός Συστήματος

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Όλγα Α. Καλεσιάκη

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 20η Απριλίου 2004.

.....
Α. Βαρδουλάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....
Ε. Αντωνίου
Επικ.Καθηγητής Α.Τ.Ε.Ι.Θ.

.....
Ν. Καραμπετάκης
Αν.Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2012

.....
Όλγα Α. Καλεσιάκη

Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

Copyright © Όλγα Α. Καλεσιάκη, 2012

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η κύρια συμβολή αυτής της εργασίας είναι η λύση των πολυωνυμικών-εκθετικών χρονικών σειρών των προβλημάτων μοντελοποίησης. Θα επεξεργαστούμε αποκλειστικά τη μοντελοποίηση ακριβείας. Τα δεδομένα μας είναι εκθετικές-πολυωνυμικές χρονικές σειρές και το μοντέλο αποτελείται από γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα και πεπερασμένης διάστασης συστήματα. Στο κεφάλαιο τρία μελετάται το εξής πρόβλημα: Γνωρίζοντας την συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος, δηλαδή τον χώρο λύσεων αυτού, να βρεθεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (ή εξισώσεων διαφορών) το οποίο παράγει το χώρο λύσεων. Πιο συγκεκριμένα να βρεθούν οι αλγόριθμοι μοντελοποίησης.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Γραμμικά δυναμικά συστήματα, αναπαράσταση πυρήνα, MPUM, υπολογισμός MPUM, επαναληπτικοί αλγόριθμοι

ABSTRACT

The main contribution of this project is the solution of the polynomial-exponential time series modeling problem. We will exclusively treat exact modeling. The data are polynomial-exponential time series, and the model class consists of linear, continuous-time, time invariant, finite dimensional systems. Chapter three is about knowing the behavior of the dynamical system meaning the system's solution space, trying to find out the system of differential equations (or difference equations) which generates the specific solution space. More particularly to find out the modeling algorithms.

KEY WORDS

Linear dynamical systems, kernel representation, MPUM, computation of the MPUM, recursive algorithm

Π Ι Ν Α Κ Α Σ Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Ω Ν

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	5
ABSTRACT.....	6
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	7
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Σελίδα

1. Εισαγωγή στη Θεωρία Συστημάτων	11
1.1 Εισαγωγή	11
1.2 Εφαρμογή στη Λογιστική Απεικόνιση	12
1.3 Παράδειγμα Δυναμικού Συστήματος Συνεχούς Χρόνου	17
1.4 Ορισμός Δυναμικού Συστήματος	19
1.5 Γραμμικές Απεικονίσεις και Ασυμπτωτική Συμπεριφορά	20
1.6 Στοιχεία Άλγεβρας	30
1.7 Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας	37
2. Η Προσέγγιση Συμπεριφοράς στα Δυναμικά Συστήματα	47
2.1 Εισαγωγή	47
2.2 Αρχικά Βήματα	51
2.3 Ισοδυναμίες Προτάσεων	53
2.4 Επιπλέον Ζητήματα	56
2.5 Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα	59
2.6 Πυρήνας Απεικόνισης.....	60
2.7 Το Ισχυρότερο Ακριβές Μοντέλο (MPUM).....	61
3. Οι Βασικοί Μέθοδοι Υπολογισμού του MPUM.....	63
3.1 Υπολογισμός MPUM σημάτων διακριτού χρόνου	63
3.1.1 Χρονικά Αναδρομικός Υπολογισμός του MPUM.....	63
3.1.2 Υπολογισμός του MPUM με υστέρηση.....	69
3.2 Υπολογισμός MPUM σημάτων συνεχούς χρόνου.....	73
3.3 Τρίτη Μέθοδος Υπολογισμού.....	92
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	97
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	99

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Από την θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Καραμπετάκη για την καθοδήγηση, υπομονή και εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά το διάστημα εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Οφείλω ακόμη να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον Καθηγητή κ. Αντώνιο Βαρδουλάκη και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Ευστάθιο Αντωνίου για το χρόνο που αφιέρωσαν στην μελέτη και αξιολόγηση της εργασίας μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την οικονομική και ψυχολογική κυρίως υποστήριξη που μου προσφέρουν όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Στους γονείς μου...

Εισαγωγή στη Θεωρία Συστημάτων

1.1 Εισαγωγή

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να κατανοήσουμε τα δυναμικά συστήματα, καθώς επίσης και τις έννοιες της ευστάθειας, αστάθειας και ασυμπτωτικής συμπεριφοράς μέσα από μία ποικιλία παραδειγμάτων. Ακόμη παρουσιάζουμε βασικές έννοιες γραμμικής άλγεβρας που απαιτούνται για την κατανόηση των επόμενων παραγράφων.

Θεωρούμε έναν αναδρομικό τύπο της μορφής $x_{n+1} = f(x_n)$ με $n \in \mathbb{N}$ όπου η μεταβλητή x_n καθορίζει την κατάσταση ενός συστήματος μέσω του κανόνα f . Ως σημεία ισορροπίας [1] μίας συνάρτησης $f: A \rightarrow B$ ορίζουμε εκείνα τα σημεία $x^* \in A$ για τα οποία $f(x^*) = x^*$. Οι ακολουθίες (x_k) με $k \in \mathbb{N}$ που παράγονται από απεικονίσεις f ονομάζονται τροχιές. Επιπλέον, ένα σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται ως ευσταθές ή ασταθές ανάλογα με το αν η παραγόμενη τροχιά είναι συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα αντίστοιχα. Για να αποφανθώ για το είδος της ισορροπίας ενός σημείου ισορροπίας ελέγγω τη χρονική εξέλιξη μικρών διαταραχών γύρω από αυτό. Θεωρούμε το σημείο ισορροπίας x^* και μία διαταραχή αυτού $x_n = x^* + d_n$. Από το ανάπτυγμα Taylor παίρνουμε

$$f(x^* + d_n) = f(x^*) + d_n f'(x^*) + O(d_n^2)$$

Υποθέτουμε ότι οι διαταραχές είναι αρκούντως μικρές ώστε να αγνοήσουμε όρους δεύτερης τάξης, δηλαδή $O(d_n^2) \approx 0$. Υπό αυτή την προϋπόθεση παίρνουμε τη γραμμική προσέγγιση

$$f(x^* + d_n) \approx f(x^*) + d_n f'(x^*)$$

Παρατηρούμε ότι $f(x^*) = x^*$, $x_{n+1} = x^* + d_{n+1}$ και ότι $x_{n+1} = f(x^* + d_n)$, δηλαδή

$$x^* + d_{n+1} = x^* + d_n f'(x^*) \Rightarrow d_{n+1} = f'(x^*) d_n$$

Τον αριθμό $f'(x^*)$ τον ονομάζουμε πολλαπλασιαστή. Η γραμμική αναδρομική εξίσωση που καθορίζει τη χρονική εξέλιξη των διαταραχών έχει λύση

$$d_n = [f'(x)]^n d_0$$

Από τη λύση αυτή συμπεραίνουμε ότι

- αν $|f'(x)| < 1$, τότε $d_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$ και το σημείο ισορροπίας ονομάζεται ευσταθές (linearly stable),
- αν $|f'(x)| > 1$, τότε $d_n \rightarrow \infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$ και το σημείο ισορροπίας ονομάζεται ασταθές (unstable),
- αν $|f'(x)| = 1$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το είδος της ισορροπίας

Στην ειδική περίπτωση που $|f'(x)| = 0$ παρατηρούμε ότι οι διαταραχές σβήνουν σε μία επανάληψη και το σημείο ισορροπίας ονομάζεται υπερευσταθές (superstable).

1.2 Εφαρμογή στη Λογιστική Απεικόνιση

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να μελετήσουμε τις εποχιακές μεταβολές ενός πληθυσμού. [1] Θεωρούμε ότι το πλήθος των ατόμων το έτος n είναι N_n και ότι το έτος $n + 1$ ο πληθυσμός αυξάνεται κατά έναν παράγοντα R , τον οποίο ονομάζουμε ρυθμό ανάπτυξης, δηλαδή έχουμε

$$N_{n+1} = RN_n, \quad n \in \mathbb{N} = \{0,1,2, \dots\}$$

Για να κάνουμε το μοντέλο πιο ρεαλιστικό, θεωρούμε ότι ο ρυθμός ανάπτυξης εξαρτάται από τον αριθμό των ατόμων του n -οστού έτους, δηλαδή $R(N_n)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας μέγιστος αριθμός ατόμων N_{max} τα οποία μπορεί να συντηρηθούν από το περιβάλλον. Επίσης, αναμένουμε ότι ο ρυθμός ανάπτυξης τείνει στο μηδέν όταν ο πληθυσμός πλησιάζει την μέγιστη χωρητικότητα του περιβάλλοντος, δηλαδή $R(N_n) \rightarrow 0$ καθώς $N_n \rightarrow N_{max}$. Οι τιμές μίας συνάρτησης R που ικανοποιεί τα παραπάνω κριτήρια μπορεί να είναι

$$R(N_n) = r \left(1 - \frac{N_n}{N_{max}} \right)$$

όπου r μία σταθερά. Με χρήση της παραπάνω ή αναδρομική σχέση της χρονικής εξέλιξης του πλήθους των ατόμων γράφεται

$$N_{n+1} = r \left(1 - \frac{N_n}{N_{max}} \right) N_n$$

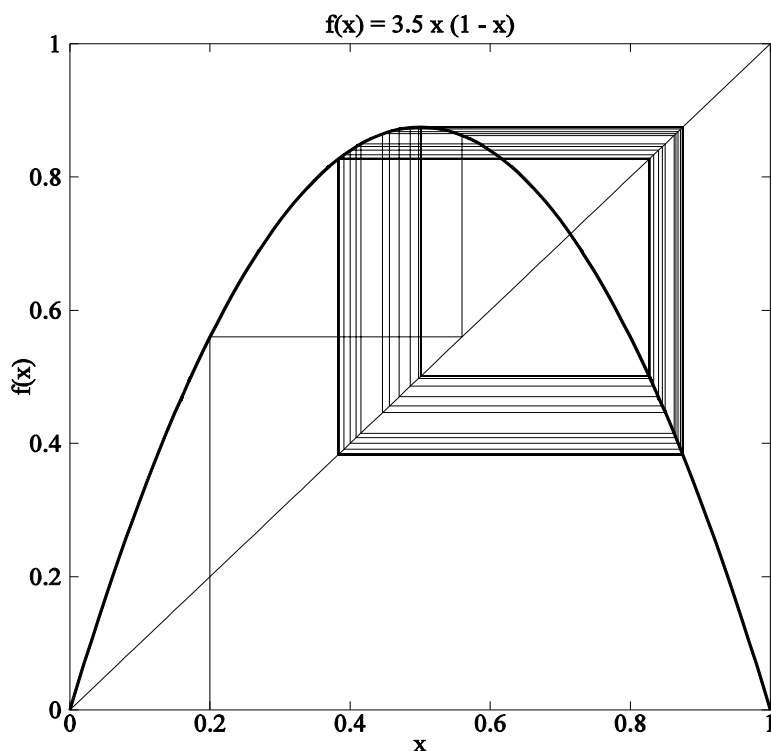
η οποία μπορεί να γραφεί στην απλούστερη μορφή

$$x_{n+1} = r(1 - x_n)$$

με $x_n = \frac{N_n}{N_{max}} \in [0,1]$. Η γραφική παράσταση C_f , σχήμα 1, της συνάρτησης f με τιμές $f(x) = rx(1 - x)$, η οποία ονομάζεται λογιστική απεικόνιση, είναι παραβολή με μέγιστη τιμή το $\frac{r}{4}$ όταν $x = \frac{1}{2}$. Επιλέγοντας $r \in [0,4]$ η συνάρτηση f απεικονίζει το διάστημα $[0,1]$ στον εαυτό του, δηλαδή $f([0,1]) = [0,1]$.

Το είδος των τροχιών που παράγονται από την λογιστική απεικόνιση εξαρτώνται από τις τιμές της παραμέτρου r . Η λογιστική απεικόνιση είναι ένα παράδειγμα συστήματος που μπορεί δύναται να παράγει περιοδικές τροχιές οι οποίες εξαρτώνται ευαίσθητα από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή μικρές μεταβολές στον αρχικό

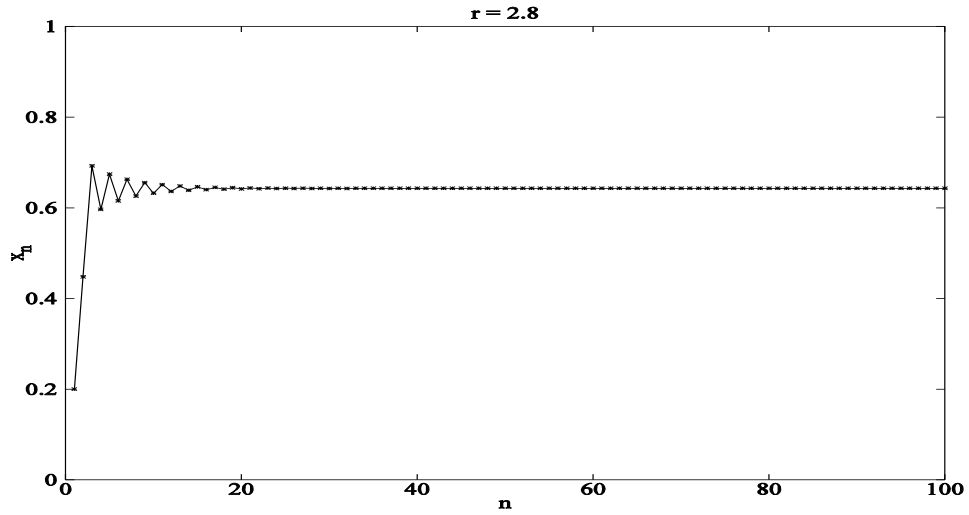
πληθυσμό συνεπάγονται δραματικές διαφορές στην εξέλιξη των ειδών. Συστήματα που εμφανίζουν τέτοιου είδους συμπεριφορά ονομάζονται χαοτικά.



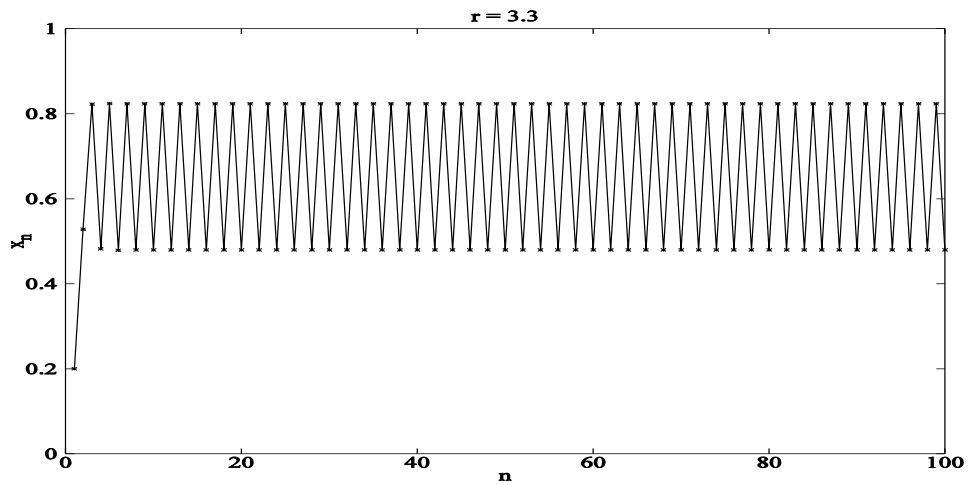
Σχήμα 1. Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ με τιμές $f(x) = rx(1-x)$ για $r = 3.5$.

Τα σημεία ισορροπίας της λογιστικής απεικόνισης είναι $x_1^* = 0$ ή $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$, όπου $x_2^* \in [0,1]$ όταν $r \in [1,4]$. Επιπλέον, εξετάζοντας την παράγωγο $f'(x) = r - 2rx$ στα σημεία ισορροπίας παρατηρούμε ότι $f'(x_1^*) = r$ και ότι $f'(x_2^*) = 2 - r$, δηλαδή έχουμε ότι το x_1^* είναι ευσταθές για $r < 1$ και ότι το x_2^* είναι ευσταθές για $r \in (1,3)$.

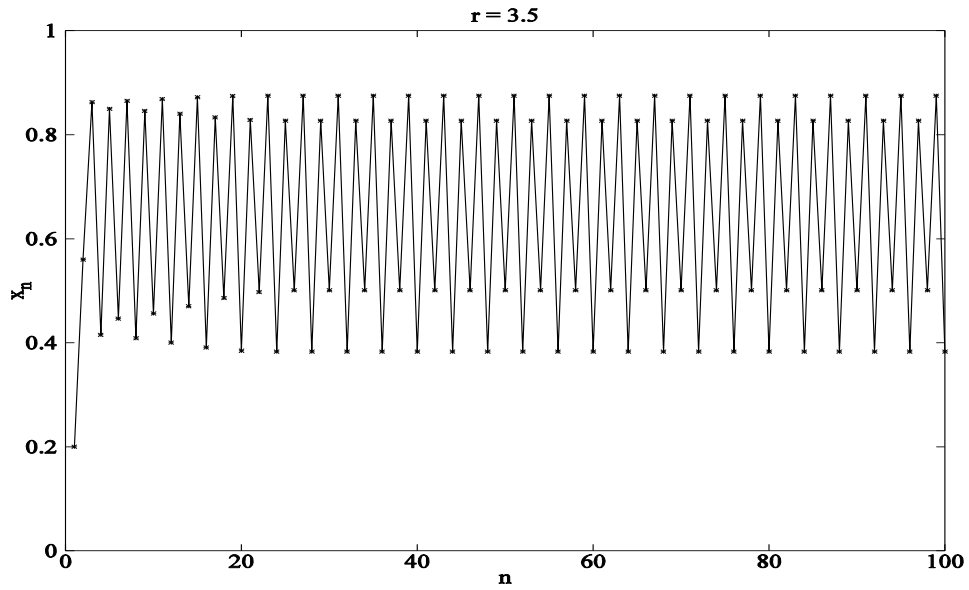
Στα σχήματα 2, 3, 4 και 5 παρουσιάζουμε τη χρονική εξέλιξη της κατάστασης x_n του συστήματος συναρτήσει του χρόνου n για διάφορες τιμές της παραμέτρου r . Για $r = 2.8$, σχήμα 2, βλέπουμε ότι μετά από κάποιες αρχικές μεταβολές το σύστημα καταλήγει στην κατάσταση με $x = x_2^* \approx 0.6429$. Για $r = 3.3$, σχήμα 3, ο πληθυσμός και πάλι ταλαντώνεται μεταξύ δύο διαφορετικών καταστάσεων. Για ακόμα μεγαλύτερο r , έστω $r = 3.5$, σχήμα 4, η κατάσταση του συστήματος ταλαντώνεται μεταξύ τεσσάρων τιμών. Τέλος, για $r = 3.9$ βλέπουμε ότι οι μεταβολές της καταστατικής μεταβλητής είναι απεριοδικές.



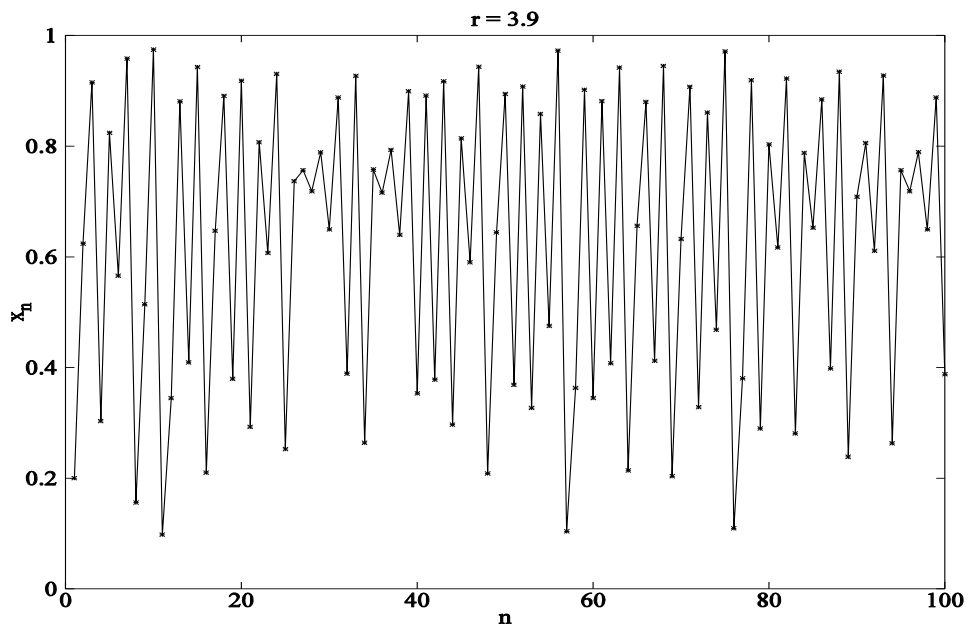
Σχήμα 2. Η χρονική εξέλιξη της κατάστασης x_n του συστήματος συναρτήσει του χρόνου n για $r = 2.8$.



Σχήμα 3. Η χρονική εξέλιξη της κατάστασης x_n του συστήματος συναρτήσει του χρόνου n για $r = 3.3$.



Σχήμα 4. Η χρονική εξέλιξη της κατάστασης x_n του συστήματος συναρτήσει του χρόνου n για $r = 3.5$.



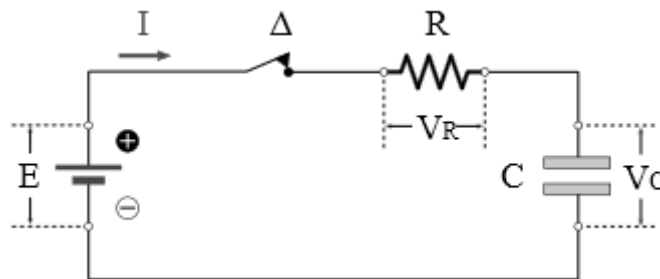
Σχήμα 5. Η χρονική εξέλιξη της κατάστασης x_n του συστήματος συναρτήσει του χρόνου n για $r = 3.9$.

1.3 Παράδειγμα Δυναμικού Συστήματος Συνεχούς Χρόνου

Όλα τα παραπάνω μπορούν να εφαρμοστούν και εάν το υπό μελέτη σύστημα είναι συνεχούς χρόνου. [2] Σημεία ισορροπίας συνεχών συστημάτων $\dot{x} = f(x, t)$ ονομάζουμε τα σημεία που μηδενίζει η πρώτη χρονική παράγωγος. Ένα σύστημα είναι ευσταθές όταν μικρές διαταραχές σβήνουν με την πάροδο του χρόνου. Όταν δηλαδή η παράγωγος είναι μικρότερη της μονάδας στην περιοχή κοντά στο υπό διερεύνηση σημείο ισορροπίας.

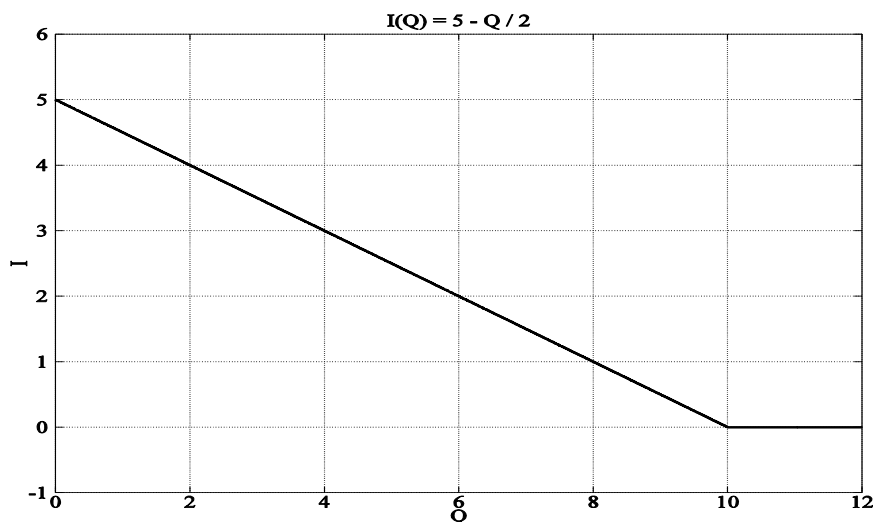
Έστω το ηλεκτρικό κύκλωμα του παρακάτω σχήματος όπου μια πηγή συνεχούς τάσης συνδέεται σε σειρά με μια ωμική αντίσταση και έναν πυκνωτή. Θεωρούμε ότι ανάμεσα στην πηγή και στα υπόλοιπα στοιχεία του κυκλώματος παρεμβάλλεται διακόπτης, αρχικά ανοικτός, που μεταβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 0s$ και η πηγή φορτίζει, μεταφέρει δηλαδή ηλεκτρικό φορτίο Q , στον αρχικά αφόρτιστο πυκνωτή.

Κάνοντας μια αρχική θεώρηση του κυκλώματος από φυσικής σκοπιάς μπορούμε να πούμε ότι το φορτίο στον πυκνωτή θα αυξηθεί και θα ισορροπήσει σε μια τιμή αφού η πηγή τάσης είναι συνεχούς ρεύματος και δεν έχουμε αλλαγές στην πολικότητα της τάσης που τροφοδοτεί το κύκλωμα. Μπορούμε να υποψιαστούμε ότι κατά τη φόρτιση, στο μεταβατικό στάδιο λειτουργίας, θα έχουμε μια θετική παράγωγο του φορτίου Q ως προς το χρόνο ενώ με το πέρας του μεταβατικού φαινομένου, στην κατάσταση ισορροπίας του κυκλώματος, η παράγωγος αυτή θα είναι μηδέν. Το διάστημα από όπου ξεκινά η κατάσταση ισορροπίας θα είναι δηλαδή υπερευσταθές.



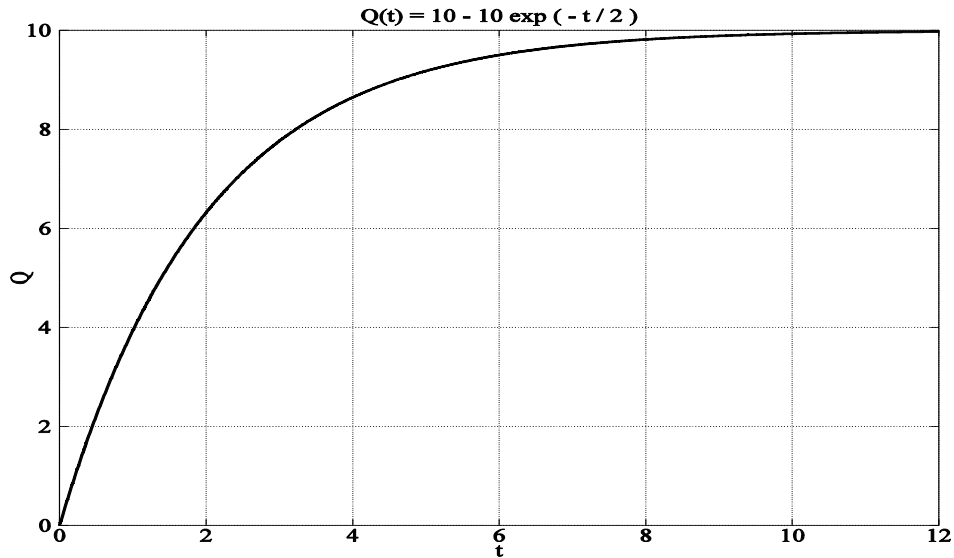
Για να επιβεβαιώσουμε τα παραπάνω και μαθηματικά θα σχηματίσουμε τη διαφορική εξίσωση που διέπει τη συμπεριφορά του κυκλώματος για μια συγκεκριμένη αριθμητική εφαρμογή όπου $V_0 = 10V, R = 2\Omega$ και $C = 1F$.

Σύμφωνα με τον ορισμό του ηλεκτρικού ρεύματος θα έχουμε ότι $\dot{Q} = I$, ενώ σύμφωνα με τους νόμους του Kirchhoff θα ισχύει ότι $-V_0 + R\dot{Q} + Q/C = 0$ ή $\dot{Q} = f(Q) = V_0/R - Q/RC$. Η γραφική παράσταση της C_f φαίνεται στο σχήμα 6.



Σχήμα 6. Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με τιμές $f(Q) = V_0/R - Q/RC$.

Επιπλέον μπορούμε από την ίδια εξίσωση να δούμε πώς μεταβάλλεται το φορτίο στον πυκνωτή με το χρόνο. Η διαφορική εξίσωση είναι η $dQ/dt = V_0/R - Q/RC$ και η λύση της είναι $Q(t) = CV_0 - CV_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}$. Με τα αριθμητικά δεδομένα που έχουμε μπορούμε να σχεδιάσουμε γραφικά την απόκριση του κυκλώματος, δηλαδή τη γραφική παράσταση της C_q .



Σχήμα 7. Η γραφική παράσταση C_q της συνάρτησης Q με τιμές $Q(t) = CV_0 - CV_0 e^{-(\frac{1}{RC})t}$.

Από τα παραπάνω διαγράμματα μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για την ευστάθεια του συστήματος. Από το σχήμα 6 παρατηρούμε ότι το ρεύμα, ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου δηλαδή, έχει βάλνει συνεχώς μειούμενο με την αύξηση του αποθηκευμένου στον πυκνωτή φορτίο. Για $Q = 10$ μηδενίζεται ώστε να συμπεράνουμε ότι στο διάστημα για $Q \geq 10$ το σύστημα είναι ευσταθές.

Ακόμη καλύτερα αυτό φαίνεται στο σχήμα 7 όπου το αποθηκευμένο φορτίο αποκτά μια σχεδόν σταθερή τιμή για $t \gtrsim 10s$ ενώ το ρεύμα του κυκλώματος, η χρονική του παράγωγος, μηδενίζεται την ίδια ακριβώς χρονική στιγμή. Αν δηλαδή $Q = f(t)$ τότε $|df/dt| \simeq 0$ για $t \gtrsim 10s$. Το σύστημα δηλαδή γίνεται υπερευσταθές.

1.4 Ορισμός Δυναμικού Συστήματος

Ξεκινάμε με τους βασικούς ορισμούς της δυναμικής συστημάτων θεωρώντας το χώρο του οποίου τα στοιχεία είναι οι πιθανές καταστάσεις του συστήματος. Ο χώρος αυτός συμβολίζεται με το γράμμα X και ονομάζεται φασικός χώρος. Επιπρόσθετα, ο χρόνος $t \in I$ μπορεί να είναι διακριτός ή συνεχής, δηλαδή $I = \mathbb{Z}$ ή $I = \mathbb{R}$ αντίστοιχα, όπου οι αρνητικοί χρόνοι παριστάνουν την χρονική αντιστροφή του συστήματος. Τέλος για

να καθορίσουμε την κατάσταση ενός συστήματος ορίζουμε έναν ντετερμινιστικό κανόνα $f: I \times X \rightarrow X$. Εάν το σύστημά μας είναι αρχικά στην κατάσταση $x \in X$, τότε μετά από παρέλευση χρόνου t θα βρεθεί σε μία νέα κατάσταση $f(t, x)$. Ορίζουμε την απεικόνιση $f_t: X \rightarrow X$ του φασικού χώρου στον εαυτό του. Η κατάσταση x τη χρονική στιγμή $s + t$ μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας διαδοχικά τις απεικονίσεις f_t και f_s , δηλαδή

$$f(x, t + s) = f(f_t(x), s) \text{ ή } f_{t+s}(x) = f_s(f_t(x))$$

$F \subseteq X^I$ ονομάζουμε το διάστημα όλων των τροχιών του χρόνου δηλαδή την απεικόνιση $x: I \rightarrow X$ από τον άξονα του χρόνου στο χώρο των σημάτων. Η συλλογή των τροχιών του F ονομάζεται συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος.

Έτσι καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 1.1 [1] Ονομάζουμε δυναμικό σύστημα (dynamical system) Σ κάθε τριάδα της μορφής $\Sigma = (I, X, F)$ όπου I είναι το σύνολο των δεικτών, X ο χώρος των καταστάσεων και F η απεικόνιση που καθορίζει την συμπεριφορά του συστήματος.

■

Αξίζει να αναφέρουμε τις έννοιες της γραμμικότητας και του χρονικά αναλλοίωτου συστήματος. Ένα σύστημα είναι γραμμικό (linear) αν F είναι γραμμικός υποχώρος του X^I , και Χρονικά αναλλοίωτο (time-invariant) αν: $(x \in F) \implies (\sigma x \in F)$, όπου το σ δηλώνει τον τελεστή μετατόπισης: $(\sigma x)(t) = x(t + 1)$.

1.5 Γραμμικές Απεικονίσεις και Ασυμπτωτική Συμπεριφορά

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να κατανοήσουμε τα δυναμικά συστήματα και την έννοια της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς μέσα από μια ποικιλία παραδειγμάτων.

A) Απεικονίσεις συστολής. Το πιο απλό είδος ασυμπτωτικής συμπεριφοράς παρουσιάζεται με την σύγκλιση οποιασδήποτε κατάστασης σε μια συγκεκριμένη κατάσταση.

Ορισμός 1.2 [2] Έστω (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος. Η $f: X \rightarrow X$ ονομάζεται απεικόνιση συστολής (contracting map) αν υπάρχει $\lambda < 1$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in X$ να ισχύει:

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

■

Η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι η απεικόνιση f είναι συνεχής και επομένως οι θετικές επαναλήψεις της φτιάχνουν ένα δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω ανισότητα για κάθε θετικό ακέραιο n έχουμε:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y)$$

Έτσι

$$d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ όταν } n \rightarrow \infty$$

Αυτό σημαίνει ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά όλων των σημείων είναι η ίδια. Από την άλλη μεριά για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy διότι

για $m \geq n$

$$\begin{aligned} d(f^m(x), f^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{m-n-1} d(f^{n+k+1}(x), f^{n+k}(x)) \leq \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^{n+k} d(f(x), x) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x), x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Οπότε για κάθε $x \in X$ το όριο της $f^n(x)$ όταν $n \rightarrow \infty$ υπάρχει αν ο χώρος είναι πλήρης, και από την ανισότητα $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y)$ βλέπουμε ότι αυτό το όριο είναι ίδιο για όλα τα x . Θα ορίσουμε αυτό το όριο με p και θα δείξουμε ότι το p είναι σημείο ισοροπίας της f . Για κάθε $x \in X$ και για κάθε ακέραιο n έχουμε

$$\begin{aligned} d(p, f(p)) &\leq d(p, f^n(x)) + d(f^n(x), f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), f(p)) \\ &\leq (1 + \lambda)d(p, f^n(x)) + \lambda^n d(x, f(x)). \end{aligned}$$

Αφού $d(p, f^n(x)) \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$ έχουμε $f(p) = p$. Παίρνοντας το όριο της $d(f^m(x), f^n(x))$ όταν $m \rightarrow \infty$ έχουμε $d(f^n(x), p) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x), x)$. Οι ακολουθίες $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ των σημείων σε έναν μετρικό χώρο συγκλίνουν εκθετικά η μία με την άλλη αν $d(x_n, y_n) < c\lambda^n$ για $c > 0, \lambda < 1$. Συγκεκριμένα αν μία από τις δύο ακολουθίες είναι σταθερή, δηλαδή, $y^n = y$ τότε η x^n συγκλίνει εκθετικά με το y .

Τα παραπάνω είναι η απόδειξη βασικών αποτελεσμάτων και μας δίνουν μια πλήρη εικόνα της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς.

Πρόταση 1.1 [2] (Απεικόνιση συστολής) Έστω X είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος. Μετά από επαναλήψεις της συστελλόμενης απεικόνισης $f: X \rightarrow X$ όλα τα σημεία συγκλίνουν με εκθετική ταχύτητα σε ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας της f .

Ορισμός 1.3 [2] Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, $f: X \rightarrow X$, $f(p) = p$ και $f^n(x) \rightarrow p$ όταν $n \rightarrow \infty$ τότε λέμε ότι το x είναι θετικά ασυμπτωτικό (positively asymptotic) με το p . Αν η f είναι αντιστρέψιμη και $f^{-n}(x) \rightarrow p$ όταν $n \rightarrow \infty$ τότε λέμε ότι το x είναι αρνητικά ασυμπτωτικό (negatively asymptotic) με το p .

■

Ορίζουμε το σύνολο των σημείων ισορροπίας οποιασδήποτε απεικόνισης f με $Fix(f)$. Οπότε για μία συστελλόμενη απεικόνιση όλα τα σημεία είναι ασυμπτωτικά σε ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Πρόταση 1.2 [2] Αν το p είναι περιοδικό σημείο περιόδου m για την απεικόνιση f και η διαφορική της Df_p^m δεν έχει ένα ως ιδιοτιμή τότε για κάθε απεικόνιση g επαρκώς κλειστή με την f στην C^1 τοπολογία υπάρχει ένα μοναδικό περιοδικό σημείο περιόδου m κλειστό στο p .

Απόδειξη Ας εισάγουμε τοπικές συντεταγμένες κοντά στο p με το p να είναι το αρχικό. Σε αυτές τις συντεταγμένες Df_0^m γίνεται πίνακας. Αφού το 1 δεν είναι ανάμεσα στις ιδιοτιμές η απεικόνιση $F = f^m - Id$ που ορίζεται τοπικά σε αυτές τις συντεταγμένες είναι τοπικά αντιστρέψιμη από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης. Έστω τώρα g να είναι απεικόνιση C^1 -κλειστή στην f . Κοντά στο 0 μπορούμε να γράψουμε $g^m = f^m - H$ όπου H έχει μικρές αρχικές συντεταγμένες. Ένα σημείο ισορροπίας για την g^m μπορεί να βρεθεί λύνοντας την εξίσωση :

$$x = g^m(x) = (f^m - H)(x) = (F + ID - H)(x) \text{ ή } (F - H)(x) = 0 \text{ ή } x = F^{-1}H(x).$$

Αφού F^{-1} έχει φραγμένες παραγώγους και H έχει πολύ μικρές πρώτες παραγώγους μπορούμε να δείξουμε ότι $F^{-1}H$ είναι συστελλόμενη απεικόνιση. Πιο συγκεκριμένα, έστω $\|\cdot\|_0$ δηλώνει την C^0 -νόρμα, $\|dF^{-1}\|_0 = L$, και $\max(\|H\|_0, \|dH\|_0) \leq \varepsilon$.

Τότε αφού $F(0) = 0$, έχουμε $\|F^{-1}H(x) - F^{-1}H(y)\| \leq \varepsilon L \|x - y\|$ για κάθε x, y κλειστό στο 0 και $\|F^{-1}H(0)\| \leq L\|H(0)\| \leq \varepsilon L$ και οπότε $\|F^{-1}H(x)\| \leq \|F^{-1}H(x) - F^{-1}H(0)\| + \|F^{-1}H(0)\| \leq \varepsilon L \|x\| + \varepsilon L$. Οπότε αν, $\varepsilon \leq \frac{R}{L(1+R)}$ ο δίσκος $X = \{x \mid \|x\| \leq R\}$ απεικονίζεται από την $F^{-1}H$ στον εαυτό του και η απεικόνιση $F^{-1}H: X \rightarrow X$ είναι συστελλόμενη. Από την αρχή της συστελλόμενης απεικόνισης υπάρχει ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας στο X το οποίο είναι και το μοναδικό σημείο ισορροπίας για την g^m κοντά στο 0. ■

Παράδειγμα 1.3 Θεωρούμε ότι η πραγματική ευθεία με την μετρική εισάγονται με την απόλυτη τιμή. Υποθέτουμε ότι $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συστελλόμενη διαφορική συνάρτηση της οποίας οι παράγωγοι είναι φραγμένοι από κάποιο $\lambda < 1$. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ τότε από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει κάποιο ξ ανάμεσα στο x και y τέτοιο ώστε $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$. Οπότε $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| \leq \lambda |x - y|$ και η f είναι συστελλόμενη απεικόνιση σύμφωνα με τον ορισμό 1.2. Οπότε οποιαδήποτε απεικόνιση έχει ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας. ■

B) Η σταθερότητα της συστολής. Θα εξετάσουμε κατά πόσο αλλάζει η συστελλόμενη απεικόνιση όταν δεν αλλάξουμε το σημείο ισορροπίας πάρα πολύ.

Πρόταση 1.3 Αν $f: X \rightarrow X$ είναι μία συστολή ενός πλήρους μετρικού χώρου X με X_0 σημείο ισοροπίας και σταθερά συστολής λ όπως στον ορισμό 1.2, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \in (0, 1 - \lambda)$ τέτοιο ώστε για κάθε απεικόνιση $g: X \rightarrow X$ με

- $d(f(x), g(x)) < \delta$ για όλα τα $x \in X$ και
- $d(g(x), g(y)) \leq (\lambda + \delta)d(x, y)$ για όλα τα $x, y \in X$

το σημείο ισοροπίας y_0 της g ικανοποιεί την $d(x_0, y_0) < \varepsilon$.

Απόδειξη Παίρνουμε $\delta = \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{1+\varepsilon}$. Αφού $g^n(x) \rightarrow y_0$ είναι

$$d(x_0, y_0) \leq \sum_{n=0}^{\infty} d(g^n(x_0), g^{n+1}(x_0)) < d(x_0, g(x_0)) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + \delta)^n < \frac{\delta}{1-\lambda-\delta} = \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{(1+\varepsilon)(1-\lambda-\frac{\varepsilon(1-\lambda)}{1+\varepsilon})} = \varepsilon.$$

■

Γ) Διάστημα αύξουσας απεικόνισης. Η επόμενη απλή ασυμπτωτική συμπεριφορά είναι συγκλίνουσα για κάθε τροχιά σε ένα σημείο ισοροπίας παρουσία όμως περισσότερων από ένα σημείων ισοροπίας. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση της αύξουσας συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής. Αυτό το παράδειγμα είναι πληροφοριακό επειδή μας επιδεικνύει μία σημαντική μέθοδο στα ολιγοδιάστατα δυναμικά, την συστηματική χρήση του θεωρήματος των ενδιαμέσων τιμών.

Πρόταση 1.4 Αν $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα κλειστό διάστημα και $f: I \rightarrow I$ είναι μία μη φθίνουσα συνεχής απεικόνιση τότε όλα τα $x \in I$ είναι ασυμπτωτικά με το σημείο ισοροπίας της f . Αν η f είναι αύξουσα (οπότε και αντιστρέψιμη) τότε όλα τα $x \in I$ είναι τόσο ισοροπίας όσο θετικά και αρνητικά ασυμπτωτικά με τα γειτονικά σημεία ισοροπίας.

Απόδειξη Να σημειώσουμε ότι το σύνολο $Fix(f)$ είναι κλειστό λόγω συνέχειας και μη κενό από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών. Αν $Fix(f) = I$ η απόδειξη σταματάει εδώ. Διαφορετικά θεωρούμε $x \in I \setminus Fix(f)$ και έστω (a, b) είναι το μέγιστο ανοιχτό διάστημα που περιέχει το x . Αφού η f είναι μη φθίνουσα έχουμε $f(a, b) \subset [a, b]$ και από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών $f - Id$ δεν αλλάζει στο (a, b) . Για να γίνουμε πιο

συγκεκριμένοι υποθέτουμε ότι $f(y) > y$ για $y \in (a, b)$ (η άλλη περίπτωση είναι απλή). Τότε $x_n := f^n(x)$ ορίζουμε μια μη φθίνουσα ακολουθία φραγμένη από το b , που συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in (a, b]$. Αλλά $f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_0$, έτσι $x_0 = \text{Fix}(f)$ και τελικά $x_0 = b$. Να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση που $f(x) < x$ στο (a, b) θα μπορούσαμε επίσης να έχουμε $f^n(x) \rightarrow a$ για όλα τα $x \in (a, b)$ όταν $n \rightarrow \infty$.

Στην περίπτωση που η f είναι αύξουσα να σημειώσουμε ότι το σήμα της $f^{-1} - Id$ σε κάθε διάστημα (a, b) είναι αντίθετο από αυτό της $f - Id$ έτσι κάθε $x \in (a, b)$ είναι θετικά και αρνητικά ασυμπτωτικό με τα αντίθετα άκρα του $[a, b]$.

■

Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα το οποίο ορίστηκε από τις επαναλήψεις της γραμμικής απεικόνισης A στον ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n . Αν A είναι αντιστρέψιμη, το σύστημα είναι αντιστρέψιμο.

Ορισμός 1.4 [2] Έστω $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μία γραμμική απεικόνιση. Ονομάζουμε το σύνολο των ιδιοτιμών φάσμα (spectrum) της A και συμβολίζουμε με spA . Συμβολίζουμε την μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή της A με $r(A)$ και την ονομάζουμε φασματική ακτίνα (spectral radius) της A .

■

Θεωρώντας μια νόρμα στον \mathbb{R}^n ορίζουμε την νόρμα της γραμμικής απεικόνισης A με $\|A\| := \sup_{\|u\|=1} \|Au\|$. Δηλαδή $\|A\| \geq r(A)$ και όσον αφορά την ευκλείδεια νόρμα έχουμε $\|A\| = r(A)$ όταν A είναι διαγώνιος. Το επόμενο γεγονός από την γραμμική άλγεβρα είναι χρήσιμο για να καταλάβουμε τα δυναμικά των γραμμικών απεικονίσεων ακόμα και αν δεν μπορούν να διαγωνοποιηθούν.

Πρόταση 1.5 [2] Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει μία νόρμα στον \mathbb{R}^n τέτοια ώστε $\|A\| < r(A) + \delta$.

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας την μορφή Jordan μπορούμε να βρούμε μια βάση του \mathbb{R}^n τέτοια ώστε ο πίνακας της απεικόνισης μας να έχει μπλοκ διαγώνια μορφή

$$\begin{pmatrix} A_1 & & o \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

όπου είναι είτε Jordan μπλοκ που η αντιστοιχία του είναι η πραγματική ιδιοτιμή λ

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix} (1)$$

είτε συνδυασμός από δύο μπλοκ που η αντιστοιχία είναι ένα ζευγάρι από μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές $\lambda = \rho e^{i\varphi}$ και $\bar{\lambda} = \rho e^{-i\varphi}$

$$\begin{pmatrix} \rho R_\varphi & Id & \dots & 0 \\ & \rho R_\varphi & Id & 0 \\ & & \ddots & Id \\ 0 & & & \rho R_\varphi \end{pmatrix} (2)$$

Όπου Id είναι ένας 2×2 μοναδιαίος πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ είναι ένας 2×2 πίνακας που αντιστοιχεί σε στροφή επιπέδου υπό γωνία φ . Κάνοντας μία επιπλέον αλλαγή συντεταγμένων στην διαγώνιο της μορφής

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \delta^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta^{-m+1} \end{pmatrix}$$

για m -μπλοκ της μορφής (1) και της μορφής

$$\begin{pmatrix} Id & & & 0 \\ & \delta^{-1}Id & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \delta^{-m+1}Id \end{pmatrix}$$

για $2m$ -μπλοκ της μορφής (2) μπορούμε να φτιάξουμε τις εισόδους στην (1) και στην (2) εκτός από τις διαγώνιους ίσες με δ . Έχοντας υπόψη λοιπόν τα παραπάνω έχουμε για την ευκλείδεια νόρμα

$$\|A\| := \sup_{\|u\|=1} \|Au\| \leq r(A) + \delta. \quad \blacksquare$$

Θα ξεκινήσουμε την μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των γραμμικών απεικονίσεων με μια σημαντική ειδική περίπτωση.

Πόρισμα 1.1 [2] Υποθέτουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης A έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη της μονάδος. Τότε υπάρχει μία νόρμα στον \mathbb{R}^n τέτοια ώστε η A να είναι συστελλόμενη απεικόνιση σε σχέση με την μετρική που παράγεται από αυτήν.

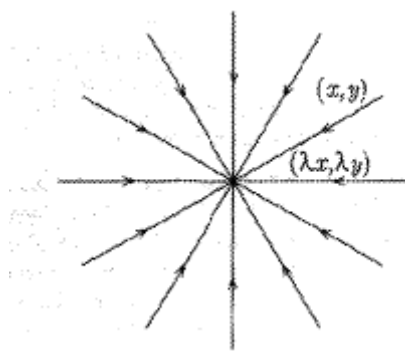
Απόδειξη Αν πάρουμε ένα αρκετά μικρό δ μπορούμε να συμπεράνουμε από την πρόταση 1.5 ότι $\|A\| < 1$ και αφού $d(x, y) = \|x - y\|$, η A είναι συστελλόμενη απεικόνιση. ■

Η έννοια της εκθετικής σύγκλισης δεν βασίζεται σε μια συγκεκριμένη επιλογή νόρμας. Οπότε από την πρόταση 1.1 και το πόρισμα 1.1 συνεπάγεται το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 1.2 [2] Αν όλες οι ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης A έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη της μονάδος, τότε οι θετικές επαναλήψεις κάθε σημείου συγκλίνουν στο αρχικό με εκθετική ταχύτητα. Αν παράλληλα η A είναι αντιστρέψιμη δηλαδή αν

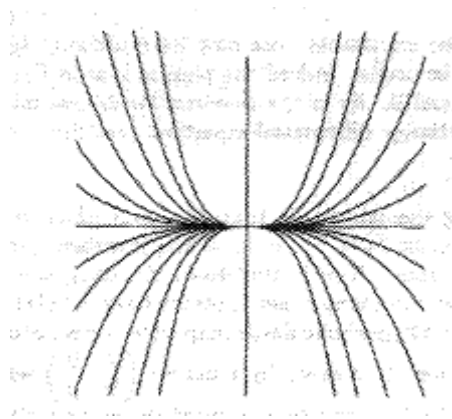
το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή της A , τότε οι αρνητικές επαναλήψεις κάθε σημείου πηγαίνουν εκθετικά στο άπειρο.

Ας δούμε κάποια παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων αυτού του είδους. Το πρώτο παράδειγμα είναι μια απεικόνιση που δίνεται από τον πίνακα $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ όταν $\lambda \in (0,1)$. Κάθε διάνυσμα u συστέλλεται σύμφωνα με τον παράγοντα λ , έτσι οι επαναλήψεις κάθε διανύσματος κινούνται προς το αρχικό κατά μήκος μιας γραμμής μέσω του μηδέν. Αφού κάθε γραμμή μέσω του μηδέν απεικονίζεται στον εαυτό της, μπορούμε να σχεδιάσουμε την εικόνα της τροχιάς όπως φαίνεται στο σχήμα 8.



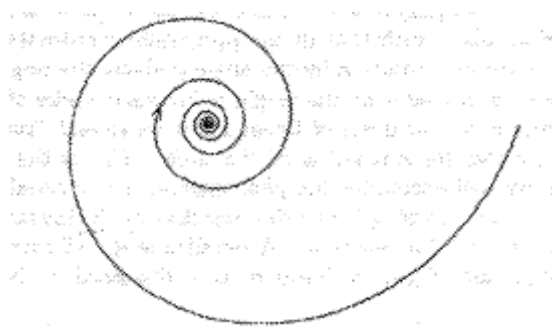
Σχήμα 8. Τροχιές συστολής.

Το επόμενο παράδειγμα είναι η απεικόνιση $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ όταν $\lambda, \mu \in (0,1)$. Ας υποθέσουμε ότι $\mu < \lambda$. Τότε κάθε σημείο κινείται προς το αρχικό, αλλά όχι σε δεδομένη ευθεία γραμμή. Παρόλο αυτά, οι τροχιές κινούνται κατά μήκος καμπυλών που είναι αναλλοίωτες κάτω από $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι αυτοί οι άξονες και οι καμπύλες δίνονται από την σχέση $x^{\log \mu} = \text{const.} \cdot y^{\log \lambda}$. Στο σχήμα 9 έχουμε την εικόνα των τροχιών. Ένα σημείο ισορροπίας της απεικόνισης αυτού του είδους αναφέρεται ως κόμβος (node).



Σχήμα 7. Κόμβος

Το επόμενο παράδειγμα είναι αυτό της απεικόνισης με δύο μιγαδικές ρίζες με απόλυτη τιμή μικρότερη της μονάδος. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι θεωρούμε την απεικόνιση $\lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι είναι μία σύνθεση της τροχιάς του θ και της συστολής του λ και η n επανάληψη δίνεται από $\lambda^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$. Οπότε, ενώ τα σημεία πλησιάζουν το αρχικό με εκθετική ταχύτητα την ίδια ακριβώς στιγμή περιστρέφονται γύρω από το μηδέν. Τελικά έχουμε αναλλοίωτους κόμβους που τους ονομάζουμε έλικες, τις οποίες για να τις περιγράψουμε είναι πιο βολικό να χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες (r, f) . Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι οι κόμβοι $r = \text{const.} \cdot e^{-(\theta^{-1} \log \lambda) \varphi}$ είναι αναλλοίωτοι κάτω από αυτήν την απεικόνιση. Στο σχήμα 10 έχουμε την εικόνα της τροχιάς που αναφέρεται ως εστία (focus).



Σχήμα 10. Εστία

Οι αναλλοίωτοι κόμβοι στα παραπάνω παραδείγματα δεν είναι τυχαίοι. Οι γραμμικές απεικονίσεις που περιγράψαμε παραπάνω προκύπτουν από τις λύσεις συνήθους διαφορικών εξισώσεων. Θεωρούμε αρχικά την συνήθους διαφορική εξίσωση

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log \lambda & 0 \\ 0 & \log \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

οι λύσεις της οποίας δίνονται από

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0)e^{t \log \lambda} \\ y(0)e^{t \log \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0)\lambda^t \\ y(0)\lambda^t \end{pmatrix}$$

Οπότε για $t = 1$ έχουμε την πρώτη συστελλόμενη απεικόνιση. Η δεύτερη προκύπτει από την συνήθους διαφορική εξίσωση με πίνακα συντελεστών $\begin{pmatrix} \log \lambda & 0 \\ 0 & \log \mu \end{pmatrix}$. Οπότε τα δύο πρώτα διαγράμματα που είδαμε προηγουμένως δείχνουν την δομή τροχιάς των δύο γραμμικών ροών. Το δεύτερο από αυτά ονομάζεται και κόμβος στο ευρύτερο πλαίσιο των σύνηθους διαφορικών εξισώσεων.

Τέλος η εστία προκύπτει από την συνήθους γραμμική διαφορική εξίσωση με πίνακα συντελεστών $\begin{pmatrix} \log \lambda & \theta \\ -\theta & \log \lambda \end{pmatrix}$. Παίρνοντας ξανά $t = 1$ έχουμε την παραπάνω απεικόνιση με την εστία.

1.6 Στοιχεία Άλγεβρας

Η παράγραφος αυτή περιέχει μια σειρά από ορισμούς και παραδείγματα που θα αποτελέσουν το θεμέλιο για αυτά που θα συζητήσουμε παρακάτω. Σκοπός μας δεν είναι να εμβαθύνουμε στις έννοιες που εισάγουμε αλλά να τις χρησιμοποιήσουμε σαν εργαλεία στο υπόλοιπο της εργασίας μας.

Ορισμός 1.5 [3] Δακτύλιος (ring) είναι ένα μη κενό σύνολο R με δύο πράξεις την πρόσθεση $(+ : R \times R \rightarrow R)$ και τον πολλαπλασιασμό $(\cdot : R \times R \rightarrow R)$, οι οποίες ικανοποιούν τα αξιώματα:

- 1) $\forall x, y, z \in R (x + y) + z = x + (y + z)$ και $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
(Προσεταιριστική)
- 2) $\forall x, y \in R x + y = y + x$ και $x \cdot y = y \cdot x$ (Αντιμεταθετική)
- 3) $\forall x, y, z \in R x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Επιμεριστική)
- 4) $\exists 0 \in R$ τέτοιο ώστε $\forall x \in R x + 0 = x$ (Υπαρξη ουδέτερου στοιχείου για την πρόσθεση)
- 5) $\exists 1 \in R$ τέτοιο ώστε $\forall x \in R 1 \cdot x = x$ (Υπαρξη ουδέτερου στοιχείου για τον πολλαπλασιασμό)
- 6) $\forall x \in R \exists -x \in R$ τέτοιο ώστε $x + (-x) = 0$ (Υπαρξη προσθετικά αντίστροφου)

■

Από δω και στο εξής θα ορίσουμε διαφορετικό συμβολισμό για τον πολλαπλασιασμό. Θα παραλείψουμε το (\cdot) . Δηλαδή θα γράφουμε xy αντί για $x \cdot y$.

Να σημειώσουμε ότι αν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό τότε ο δακτύλιος R λέγεται αντιμεταθετικός. Επίσης αν ο δακτύλιος περιέχει μοναδιαίο στοιχείο για τον πολλαπλασιασμό λέγεται δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

Ορισμός 1.6 [3] Ένα στοιχείο x ενός δακτυλίου R με μοναδιαίο στοιχείο λέγεται αντιστρέψιμο ή μονάδα, αν υπάρχει στοιχείο y του R τέτοιο ώστε να ισχύει $xy = yx = I$. Το στοιχείο y λέγεται αντίστροφο του x , και συμβολίζεται με x^{-1} .

■

Ορισμός 1.7 [3] Ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο λέγεται δακτύλιος με διαίρεση, αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του είναι αντιστρέψιμο. Ειδικότερα, ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με διαίρεση λέγεται σώμα(field)

■

Παράδειγμα 1.4 Ο δακτύλιος \mathbb{Z} των ακεραίων δεν είναι δακτύλιος με διαίρεση, γιατί τα μόνα στοιχεία του που είναι αντιστρέψιμα είναι τα 1 και -1. Αντίθετα οι δακτύλιοι $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{N}$ είναι δακτύλιοι με διαίρεση, και ειδικότερα σώματα. Τέλος είναι γνωστό ότι ο δακτύλιος \mathbb{Z}_p των ακεραίων *mod* p θα είναι σώμα τότε και μόνο τότε όταν p είναι πρώτος αριθμός.

Θα ορίσουμε τώρα το δεύτερο σημαντικό εργαλείο μας το ιδεώδες. ■

Ορισμός 1.8 [3] Ένα μη κενό υποσύνολο I ενός δακτυλίου R λέγεται ιδεώδες (ideal) του R , αν ισχύουν

- 1) $\forall a \in I$ και κάθε $x \in R$ έχουμε $ax \in I$
- 2) $\forall a, b \in I$ έχουμε $a + b \in I$

■

Θεωρούμε ένα υποσύνολο T του δακτυλίου R και συμβολίζουμε με $\langle T \rangle$ το μικρότερο ιδεώδες του R που περιέχει το T , και λέμε ότι το T είναι γεννήτορας του $\langle T \rangle$ ή ισοδύναμα, ότι $\langle T \rangle$ παράγει το T . Μπορούμε να δείξουμε ότι $\langle T \rangle = \{ \sum_{j \in J} h_j t_j \mid t_j \in T, h_j \in R \}$ όταν J είναι ένα πεπερασμένο σύνολο συντελεστών. Με άλλα λόγια, το ιδεώδες παράγεται από ένα (μη πεπερασμένο) σύνολο $T \subseteq R$. Αν $T = \{t_1, \dots, t_s\} \subseteq R$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του R λέμε ότι $J = \langle t_1, \dots, t_s \rangle = \{ \sum_{i=1}^s h_i t_i, h_i \in R \}$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ιδεώδες. Στην περίπτωση που $T = t$ είναι ένα μονοσύνολο λέμε ότι $J = \langle t \rangle$ είναι πρώτο ιδεώδες.

Παράδειγμα 1.5 Το αρχικό ιδεώδες $J = \langle \xi \rangle = \{ f \in \mathbb{R}[\xi] \mid \text{έτσι ώστε } f = \xi g, g \in \mathbb{R}[\xi] \}$ περιέχει όλα τα πολυώνυμα μιας μεταβλητής που έχουν το ξ σαν παράγοντα. Γενικά αν $R = \mathbb{R}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ και $T = \{t_1, \dots, t_s\} \subseteq \mathbb{R}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ τότε $\langle t_1, \dots, t_s \rangle = \{ \sum_{i=1}^s h_i t_i, h_i \in \mathbb{R}[\xi_1, \dots, \xi_n] \}$.

■

Ορισμός 1.9 [3] Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα πολυώνυμο $f(x)$ με συντελεστές από τον R είναι ένα άπειρο τυπικό άθροισμα $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$ όπου $a_i \in R$ και $a_i = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος τιμών του i . Τα a_i είναι οι συντελεστές του $f(x)$. Αν για κάποια $i > 0$ ισχύει $a_i \neq 0$ η μεγαλύτερη τέτοια τιμή του i λέγεται βαθμός του $f(x)$. Αν δεν υπάρχει τέτοιο $i > 0$ τότε λέμε ότι το $f(x)$ είναι βαθμού μηδέν.

■

Για να απλοποιήσουμε τα πράγματα, συμφωνούμε ότι αν $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$ και $a_i = 0$ αν $i > n$, τότε θα γράφουμε το $f(x)$ στη μορφή $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$. Επίσης αν ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο, θα γράφουμε κάθε όρο $1x^k$ ενός τέτοιου αθροίσματος ως x^k . Για παράδειγμα στον $\mathbb{Z}[x]$, θα γράφουμε το πολυώνυμο $2 + 1x$ ως $2 + x$. Τέλος συμφωνούμε να παραλείπουμε από το τυπικό άθροισμα κάθε όρο $0x^i$ ή a_0 , αν $a_0 = 0$ και για όλα τα i δεν ισχύει $a_i = 0$. Έτσι τα $0, 2, x$ και $2 + x^2$

είναι όλα πολυώνυμα με συντελεστές από το \mathbb{Z} . Κάθε στοιχείο του R λέγεται σταθερό πολυώνυμο.

Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων με συντελεστές από έναν δακτύλιο R ορίζονται με έναν τρόπο που σας είναι τυπικά οικείος. Αν

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

και

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots$$

Τότε για την πρόσθεση των πολυωνύμων, έχουμε

$$f(x) + g(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots,$$

όπου $c_n = a_n + b_n$, και για τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων, έχουμε

$$f(x)g(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n + \dots$$

όπου $d_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$. Είναι φανερό ότι τόσο τα c_i όσο και τα d_i είναι πάλι ίσα με μηδέν για όλες εκτός από πεπερασμένες τιμές του i , επομένως οι παραπάνω ορισμοί έχουν νόημα. Σημειώστε ότι το $\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ μπορεί να μην είναι ίσο με το $\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ αν ο R δεν είναι αντιμεταθετικός. Με αυτούς τους ορισμούς της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1 [3] Το σύνολο $R[x]$ όλων των πολυωνύμων μιας απροσδιόριστης x με συντελεστές από έναν δακτύλιο R είναι δακτύλιος με την πρόσθεση και των πολλαπλασιασμό πολυωνύμων. Αν ο R είναι αντιμεταθετικός, τότε το ίδιο ισχύει και για τον $R[x]$ και αν το R έχει μοναδιαίο στοιχείο το 1, τότε το 1 είναι και μοναδιαίο στοιχείο του $R[x]$.

Απόδειξη Το ότι η $\langle R[x], + \rangle$ είναι αβελιανή ομάδα, είναι προφανές. Η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού και οι επιμεριστικοί νόμοι προκύπτουν από γρήγορους, αλλά κάπως βαρετούς υπολογισμούς. Για να σας

δώσουμε μια ιδέα, αποδεικνύουμε την προσεταιριστική ιδιότητα. Εφαρμόζοντας τα αξιώματα του δακτυλίου στα $a_i, b_j, c_k \in R$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) \right] \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) \\
 &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n \right] \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^s \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) c_{s-n} \right] x^s \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j+k=s} a_i b_j c_k \right) x^s \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^s a_{s-m} \left(\sum_{j=0}^m b_j c_{m-j} \right) \right] x^s \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^m b_j c_{m-j} \right) x^m \right] \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) \right].
 \end{aligned}$$

▲

Ορισμός 1.10 [3] Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα (αριστερό) R -πρότυπο (R -module) είναι ένα σύνολο M με δύο πράξεις την πρόσθεση ($+: M \times M \rightarrow M$) και τον πολλαπλασιασμό ($\cdot: R \times M \rightarrow M$) οι οποίες ικανοποιούν τα αξιώματα:

- 1) $\forall x, y, z \in M$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης)
- 2) $\forall x, y \in M$ $x + y = y + x$ (Αντιμεταθετική)
- 3) $\exists 0 \in M$ τέτοιο ώστε $\forall x \in M$ $x + 0 = x$ (Υπαρξη ουδέτερου στοιχείου για την πρόσθεση)

- 4) $\forall x \in M \exists -x \in M$ τέτοιο ώστε $x + (-x) = 0$ (Υπαρξη προσθετικά αντίστροφου)
- 5) $\forall x, y \in M, \forall a, b \in R \ a(x + y) = ax + ay, (a + b)x = ax + bx$
(Επιμεριστική)
- 6) $\forall x \in M, \forall a, b \in R \ (ab)x = a(bx)$ (Προσεταιριστική)
- 7) Αν 1 είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R για τον πολλαπλασιασμό τότε $\forall x \in M \ 1x = x$ (Ουδέτερο στοιχείο για τον πολλαπλασιασμό)

■

Ένα R – πρότυπο μοιάζει πάρα πολύ με διανυσματικό χώρο, μόνο που εδώ ζητάμε από τα βαθμωτά να είναι στοιχεία ενός δακτυλίου. Αν ο R είναι δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και $1a = a$ για κάθε $a \in M$, τότε το M λέγεται μονοειδές R – πρότυπο.

Παράδειγμα 1.6 Για κάθε ιδεώδες J του R – πρότυπο, μπορούμε να δούμε την $\langle J, + \rangle$ ως ένα, R – πρότυπο όπου αν $a \in J$ και $r \in R$, να είναι το συνηθισμένο γινόμενο των r και a , αν τα δούμε και τα δύο ως στοιχεία του δακτυλίου R .

■

Μπορούμε να ορίσουμε ένα υποπρότυπο G ενός R – πρότυπο M το οποίο είναι υποσύνολο $G \subseteq M$. Θεωρούμε ένα υποσύνολο T του R – πρότυπο M και συμβολίζουμε με $\langle T \rangle$ το μικρότερο υποπρότυπο του M που περιέχει το T , και λέμε ότι το T είναι γεννήτορας του $\langle T \rangle$ ή, ισοδύναμα, ότι $\langle T \rangle$ παράγει το T . Μπορούμε να δείξουμε ότι $\langle T \rangle = \{ \sum_{j \in J} h_j t_j \mid t_j \in T, h_j \in R \}$ όταν J είναι ένα πεπερασμένο σύνολο συντελεστών. Με άλλα λόγια, το υποπρότυπο του M παράγεται από ένα (μη πεπερασμένο) σύνολο $T \subseteq M$. Όπως και στην περίπτωση με τα ιδεώδη, ένα R – πρότυπο του M είναι πεπερασμένα παραγόμενο αν υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $T = \{t_1, \dots, t_s\}$ τέτοιο ώστε $M = \langle t_1, \dots, t_s \rangle = \{ \sum_{i=1}^s h_i t_i, h_i \in R \}$.

Κάθε υποπρότυπο G ενός R -προτύπου M προκαλεί με έναν φυσιολογικό τρόπο μία ισοδύναμη σχέση με το M . Αν $f, g \in M$ λέμε ότι είναι ισοδύναμα πρότυπο G και γράφουμε $g \equiv f \pmod{G}$ αν $f - g \in G$. Για κάθε $f \in M$ η ισοδύναμη κλάση του f πρότυπο G συμβολίζεται με $[f]$. Το σύνολο των ισοδύναμων κλάσεων G συμβολίζεται με m/G . Δηλαδή

$$m/G = \{[f]: f \in M\}.$$

Συνήθως χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό πινάκων $\langle T \rangle$ για να δηλώσουμε το υποπρότυπο του $\mathbb{R}^m[\xi_1, \dots, \xi_m]$ που παράγεται από τις στήλες του πολυωνυμικού πίνακα $T \in \mathbb{R}^{m \times s}[\xi_1, \dots, \xi_m]$.

Ως συνέπεια των υποπροτύπων του $\mathbb{R}^m[\xi_1, \dots, \xi_m]$ έχουμε ότι από κάθε υποπρότυπο M μπορούμε να βρούμε έναν πίνακα $T \in \mathbb{R}^{m \times s}[\xi_1, \dots, \xi_m]$ τέτοιον ώστε $M = \langle T \rangle$. Αυτός ο πίνακας φυσικά δεν είναι μοναδικός. Πιο συγκεκριμένα για δύο πολυωνυμικούς πίνακες T_1 και T_2 έχουμε $\langle T_1 \rangle = \langle T_2 \rangle$ αν και μόνο αν υπάρχουν άλλοι πολυωνυμικοί πίνακες U_1 και U_2 τέτοιои ώστε $T_1 = T_2 U_2$ και $T_2 = T_1 U_1$. Στην συνέχεια οι πολυωνυμικοί πίνακες T_1 και T_2 με την ιδιότητα ότι $\langle T_1 \rangle = \langle T_2 \rangle$ θα ονομάζονται ισοδύναμοι.

Η τάξη του $T \in \mathbb{R}^{m \times s}[\xi_1, \dots, \xi_m]$ ορίζεται ως ο μέγιστος αριθμός των ανεξάρτητων στηλών του T . Αν $rank(T) = p$ τότε ο T περιέχει έναν $p \times p$ υποπίνακα του οποίου η ορίζουσα δεν είναι το μηδενικό πολώνυμο. Αντίθετα οι τετραγωνικοί υποπίνακες μεγέθους μεγαλύτερου του p έχουν όλοι μηδενική ορίζουσα. Ως συνέπεια των υποπροτύπων του $\mathbb{R}^m[\xi]$ έχουμε ότι από κάθε υποπρότυπο M μπορούμε να βρούμε έναν πίνακα $T \in \mathbb{R}^{m \times s}[\xi]$ με πλήρη τάξη στήλης (δηλαδή $rank(T) = p$) τέτοιον ώστε $M = \langle T \rangle$. Είναι φανερό ότι $p = m(M)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός των γεννητόρων του υποπροτύπου M . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι από κάθε πολυωνυμικό πίνακα T_1 μπορούμε να βρούμε πολυωνυμικούς πίνακες T_2, U_1 και U_2 με T_2 να έχει πλήρη τάξη στήλης έτσι ώστε $T_1 = T_2 U_2$ και $T_2 = T_1 U_1$. Συγκεκριμένα αν ο T_1 έχει πλήρη τάξη στήλης, τότε $U_1 U_2 = U_2 U_1 = I$ όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας κατάλληλης διάστασης. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι U_1 και U_2 είναι αντιστρέψιμοι πολυωνυμικοί πίνακες, δηλαδή πίνακες που η ορίζουσα τους είναι μία πραγματική σταθερά διάφορη του μηδενός.

Θεώρημα 1.2 [3] Έστω $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}[\xi_1, \dots, \xi_n]$. Τότε

$$F = \text{Ker} \left(R_1 \left(\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \dots, \frac{d}{dx_n} \right) \right) = \text{Ker} \left(R_2 \left(\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \dots, \frac{d}{dx_n} \right) \right) \Leftrightarrow \langle R_1^T \rangle \\ = \langle R_2^T \rangle$$

▲

Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι διαφορετικές παραστάσεις πυρήνα έχουν την ίδια συμπεριφορά. Αυτές οι παραστάσεις πυρήνα έχουν την εξής ιδιότητα: οι αναστροφές των σειρών των αντίστοιχων πολυωνυμικών πινάκων παράγουν το ίδιο *module*. Για την ειδική περίπτωση στην L^x μπορούμε να βρούμε έναν πολυωνυμικό πίνακα R έτσι ώστε $F = \text{Ker} \left(R \left(\frac{d}{dt} \right) \right)$.

1.7 Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Ορισμός 1.11 [3] Έστω $\mathbb{R}^{n \times n}$ το σύνολο των πραγματικών $n \times n$ πινάκων και $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ λέγεται ιδιοτιμή ή χαρακτηριστική τιμή ενός $n \times n$ πίνακα A , εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ με $x \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$Ax = \lambda x$$

Η προηγούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Τα διανύσματα x που ικανοποιούν το ομογενές σύστημα λέγονται ιδιοδιανύσματα ή χαρακτηριστικά διανύσματα.

Το ομογενές σύστημα έχει λύση εκτός της μηδενικής ($x \neq 0$), όταν η ορίζουσα του είναι ίση με μηδέν, δηλαδή

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Το πολυώνυμο Φ n -οστού βαθμού

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A .

■

Ορισμός 1.12 [3] Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο V και ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο την απεικόνιση $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία

1. $(x, x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει αν-ν $x = 0$.
2. $(x, y) = (y, x)$ για κάθε $x, y \in V$.
3. $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in V$ και κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

Ένας διανυσματικός χώρος V εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται χώρος εσωτερικού γινομένου.

■

Ορισμός 1.13 [3] Ως μηδενοχώρο (null space) $\mathcal{N}(\cdot)$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ορίζουμε το σύνολο των διανυσμάτων $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ τα οποία επαληθεύουν την εξίσωση $Ax = 0$, δηλαδή το σύνολο

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^{n \times 1} | Ax = 0\}$$

Η διάσταση του μηδενοχώρου $\mathcal{N}(A)$ ορίζεται ως μηδενικότητα του πίνακα A και γράφουμε $nullity(A)$, δηλαδή ισχύει

$$nullity(A) = \dim(\mathcal{N}(A))$$

Ως αριστερό μηδενοχώρο $\mathcal{L}(\cdot)$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ορίζουμε το σύνολο των διανυσμάτων $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ τα οποία επαληθεύουν την εξίσωση $x^T A = 0^T$, δηλαδή το σύνολο

$$\mathcal{L}(A) = \{x \in \mathbb{R}^{n \times 1} | x^T A = 0^T\}$$

Εφόσον $(x^T A)^T = A^T x$, ο αριστερός μηδενοχώρος ενός πίνακα A ταυτίζεται με το μηδενοχώρο του αναστρόφου του, δηλαδή

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{N}(A^T)$$

■

Ορισμός 1.14 [3] Κάθε απεικόνιση $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ της οποίας οι τιμές δίνονται από μια σχέση της μορφής $A(\lambda) = \sum_{i=0}^m A_i \lambda^i$ όπου $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι σταθεροί πίνακες και $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανεξάρτητη μεταβλητή, ονομάζεται πολυωνυμικός πίνακας βαθμού m .

■

Το πολυωνυμικό πρόβλημα ιδιοτιμών (ΠΠΙ) είναι να βρούμε μια ιδιοτιμή λ και το αντίστοιχο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα x που ικανοποιούν την

$$A(\lambda)x = 0.$$

Στην περίπτωση που $m = 1$ έχουμε το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών (ΓΠΙ)

$$Ax = \lambda Bx$$

και αν $A_0 = I$ έχουμε το γνωστό πρόβλημα ιδιοτιμών (ΓΠ)

$$Ax = \lambda x.$$

Μία ακόμη σημαντική περίπτωση είναι το τετραγωνικό πρόβλημα ιδιοτιμών (ΤΠΙ) με $m = 2$.

Έστω $A(\lambda)$ ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας βαθμού m .

Ορισμός 1.15 [3] Ο $A(\lambda)$ είναι κανονικός (proper) αν

$$\det(A(\lambda)) \neq 0.$$

■

Το ΠΠΙ είναι να βρούμε βαθμωτά λ και μη μηδενικά x και y που να ικανοποιούν την

$$A(\lambda) = 0, y^* A(\lambda) = 0$$

Το λ είναι ιδιοτιμή και, x και y είναι τα αντίστοιχα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα. Ισοδύναμα, τα ιδιοδιανύσματα είναι οι λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\det(A(\lambda)) = 0$$

Έστω d είναι ο βαθμός του βαθμωτού πολυωνύμου $\det(A(\lambda))$. Οι d ρίζες του $\det(A(\lambda))$ ονομάζονται μη πεπερασμένες ιδιοτιμές. Αν $d < mn$, τότε λέμε ότι $A(\lambda)$ έχει $mn - d$ πεπερασμένες ιδιοτιμές. Έστω A_m ιδιάζων με $\det(A_m) = 0$. Θεωρούμε το ΠΠΠ που συνδέεται με την $A(\mu)$, όπου $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Βλέπουμε ότι η τιμή $\mu = 0$ είναι μια ιδιοτιμή του ΠΠΠ και τα ιδιοδιανύσματα είναι διανύσματα που παράγονται από τον μηδενικό χώρο $\mathcal{N}(A)$. Η ιδιοτιμή μηδέν του ΠΠΠ που συνδέεται με το δυϊκό $\lambda^m A\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ αντιστοιχεί στις μη πεπερασμένες ιδιοτιμές του ΠΠΠ που συνδέεται με το $A(\lambda)$.

Ορισμός 1.16 [3] Έστω λ η ιδιοτιμή του $A(\lambda)$.

Η αλγεβρική πολλαπλότητα του λ που συμβολίζεται με p της ρίζας λ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\det(A(\lambda))$.

Η γεωμετρική πολλαπλότητα του λ που συμβολίζεται με q είναι ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που παράγουν τον μηδενικό χώρο $\mathcal{N}(A(\lambda))$.

Έστω p η αλγεβρική πολλαπλότητα του λ και έστω q η γεωμετρική πολλαπλότητα του λ . Η ιδιοτιμή λ είναι απλή αν $p = 1$. Όταν $p > 1$, λ είναι μια πολλαπλή ιδιοτιμή. Στην περίπτωση που $p > 1$ και $q = p$, λ είναι σχεδόν απλή. Διαφορετικά λ είναι μια ελλιπής ιδιοτιμή.

■

Ορισμός 1.17 [3] Ως μηδενικά (zeros) ενός $n \times n$ πολυωνυμικού πίνακα $A(\lambda)$ βαθμού m ορίζουμε τους μιγαδικούς αριθμούς z_i , $i = 1, \dots, k \leq nm$ για τους οποίους

$$\text{rank}(A(z_i)) < \text{rank}(A(\lambda)) = n$$

ή ισοδύναμα τις ρίζες του βαθμωτού πολυωνύμου $\varphi(\lambda) = \det(A(\lambda))$.

■

Τα μηδενικά του πολυωνυμικού πίνακα $A(\lambda)$ είναι οι ιδιοτιμές z του συνοδεύον πίνακα C^1 με μεγιστοβάθμιο συντελεστή ίσο με I .

$$\text{όπου } C^1 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ -C_0 & -C_1 & -C_2 & \dots & -C_{m-1} \end{pmatrix}$$

Ορισμός 1.18 [3] Θεωρούμε τους πολυωνυμικούς πίνακες $C, \tilde{C}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ βαθμού m με τιμές

$$C(\lambda) = C_m \lambda^m + \dots + C_1 \lambda + C_0, \tilde{C}(\lambda) = s^m C(1/\lambda) = C_0 \lambda^m + \dots + C_{m-1} \lambda + C_m$$

Και ονομάζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα \tilde{C} δυϊκό (dual) του ευθέως πολυωνυμικού πίνακα C .

■

Ορισμός 1.19 [3] Ο βαθμός (degree) ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, συμβολίζεται $deg A(\lambda)$ και ορίζεται ως ο μέγιστος βαθμός ανάμεσα σε όλους τους βαθμούς των μέγιστων τάξεων (μη μηδενικών) υποοριζουσών του $A(\lambda)$.

■

Ορισμός 1.20 [3] Ορίζουμε ως πολυπλοκότητα των γραμμών (row complexity) $c_r(A)$ (των στηλών $c_c(A)$) του πολυωνυμικού πίνακα $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, το άθροισμα των βαθμών των γραμμών (των στηλών) των μη μηδενικών πολυωνυμικών διανυσμάτων δηλαδή

$$c_r(A) = \sum_{i=1}^m deg t_i(\lambda), c_c(A) = \sum_{j=1}^n deg t_j(\lambda)$$

■

Θεώρημα 1.3 [3] (Smith μορφή) Έστω $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με $rank_{\mathbb{R}(\lambda)} A(\lambda) = r$, $r \leq \min(m, n)$. Τότε ο $A(\lambda)$ είναι αντιστρέψιμος ισοδύναμος με έναν διαγώνιο πίνακα $S_{A(\lambda)}^C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ που έχει τη μορφή

$$S_{A(\lambda)}^C(\lambda) = diag[\varepsilon_1(\lambda), \varepsilon_2(\lambda), \dots, 0_{m-r, p-r}]$$

Ο πολυωνυμικός πίνακας $S_{A(\lambda)}^{\mathbb{C}}(\lambda)$ ονομάζεται Smith μορφή στο \mathbb{C} του $A(\lambda)$, όπου $\varepsilon_i(\lambda) \in \mathbb{R}$, έχουν ως μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα, είναι πρώτα μεταξύ τους και ικανοποιούν τις σχέσεις $\forall i \in r - 1$.

Απόδειξη Μεταξύ όλων των στοιχείων a_{ik} του $A(\lambda)$ που δεν είναι ίσα με το μηδέν διαλέγουμε ένα ελαχίστου βαθμού στο λ και με κατάλληλες μεταθέσεις των γραμμών και στηλών πηγαίνουμε αυτό το στοιχείο στη θέση $a_{11}(\lambda)$. Μετά βρίσκουμε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των πολυωνύμων $a_{i1}(\lambda)$ και $a_{1k}(\lambda)$ με το $a_{11}(\lambda)$

$$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q_{i1}(\lambda) + r_{i1}(\lambda)$$

$$a_{1k}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q_{1k}(\lambda) + r_{1k}(\lambda)$$

για $i = 2, 3, \dots, m$ $k = 2, 3, \dots, n$

Αν έστω και ένα από τα υπόλοιπα $r_{i1}(\lambda), r_{ik}(\lambda)$ (για $i = 2, 3, \dots, m$ $k = 2, 3, \dots, n$) για παράδειγμα το $r_{1k}(\lambda)$ δεν είναι ίσο με το μηδέν, τότε με αφαίρεση από την k -οστή στήλη της πρώτης στήλης πολλαπλασιασμένη με $q_{1k}(\lambda)$ αντικαθιστούμε το $a_{1k}(\lambda)$ με το υπόλοιπο $r_{1k}(\lambda)$ που είναι μικρότερου βαθμού από το $a_{11}(\lambda)$.

Μετά ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω μπορούμε να μειώσουμε το βαθμό του στοιχείου στην πάνω αριστερή γωνία του πίνακα βάζοντας στην θέση του ένα στοιχείο μικρότερου βαθμού ως προς λ .

Αλλά εάν όλα τα υπόλοιπα $r_{21}(\lambda), \dots, r_{m1}(\lambda); r_{12}(\lambda), \dots, r_{1n}(\lambda)$ είναι ίσα με το μηδέν τότε αφαιρώντας την i -οστή γραμμή από την πρώτη πολλαπλασιασμένη με $q_{i1}(\lambda)$ για $i = 2, \dots, m$ και την k -οστή στήλη από την πρώτη πολλαπλασιασμένη με $q_{1k}(\lambda)$ για $k = 2, \dots, n$ ανάγουμε τον πολυωνυμικό πίνακα στη μορφή

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}(\lambda) & 0 & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Εάν έστω και ένα από τα στοιχεία $a_{ik(\lambda)}$ για $i = 2, \dots, m; k = 2, \dots, n$ δεν είναι διαιρετό χωρίς υπόλοιπο από το $a_{11}(\lambda)$, τότε προσθέτουμε στην πρώτη στήλη, αυτή τη στήλη η οποία περιέχει τέτοια στοιχεία στα οποία καταλήξαμε στην προηγούμενη διαδικασία και μπορούμε να αντικαταστήσουμε ξανά το στοιχείο $a_{11}(\lambda)$ με ένα πολώνυμο μικρότερου βαθμού.

Εφόσον το αρχικό στοιχείο $a_{11}(\lambda)$ είχε ένα καθορισμένο βαθμό και εφόσον η διαδικασία μείωσης αυτού του βαθμού δεν μπορεί να συνεχιστεί απεριόριστα, πρέπει μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό στοιχειωδών πράξεων να πάρουμε έναν πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22}(\lambda) & 0 & b_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2}(\lambda) & \dots & b_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

στον οποίο όλα τα στοιχεία $b_{ik}(\lambda)$ είναι διαιρετά, χωρίς υπόλοιπο, με το $\varepsilon_1(\lambda)$. Αν μεταξύ αυτών των στοιχείων υπάρχει ένα που δεν είναι ίσο με το μηδέν, τότε συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία στον υποπίνακα που προκύπτει από τις γραμμές $2, \dots, m$ και τις στήλες $2, \dots, n$, και ανάγουμε τον παραπάνω πίνακα στη μορφή

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}(\lambda) & \dots & c_{3n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{m3}(\lambda) & \dots & c_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

όπου $\varepsilon_2(\lambda)$ είναι διαιρετό χωρίς υπόλοιπο με το $\varepsilon_1(\lambda)$ και όλα τα πολώνυμα $a_{ik}(\lambda)$ όπου $i = 3, \dots, m, k = 3, \dots, n$ είναι διαιρετά χωρίς υπόλοιπο με το $\varepsilon_2(\lambda)$.

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, τελικά καταλήγουμε σε έναν πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_s(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου τα πολυώνυμα $\varepsilon_1(\lambda), \varepsilon_2(\lambda), \dots, \varepsilon_s(\lambda)$ με $(\lambda < \min(m, n))$ δεν είναι ίσα με μηδέν και το καθένα είναι διαιρετό με το προηγούμενο.

Πολλαπλασιάζοντας τις πρώτες λ γραμμές με τους κατάλληλους μη μηδενικούς παράγοντες, μπορούμε να συμφωνήσουμε ότι οι μεγαλύτεροι συντελεστές των πολυωνύμων $\varepsilon_1(\lambda), \varepsilon_2(\lambda), \dots, \varepsilon_s(\lambda)$ είναι ίσοι με ένα.



Θεώρημα 1.4 [3] (Πεπερασμένα ζεύγη Jordan) Έστω $(C_{\lambda_0} \in \mathbb{R}^{r \times n}, J_{\lambda_0} \in \mathbb{R}^{n \times n})$ ένα ζεύγος πινάκων όπου J_{λ_0} είναι ένας πίνακας Jordan με μοναδική ιδιοτιμή λ_0 δηλαδή

$$J_{\lambda_0} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ικανές και αναγκαίες ώστε το ζεύγος $(C_{\lambda_0}, J_{\lambda_0})$ να είναι ένα ζεύγος Jordan του πολυωνυμικού πίνακα $A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \dots + A_q\lambda^q$ που αντιστοιχεί στο λ_0

α) η ορίζουσα $A(\lambda)$ να έχει μία ρίζα λ_0 πολλαπλότητας n

β) $rank \begin{pmatrix} C_{\lambda_0} \\ C_{\lambda_0} J_{\lambda_0} \\ \vdots \\ C_{\lambda_0} J_{\lambda_0}^{n-1} \end{pmatrix} = n$

γ) $A_q C_{\lambda_0} J_{\lambda_0}^q + \dots + A_1 C_{\lambda_0} J_{\lambda_0} + A_0 C_{\lambda_0} = 0$

Παίρνοντας ένα ζεύγος Jordan $C_{\lambda_0} \in \mathbb{R}^{r \times n_i}, J_{\lambda_0} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ για κάθε μηδενικό λ_i , όπου $i = 1, 2, \dots, k$ του $A(\lambda)$, ορίζουμε ένα νέο πεπερασμένο ζεύγος Jordan ($C \in \mathbb{R}^{r \times n}, J \in \mathbb{R}^{n \times n}$) του $A(\lambda)$ όπου $C = (C_{\lambda_1} \ C_{\lambda_2} \ \dots \ C_{\lambda_k});$
 $J = \text{blockdiag}(J_{\lambda_1} \ J_{\lambda_2} \ \dots \ J_{\lambda_k})$

Σημειώνουμε ότι το ζεύγος $(C_{\lambda_0}, J_{\lambda_0})$ δεν είναι ορισμένο μοναδικά από τον πολυωνυμικό πίνακα $A(\lambda)$.





Η Προσέγγιση της Συμπεριφοράς στα Δυναμικά Συστήματα

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε μια πρωτότυπη προσέγγιση των συστημάτων και της θεωρίας ελέγχου, τη λεγόμενη προσέγγιση συμπεριφοράς. (behavioral approach) Για αρχή, θα πρέπει να αφήσουμε την τάση να βλέπουμε το σύστημα ως έναν επεξεργαστή σήματος, όπου οι είσοδοι τροφοδοτούνται σε κάποιο “μαύρο κουτί”, κάτι μυστηριώδες (ή όχι και τόσο μυστηριώδες) συμβαίνει στο εσωτερικό του κουτιού, και οι έξοδοι για να μετρηθεί και να ρυθμιστεί εξέρχονται από το σύστημα. Αυτήν είναι μια πολύ πρακτική και χρήσιμη άποψη, για μεγάλο πλήθος εφαρμογών. Ωστόσο, σκεπτόμενοι λίγο πιο γενικά για συστήματα που προκύπτουν στη φυσική, στη βιολογία, στην οικονομία και για μαθηματικά μοντέλα που έχουν μελετηθεί κατά την διάρκεια των αιώνων, φαίνεται πιο φυσικό να δούμε ένα δυναμικό σύστημα ως μια σχέση ποσοτήτων για τις οποίες είναι δύσκολο να πούμε ποιο είναι το αίτιο και ποιο το αποτέλεσμα (και οι δύο ερμηνείες μπορούν υποστηριχθούν).

Έτσι έχουμε τον ακόλουθο πιο γενικό και πλήρη ορισμό του δυναμικού συστήματος. Τα δυναμικά συστήματα, που εξελίσσονται στο χρόνο και αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον μέσω κάποιας συνάρτησης του χρόνου ονομάζονται σήματα ή τροχιές. Σύμφωνα με τον Willems [4] ο ορισμός των δυναμικών συστημάτων περιλαμβάνει τρεις ποσότητες. Πρώτον ένα σύνολο \mathbb{T} που είναι ο άξονας του χρόνου, δεύτερον, ένα σύνολο \mathbb{W} , από όπου τα σήματα παίρνουν τις τιμές τους. Οπότε τροχιά είναι η συνάρτηση

$$w: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{W}, \quad t \mapsto w(t)$$

Με $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$, συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων που ορίζονται στο \mathbb{T} και παίρνουν τις τιμές τους στο \mathbb{W} . Το τρίτο και πιο σημαντικό μέρος του ορισμού είναι το σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{W}^{\mathbb{T}}$, δηλαδή το σύνολο όλων των τροχιών του χρόνου. Η συλλογή των τροχιών του \mathcal{B} ονομάζεται συμπεριφορά του Σ .

Ορισμός 2.1 [4] Ονομάζουμε δυναμικό σύστημα (dynamical system) Σ κάθε τριάδα της μορφής

$$\Sigma = (\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$$

όπου στις περιπτώσεις που θα μελετήσουμε το σύνολο \mathbb{T} είναι ο άξονας του χρόνου και ισχύει $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$, \mathbb{W} είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, δηλαδή $\mathbb{W} = \mathbb{F}^q$ με $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ και $q \in \mathbb{N}^*$. ■

Στην συνέχεια θα αναφέρουμε τρία παραδείγματα στα οποία βρίσκεται εφαρμογή ο παραπάνω ορισμός.

Παράδειγμα 1.1

Σύμφωνα με τον Kepler, η κίνηση των πλανητών στο ηλιακό σύστημα ακολουθεί τους εξής τρεις κανόνες:

(K.1):Κινούνται σε ελλειπτική τροχιά με τον ήλιο να είναι σημείο εστίασεως.

(K.2):Η επιβατική ακτίνα Ηλίου-Πλανήτη γράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους ή εμβαδά ανάλογα των χρόνων.

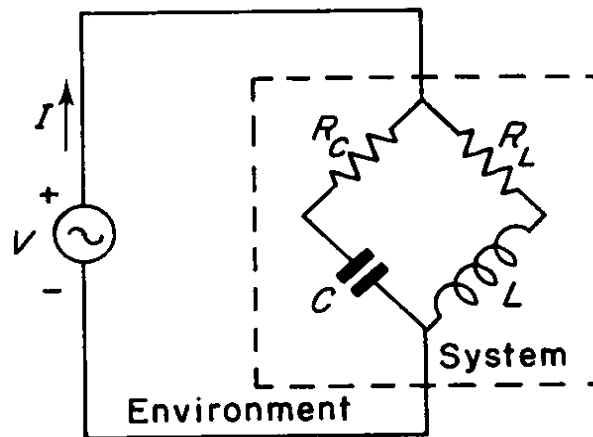
(K.3):Τα τετράγωνα των χρόνων των αστρικών περιφορών των πλανητών είναι ανάλογα των κύβων της μέσης απόστασης αυτών από τον ήλιο.

Η οικογένεια όλων των τροχιών που ικανοποιούν τους νόμους του Kepler είναι φανερό ότι ορίζουν ένα δυναμικό σύστημα όπως αυτό που ορίσαμε στον ορισμό 2.1 με

$$T = \mathbb{R}, \mathbb{W} = \mathbb{R}^3 \text{ και } \mathcal{B} = \{x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 | (K_1), (K_2), (K_3) \text{ ισχύουν}\}. \blacksquare$$

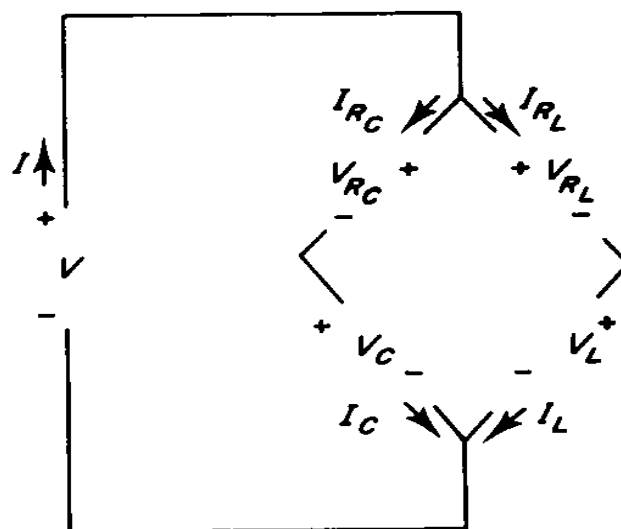
Παράδειγμα 1.2 Ο κώδικας C είναι υποσύνολο του A^I με A είναι κώδικας αλφαβήτου (δηλαδή $A = \Phi^x$ όπου Φ πεπερασμένος χώρος) και I είναι σύνολο δεικτών (δηλαδή $I = \{1, \dots, n\}$ για τμήματα κωδίκων και $I = \mathbb{R}$ ή $I = \mathbb{N}$ για σπείρες κωδίκων). Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό 2.1 οι κώδικες είναι δυναμικά συστήματα. ■

Παράδειγμα 1.3 Το παράδειγμα αυτό περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο το ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος 11 αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του.



Σχήμα 11

Η αλληλεπίδραση αυτή γίνεται μέσω των τελικών ακροδεκτών όπως αυτοί φαίνονται στο σχήμα 12.



Σχήμα 12

Οι μεταβλητές που την περιγράφουν είναι το ρεύμα I αλλά και η τάση V όπως αυτές σημειώνονται στο σχήμα 10. Έτσι $\mathbb{W} = \mathbb{R}^2$. Σαν άξονα χρόνου παίρνουμε το σύνολο $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του κυκλώματος θα θεωρήσουμε τα ρεύματα και τις τάσεις στους εσωτερικούς κλάδους του κυκλώματος. Στο σύστημα πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω εξισώσεις συμπεριφοράς.

Καταστατικές εξισώσεις

$$V_{R_C} = R_C I_{R_C} \quad V_{R_L} = R_L I_{R_L} \quad C \dot{V}_C = I_C \quad L I_L = V_L$$

Νόμοι του Kirchhoff

$$I = I_{R_C} + I_{R_L} \quad I_{R_C} = I_C \quad I_{R_L} = I_L$$

$$V = V_C + V_{R_C} = V_L + V_{R_L}$$

Δηλαδή προκύπτει η συμπεριφορά του συστήματος, που ορίζεται ως εξής

$$\mathcal{B} = \{(I, V): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 / \exists (I_{R_C}, V_{R_C}, I_{R_L}, V_{R_L}, I_C, V_C, I_L, V_L): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^8\}$$

Απαλοΐφοντας τις μεταβλητές $I_{R_C}, V_{R_C}, I_{R_L}, V_{R_L}, I_C, I_L, V_L$ προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$R_C L C \ddot{I} + (L + R_C R_L C) \dot{I} + R_L I = L C \ddot{V} + (R_C + R_L) C \dot{V} + V \quad (2.1)$$

η οποία είναι εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά του συστήματος.

Έτσι προκύπτει η τελική περιγραφή της συμπεριφοράς που είναι

$$\mathcal{B} = \{(I, V): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 / (2.1) \text{ ισχύει}\}$$

Αργότερα είχαμε μια μικρή τροποποίηση του παραπάνω ορισμού.[5] Έστω \mathcal{A} το σύνολο των βαθμωτών σημάτων, με q συμβολίζουμε τον αριθμό των σημάτων που εμφανίζονται στο σύστημα και έστω $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^q$ συμβολίζουμε το σύνολο των q -άδα αυτών των σημάτων που ικανοποιούν τον κανόνα του συστήματος. Τότε το σύστημα Σ ορίζεται από την εξής τριάδα $\Sigma = (\mathcal{A}, q, \mathcal{B})$. Φυσικά, για $\mathbb{W} = \mathbb{F}^q$, ο ορισμός 2.1 μπορεί να ενσωματωθεί στην τροποποιημένη εκδοχή θέτοντας $\mathcal{A} = \mathbb{F}^{\mathbb{T}}$.

2.2 Αρχικά Βήματα

Ορισμός 2.2 [7] Ένα σύστημα $\Sigma = (\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$ ονομάζεται γραμμικό (linear) αν \mathbb{W} είναι ένας διανυσματικός χώρος και \mathcal{B} είναι ένας υποχώρος του $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$, δηλαδή

$$w_1, w_2 \in \mathbb{W}^{\mathbb{T}}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F} \Rightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \mathbb{W}^{\mathbb{T}}$$

αυτός ο γραμμικός συνδυασμός των σημάτων είναι επίσης σήμα, με άλλα λόγια

$$w_1, w_2 \in \mathcal{B}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F} \Rightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \mathcal{B}$$

έτσι κάθε γραμμικός συνδυασμός των αποδεκτών σημάτων είναι επίσης αποδεκτός. ■

Ας υποθέσουμε ότι $\mathbb{W} = \mathbb{F}^q$, όπου $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Για τον ορισμό του χρονικά αναλλοίωτου, πρέπει να περιορίσουμε σε προσθετικά κλειστά χρονικά σύνολα $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$, δηλαδή

$$+ : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$$

Φυσικά αυτή η σχέση ικανοποιείται από όλα τα βασικά σύνολα χρόνου, δηλαδή για $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ή για $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Στη συνέχεια θεωρούμε $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ για την περίπτωση του συνεχούς χρόνου και $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ για την περίπτωση του διακριτού χρόνου. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε, για κάθε $t \in \mathbb{T}$, τον τελεστή μετατόπισης

$$\sigma^t : \mathbb{W}^{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{W}^{\mathbb{T}}, w \mapsto \sigma^t w,$$

όπου

$$(\sigma^t w)(\tau) = w(t + \tau) \text{ για όλα τα } \tau \in \mathbb{T}.$$

Ορισμός 2.3 [7] Ένα σύστημα $\Sigma = (\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$ ονομάζεται χρονικά αναλλοίωτο (time-invariant) αν

$$w \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{T} \Rightarrow \sigma^t w \in \mathcal{B}.$$

■

Μία σημαντική ερώτηση στη θεωρία των συστημάτων συμπεριφοράς είναι αυτή για την ύπαρξη του πυρήνα της απεικόνισης. Έστω ένα γραμμικό, αναλλοίωτο υπό μετατοπίσεις υποσύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{W}^{\mathbb{T}}$, το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε είναι πότε υπάρχει ένα γραμμικό σύστημα διαφορών ή διαφορικών εξισώσεων με συντελεστές στο σώμα \mathbb{F} του οποίου το σύνολο λύσεων είναι ακριβώς ίσο με το \mathcal{B} ;

Για διακριτό χρόνο [8], η ιδιότητα που μας λείπει (εκτός από την ιδιότητα της γραμμικότητας και της αναλλοίωτης μετατόπισης) ονομάζεται πληρότητα, και αυτές οι τρεις ιδιότητες μαζί είναι ικανές και αναγκαίες ώστε το σύστημα να επιδέχεται την αναπαράσταση

$$\mathcal{B} = \{w \in (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}} \mid R w = 0\}$$

για έναν πολυωνυμικό πίνακα $R \in \mathbb{F}[s, s^{-1}]^{g \times q}$, ο οποίος δρα στο $w \in (\mathbb{F}^q)^{\mathbb{Z}}$ με τους μοναδιαίους τελεστές μετατόπισης $sw := \sigma w = \sigma^1 w$ και $s^{-1}w := \sigma^{-1} w$.

Επίσης για συνεχή χρόνο ισχύει μια ανάλογη ερώτηση. Πότε ένας γραμμικός, χρονικά αναλλοίωτος υποχώρος $\mathcal{B} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathcal{B} = \{w \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q) \mid R w = 0\}$$

για έναν πολυωνυμικό πίνακα $R \in \mathbb{R}[s]^{g \times q}$, ο οποίος δρα στο $w \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$ με τον τελεστή παραγώγισης $s = \frac{d}{dt}$;

Μπορούμε να προσεγγίσουμε τις περιπτώσεις συνεχούς και διακριτού χρόνου υπό κοινό πλαίσιο εργασίας θέτοντας $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ και $\mathcal{D} = \mathbb{R}[s]$ για συνεχή χρόνο και $\mathcal{A} = \mathbb{F}^{\mathbb{Z}}$ και $\mathcal{D} = \mathbb{F}[s, s^{-1}]$ για διακριτό χρόνο, όπου η δράση του $d \in \mathcal{D}$ στο $a \in \mathcal{A}$ ορίστηκε παραπάνω. Έχουμε

$$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^q \mid R w = 0\},$$

όπου $R \in \mathcal{D}^{g \times q}$ είναι η αναπαράσταση μήτρας της συμπεριφοράς \mathcal{B} και ονομάζεται συμπεριφορά σε αναπαράσταση πυρήνα.

2.3 Ισοδυναμίες Προτάσεων

Έστω \mathcal{A} ένα σύνολο σημάτων με δομή \mathcal{D} - προτύπου όπου \mathcal{D} είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος. Ένα σύνηθες παράδειγμα είναι $\mathcal{D} = \mathbb{R}[s]$ και $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, με $sa := \frac{da}{dt}$ όπως περιγράψαμε παραπάνω. (Η δομή \mathcal{D} - προτύπου αντανακλά το γεγονός ότι αν εφαρμόσουμε κάθε γραμμικό διαφορικό τελεστή με πραγματικούς συντελεστές σε κάθε λεία συνάρτηση $a \in \mathcal{A}$ θα μας δώσει το da , το οποίο είναι στοιχείο του \mathcal{A} . Επιπλέον, ισχύουν οι συνήθεις πράξεις διανυσματικών χώρων. Ομοίως για $\mathcal{A} = \mathbb{F}^{\mathbb{Z}}$ και $\mathcal{D} = \mathbb{F}[s, s^{-1}]$ μπορούμε να έχουμε ακόμη ένα παράδειγμα. Οι αλγεβρικές ιδιότητες του \mathcal{A} σαν ένα πρότυπο του \mathcal{D} έχουνε πολύ μεγάλη θεωρητική σημασία στα συστήματα και πολλές από τις δυνάδες \mathcal{D}, \mathcal{A} οι οποίες προκύπτουν κατά τη μελέτη των συστημάτων και στη θεωρία ελέγχου ικανοποιούν μια σχετικά ισχυρή συσχέτιση που ενεργοποιεί τη δυνατότητα της αντιστοίχισης αλγεβρικών ιδιοτήτων στις ιδιότητες συστημάτων και αντίστροφα [5]. Η υπό μελέτη ιδιότητα είναι ότι το \mathcal{A} σαν ένα \mathcal{D} - πρότυπο είναι το αποκαλούμενο αμφιμονοσήμαντο συμπαράγωγο [6]. Συγκεκριμένα, αυτό ισχύει για τα \mathcal{D}, \mathcal{A} που αναφέραμε παραπάνω. Θα επιμείνουμε σε αυτές τις δύο περιπτώσεις για το υπόλοιπο του κεφαλαίου και θα παρουσιάσουμε δύο θεωρήματα για την θεωρία συστημάτων ως πρότυπα των ακρογωνιαίων λίθων της θεωρίας των συστημάτων συμπεριφοράς.

Ορισμός 2.4 [7] Θεωρούμε $\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^q \mid R w = 0\}$, όπου $R \in \mathcal{D}^{g \times q}$. Η i -οστή συνιστώσα w_i του w ονομάζεται ελεύθερη μεταβλητή του \mathcal{B} αν για κάθε $a \in \mathcal{A}$ υπάρχει $w \in \mathcal{B}$ με $w_i = a$. Η συμπεριφορά \mathcal{B} ονομάζεται αυτόνομη αν δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

■

Θεώρημα 2.1 [7] Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- 1) Η συμπεριφορά \mathcal{B} είναι αυτόνομη.
- 2) Κάθε πίνακας απεικόνισης του \mathcal{B} είναι πλήρους τάξης στηλών.
- 3) Αν η $w \in \mathcal{B}$ έχει φραγμένη στήριξη, τότε το w πρέπει να είναι μηδέν.
- 4) Αν η $w \in \mathcal{B}$ ικανοποιεί την $w(t) = 0$ για όλα τα $t < 0$, τότε το w πρέπει να είναι μηδέν εκ ταυτότητας.

5) Η συμπεριφορά \mathcal{B} είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. ▲

Να σημειώσουμε ότι συνήθως χρησιμοποιούμε τις συνθήκες (3) και (4) που βασίζονται σε τροχιές, σαν ορισμούς αυτονομίας και απουσίας ελεύθερων μεταβλητών. Από αλγεβρικής σκοπιάς όμως ο ορισμός που δώσαμε παραπάνω είναι ευκολότερο να χρησιμοποιηθεί.

Σε κάθε μη αυτόνομο σύστημα \mathcal{B} το διάνυσμα σήματος $w \in \mathcal{A}^q$ μπορεί να διαμεριστεί (πιθανότατα μετά από μια μετάθεση των συνιστωσών του w) σε δύο διανύσματα $w = [u^T, y^T]^T$, όπου $w \in \mathcal{A}^m$ και $y \in \mathcal{A}^p$ με $m + p = q$, έτσι ώστε να έχουμε

$$\forall u \in \mathcal{A}^m \exists y \in \mathcal{A}^p: \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{B}$$

και, επιπλέον, το σύστημα $\{y \in \mathcal{A}^p | [0, y^T]^T \in \mathcal{B}\}$ που προκύπτει για $u = 0$ είναι αυτόνομο. Το u είναι ένα διάνυσμα ελεύθερων μεταβλητών στο \mathcal{B} με όσο το δυνατό μεγαλύτερο πλήθος συνιστωσών και για αυτό το λόγο ονομάζεται είσοδος. Όμοια, το διάνυσμα y μπορεί να θεωρηθεί η έξοδος του συστήματος. Οι αριθμοί m και $p = q - m$ είναι αναλλοίωτοι στο σύνολο \mathcal{B} . Μπορούμε να δείξουμε ότι $p = \text{rank}(R)$ καθώς και ότι δύο οποιεσδήποτε αναπαραστάσεις του \mathcal{B} είναι ίδιας τάξης. Το \mathcal{D} είναι πρωταρχική ιδεώδης περιοχή και ως αποτέλεσμα της μορφής Smith μπορούμε να περιοριστούμε σε αναπαραστάσεις πινάκων πλήρους τάξης γραμμών. Βάση των παραπάνω ένα σύστημα είναι αυτόνομο αν και μόνο αν μπορεί να παρασταθεί από έναν τετραγωνικό και μη ιδιάζων πίνακα, δηλαδή $\det(R) \neq 0$. Διαμερίζοντας τον πίνακα R ως $R = [-Q, P]$ βάση του διαμερισμού $w = [u^T, y^T]^T$ παίρνουμε τη μορφή εισόδου-εξόδου

$$\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{B} \Leftrightarrow Py = Qu$$

η οποία έχει λύση $y \in \mathcal{A}^p$ για κάθε επιλογή $u \in \mathcal{A}^m$. Εδώ ο P είναι τετραγωνικός και μη ιδιάζων. Έτσι έχουμε μία σχέση εισόδου-εξόδου από την κλασική θεωρία ελέγχου, με την σημαντική διαφορά ότι ο διαμερισμός των συνιστωσών του w σε αυτές τις δύο κατηγορίες δεν είναι ορισμένος τεχνητά αλλά προέρχεται από τους νόμους του συστήματος. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι υπάρχουν διάφορες

αναπαραστάσεις εισόδου-εξόδου που έχουν ακριβώς την ίδια συμπεριφορά. Ο λογικός πίνακας

$$H = P^{-1}Q \in \mathbb{F}(s)^{p \times m}$$

(όπου $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ για συνεχή χρόνο) ονομάζεται πίνακας μεταφοράς του \mathcal{B} για την επιλεγμένη είσοδο-έξοδο. Πάντα υπάρχει τουλάχιστον μία επιλογή ενός ζεύγους εισόδου-εξόδου, ώστε ο πίνακας μεταφοράς να είναι κατάλληλος.

Μία από τις πιο σημαντικές έννοιες στη θεωρία ελέγχου είναι η δυνατότητα ελέγχου. Αυτή η έννοια σχετίζεται με συγκεκριμένες ιδιότητες των συστημάτων του χώρου καταστάσεων. Στα πλαίσια της θεωρίας συμπεριφοράς μας ενδιαφέρει να εξαναγκάσουμε το σύστημα να μεταβεί από μια τροχιά σε μία άλλη, χωρίς φυσικά να παραβιάσουμε τους νόμους του συστήματος.

Ορισμός 2.5 [7] Το \mathcal{B} είναι ελέγξιμο αν έχει μία απεικόνιση της μορφής

$$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^q \mid \exists \ell \in \mathcal{A}^n: w = M\ell\}$$

για κάποιον πίνακα $M \in \mathcal{D}^{q \times n}$. ■

Θεώρημα 2.2 [7] Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- 1) Η συμπεριφορά \mathcal{B} είναι ελέγξιμη.
- 2) Κάθε πίνακας αναπαράστασης R του \mathcal{B} είναι ένας πίνακας με αριστερή συζυγία, δηλαδή οι γραμμές του μας δίνουν τον αριστερό πυρήνα $\{z \in \mathcal{D}^{1 \times q} \mid zM = 0\}$ για έναν $M \in \mathcal{D}^{q \times n}$.
- 3) Για κάθε $w_1, w_2 \in \mathcal{B}$ υπάρχει $\tau \in \mathbb{T}_+^*$ και $w \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε

$$w(t) = \begin{cases} w_1(t) & \text{αν } t < 0, \\ w_2(t) & \text{αν } t > \tau \end{cases}$$

- 4) Κάθε πίνακας αναπαράστασης πλήρους τάξης γραμμών $R \in \mathcal{D}^{p \times q}$ του \mathcal{B} είναι δεξιά αντιστρέψιμος, δηλαδή, υπάρχει $Y \in \mathcal{D}^{p \times q}$ τέτοιος ώστε $RY = I$.
- 5) Κάθε πίνακας αναπαράστασης πλήρους τάξης γραμμών $R \in \mathcal{D}^{p \times q}$ του \mathcal{B} ικανοποιεί την σχέση

$$\text{rank}(R(\lambda)) = p \text{ για κάθε } \lambda \in \overline{\mathbb{F}}$$



Όπου $\bar{\mathbb{F}}$ είναι το αλγεβρικό κάλυμμα του \mathbb{F} (Αυτό είναι για συνεχή χρόνο. Στην περίπτωση διακριτού χρόνου έχουμε την ίδια προϋπόθεση για $\lambda \in \bar{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$, το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι εργαζόμαστε στο \mathbb{Z} και όχι στο \mathbb{N} όπως στην κλασσική περίπτωση κατάστασης χώρου και έτσι έχουμε να κάνουμε με πολυωνυμικούς πίνακες Laurent.). Μόνο η τρίτη συνθήκη κατασκευάζεται σε όρους τροχιών του συστήματος και θα πρέπει να θεωρείται ως η πραγματική συνθήκη όσο αφορά τη δυνατότητα ελέγχου. Αν αυτή ικανοποιείται θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι τροχιές w_1 και w_2 μπορούν να συνενωθούν και να οριστεί η συνδετική τροχιά w . Αναλογικά με τα συστήματα καταστατικού χώρου, το τ μπορεί να επιλεγεί ανεξάρτητα από τις w_1, w_2 για την κλάση του υπό μελέτη συστήματος και επιπλέον το τ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό σε συστήματα συνεχούς χρόνου αλλά όχι και σε αυτά που ο χρόνος είναι διακριτός.

Για συστήματα καταστατικού χώρου της μορφής $\dot{x} = Ax + Bu$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, θέτουμε $w = [x^T, u^T]^T$ και $R = [sI - A, -B] \in \mathbb{R}[s]^{n \times (n+m)}$. Όσο αφορά την συνθήκη (5) και επικαλούμενοι ότι $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$, η έννοια του ελέγχου της συμπεριφοράς ταυτίζεται με την κλασσική έννοια στον καταστατικό χώρο.

2.4 Επιπλέον Ζητήματα

Η βασική θεωρία μπορεί να επεκταθεί προς αμέτρητες κατευθύνσεις. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με τρεις από αυτές.

Αρχικά είχαμε την μελέτη δυσδιάστατων συστημάτων όσων αφορά τη συμπεριφορά τους [9]. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές αντί για μία και έτσι για παράδειγμα στην περίπτωση διακριτού χρόνου έχουμε $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^2$.

Στην πορεία [5] εισήχθηκε μια αυστηρή προσέγγιση για τη συμπεριφορά n -διάστατων συστημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου με αναπαραστάσεις πυρήνων

$$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^q \mid R w = 0\}$$

όπου $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ και $\mathcal{D} = \mathbb{R}[s_1, \dots, s_n]$ για συνεχή χρόνο (όπου $s_i a = \frac{da}{dt_i}$) και $\mathcal{A} = \mathbb{F}^{\mathbb{Z}^n}$ και $\mathcal{D} = \mathbb{F}[s_1, \dots, s_n, s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1}]$ για διακριτό χρόνο (όπου $s_i a = \sigma_i a$ είναι

η μονάδα μετατόπισης όσον αφορά την n -οστή μεταβλητή.) Η κύρια δυσκολία από αλγεβρικής σκοπιάς είναι ότι το \mathcal{D} σε αυτήν την περίπτωση δεν είναι πρωταρχικό ιδεώδες και έτσι τα αποτελέσματα που θα παίρναμε αν χρησιμοποιούσαμε την μορφή Smith για μονοπαραγοντικούς πολυωνυμικούς πίνακες, δεν ισχύουν σε αυτήν την περίπτωση. Καταλήγουμε στο γεγονός ότι αυτές οι έννοιες μπορούν να προσαρμοστούν σε πιο αδύναμες ή και ισχυρότερες μορφές. Για παράδειγμα σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, ένα μονοδιάστατο σύστημα είναι αυτόνομο αν και μόνο αν είναι πεπερασμένων διαστάσεων διανυσματικός χώρος κάποιου σώματος. Για συστήματα διάστασης $n \geq 2$, πεπερασμένες διαστάσεις στο σώμα \mathbb{F} συνεπάγονται την απουσία ανεξάρτητων μεταβλητών, αλλά όχι το αντίστροφο, και έτσι διακρίνονται δύο μη ισοδύναμες ιδιότητες που αφορούν την αυτονομία. Όμως η ισοδυναμία των τριών πρώτων εκφράσεων του Θεωρήματος 2.1 ισχύει και στην περίπτωση των πολλών διαστάσεων.

Ορισμός 2.3 [10] Το \mathcal{B} είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν για όλα τα $w_1, w_2 \in \mathcal{B}$ και για όλα τα ανοιχτά σύνολα $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ υπάρχει $w \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε

$$w(t) = \begin{cases} w_1(t) & \text{αν } t \in U_1, \\ w_2(t) & \text{αν } t \in U_2 \end{cases}$$

■

Έτσι μπορούμε να δώσουμε μια γενίκευση του μονοδιάστατου ελέγχου της συμπεριφοράς σε πολυδιάστατο. Με αυτήν την λογική η ισοδυναμία των συνθηκών (1)-(3) του Θεωρήματος 2.2 διατηρείται και στα πολυδιάστατα συστήματα (όμοια και στην περίπτωση του διακριτού χρόνου με τη διαφορά ότι τα U_i πρέπει να απέχουν αρκετά). Ωστόσο, ακόμη και αν ο πίνακας αναπαράστασης R ενός ελέγξιμου συστήματος είναι πλήρους τάξης γραμμών, δεν είναι αναγκαίο ο πίνακας αυτός να είναι μη ιδιάζων, $\det(R) \neq 0$.

Αν αφαιρέσουμε την υπόθεση του χρονικά αναλλοίωτου, η πιο απλή κλάση χρονικά μεταβλητών συστημάτων, προκύπτει αν επιλέξουμε συντελεστές από ένα διαφορικό σώμα \mathbb{K} , έστω $\mathbb{K} = \mathbb{R}(t)$, το σώμα των ρητών συναρτήσεων. Τότε έχουμε τον δακτύλιο των γραμμικών διαφορικών τελεστών

$$\mathcal{D} = \mathbb{K}[s] = \mathbb{R}(t)[s]$$

όπου το s αναπαριστά το διαφορικό τελεστή. Ένα κατάλληλο σύνολο σημάτων \mathcal{A} είναι το σύνολο των συναρτήσεων $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι λείες παντού εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο εξαιρούμενων σημείων $E(a)$, δηλαδή $a \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus E(a), \mathbb{R})$. Ο \mathcal{D} εδώ θυμίζει έναν συνηθισμένο πολυωνυμικό δακτύλιο αλλά η σημαντική διαφορά είναι ότι ο συντελεστής $k \in \mathbb{K}$ δεν εναλλάσσεται με τον τελεστή $\frac{d}{dt}$ εκτός αν ο συντελεστής k είναι σταθερός. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του κανόνα της παραγώγισης $\frac{d}{dt}(ka) = \dot{k}a + k\dot{a}$ για $k \in \mathbb{K}$ και $a \in \mathcal{A}$, ο οποίος συνεπάγεται ότι

$$\frac{d}{dt}k - k \frac{d}{dt} = \dot{k}$$

Έτσι η κύρια δυσκολία είναι ότι ο δακτύλιος \mathcal{D} σε αυτήν την περίπτωση δεν είναι αντιμεταθετικός. Το κύριο εργαλείο είναι μία μη αντιμεταθετική αναλογία της μορφής Smith που είναι γνωστή ως μορφή Jacobson. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να μεταφέρουμε τα περισσότερα αποτελέσματα κλασικών μονοδιάστατων συστημάτων σε αυτό το πλαίσιο (εκτός από τις ιδιάζουσες περιπτώσεις συντελεστών και τροχιών.).

Για εφαρμογές θεωριών κωδικοποίησης [11], [12] μας ενδιαφέρει να αντικαταστήσουμε το σώμα \mathbb{F} ενός διακριτού συστήματος με έναν πεπερασμένο δακτύλιο της μορφής $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, όπου $m > 1$ είναι ακέραιος. Έτσι θέτουμε $\mathcal{D} = \mathbb{Z}_m[s, s^{-1}]$, και ο μοναδιαίος τελεστής μετατόπισης τελεστής s δρά στην $a \in \mathcal{A} = (\mathbb{Z}_m)^{\mathbb{Z}}$, δηλαδή $sa = \sigma a$. Η κύρια δυσκολία είναι ότι ο δακτύλιος \mathcal{D} δεν είναι σώμα, δηλαδή, δεν έχει μηδενικούς διαιρέτες. Όμοια όπως και στα πολυδιάστατα συστήματα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μορφή Smith, και πιο συγκεκριμένα, δεν μπορούμε να περιοριστούμε σε πίνακες αναπαράστασης πλήρους τάξης γραμμών. Η έννοια της τάξης του πίνακα γίνεται ασαφής αφού υπάρχουν διάφορες διακριτές σημασίες για την τάξη πινάκων όσον αφορά δακτυλίους με μηδενικούς διαιρέτες. Επίσης έχουμε δύο μη ισοδύναμες έννοιες αυτονομίας με την ισχυρότερη να αντιστοιχεί στην απουσία τροχιών φραγμένης στήριξης εκτός από το μηδέν και την πιο αδύναμη να αφορά την απουσία ανεξάρτητων μεταβλητών [11] [13]. Όσο αφορά έναν πίνακα αναπαράστασης $R \in \mathcal{D}^{g \times q}$, η ισχυρότερη έννοια χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη του $X \in \mathcal{D}^{g \times q}$ και ενός μη μηδενικού διαιρέτη $d \in \mathcal{D}$

τέτοιου ώστε $XR = dI$ ενώ η πιο αδύναμη έννοια χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη ενός $X \in \mathcal{D}^{q \times g}$ και των μη μηδενικών στοιχείων $d_1, \dots, d_q \in \mathcal{D}$ με $XR = \text{diag}(d_1, \dots, d_q)$. Προφανώς και οι δύο συνθήκες ουσιαστικά μας λένε ότι ο R είναι πλήρους τάξης στηλών αν το \mathcal{D} είναι ένα σώμα (για $\mathcal{D} = \mathbb{Z}_m[s, s^{-1}]$ όμως αληθεύει αν και μόνο αν m είναι πρώτος και τότε το \mathbb{Z}_m είναι ήδη σώμα οπότε και επιστρέφουμε στην κλασσική περίπτωση).

2.5 Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα

Ο άξονας του χρόνου μπορεί να είναι είτε $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ είτε $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Θα ορίσουμε τα γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα (ΓΧΑ) και την έννοια του πλήρους συστήματος. Η συνάρτηση $w \in \mathbb{W}^{\mathbb{T}}$ λέγεται χρονική σειρά.

Ορισμός 2.4 [14] Ένα σύστημα $\Sigma = (\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$ είναι χρονικά αναλλοίωτο αν $\mathcal{B} \subseteq \sigma\mathcal{B}$, όπου σ είναι τελεστής μετατόπισης $(\sigma w)(t) = w(t+1)$ και $\sigma\mathcal{B} = \{\sigma w | w \in \mathcal{B}\}$. Στην περίπτωση που $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, ένα σύστημα $\Sigma = (\mathbb{Z}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$ είναι χρονικά αναλλοίωτο αν $\mathcal{B} = \sigma\mathcal{B}$.

■

Η έννοια χρονικά αναλλοίωτο σημαίνει ότι αν μία χρονική σειρά w είναι τροχιά ενός χρονικά αναλλοίωτου συστήματος, τότε και όλες οι χρονικά αντίστροφες μετατοπίσεις $\sigma^t(w)$, $t > 0$ είναι επίσης τροχιές του συστήματος.

Η συμπεριφορά $\mathcal{B} \subseteq (\mathbb{R}^w)^{\mathbb{T}}$ στο διάστημα του χρόνου $\mathbb{I} = [t_1, t_2] \subseteq \mathbb{T}$ συμβολίζεται με

$$\mathcal{B}|_{\mathbb{I}} := \{w \in (\mathbb{R}^w)^{t_2 - t_1 + 1} | \text{όπου } w_- \text{ και } w_+ \text{ τέτοια ώστε } \text{col}(w_-, w, w_+) \in \mathcal{B}\}$$

Ορισμός 2.5 [14] Ένα σύστημα $\Sigma = (\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$ είναι πλήρες (complete) αν όταν $w|_{[t_0, t_1]} \in \mathcal{B}|_{[t_0, t_1]}$ για όλα τα $t_0, t_1 \in \mathbb{T}, t_0 \leq t_1 \Rightarrow w \in \mathcal{B}$

■

Για τα ΓΧΑ αναλλοίωτα συστήματα, η ιδιότητα της πληρότητας ονομάζεται και πεπερασμένη διαστατικότητα. Θα ορίσουμε την τάξη των πλήρων ΓΧΑ συστημάτων. Ο συμβολισμός των σημάτων του χώρου είναι $\mathbb{W} = \mathbb{R}^w$. Η κλάση των πλήρων ΓΧΑ συστημάτων με μεταβλητές w συμβολίζεται με \mathcal{L}^w .

2.6 Πυρήνας Απεικόνισης

Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών

$$\mathcal{P} = R_0 w(t) + R_1 w(t+1) + \dots + R_\ell w(t+\ell) = 0 \text{ όπου } R_\tau \in \mathbb{R}^{g \times w}.$$

Βλέπουμε την εξάρτηση που υπάρχει ανάμεσα στις χρονικές σειρές w . Υποθέτουμε ότι $R_\ell \neq 0$, τότε ο μέγιστος αριθμός των μετατοπίσεων είναι ℓ . Ο ακέραιος ℓ ονομάζεται υστέρηση της εξίσωσης. Αφού γενικά η διαφορική εξίσωση είναι μία διανυσματική εξίσωση, ℓ είναι η μεγαλύτερη υστέρηση ανάμεσα στις ℓ_1, \dots, ℓ_g όλων των βαθμωτών εξισώσεων. Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση διαφορών επάγει ένα δυναμικό σύστημα μέσω της αναπαράστασης

$$\mathcal{B} = \{w \in (\mathbb{R}^w)^{\mathbb{Z}} \mid \mathcal{P} = 0\}$$

Μπορούμε να μελετήσουμε το \mathcal{B} χρησιμοποιώντας την εξίσωση διαφορών αλλά είναι πιο βολικό να χρησιμοποιούμε πολυωνυμικούς πίνακες. Με χρήση του τελεστή μετατόπισης σ^t κάθε όρος της εξίσωσης διαφορών γράφεται

$$w(t+1) = \sigma w(t), w(t+2) = \sigma^2 w(t), \dots, w(t+\ell) = \sigma^\ell w(t)$$

δηλαδή

$$(R_0 + R_1 \sigma + \dots + R_\ell \sigma^\ell) w(t) = 0$$

Θέτοντας

$$R(z) := R_0 + R_1 z^1 + R_2 z^2 + \dots + R_\ell z^\ell \in \mathbb{R}^{g \times w}[z]$$

η παραπάνω σχέση γράφεται

$$R(\sigma)w = 0$$

Δηλαδή το προκύπτον σύστημα είναι στοιχείο του πυρήνα (ή μηδενοχώρου)

$$\mathcal{N}(R(\sigma)) = \ker(R(\sigma)) = \{w \in (\mathbb{R}^w)^\mathbb{N} | R(\sigma)w = 0\}$$

Η παραπάνω αναπαράσταση ονομάζεται αναπαράσταση πυρήνα του $\mathcal{B} = \ker(R(\sigma))$.

Θεώρημα 2.3 [13] Υπάρχει ένας πολυωνομικός πίνακας $R \in \mathbb{R}^{* \times w}[z]$ έτσι ώστε $\mathcal{B} = \ker(R(\sigma))$.



2.7 Το ισχυρότερο ακριβές μοντέλο (MPUM)

Ορισμός 2.6 [4] Το σύστημα $\mathcal{B} \subseteq (\mathbb{R}^w)^\mathbb{N}$ ονομάζεται το ισχυρότερο ακριβές μοντέλο (MPUM) των χρονικών σειρών $w_d \in (\mathbb{R}^w)^T$ εντός της κλάσης \mathcal{L}^w αν ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις.

- 1) Είναι ΓΧΑ σύστημα πεπερασμένης διάστασης, δηλαδή $\mathcal{B} \in \mathcal{L}^w$.
- 2) Είναι ακριβές, δηλαδή, $w_d \in \mathcal{B}|_{[I,T]}$.
- 3) Είναι το πιο ισχυρό ανάμεσα σε όλα τα πεπερασμένης διάστασης ΓΧΑ και ακριβή συστήματα, δηλαδή

$$\text{Αν } \mathcal{B}' \in \mathcal{L}^w \text{ και } w_d \in \mathcal{B}'|_{[I,T]} \text{ τότε } \mathcal{B}|_{[I,T]} \subseteq \mathcal{B}'|_{[I,T]}$$

Το MPUM των w_d συμβολίζεται με $\mathcal{B}^*(w_d)$.



Οι Βασικοί Μέθοδοι Υπολογισμού του MPUM

3.1 Υπολογισμός MPUM σημάτων διακριτού χρόνου

Έστω μία βάση πεπερασμένων χρονικών σειρών του \mathbb{N} .

$$\mathcal{D} = \{w_d^{(1)}, \dots, w_d^{(N)}\}$$

Με $R^{(k)} \in \mathbb{R}^{g \times w}$ εισάγουμε δια μέσω του πυρήνα του MPUM τις πρώτες k χρονικές σειρές $\{w_d^{(1)}, \dots, w_d^{(k)}\}$. Στην k -οστή κατάσταση της δομής του MPUM του \mathcal{D} υπολογίζουμε το σφάλμα $e^{(k+1)} = R^{(k)}(\sigma)w_d^{(k+1)}$ όταν για την συμπεριφορά του k -οστού μοντέλου έχουμε $\mathcal{B}^{(k)} = \ker(R^{(k)}(\sigma))$. Ακόμα με $E^{(k+1)}$ εισάγουμε την συμπεριφορά $\mathcal{B}^*(e^{(k)})$, και τέλος έχουμε $R^{(k+1)} = E^{(k+1)}R^{(k)}$.

Αρχικά με $R^{(0)} = I$, έχουμε την N -οστή κατάσταση του MPUM του \mathcal{D} . Το βήμα ένα είναι η μοντελοποίηση και το βήμα τρία είναι η συνέλιξη των συντελεστών του $e^{(k+1)}$ και $R^{(k)}$. Τέλος το βήμα δύο είναι το πιο κρίσιμο.

3.1.1 Χρονικά-Αναδρομικός Υπολογισμός του MPUM

Έστω μία βάση πεπερασμένων χρονικών σειρών

$$w_d = (w_d(1), \dots, w_d(T))$$

Για έναν πολυωνυμικό πίνακα

$$R = R_0 + R_1\xi + \dots + R_\ell\xi^\ell, \text{ με } R_\ell \neq 0$$

ορίζουμε τον δυϊκό πολυωνυμικό πίνακα

$$R_d = R_\ell + R_{\ell-1}\xi + \dots + R_0\xi^\ell$$

Ο αλγόριθμος που περιγράψαμε παραπάνω λειτουργεί με τον $R^{(k)}$ να είναι ένας 2×2 πολυωνυμικός πίνακας [14]. Στην κατάσταση k , το στοιχείο $(1,1)$ του δυϊκού του $R^{(k)}$ μας δίνει το MPUM των χρονικών σειρών και συμβολίζεται με $\left(R_{11}^{(k)}\right)_d$

Αλγόριθμος 3.1

Ο ακόλουθος αναδρομικός αλγόριθμος υπολογίζει μια αναπαράσταση του MPUM δοθέντος μια βάσης πεπερασμένων χρονικών σειρών του \mathbb{N} . Στο k βήμα για $k = 1$ ως T εφαρμόζουμε τα ακόλουθα βήματα

Βήμα 1

$$\text{Ορίζουμε } R^{(0)} = I \text{ και } \ell^{(0)} = 0$$

Βήμα 2

Υπολογίζουμε το σφάλμα της τροχιάς

$$e^{(k)} = \left(R_{11}^{(k-1)}(\sigma)\right)_d w(k)$$

Βήμα 3

$$E^{(k)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{(k)} \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

$$\ell^k = \ell^{(k-1)}$$

αν $e^{(k)} = 0$ ή $\ell^{(k-1)} > k/2$ διαφορετικά

$$E^{(k)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{(k)} \\ s/e^{(k)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell^k = k - \ell^{(k-1)}$$

Βήμα 4

$$R^{(k)} \leftarrow E^{(k)} R^{(k-1)}$$

Μετά από $T + 1$ βήματα ο αλγόριθμος αυτός παράγει τον πίνακα $R^{(k)}$. Το δυϊκό πολυώνυμο του στοιχείου (1,1) του $R^{(k)}$ είναι το MPUM των χρονοσειρών, δηλαδή

$$B^* = \left(R_{11}^{(k)} \right)_d$$

Αλγόριθμος 3.1 χρονικά _ αναδρομικός _ υπολογισμός _ MPUM

$$R^{(0)} \leftarrow I$$

$$\ell^{(0)} \leftarrow 0$$

Για k από 1 έως T

$$e^{(k)} \leftarrow \left(R_{11}^{(k-1)}(\sigma) \right)_d * w_d(k)$$

Αν $e^{(k)} = 0$ ή $\ell^{(k-1)} > k/2$ τότε

$$E^{(k)}(s) \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & -e^{(k)} \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

$$\ell^{(k)} \leftarrow \ell^{(k-1)}$$

Αλλιώς

$$E^{(k)}(s) \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & -e^{(k)} \\ s/e^{(k)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell^{(k)} \leftarrow k - \ell^{(k-1)}$$

Τέλος _ αν

$$R^{(k)} \leftarrow E^{(k)} R^{(k-1)}$$

Τέλος _ για

$$R^* \leftarrow \left(R_{11}^{(T)} \right)_d$$

Τέλος χρονικά _ αναδρομικός _ υπολογισμός _ MPUM

Παράδειγμα 3.1 Οι αριθμοί Fibonacci (ή ακολουθία Fibonacci) είναι οι αριθμοί της επόμενης ακεραίας ακολουθίας

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 \dots$$

Εξ' ορισμού, οι δύο πρώτοι αριθμοί της ακολουθίας Fibonacci είναι 0 και 1, και ο κάθε επόμενος αριθμός είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Δηλαδή η ακολουθία F_n των Fibonacci ορίζεται από την σχέση $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Θεωρούμε την τροχιά που παράγει ο παραπάνω αναδρομικός τύπος για με εφαρμογή $N = 6$ επαναλήψεων, δηλαδή

$$F = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13)^T \equiv (F_1, F_2, \dots, F_8)^T$$

Το MPUM της F είναι το αυτόνομο σύστημα

$$\mathcal{B}^* = \{F \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\}$$

και παρατηρούμε ότι με χρήση του τελεστή σ της χρονικής μετατόπισης, $\sigma F_n = F_{n+1}$, παίρνουμε

$$\sigma^2 F_n = \sigma F_n + F_n \Rightarrow (\sigma^2 - \sigma - 1)F_n = 0 \Rightarrow R^*(s)F_n = 0$$

για $s \equiv \sigma$, δηλαδή

$$\mathcal{B}^* = \ker(R^*(\sigma)), \text{ με } R(s) = s^2 - s - 1$$

Βάση του αλγόριθμου 1 έχουμε τον ακόλουθο υπολογισμό του MPUM. Θέτουμε $R^{(0)} = I_2$ και $\ell^{(0)} = 0$ και για $k = 1$ υπολογίζουμε το σφάλμα $e^{(1)} = \left(R_{11}^{(0)}(\sigma)\right)_d F_1$, δηλαδή $e^{(1)} = 0$ και ως εκ τούτου εκτελούμε το πρώτο τμήμα της δομής επιλογής, δηλαδή θέτουμε $\ell^{(1)} = \ell^{(0)} = 0$ και

$$E^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{(1)} \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Έχοντας υπολογίσει τον πίνακα $E^{(1)}$ υπολογίζουμε τον πίνακα $R^{(1)} = E^{(1)}R^{(0)}$ και παίρνουμε

$$R^{(1)}(s) = E^{(1)}(s)I_2 = E^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή για $k = 2$. Για το σφάλμα στο βήμα αυτό παίρνουμε

$$e^{(2)} = \left(R_{11}^{(1)}(\sigma) \right)_d F_2 = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

και επειδή $e^{(2)} \neq 0$ και $\ell^{(1)} = 0 < \frac{k}{2} = 1$ εκτελούμε το δεύτερο τμήμα της δομής επιλογής, δηλαδή θέτουμε $\ell^{(2)} = 2 - 0 = 2$ και

$$E^{(2)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

Τελικά ο πολυωνυμικός πίνακας $R^{(2)}(s)$ είναι

$$R^{(2)}(s) = E^{(2)}(s)R^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

Όμοια προκύπτουν για $k = 3$ τα ακόλουθα

$$e^{(3)} = 1, \quad E^{(3)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ s & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell^{(3)} = 3 - 2 = 1, \quad R^{(3)}(s) = \begin{pmatrix} 1 - s & -s \\ s & -s^2 \end{pmatrix}$$

Για $k = 4$ το σφάλμα είναι $e^{(4)} = \left(R_{11}^{(3)}(\sigma) \right)_d F_4$, δηλαδή

$$e^{(4)} = (1 - \sigma)_d F_4 = \sigma F_4 - F_4 = F_5 - F_4 = 3 - 2 = 1, \quad \ell^{(4)} = 4 - 1 = 3$$

$$E^{(4)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ s & 0 \end{pmatrix}, \quad R^{(4)}(s) = \begin{pmatrix} 1 - 2s & -s + s^2 \\ s - s^2 & -s^2 \end{pmatrix}$$

Όμοια για $k = 5$ προκύπτουν τα ακόλουθα

$$e^{(5)} = (1 - 2\sigma)_d F_5 = \sigma F_5 - 2F_5 = F_6 - 2F_5 = 5 - 2 \cdot 3 = 5 - 6 = -1$$

$$\ell^{(5)} = 5 - 3 = 2$$

$$E^{(5)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -s & 0 \end{pmatrix}, \quad R^{(5)}(s) = \begin{pmatrix} 1 - s - s^2 & -s \\ -s + 2s^2 & s^2 - s^3 \end{pmatrix}$$

Για $k = 6$ υπολογίζουμε το σφάλμα $e^{(6)} = \left(R_{11}^{(5)}(\sigma)\right)_d F_6$, δηλαδή $e^{(6)} = (1 - \sigma - \sigma^2)_d F_6 = \sigma^2 F_6 - \sigma F_6 - F_6 = 13 - 8 - 5 = 0$ και ως εκ τούτου εκτελούμε το πρώτο τμήμα της δομής επιλογής, δηλαδή θέτουμε $\ell^{(6)} = \ell^{(5)} = 2$ και

$$E^{(6)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{(6)} \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Έχοντας υπολογίσει τον πίνακα $E^{(6)}$ υπολογίζουμε τον πίνακα $R^{(6)} = E^{(6)}R^{(5)}$ και παίρνουμε

$$R^{(6)}(s) = \begin{pmatrix} 1 - s - s^2 & -s \\ -s^2 + 2s^3 & s^3 - s^4 \end{pmatrix}$$

Όμοια προκύπτουν για $k = 7$ τα ακόλουθα

$$e^{(7)} = 0, \quad E^{(7)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

$$\ell^{(7)} = \ell^{(6)} = 2, \quad R^{(7)}(s) = \begin{pmatrix} 1 - s - s^2 & -s \\ -s^3 + 2s^4 & s^4 - s^5 \end{pmatrix}$$

Τέλος για $k = 8$ έχουμε

$$e^{(8)} = 0, \quad E^{(8)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

$$\ell^{(8)} = \ell^{(7)} = 2, \quad R^{(8)}(s) = \begin{pmatrix} 1 - s - s^2 & -s \\ -s^4 + 2s^5 & s^5 - s^6 \end{pmatrix}$$

Στην κατάσταση πέντε ο αλγόριθμος υπολογίζει το $B^*(w_d)$ και

$$\left[\left(R_{11}^{(T)}\right)_d\right]_{11} = (1 - s - s^2)_d = s^2 - s - 1 \text{ για } t = 5, 6, \dots$$

■

3.1.2 Αναδρομικός Υπολογισμός του MPUM με Υστέρηση

Θεωρούμε τον μη πεπερασμένο αριστερό πυρήνα του πίνακα Hankel

$$\mathcal{H}_{\ell+1}(w_d) = \begin{pmatrix} w_d(1) & w_d(2) & \cdots & w_d(T-\ell) \\ w_d(2) & w_d(3) & \cdots & w_d(T-\ell+1) \\ w_d(3) & w_d(4) & \cdots & w_d(T-\ell+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_d(\ell+1) & w_d(\ell+2) & \cdots & w_d(T) \end{pmatrix}$$

που περιέχει νόμους του $\mathcal{B}^*(w_d)$. Επειδή το $\mathcal{B}^*(w_d)$ είναι ελέγξιμο, όλοι οι νόμοι του $\mathcal{B}^*(w_d)$ περιέχονται σε μία βάση του υποχώρου

$$\mathcal{N}_{L+1}(w_d) = \text{leftker}(\mathcal{H}_{L+1}(w_d)),$$

για $L \geq \ell(\mathcal{B}^*(w_d))$.

Έστω οι γραμμές του R μιας βάσης του $\mathcal{N}_{L+1}(w_d)$ δηλαδή,

$$R\mathcal{H}_{\ell+1}(w_d) = 0, \quad \text{rank}(R) = \dim(\mathcal{N}_{L+1}(w_d)).$$

Ορίζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $R(\xi)$

$$R(\xi) = \sum_{i=0}^L R_i \xi^i \in \mathbb{R}^{g \times w}[\xi],$$

όπου $R = (R_0 \ R_1 \ \cdots \ R_\ell)$, $R_i \in \mathbb{R}^{g \times w}$. Τότε

$$\ker(R(\sigma)) = \mathcal{B}^*(w_d)$$

Η υστέρηση ℓ ($\mathcal{B}^*(w_d)$), πρακτικά δεν χρησιμοποιείται, έτσι επιλέγουμε ένα αρκετά μεγάλο L (δηλαδή ένα άνω φράγμα του ℓ ($\mathcal{B}^*(w_d)$)). Ο υπολογισμός της βάσης R του υποχώρου $\mathcal{N}_{L+1}(w_d)$ γίνεται για μεγάλο L . Υποθέτουμε ότι για $\ell < L$, $\mathcal{H}_{\ell+1}(w_d)$ είναι ελλiptής τάξης και έστω

$$(r_0 \ r_1 \ \cdots \ r_\ell) \mathcal{H}_{\ell+1}(w_d) = 0$$

Εξαιτίας της δομής του Hankel

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_\ell & & 0 \\ & r_0 & r_1 & \cdots & r_\ell & \\ & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & & & r_0 & r_1 & \cdots & r_\ell \end{pmatrix} \mathcal{H}_{L+1}(w_d) = 0$$

Στην συνέχεια θα πρέπει να εξάγουμε από έναν μη δομημένο πυρήνα R έναν σύντομο νόμο r . Δηλαδή στη γλώσσα των πολυωνύμων, $R(\xi)$ δεν είναι μειωμένης σειράς και χρειάζεται να γίνει απαλοιφή σειράς.

Έτσι υποθέτουμε ότι το σύστημα που εισάγεται από τον πίνακα

$$R' = \begin{pmatrix} r^{(1)} \\ \vdots \\ r^{(k)} \end{pmatrix} \text{ με } r^{(i)}(\sigma)w_d = 0, \text{ για } i = 1, \dots, k$$

είναι ελέγξιμο. Υπολογίζουμε τον D , έτσι ώστε $\begin{pmatrix} R' \\ D \end{pmatrix}$ να έχει σταθερή ορίζουσα. Εισάγουμε το σφάλμα $e = D(\sigma)w_d$. Υπολογίζουμε το E έτσι ώστε $\mathcal{B}^*(e) = \ker(E(\sigma))$. Τέλος ορίζουμε $R = \begin{pmatrix} R' \\ ED \end{pmatrix}$. Θα δούμε ότι $\mathcal{B}^*(w_d) = \ker(E(\sigma))$.

Λήμμα 3.1 [16] Υποθέτουμε ότι $R(\sigma)w = 0$ ορίζει ένα ελέγξιμο σύστημα \mathcal{B} . Έστω ότι με R' ορίζουμε ένα σύνολο εκμηδενιστών του \mathcal{B} , έτσι ώστε $R'(\sigma)w = 0$ ορίζει επίσης ένα ελέγξιμο σύστημα \mathcal{B}' . Έστω D τέτοιος ώστε $\begin{pmatrix} R' \\ D \end{pmatrix}$ να έχει σταθερή ορίζουσα. Τότε υπάρχει ένας πίνακας U με σταθερή ορίζουσα και ένας πίνακας F , έτσι ώστε $UR = \begin{pmatrix} R' \\ FD \end{pmatrix}$.

■

Πρόταση 3.1 [16] Έστω $w_d \in (\mathbb{R}^w)^\mathbb{N}$ και υποθέτουμε ότι $\mathcal{B}^*(w_d)$ είναι ελέγξιμο. Έστω ότι R' ορίζουμε ένα σύνολο εκμηδενιστών του w_d , έτσι ώστε $R'(\sigma)w = 0$

ορίζει ένα ελέγξιμο σύστημα. Έστω $D \in \mathbb{R}^{(w-\text{rowdim}(R')) \times w}[\xi]$ τέτοιος ώστε $\begin{pmatrix} R' \\ D \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος. Θεωρούμε $e = D(\sigma)w_d$ και υποθέτουμε $E(\sigma)e = 0$ ορίζει το $\mathcal{B}^*(e)$. Τότε $\begin{pmatrix} R' \\ ED \end{pmatrix}(\sigma)w = 0$ προσδιορίζει το $\mathcal{B}^*(w_d)$.

■

Υπολογίζοντας το $\mathcal{B}^*(e)$ δεν βρίσκουμε πίσω τους k σύντομους νόμους $r^{(1)}, \dots, r^{(k)}$ και τις μετατοπίσεις τους. Εφαρμόζοντας λοιπόν αναδρομικά αυτήν την ιδέα καταλήγουμε στον αλγόριθμο δύο.

Αν $\mathcal{H}_{\ell+1}(w_d)$ έχει σειρά πλήρης τάξης για $\ell = 0, 1, 2, \dots$, τότε w_d είναι μία είσοδος, δηλαδή $\mathcal{B}^*(w_d) = (\mathbb{R}^w)^\mathbb{N}$. Σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε ο R να είναι ένας άδειος πίνακας $(\)$.

Υπολογίζοντας τον πίνακα D , έτσι ώστε $\begin{pmatrix} r \\ D \end{pmatrix}$ να είναι αντιστρέψιμος έχουμε ένα πρόβλημα τύπου Bezout. Αν υποθέσουμε ότι τα δύο πρώτα στοιχεία r_1 και r_2 του r είναι πρώτα μεταξύ τους, έχουμε να λύσουμε την εξίσωση Bezout

$$r_1 b - r_2 a = 1,$$

για πολυώνυμα a και b . Τότε επιλέγουμε τον

$$D = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & I_{w-2} \end{pmatrix},$$

όπου I_{w-2} είναι $(w-2) \times (w-2)$ μοναδιαίος πίνακας. Ο πίνακας D υπάρχει αν και μόνο αν r δεν έχει κοινούς παράγοντες σε όλα τα στοιχεία. Ισοδύναμα, D υπάρχει αν και μόνο αν το σύστημα $\ker(r(\sigma))$ είναι ελέγξιμο [15]. Μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\mathcal{B}^*(w_d)$ είναι ελέγξιμο, τότε το μοντέλο $\ker(r(\sigma))$ σε αυτήν την κατάσταση είναι ελέγξιμο.

Αλγόριθμος 3.2 αναδρομικός _ με υστέρηση _ υπολογισμός _ MPUM

Αν $w_d \leftarrow 0$ **τότε**

$$R \leftarrow () \text{ (δηλαδή ένας άδειος πίνακας)}$$

Αλλιώς

Βρες το μικρότερο $\ell \in \{0, 1, 2, \dots\}$, για το οποίο $\mathcal{H}_{\ell+1}(w_d)$ είναι ελλιπής τάξης

$$\text{ή } \ell \leftarrow -1$$

Αν $\ell = -1$ **τότε**

$$R \leftarrow () \text{ (δηλαδή ένας άδειος πίνακας)}$$

Αλλιώς

Υπολόγισε ένα διάνυσμα $r \in \mathbb{R}^{1 \times (\ell+1)w}$ στον αριστερό μηδενοχώρο του $\mathcal{H}_{\ell+1}(w_d)$

$$r(\xi) \leftarrow \sum_{i=0}^{\ell} R_i \xi^i$$

$$r \leftarrow (r_0 \quad r_1 \quad \dots \quad r_\ell),$$

$$r_i \in \mathbb{R}^{\ell \times w}.$$

$D \in \mathbb{R}^{(w-1) \times w}[\xi]$, έτσι ώστε $\begin{pmatrix} r \\ D \end{pmatrix}$ να έχει σταθερή ορίζουσα

$$e \leftarrow D(\sigma)w_d$$

$$r' \leftarrow \text{αναδρομικό_ με υστέρηση_ MPUM}(e)$$

Αν $r' \leftarrow ()$ **τότε**

$$R \leftarrow r$$

Αλλιώς

$$R \leftarrow \begin{pmatrix} r \\ r'D \end{pmatrix}$$

Τέλος αν

Τέλος αν

Τέλος αν

Τέλος αναδρομικός _ με υστέρηση _ υπολογισμός _ MPUM.

3.2 Υπολογισμός MPUM σημάτων διακριτού χρόνου

Ορίζουμε με K το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} ή αυτόν των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} . Η ακόλουθη πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων συνεχούς χρόνου πολυωνυμικής-εκθετικής χρονικής σειράς με εύρος $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ και διακύμανση k^w , συνιστά το σύνολο των δεδομένων μας

$$\mathcal{D} = \{w_i = p_i \exp \lambda_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}\}$$

όπου $p_i = \mathbb{R} \rightarrow k^w$ με τιμές $p_i(t) = \sum_{j=1}^{k_i} p_{i,k_i-j} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}$, $p_{i,0} \neq 0$, $p_i, k_{i-j} \in k^w$

και $\exp \lambda: \mathbb{R} \rightarrow k$ με τιμές $\exp \lambda(t) = e^{\lambda t}$ με $\lambda \in k^2$

Η σταθερά λ^i ονομάζεται συχνότητα της χρονικής σειράς w_i . Ακόμη ορίζουμε τους ακεραίους $N = \sum_{k=1}^n k_i$ όπου $k_i = \deg p_i + 1$

Δοθέντος του συνόλου \mathcal{D} , μπορούμε να βρούμε όλα τα γραμμικά, συνεχούς χρόνου, χρονικά αναλλοίωτα, πεπερασμένης διάστασης συστήματα, τα οποία θα μπορούσαν να παραχθούν από την βάση $w_i \in \mathcal{D}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις αναπαραστάσεις εξισώσεων του MPUM \mathcal{B}^* . Στο κεφάλαιο αυτό, καταγράφονται σταθεροί πίνακες H, F που παραμετροποιούν το \mathcal{B}^* . Η αναπαράσταση της εξίσωσης καταστατικής μεταβλητής (KM) υποστηρίζει ότι $w \in \mathcal{B}^*$ αν, και μόνο αν, υπάρχει μια τροχιά κατάστασης κατάλληλης διάστασης x , τέτοια ώστε $(d/dt)x = Fx$, $w = Hx$. Η απαλοιφή του παράγοντα x από αυτές τις δύο εξισώσεις μας δίνει τη λεγόμενη αναπαράσταση της εξίσωσης αυτόματης οπισθοδρόμησης (AO) όπου $w \in \mathcal{B}^*$ αν, και μόνο αν, $\Theta^* (d/dt)w = 0$ δηλαδή $\mathcal{B}^* = \ker \Theta^*$. Θ^* είναι το λεγόμενο παράγων σύστημα.

Αρκετές φορές είναι βολικό να παρουσιάζονται οι τροχιές που καθορίζουν τη συμπεριφορά του συστήματος ως λύσεις κάποιων σχετικών εξισώσεων. Οι εξισώσεις συμπεριφοράς που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια είναι

- 1) Εξισώσεις καταστατικής μεταβλητής (ΚΜ)
- 2) Εξισώσεις αυτόματης οπισθοδρόμησης (ΑΟ)

Για αυτόνομα συστήματα κλάσης L^2 , η θεωρία που αναπτύχθηκε από τον Willems [18] συνεπάγεται την ύπαρξη μιας παράστασης του Σ^*

$$\frac{d}{dt}(x) = Fx, w = Hx, x \in (k^w)^{\mathbb{R}}, w \in (k^w)^{\mathbb{R}}$$

για ένα κατάλληλο παρατηρήσιμο ζευγάρι $(H, F) \in k^{w \times N} \times k^{N \times N}$. Η συμπεριφορά λοιπόν μπορεί να αναπαρασταθεί με όρους όλων των πιθανών τροχιών που γενικεύονται από τις παραπάνω ισότητες.

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{B}(H, F) = \left\{ w: \frac{d}{dt}(x) = Fx, w = Hx \text{ ισχύουν για κάθε } x \in (k^N)^{\mathbb{R}} \right\}$$

Απαλείφοντας την καταστατική μεταβλητή x από την σχέση $\frac{d}{dt}(x) = Fx, w = Hx, x \in (k^w)^{\mathbb{R}}, w \in (k^w)^{\mathbb{R}}$ έχουμε την εξίσωση αυτόματης οπισθοδρόμησης (ΑΟ) που παρουσιάζεται ως Σ^* . Έστω $k[s]$ ορίζουμε το δακτύλιο του πολωνύμου στο απροσδιόριστο s με συντελεστές στο k και $k^{n_1 \times n_2}[s]$ ορίζουμε τους $n_1 \times n_2$ πολυωνυμικούς πίνακες. Η εξίσωση αυτόματης οπισθοδρόμησης που προκύπτει έχει την εξής μορφή

$$\theta^* \left(\frac{d}{dt} \right) w = 0, \theta^* \in k^{w \times w}[s] \det \theta^* \neq 0$$

Συνδυάζει την χρονική σειρά $w: \mathbb{R} \rightarrow k^w$ που ανήκει στο \mathcal{B} με τα παράγωγα του. Οι εξισώσεις μπορούν να γραφούν σαφώς με όρους των συντελεστών των πινάκων του θ^* . Έστω

$$\theta^*(s) = \theta_L s^L + \theta_{L-1} s^{L-1} + \dots + \theta_1 s + \theta_0, \in k^{w \times w}$$

ή

$$\theta_L \frac{d^L}{dt^L} w(t) + \theta_{L-1} \frac{d^{L-1}}{dt^{L-1}} w(t) + \dots + \theta_1 \frac{d}{dt} w(t) + \theta_0 w(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}$$

Το MPUM Σ^* του \mathcal{D} στην κλάση L^W των γραμμικών συστημάτων, όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο δύο έχει συμπεριφορά πεπερασμένης διάστασης, το οποίο συνεπάγεται ότι το Σ^* είναι αυτόνομο. Το MPUM μπορεί να παρασταθεί με όρους της εξίσωσης ΚΜ. Ξεκινάμε γράφοντας τις εξισώσεις συμπεριφοράς ΚΜ για το \mathcal{B}_i^* βασισμένοι στις σχέσεις $\mathcal{D} = \{w_i = p_i \exp \lambda_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}\}$, $p_i(t) =$

$$\sum_{j=1}^k p_i, k_{i-j} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}, \exp \lambda(t) = e^{\lambda t}.$$

Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$\frac{d}{dt} x_i = F_i x_i, w = H_i x_i$$

όπου $F_i = \lambda_i I + J, H_i = (p_{i,0}, \dots, p_{i,k_i-1})$

I είναι ο μοναδιαίος πίνακας μεγέθους k_i , J είναι ο μηδενοδύναμος πίνακας ίδιου μεγέθους με μονάδες στην άνω δευτερεύουσα διαγώνιο και μηδενικά οπουδήποτε αλλού, και $x_i \in (k^{k_i})^{\mathbb{R}}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\pi_i = (s - \lambda_i)^{k_i}$ του \mathcal{B}_i^* είναι ίσο με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο F_i

$$\pi_i = \det(sI - F_i)$$

Επιπλέον H_i, F_i είναι ένα παρατηρήσιμο ζευγάρι επειδή $p_{i,0} \neq 0$.

Από την γραμμικότητα κάθε τροχιά που περιέχεται στο \mathcal{B}_i^* γενικεύεται από τις σχέσεις $\frac{d}{dt} x_i = F_i x_i, w = H_i x_i$ και αντίστοιχα κάθε τροχιά που γενικεύεται από τις σχέσεις $\frac{d}{dt} x_i = F_i x_i, w = H_i x_i$ ανήκει στο \mathcal{B}_i^* .

Η αναπαράσταση της καταστατικής μεταβλητής του MPUM Σ^* για \mathcal{B}^* μπορεί να συναρμολογηθεί ως ευθύ άθροισμα της αναπαράστασης των MPUMs της χρονικής σειράς που υπολογίσαμε παραπάνω. Έστω

$$H = (H_1 \dots H_i \dots H_n) \in k^{w \times N}$$

$$F = \text{diag}(F_1, \dots, F_i, \dots, F_n) \in k^{N \times N}$$

Οι ΑΟ εξισώσεις συμπεριφοράς που αναφέρθηκαν προηγουμένως μπορούν να ξαναγραφούν με την μορφή

$$\Omega \left(\frac{d}{dt} \right) \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = 0$$

όπου $\Omega = \begin{pmatrix} sI - F & 0 \\ H & -I \end{pmatrix} \in k^{(w \times N) \times (w \times N)}[s]$ και $x \in (k^N)^\mathbb{R}, w \in (k^w)^\mathbb{R}$

Σε αυτές τις σχέσεις το s πρέπει να ερμηνευτεί ως τελεστής παραγώγου.

Έστω οι πολωνυμικοί πίνακες

$$E \in k^{w \times N}[s], \theta \in k^{w \times w}[s]$$

που είναι αριστερά πρώτοι πρώτοι μεταξύ τους (δηλαδή έχουν τον ίδιο αριθμό σειρών) και ικανοποιούν την σχέση

$$E(sI - F) = \theta^* H$$

Θεώρημα 3.1 [17] θ^* είναι μια αναπαράσταση της εξίσωσης αυτόματης οπισθοδρόμησης του MPUM Σ^* του \mathcal{D} . Με άλλα λόγια $\Sigma^* = \Sigma(\theta^*)$, δηλαδή

$$\theta^* \left(\frac{d}{dt} \right) w = 0 \text{ για όλα τα } w \in \mathcal{B}^*$$

Απόδειξη Πολλαπλασιάζουμε την ΑΟ εξίσωση συμπεριφοράς από αριστερά με τον πίνακα $(E \quad -\theta^*)$ και έχουμε

$$(E \quad -\theta^*) \Omega \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (E \quad -\theta^*) \begin{pmatrix} sI - F & 0 \\ H & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(E(sI - F) - \theta^* H \quad \theta^*) \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (\theta^* H - \theta^* H \quad \theta^*) \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(0 \quad \theta^*) \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \theta^* w = 0$$

▲

Ας ανανεώσουμε το σύνολο δεδομένων \mathcal{D} , ορίζοντας ένα νέο πείραμα:

$$\widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{n+1} \text{ με } \mathcal{D}_{n+1} = \{w_{n+1} = p_{n+1} \exp \lambda_{n+1}\}$$

Υπάρχουν δυο βασικές περιπτώσεις που πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν. Αρχικά, p_{n+1} είναι σταθερό, δηλαδή

$$p_{n+1} = p_{n+1,0} \in k^w, \quad p_{n+1,0} \neq 0$$

Δεύτερον, $\lambda_{n+1} = \lambda_h$, για $h \in \{0, 1, \dots, n\}$ και p_{n+1} είναι ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε

$$\frac{dp_{n+1}}{dt} = p_h$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$p_{n+1} = p_{h,k_h} + \sum_{j=1}^{k_h} p_{h,k_h-j} \frac{t^j}{j!}$$

Έτσι, στην προηγούμενη περίπτωση, μια καθαρά εκθετική χρονική σειρά παρέχεται στη συχνότητα η οποία μπορεί να διαφέρει ή να μην διαφέρει από τις προηγούμενες. Στην τελευταία περίπτωση, το νέο δεδομένο ανταποκρίνεται στην πρόσθεση ενός νέου όρου σε μια ήδη υπάρχουσα χρονική σειρά. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, η υπάρχουσα h -οστη χρονική σειρά που έχει συχνότητα λ_h ανανεώνεται από την διαμέλιση του πολυώνυμου p_h . Η νέα σταθερά που εισάγουμε είναι p_{h,k_h} .

Έστω, $\widehat{\Sigma}^* = (\mathbb{R}, k^w, \widehat{\mathcal{B}}^*)$, που ορίζει το MPUM του $\widehat{\mathcal{D}}$ στο L^w . Προκύπτει από το Σ^* που ορίσαμε στο κεφάλαιο δύο, ανανεώνοντας το \mathcal{B}^* ως εξής

$$\widehat{\mathcal{B}}^* = \mathcal{B}^* + \mathcal{B}_{n+1} \text{ όπου } \mathcal{B}_{n+1} = \text{span}_k \{w_{n+1}\}$$

Επίσης το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\widehat{\mathcal{B}}^*$, είναι $\widehat{\pi} = (s - \lambda_{n+1})\pi$, όπου π είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του \mathcal{B}^* . Προκύπτει ότι στις δυο παραπάνω περιπτώσεις, το MPUM ανανεώνεται με την πρόσθεση ενός υποχώρου μίας διάστασης του $(k^w)^\mathbb{R}$. Άλλες περιπτώσεις μπορεί να αντιστοιχούν σε μια από τις δυο.

Το πρόβλημα τώρα είναι η ενημέρωση της αναπαράστασης των εξισώσεων ΚΜ και ΑΟ του \mathcal{B}^* σύμφωνα με το θεώρημα 3.1, για να αποκτήσουμε την αναπαράσταση του $\widehat{\mathcal{B}}^*$.

Η ανανέωση της αναπαράστασης της εξίσωσης ΚΜ ορίζεται όπως φαίνεται παρακάτω. Έστω

$$\widehat{H} \in k^{w \times (N+1)}, \widehat{F} \in k^{(N+1) \times (N+1)}$$

Εάν η $p_{n+1} = p_{n+1,0} \in k^w$ ισχύει, οι τύποι $H = (H_1, \dots, H_i, \dots, H_n) \in k^{w \times N}$ και $F = \text{diag}(F_1, \dots, F_i, \dots, F_n) \in k^{N \times N}$ ανανεώνονται με την προσθήκη ενός νέου τμήματος

$$\widehat{H} = (H \quad p_{n+1,0}), \quad \widehat{F} = \text{diag}(F, \lambda_{n+1})$$

Αν η $p_{n+1} = p_{h,k_h} + \sum_{j=1}^{k_h} p_{h,k_h-j} \frac{t^j}{j!}$ ισχύει, το h-οστο τμήμα του H, F ανανεώνεται

$$\widehat{H} = (H_1 \dots \widehat{H}_h \dots H_n)$$

$$\text{όπου } \widehat{H}_h = (H \quad p_{h,k_h}) \in k^{w \times (k_h+1)}$$

$$\widehat{F} = \text{diag}(F_1, \dots, \widehat{F}_h, \dots, F_n)$$

$$\text{όπου } \widehat{F}_h = \lambda_h I + J \in k^{(k_h+1) \times (k_h+1)}$$

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα 3.1 είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι οι εξισώσεις $\frac{d}{dt}(x) = Fx, w = Hx$ με τα H, F όπως ορίζονται παραπάνω, αποτελούν όντως μια ΚΜ αναπαράσταση εξίσωσης του \mathcal{B}^*

Το επόμενο βήμα είναι η ανανέωση της αναπαράστασης της εξίσωσης ΑΟ του θ^* . Ονομάζουμε e_{n+1} που ορίζεται από

$$e_{n+1} = \theta^* \left(\frac{d}{dt} \right) w_{n+1}$$

το σφάλμα χρονικής σειράς που σχετίζεται με το w_{n+1} . Δοσμένης της συνάρτησης $f(x)$ θα ορίσουμε με $f^j(a)$ την j -οστή παράγωγο συναρτήσεως του x , εκτιμώμενο ως $x=a$.

Πρόταση 3.2 [17] Το σφάλμα της χρονικής σειράς είναι καθαρά εκθετικό

$$e_{n+1} = \varepsilon_{n+1} \exp \lambda_{n+1}$$

Εάν η $p_{n+1} = p_{n+1,0}$ ισχύει, έχουμε

$$e_{n+1} = \theta^*(\lambda_{n+1}) p_{n+1,0} \in k^w$$

Αν η $p_{n+1} = p_{h,k_h} + \sum_{j=1}^{k_h} p_{h,k_h-j} \frac{t^j}{j!}$ ισχύει, έχουμε

$$e_{n+1} = \theta^*(\lambda_h) p_{h,k_h} + \sum_{j=1}^{k_h} \frac{\theta^{*(j)}(\lambda_h)}{j!} p_{h,k_h-j} \in k^w$$

■

Αλγόριθμος 3.3

Ο ακόλουθος επαναληπτικός αλγόριθμος υπολογίζει μια αναπαράσταση πυρήνα του MPUM δοθέντος συνόλου $w_i = v_i \exp \lambda_i$ $i = 1, \dots, N$. Στο k βήμα για $k = 0$ ως N εφαρμόζουμε τα ακόλουθα βήματα.

Βήμα 1

Ορίζουμε $R_0 = I_q$

Βήμα 2

Υπολογίζουμε το σφάλμα της τροχιάς $e_k = R_{k-1}(\lambda_k) v_k$, $\varepsilon_k = e_k \exp \lambda_k$

Βήμα 3

Υπολογίζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα που αντιστοιχεί στην αναπαράσταση πυρήνα E_k του MPUM για ε_k (δηλαδή $E_k(s) \varepsilon_k = 0$). Μια πιθανή επιλογή είναι ο πίνακας

$$E_k(s) = \frac{e_k e_k^T}{e_k^T e_k} (d/dt) - \lambda_k I_w$$

Βήμα 4

$$\text{Ορίζουμε } R_k = E_k R_{k-1}$$

Μετά από $N + 1$ βήματα ο αλγόριθμος αυτός παράγει έναν $w \times w$ πολυωνυμικό πίνακα R_N τέτοιον ώστε $R_N(d/dt)w_i=0$ και ο πυρήνας είναι το MPUM, δηλαδή

$$\mathcal{B}^* = \ker R_N(d/dt)$$

Αλγόριθμος 3.3

Διάβασε w_1, w_2, \dots, w_N

$$R_0 \leftarrow I_q$$

Για K **από** 1 **ως** N

$$e_k \leftarrow R_{k-1}(\lambda_k)v_k$$

$$\varepsilon_k \leftarrow e_k \exp \lambda_i$$

$$E_k(s) = \frac{e_k e_k^T}{e_k^T e_k} (d/dt) - \lambda_k I_w$$

$$R_k = E_k R_{k-1}$$

Τέλος _για

$$\mathcal{B}^* \leftarrow \ker R_N(d/dt)$$

Παράδειγμα 3.2 Θεωρούμε την βάση $\mathcal{D} = \{w_1(t), w_2(t)\}$. Οι χρονικές σειρές είναι

$$w_1(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1} e^{2t}, w_2(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} e^{3t}$$

Βήμα 1

$$\text{Ορίζουμε } R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2

$$\text{Υπολογίζουμε το σφάλμα της τροχιάς } e_1 = R_0(\lambda_1)v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3

Υπολογίζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα που αντιστοιχεί στην αναπαράσταση πυρήνα E_k του MPUM σύμφωνα με τον τύπο

$$E_k(s) = \frac{e_k e_k^T}{e_k^T e_k} (d/dt) - \lambda_k I_w$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} E_1(s) &= \frac{e_1 e_1^T}{e_1^T e_1} s - \lambda_1 I_2 = \frac{1}{(1 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ -1) s - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} s - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - 2 & -\frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Βήμα 4

$$R_1 = E_1 R_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - 2 & -\frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - 2 & -\frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s - 2 \end{pmatrix}$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για $k = 2$ έχουμε

$$e_2 = R_1(\lambda_2)v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
E_2(s) &= \frac{e_2 e_2^T}{e_2^T e_2} s - \lambda_2 I_2 = \frac{1}{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} s - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{4}{10} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} s - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} s - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{10}s - 3 & \frac{3}{10}s \\ \frac{3}{10}s & \frac{9}{10}s - 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2 = E_2 R_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{10}s - 3 & \frac{3}{10}s \\ \frac{3}{10}s & \frac{9}{10}s - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - 2 & -\frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s - 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}s^2 - \frac{17}{10}s + 6 & \frac{1}{10}s^2 + \frac{9}{10}s \\ -\frac{3}{10}s^2 + \frac{9}{10}s & \frac{3}{10}s^2 - \frac{33}{10}s + 6 \end{pmatrix} \\
&= s^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{17}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{9}{10} & -\frac{33}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■

Εκτέλεση παραδείγματος 3.2 στο Maxima

```

(%i1) kill(all)$
(%i2) v1 : matrix([1], [-1])$
      v2 : matrix([1], [0])$
      l1 : 2$
      l2 : 3$
      R0 : ident(2)$
(%i7) e1 : R0 . v1;

```

```

(%o7)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 
(%i8) e1T: transpose(e1)$
      E1 : (e1.e1T/(e1T.e1))*s-l1*ident(2);
(%o9)  $\begin{pmatrix} s/2 - 2 & -s/2 \\ -s/2 & s/2 - 2 \end{pmatrix}$ 
(%i10) R1 : E1.R0;
(%o10)  $\begin{pmatrix} s/2 - 2 & -s/2 \\ -s/2 & s/2 - 2 \end{pmatrix}$ 
(%i11) e2 : ev(R1,s=l2).v2;
(%o11)  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ 
(%i12) e2T: transpose(e2)$
      E2 : (e2.e2T/(e2T.e2))*s-l2*ident(2);
(%o13)  $\begin{pmatrix} \frac{s}{10} - 3 & \frac{3s}{10} \\ \frac{3s}{10} & \frac{9s}{10} - 3 \end{pmatrix}$ 
(%i14) R2 : expand(E2.R1);
(%o14)  $\begin{pmatrix} -\frac{s^2}{10} - \frac{17s}{10} + 6 & \frac{s^2}{10} + \frac{9s}{10} \\ \frac{9s}{10} - \frac{3s^2}{10} & \frac{3s^2}{10} - \frac{33s}{10} + 6 \end{pmatrix}$ 

```

Παράδειγμα 3.3 Θεωρούμε την βάση $\mathcal{D} = \{w_1(t), w_2(t), w_3(t)\}$. Οι χρονικές σειρές είναι

$$w_1(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1} e^{2t}, w_3(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} e^{2t} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1} t e^{2t}, w_2(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_3} e^{3t}$$

Βήμα 1

$$\text{Ορίζουμε } R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2

Υπολογίζουμε το σφάλμα της τροχιάς $e_1 = R_0(\lambda_1)v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Βήμα 3

Υπολογίζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα που αντιστοιχεί στην αναπαράσταση πυρήνα E_k του MPUM σύμφωνα με τον τύπο

$$E_k(s) = \frac{e_k e_k^T}{e_k^T e_k} (d/dt) - \lambda_k I_w$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} E_1(s) &= \frac{e_1 e_1^T}{e_1^T e_1} s - \lambda_1 I_2 = \frac{1}{(1 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ -1) s - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} s - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - 2 & -\frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Βήμα 4

$$R_1 = E_1 R_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - 2 & -\frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - 2 & -\frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s - 2 \end{pmatrix}$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για $k = 2$ έχουμε

$$\begin{aligned} e_2 &= R_1(\lambda_2)v_2 + R_1'(\lambda_2)v_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2(s) &= \frac{e_2 e_2^T}{e_2^T e_2} s - \lambda_2 I_2 = \frac{1}{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} (0 \quad -2)s - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} s - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & s-2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2 = E_2 R_1 &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & s-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s-2 & -\frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s-2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4-s & s \\ -\frac{1}{2}s(s-2) & \left(\frac{1}{2}s-2\right)(s-2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Τέλος για $k = 3$ έχουμε

$$e_3 = R_2(\lambda_3)V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
E_3(s) &= \frac{e_3 e_3^T}{e_3^T e_3} s - \lambda_3 I_2 = \frac{1}{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}} s - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{4}{13} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} s - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13}s-3 & -\frac{6}{13}s \\ -\frac{6}{13}s & \frac{9}{13}s-3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$R_3 = E_3 R_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{13}s-3 & -\frac{6}{13}s \\ -\frac{6}{13}s & \frac{9}{13}s-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4-s & s \\ -\frac{1}{2}s(s-2) & \left(\frac{1}{2}s-2\right)(s-2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{4}{13}s - 3\right)(4 - s) + \left(-\frac{6}{13}s\right)\left(-\frac{1}{2}s(s - 2)\right) & \left(\frac{4}{13}s - 3\right)s - \frac{6}{13}s\left(\frac{1}{2}s - 2\right)(s - 2) \\ -\frac{6}{13}s(4 - s) + \left(\frac{9}{13}s - 3\right)\left(-\frac{1}{2}s(s - 2)\right) & -\frac{6}{13}ss + \left(\frac{9}{13}s - 3\right)\left(\frac{1}{2}s - 2\right)(s - 2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{13}s^3 - \frac{10}{13}s^2 + \frac{55}{13}s - 12 & -\frac{1}{13}s(3s^2 - 22s + 63) \\ -\frac{3}{26}s(3s^2 - 23s + 42) & \frac{9}{26}s^3 - \frac{105}{26}s^2 + \frac{153}{13}s - 12 \end{pmatrix} \\
&= s^3 \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{3}{26} & \frac{9}{26} \end{pmatrix} + s^2 \begin{pmatrix} -\frac{10}{13} & \frac{22}{13} \\ \frac{69}{26} & -\frac{105}{26} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{55}{13} & -\frac{63}{13} \\ -\frac{126}{26} & \frac{153}{13} \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■

Εκτέλεση παραδείγματος 3.3 στο Maxima

```

(%i1) kill(all)$
(%i2) v1 : matrix([1], [-1])$
      v2 : matrix([1], [0])$
      v3 : matrix([1], [0])$
      l1 : 2$
      l2 : 2$
      l3 : 3$
      R0 : ident(2)$
(%i9) e1 : R0 . v1;
(%o9)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 
(%i10) e1T: transpose(e1)$
      E1 : (e1.e1T/(e1T.e1))*s-l1*ident(2);
(%o11)  $\begin{pmatrix} s/2 - 2 & -s/2 \\ -s/2 & s/2 - 2 \end{pmatrix}$ 

```

```

(%i12) R1 : E1.R0;
(%o12)  $\begin{pmatrix} s/2 - 2 & -s/2 \\ -s/2 & s/2 - 2 \end{pmatrix}$ 
(%i13) R1d: diff(R1,s)$
      e2 : ev(R1,s=12).v2+ev(R1d,s=12).v1;
(%o14)  $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ 
(%i15) e2T: transpose(e2)$
      E2 : (e2.e2T/(e2T.e2))*s-12*ident(2);
(%o16)  $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & s - 2 \end{pmatrix}$ 
(%i17) R2 : expand(E2.R1);
(%o17)  $\begin{pmatrix} -2\left(\frac{s}{2} - 2\right) & s \\ -\frac{(s-2)s}{2} & \left(\frac{s}{2} - 2\right)(s - 2) \end{pmatrix}$ 
(%i18) e3 : ev(R2,s=13).v3;
(%o18)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ 
(%i19) e3T: transpose(e3)$
      E3 : (e3.e3T/(e3T.e3))*s-13*ident(2);
(%o19)  $\begin{pmatrix} \frac{4s}{13} - 3 & -\frac{6s}{13} \\ -\frac{6s}{13} & \frac{9s}{13} - 3 \end{pmatrix}$ 
(%i20) R3 : E3.R2;
(%o20)  $\begin{pmatrix} \frac{3(s-2)s^2}{13} - 2\left(\frac{4s}{13} - 3\right)\left(\frac{s}{2} - 2\right) & \left(\frac{4s}{13} - 3\right)s - \frac{6\left(\frac{s}{2} - 2\right)(s-2)s}{13} \\ \frac{12\left(\frac{s}{2} - 2\right)}{13} - \frac{\left(\frac{9s}{13} - 3\right)(s-2)s}{2} & \left(\frac{s}{2} - 2\right)\left(\frac{9s}{13} - 3\right)(s - 2) - \frac{6s^2}{13} \end{pmatrix}$ 

```

Παράδειγμα 3.4 Θεωρούμε την βάση $\mathcal{D} = \{w_1(t), w_2(t), w_3(t)\}$. Οι χρονικές σειρές είναι

$$w_1(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} e^{2t}, \quad w_2(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} e^{2t} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} t e^{2t},$$

$$w_3(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} e^{2t} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} t e^{2t} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} \frac{t^2}{2} e^{2t}$$

Βήμα 1

$$\text{Ορίζουμε } R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2

$$\text{Υπολογίζουμε το σφάλμα της τροχιάς } e_1 = R_0(\lambda_1)v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3

Υπολογίζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα που αντιστοιχεί στην αναπαράσταση πυρήνα E_k του MPUM σύμφωνα με τον τύπο

$$E_k(s) = \frac{e_k e_k^T}{e_k^T e_k} (d/dt) - \lambda_k I_w$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} E_1(s) &= \frac{e_1 e_1^T}{e_1^T e_1} s - \lambda_1 I_2 = \frac{1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} s - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} s - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - 2 & \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Βήμα 4

$$R_1 = E_1 R_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - 2 & \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - 2 & \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s - 2 \end{pmatrix}$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για $k = 2$ έχουμε

$$e_2 = R_1(\lambda_2)v_2 + R'_1(\lambda_2)v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_2(s) = \frac{e_2 e_2^T}{e_2^T e_2} s - \lambda_2 I_2 = \frac{1}{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} (3 \quad -1)s - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} s - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9s & -3s \\ -3s & 1s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9}{10}s - 2 & -\frac{3}{10}s \\ -\frac{3}{10}s & \frac{1}{10}s - 2 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = E_2 R_1 = \begin{pmatrix} \frac{9}{10}s - 2 & -\frac{3}{10}s \\ -\frac{3}{10}s & \frac{1}{10}s - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - 2 & \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s - 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{10}s^2 - \frac{28}{10}s + 4 & \frac{3}{10}s^2 - \frac{4}{10}s \\ -\frac{1}{10}s^2 - \frac{4}{10}s & -\frac{1}{10}s^2 - \frac{12}{10}s + 4 \end{pmatrix}$$

Τέλος για $k = 3$ έχουμε

$$e_3 = R_2(\lambda_3)v_3 + R'_2(\lambda_3)v_2 + R''_2(\lambda_3)v_1$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{12}{10} & \frac{12}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{16}{10} & \frac{8}{10} \\ \frac{8}{10} & -\frac{16}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{6}{10} \\ -\frac{2}{10} & -\frac{2}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{10} \\ \frac{12}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{24}{10} \\ \frac{10}{8} \\ -\frac{10}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{12}{10} \\ \frac{10}{4} \\ -\frac{10}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3(s) = \frac{e_3 e_3^T}{e_3^T e_3} s - \lambda_3 I_2 = \frac{1}{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = E_3 R_2 = \begin{pmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{10}s^2 - \frac{28}{10}s + 4 & \frac{3}{10}s^2 - \frac{4}{10}s \\ -\frac{1}{10}s^2 - \frac{4}{10}s & -\frac{1}{10}s^2 - \frac{12}{10}s + 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{10}s^3 - \frac{34}{10}s^2 + \frac{56}{10}s - 8 & \frac{3}{10}s^3 - s^2 + \frac{8}{10}s \\ \frac{2}{10}s^2 + \frac{8}{10}s & \frac{2}{10}s^2 + \frac{24}{10}s - 8 \end{pmatrix}$$

$$= s^3 \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s^2 \begin{pmatrix} -\frac{34}{10} & -1 \\ \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{56}{10} & \frac{8}{10} \\ \frac{8}{10} & \frac{24}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

■

Εκτέλεση παραδείγματος 3.4 στο Maxima

```
(%i1) kill(all)$
(%i2) v1 : matrix([1], [1])$
      v2 : matrix([-1], [1])$
      v3 : matrix([0], [1])$
      l1 : 2$
      l2 : 2$
      l3 : 2$
      R0 : ident(2)$
(%i9) e1 : R0 . v1;
```

$$(\%o9) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(%i10) e1T: transpose(e1)\$

$$E1 : (e1.e1T/(e1T.e1))*s-l1*ident(2);$$

$$(\%o11) \begin{pmatrix} s/2 - 2 & s/2 \\ s/2 & s/2 - 2 \end{pmatrix}$$

(%i12) R1 : E1.R0;

$$(\%o12) \begin{pmatrix} s/2 - 2 & s/2 \\ s/2 & s/2 - 2 \end{pmatrix}$$

(%i13) R1d: diff(R1,s)\$

$$e2 : ev(R1,s=l2).v2+ev(R1d,s=l2).v1;$$

$$(\%o14) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(%i15) e2T: transpose(e2)\$

$$E2 : (e2.e2T/(e2T.e2))*s-l2*ident(2);$$

$$(\%o16) \begin{pmatrix} \frac{9}{10}s - 2 & -\frac{3}{10}s \\ -\frac{3}{10}s & \frac{1}{10}s - 2 \end{pmatrix}$$

(%i17) R2 : expand(E2.R1);

$$(\%o17) \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{2} - 2\right)\left(\frac{9s}{10} - 2\right) - \frac{3s^2}{20} & \frac{\left(\frac{9s}{10} - 2\right)s}{2} - \frac{3\left(\frac{s}{2} - 2\right)s}{10} \\ \frac{\left(\frac{s}{10} - 2\right)s}{2} - \frac{3\left(\frac{s}{2} - 2\right)s}{10} & \left(\frac{s}{10} - 2\right)\left(\frac{s}{2} - 2\right) - \frac{3s^2}{20} \end{pmatrix}$$

(%i18) R2d: diff(R2,s)\$

R2d2: diff(R2,s,2)\$

$$e3 : ev(R2,s=l3).v3+ev(R2d,s=l3).v2+ev(R2d2,s=l3).v1;$$

$$(\%o20) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(%i21) e3T: transpose(e3)\$

$$E3 : (e3.e3T/(e3T.e3))*s-l3*ident(2);$$

$$(\%o22) \begin{pmatrix} s - 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(%i23) R3 : E3.R2;

$$(\%o23) \begin{pmatrix} (s - 2)\left(\left(\frac{s}{2} - 2\right)\left(\frac{9s}{10} - 2\right) - \frac{3s^2}{20}\right) & (s - 2)\left(\frac{\left(\frac{9s}{10} - 2\right)s}{2} - \frac{3\left(\frac{s}{2} - 2\right)s}{10}\right) \\ -2\left(\frac{\left(\frac{s}{10} - 2\right)s}{2} - \frac{3\left(\frac{s}{2} - 2\right)s}{10}\right) & -2\left(\left(\frac{s}{10} - 2\right)\left(\frac{s}{2} - 2\right) - \frac{3s^2}{20}\right) \end{pmatrix}$$

3.3 Τρίτη Μέθοδος Υπολογισμού

Όπως και προηγούμενα γνωρίζοντας την ομαλή (smooth) συμπεριφορά ενός συστήματος μπορούμε να βρούμε το σύστημα των αλγεβρικών και γραμμικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής $A(s)w(t) = 0$, το οποίο παράγει το χώρο λύσεων.

Θεωρούμε τις \mathbb{C}^r διανυσματικές συναρτήσεις της μορφής $\tilde{w}_j(t) = w_j(t)e^{s_j t}$ όπου $w_j(t)$ πολυώνυμο ως προς t των οποίων οι συντελεστές είναι διανύσματα στο \mathbb{C}^r .

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε πως μπορούμε να βρούμε έναν $n \times n$ πίνακα $A(s)$ με πεπερασμένο πλήθος μηδενικών τέτοιο ώστε οι συναρτήσεις $w_1(t), \dots, w_r(t)$ να αποτελούν λύσεις του συστήματος $A(s)w(t) = 0$ όπου $s = \frac{d}{dt}$.

Θεώρημα 3.2 [15]

Έστω

$$w_j(t) = \left(\sum_{k=0}^{\sigma_j-1} w_{j,k} t^k \right) e^{s_j t}$$

όπου κάθε $w_{j,k} \in \mathbb{C}^r$ με $0 \leq k \leq \sigma_j-1$, $1 \leq j \leq \ell$. Ορίζουμε

$$C_j = (w_{j,0} \dots (\sigma_j - 2)! w_{j, \sigma_j-2} (\sigma_j - 1)! w_{j, \sigma_j-1}) \in \mathbb{R}^{1 \times g}$$

και J_j να είναι το Jordan block τάξης σ_j με ιδιοτιμή s_j δηλαδή

$$J_j = \begin{pmatrix} s_j & 1 & & 0 \\ \vdots & s_j & 1 & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & s_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\sigma_j \times \sigma_j}$$

όπου $j = 1, 2, \dots, \ell$ και έστω ,

$$C = (C_1, C_2, \dots, C_\ell) \in \mathbb{R}^{r \times n}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

και $n = \sum_{j=1}^{\ell} \sigma_j$. Έστω a κάποιος μιγαδικός αριθμός διαφορετικός των s_1, s_2, \dots, s_ℓ ορίζουμε ως

$$A(s) = I_r - C(J - aI_n)^{-q} \{ (s - a)V_q + (s - a)^2 V_{q-1} + \dots + (s - a)^q V_1 \}$$

όπου $q = \text{ind}(C, J)$ ο δείκτης σταθεροποιησιμότητας και $(V_1 V_2 \dots V_q)$ είναι ο γενικευμένος αντίστροφος του

$$S_{1-q} = \begin{pmatrix} C \\ C(J - aI_n)^{-1} \\ C(J - aI_n)^{1-q} \end{pmatrix}$$

Οι διανυσματικές συναρτήσεις $w_j(t)$ $j = 1, 2, \dots, \ell$ είναι οι λύσεις του συστήματος αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων $A(s)w(t) = 0$.

Επιπλέον, q είναι ο ελάχιστος δυνατός βαθμός κάθε $n \times n$ πολυωνυμικού πίνακα με αυτήν την ιδιότητα.



Αλγόριθμος 3.4

Δεδομένα

$$w_j(t) = \left(\sum_{k=0}^{\sigma_j-1} w_{j,k} t^k \right) e^{s_j t}$$

Βήμα 1

Ορίζουμε $C_j = (w_{j,0} \dots (\sigma_j - 2)! w_{j,\sigma_j-2} (\sigma_j - 1)! w_{j,\sigma_j-1}) \in \mathbb{R}^{1 \times g}$ και

$$J_j = \begin{pmatrix} s_j & 1 & & 0 \\ \vdots & s_j & 1 & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & s_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\sigma_j \times \sigma_j}$$

όπου $j = 1, 2, \dots, \ell$ και ,

$$C = (C_1, C_2, \dots, C_\ell) \in \mathbb{R}^{r \times n}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Βήμα 2

Υπολογίζουμε το $q = \text{ind}(C, J)$ όπου $\text{ind}(C, J)$ είναι ο δείκτης σταθεροποιησιμότητας του ζεύγους (C, J) και $(V_1 V_2 \dots V_q)$ είναι ο γενικευμένος αντίστροφος του

$$S_{1-q} = \begin{pmatrix} C \\ C(J - aI_n)^{-1} \\ C(J - aI_n)^{1-q} \end{pmatrix}$$

ενώ a είναι ένας αυθαίρετος μιγαδικός αριθμός διαφορετικός των μηδενικών s_1, s_2, \dots, s_ℓ .

Βήμα 3

Υπολογίζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$A(s) = I_r - C(J - aI_n)^{-q} \{ (s - a)V_q + (s - a)^2 V_{q-1} + \dots + (s - a)^q V_1 \}$$

Παράδειγμα 3.5 Θεωρούμε το χώρο λύσεων $W^{\mathbb{C}} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{2t} \rangle$

$$w_1(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_{1,1}} e^{2t} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_{1,0}} t e^{2t}$$

Τότε $\sigma_1 = 1 + 1 = 2$ έτσι

Βήμα 1

$$C = (w_{1,0} \quad w_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2

Υπολογίζουμε το δείκτη σταθεροποιησιμότητας του ζεύγους (C, J) . Είναι $\det(C) = -2 \neq 0$ άρα $q = 1$.

Συνεπώς

$$S_{1-1} = S_0 = C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$V_1 = C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Βήμα 3

Υπολογίζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$A(s) = I_r - C(J - aI_n)^{-q} \{ (s - a)V_q + (s - a)^2 V_{q-1} + \dots + (s - a)^q V_1 \}$$

$$\begin{aligned} A(s) &= I_2 - C(J - aI_2)^{-1} (s - a)V_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} (s - a) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$a = 1 \neq 2$ οπότε

$$\begin{aligned}
A(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} (s-1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} (s-1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s-1}{2} & \frac{s-1}{2} \\ -\frac{s-1}{2} & \frac{s-1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s-1}{2} & \frac{s-1}{2} \\ -\frac{s-1}{2} & \frac{s-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5-3s}{2} & \frac{s-1}{2} \\ \frac{s-1}{2} & \frac{5-3s}{2} \end{pmatrix} \\
&= s \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■

Βιβλιογραφία

- [1] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering.*
- [2] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction To The Modern Theory of Dynamical Systems (Encyclopedia of Mathematics and its Applications)*
- [3] John B. Fraleigh. *Εισαγωγή στην Άλγεβρα*
- [4] Willems J.C. (1986/87). From time series to linear system. Part I: *Automatica* 22: 561-580, Part II: *Automatica* 22: 675-694, Part III: *Automatica* 23: 87-115.
- [5] Obsert U. (1990). Multidimensional constant linear systems, *Acta Applicandae Mathematica* 20: 1-157.
- [6] Wood J. (2000). Modules and behaviours in nD systems theory, *Multidimensional Systems and Signal Processing* 11(1-2): 11-48.
- [7] Zerz E. (2008). Behavioral Systems Theory: A Survey 18(3): 265-270.
- [8] Willems J.C. (1991). Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems, *IEEE Trans. of Aut. Control* 36(3): 259-294.
- [9] Rocha P. (1990). Structure and representation of 2-D systems, Ph. D. thesis, University of Groningen.
- [10] Pillai H.K and Sankar S. (1999). A behavioral approach to control of distributed systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* 37(2): 388-408.
- [11] Kuijper M. and Polderman J.W. (2004). Reed-Solomon list decoding from a system-theoretic perspective, *IEEE Trans. on Information Theory* 50(2): 259-271.
- [12] Lu P., Liu M. and Obsert U. (2004). Linear recurring arrays, linear systems and multidimensional cyclic codes over quasi-Frobenius rings, *Acta Applicandae Mathematica* 80(2): 175-198.

- [13] Zerz E. (2007). Autonomy properties of multidimensional linear systems over rings, Proceedings of the 5th International Workshop on Multidimensional Systems (NDS 2007), Aveiro, Portugal.
- [14] Ivan Markovsky, Jan C. Willems, Sabine Van Huffel and Bart De Moor. Exact Approximate Modeling of Linear Systems. A behavioral Approach.
- [15] Willems J.C. (1997). On interconnections, control, and feedback. IEEE Trans. on Aut. Control 42: 329-339.
- [16] Ivan Markovsky, Jan C. Willems, and Bart De Moor. 14th IFAC Symposium on System Identification, Newcastle, Australia, 2006.
- [17] Antoulas, A. and J.C. Willems (1993). A behavioral approach to linear exact modeling. IEEE Trans. on Aut. Control 38(12): 1776-1802.
- [18] I. Gohberg. Lancaster. P. Rodman. L. (1982). Matrix polynomials Computer Science and Applied Mathematics Academic press. New York London

Παράρτημα

Στο παράρτημα αυτό παραθέτουμε όλες τις εντολές που χρησιμοποιήθηκαν στο **Matlab** για την κατασκευή των σχημάτων.

Για την λογιστική απεικόνιση

```
r = 2.8;
x0 = 0.1;
N = 100;
nestfun (r, x0, N)

function [ x ] = nestfun (r, x0, N)
    f = @(x) r .* x .* (1 - x);
    x = zeros (1, N);
    x(1) = x0;

    for n = 1 : (N - 1)
        x(n+1) = f (x(n));
    end

    v = [x; x];
    v = v(:);
    w = [0; v(3:end)];
    v = v(1:end-1);

    figure
    xx = 0:0.01:1;
    yy = f (xx);
    plot (xx, yy, 'k', 'linewidth', 5)
    hold on;
    plot (v, w, 'k');
    plot (xx, xx, 'k');
    hold off;
    axis ([0,1,0,1], 'square');
    xlabel 'x';
    ylabel 'f(x)';
    title (['f(x) = ', num2str(r), ' x (1 - x)']);

    figure
    plot (1:length(x), x, 'k');
    hold on;
    plot (1:length(x), x, '*k', 'markersize', 5);
    axis ([0,N,0,1]);
    xlabel 'n';
    ylabel 'x_n';
    title (['r = ', num2str(r)]);
```

Για την συνάρτηση f

```
E = 10.0;
R = 2.0;
C = 1.0;

Q = 0:0.01:(E * C);
f = E / R - Q / (R * C);
plot (Q, f, 'k', 'linewidth', 5);
hold on
Q = (E * C):0.01:(E * C + 2);
f = zeros(size(Q));
plot (Q, f, 'k', 'linewidth', 5);
hold off

axis ([0,E * C + 2,-1, E / R + 1]);
grid on;
xlabel 'Q';
ylabel 'I';
title (['I(Q) = ', num2str(E/R), ' - Q / ', num2str(R*C)]);
```

Για την συνάρτηση Q

```
E = 10.0;
R = 2.0;
C = 1.0;

t = 0:0.01:(E * C + 2);
Q = C * E - C * E * exp (-t / (R * C));

plot (t, Q, 'k', 'linewidth', 5);

axis ([0, E * C + 2, 0, 10]);
grid on;
xlabel 't';
ylabel 'Q';
title (['Q(t) = ', num2str(C*E), ' - ', num2str(C*E), ' exp (',
- t / ', num2str(R*C), ' )']);
```

Για το παράδειγμα 3.2

□ MPUM for signals of the form $w_i(t) = v e^{k t}$

It works for arbitrary dimension of signals w_i and for as many signals w_i as you want

```
(%i2) MPUM(s) := block([n, d, R, i, e, E, x, R],
    n: length(s),
    d: length(s[1]) - 1,
    R: ident(d),
    for i: 1 thru n do
    (
        e: ev(R, x = s[i][1]) . rest(s[i], 1),
        E: e . transpose(e) / (e . e) * x - s[i][1] * ident(d),
        R: E . R
    ),
    expand(R)
)S
```

```
(%i3) w: [[2,1,-1],[3,1,0]];
(%o3) [[2,1,-1],[3,1,0]]
```

```
(%i4) MPUM(w);
```

```
(%o4) 
$$\begin{bmatrix} \frac{x^2}{10} - \frac{17x}{10} + 6 & \frac{x^2}{10} - \frac{9x}{10} \\ \frac{9x}{10} - \frac{3x^2}{10} & \frac{3x^2}{10} - \frac{33x}{10} + 6 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i5) w: [[1,1,-1,3,2,1],[3,1,0,2,1,1]];
(%o5) [[1,1,-1,3,2,1],[3,1,0,2,1,1]]
```

```
(%i6) MPUM(w);
```

```
(%o6) 
$$\begin{bmatrix} \frac{35x^2}{824} - \frac{179x}{824} + 3 & \frac{207x}{824} - \frac{35x^2}{824} & \frac{105x^2}{824} - \frac{565x}{824} & \frac{35x^2}{412} - \frac{193x}{412} & \frac{35x^2}{824} - \frac{179x}{824} \\ \frac{207x}{824} - \frac{75x^2}{824} & \frac{75x^2}{824} - \frac{267x}{824} + 3 & \frac{681x}{824} - \frac{225x^2}{824} & \frac{237x}{412} - \frac{75x^2}{412} & \frac{207x}{824} - \frac{75x^2}{824} \\ \frac{145x^2}{824} - \frac{565x}{824} & \frac{681x}{824} - \frac{145x^2}{824} & \frac{435x^2}{824} - \frac{1811x}{824} + 3 & \frac{145x^2}{412} - \frac{623x}{412} & \frac{145x^2}{824} - \frac{565x}{824} \\ \frac{55x^2}{412} - \frac{193x}{412} & \frac{237x}{412} - \frac{55x^2}{412} & \frac{165x^2}{412} - \frac{623x}{412} & \frac{55x^2}{206} - \frac{215x}{206} + 3 & \frac{55x^2}{412} - \frac{193x}{412} \\ \frac{35x^2}{824} - \frac{179x}{824} & \frac{207x}{824} - \frac{35x^2}{824} & \frac{105x^2}{824} - \frac{565x}{824} & \frac{35x^2}{412} - \frac{193x}{412} & \frac{35x^2}{824} - \frac{179x}{824} + 3 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i7) w: [[1,1,-1,3,2,1],[3,1,0,2,1,1],[2,1,1,2,0,1]];
(%o7) [[1,1,-1,3,2,1],[3,1,0,2,1,1],[2,1,1,2,0,1]]
```

```
(%i8) MPUM(w);
(%o8)
```

```

$$\begin{bmatrix} \frac{184675x^3}{10034672} - \frac{387435x^2}{10034672} + \frac{2773937x}{5017336} - 6 & \frac{184675x^3}{10034672} - \frac{239695x^2}{10034672} + \frac{258021x}{5017336} & \frac{554025x^3}{10034672} - \frac{1014565x^2}{10034672} + \frac{7455955x}{5017336} & \frac{184675x^3}{5017336} - \frac{313565x^2}{5017336} + \frac{1515979x}{2508668} & \frac{184675x^3}{10034672} - \frac{387435x^2}{10034672} + \frac{2773937x}{5017336} \\ \frac{703425x^3}{10034672} - \frac{3597975x^2}{10034672} + \frac{258021x}{5017336} & \frac{703425x^3}{10034672} - \frac{4160715x^2}{10034672} + \frac{11870601x}{5017336} - 6 & \frac{2110275x^3}{10034672} - \frac{11356665x^2}{10034672} + \frac{6101583x}{5017336} & \frac{703425x^3}{5017336} - \frac{3879345x^2}{5017336} + \frac{6064311x}{2508668} & \frac{703425x^3}{10034672} - \frac{3597975x^2}{10034672} + \frac{258021x}{5017336} \\ \frac{178865x^3}{10034672} - \frac{3081225x^2}{10034672} + \frac{7455955x}{5017336} & \frac{178865x^3}{10034672} - \frac{2938133x^2}{10034672} + \frac{6101583x}{5017336} & \frac{536595x^3}{10034672} - \frac{9100583x^2}{10034672} + \frac{22611641x}{5017336} - 6 & \frac{178865x^3}{5017336} - \frac{3009679x^2}{5017336} + \frac{6778769x}{2508668} & \frac{178865x^3}{10034672} - \frac{3081225x^2}{10034672} + \frac{7455955x}{5017336} \\ \frac{259375x^3}{5017336} - \frac{1992705x^2}{5017336} + \frac{1515979x}{2508668} & \frac{259375x^3}{5017336} - \frac{2200205x^2}{5017336} + \frac{6064311x}{2508668} & \frac{778125x^3}{5017336} - \frac{6185615x^2}{5017336} + \frac{6778769x}{2508668} & \frac{259375x^3}{2508668} - \frac{2096455x^2}{2508668} + \frac{3790145x}{1254334} - 6 & \frac{259375x^3}{5017336} - \frac{1992705x^2}{5017336} + \frac{1515979x}{2508668} \\ \frac{184675x^3}{10034672} - \frac{387435x^2}{10034672} + \frac{2773937x}{5017336} & \frac{184675x^3}{10034672} - \frac{239695x^2}{10034672} + \frac{258021x}{5017336} & \frac{554025x^3}{10034672} - \frac{1014565x^2}{10034672} + \frac{7455955x}{5017336} & \frac{184675x^3}{5017336} - \frac{313565x^2}{5017336} + \frac{1515979x}{2508668} & \frac{184675x^3}{10034672} - \frac{387435x^2}{10034672} + \frac{2773937x}{5017336} - 6 \end{bmatrix}$$

```