ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
΄΄ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ΄΄

<u>ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΔΙΑΚΡΙΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ</u>

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΑΡΑΤΖΙΑ Δ. ΘΕΟΔΩΡΟΥ

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Επίκ. Καθηγητής Α.Π.Θ

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2007

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
΄΄ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ΄΄

<u>ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΔΙΑΚΡΙΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ</u>

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΑΡΑΤΖΙΑ Δ. ΘΕΟΔΩΡΟΥ

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Επίκ. Καθηγητής Α.Π.Θ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

……………………	…………………..	…………………
Ν. Καραμπετάκης	Α. Βαρδουλάκης	Μ. Γουσίδου
Επικ.Καθηγητής Α.Π.Θ	Καθηγητής Α.Π.Θ	Αναπλ.Καθηγήτρια Α.Π.Θ

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2007

Copyright © Καράτζιας Δ. Θεόδωρος 2007.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας ιδιαίτερα σημαντική ήταν η συμβολή του επιβλέποντα επίκουρου καθηγητή κυρίου Καραμπετάκη Νικολάου, τον οποίο ευχαριστώ πολύ τόσο για τις διαφωτιστικές και καίριες υποδείξεις του, όσο και για την συνολική επίβλεψη της εργασίας.

Ευχαριστώ θερμά και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον καθηγητή κύριο Βαρδουλάκη Αντώνιο-Ιωάννη και την αναπληρώτρια καθηγήτρια κυρία Γουσίδου – Κουτίτα Μαρία για τον χρόνο που αφιέρωσαν στη μελέτη καθώς και στην αξιολόγηση της εργασίας.

Τέλος, πολλά ευχαριστώ οφείλω σε ολόκληρη την οικογένειά μου για την αμέριστη συμπαράσταση και τη μεγάλη υπομονή που έδειξαν κατά την διάρκεια της συγγραφής της εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια νέα μέθοδος για την αντιστροφή όχι κατ’ανάγκη τετράγωνων πινάκων μέσα σε ένα πολυμεταβλητό πολυωνυμικό δακτύλιο με συντελεστές από ένα πεπερασμένο σύνολο. Αυτή η μέθοδος απαιτεί ο πολυωνυμικός πίνακας να ικανοποιεί τα κριτήρια της <´´1 – 1´´> απεικόνισης όπως αυτά ορίζονται στο άρθρο [1]. Αναπτύσουμε μια προσέγγιση χώρου ακολουθιών σε πολυμεταβλητούς μετασχηματισμούς. Εισάγουμε μια νέα έννοια της διάταξης χώρου ακολουθιών και δείχνουμε ότι ορισμένοι πολυωνυμικοί πίνακες, όταν αντιμετωπιστούν σαν γραμμικοί μετασχηματισμοί, είναι τοπικά αντιστρέψιμοι όπου υπάρχει μια <´´1 – 1´´> αντιστοιχία μεταξύ των υποακολουθιών των εισόδων τους και των ακολουθιών των εξόδων τους. Χρησιμοποιώντας τοπική αντιστρεψιμότητα, δείχνουμε ότι μπορούμε να αποφύγουμε πολυωνυμικές διαδικασίες υπολογισμού αντιστρόφων πολυμεταβλητών πολυωνυμικών πινάκων χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις διαδικασίες σειρών.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Αντιστροφή ορθογώνιων πινάκων, <´´1 – 1´´> απεικόνιση, χώρος ακολουθιών, πολυμεταβλητοί μετασχηματισμοί, τοπική αντιστρεψιμότητα, στοιχειώδεις διαδικασίες σειρών.

ABSTRACT

A new method for inversion of rectangular matrices in a multivariate polynomial ring with coefficients in a field is explained in this paper. This method requires that the polynomial matrix satisfies the one – to – one mapping criteria defined in [1]. We develop a sequence space approach to multidimensional transformations. We introduce a new notion of sequence space ordering and show that certain polynomial matrices, when viewed as linear transformations, are locally invertible wherein there exists a one – to – one correspondence between subsequences of their input and their output sequences. Using local invertibility property, we show that one can avoid polynomial operations to compute inverses of multivariate polynomial matrices by using elementary row operations in the ground field.

KEY WORDS

Inversion of rectangular matrices, one – to – one mapping, sequence space, multidimensional transformations, local invertibility, elementary row operations.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΤΟΠΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΤΗΤΑ ΣΕ Μ–ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1 . ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι λύσεις σε πολυμεταβλητά πολυωνυμικά συστήματα εξισώσεων είναι θέμα εντατικής έρευνας και έχει σημαντικές εφαρμογές σε περιοχές συστημάτων και θεωρίας ελέγχου και πιο πρόσφατα στη μελέτη πολυδιάστατων (m – D) κωδίκων συνέλιξης. Το πρόβλημα της εύρεσης αντιστρόφων πολυωνυμικών πινάκων, παίζει σημαντικό ρόλο στη γενική θεωρία των γραμμικών πολυδιάστατων συστημάτων. Για πολυωνυμικούς πίνακες μιας μεταβλητής το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί διεξοδικά (βλέπε άρθρο [2] και τις αναφορές του). Σημαντικές διαφορές προκύπτουν στην πολυμεταβλητή περίπτωση αν συγκριθεί με την αντίστοιχη της μιας μεταβλητής εξαιτίας του γεγονότος ότι ένας πολυωνυμικός δακτύλιος με περισσότερες από μία μεταβλητές με συντελεστές από ένα σύνολο δεν είναι μια κύρια ιδανική περιοχή. Κενρικό ρόλο στην ύπαρξη και εύρεση αντιστρόφων πολυμεταβλητών πολυωνυμικών πινάκων είναι η έννοια των πρώτων πολυωνυμικών πινάκων. Για $m \geq 2$, νέο φαινόμενο προκύπτει στους ορισμούς των πρώτων πολυωνυμικών πινάκων και οι έννοιες του μηδενικά πρώτου (ZP), του ελάχιστου πρώτου (MP) και του αριστερά – πρώτου παράγοντα (LFP) είναι σχεδόν ισοδύναμες (βλέπε για παράδειγμα άρθρο [3]). Από την προοπτική των m – D κωδίκων συνέλιξης οι ιδιότητες των πρώτων πινάκων μεταφράζονται σε ύπαρξη ενός ελέγχου ισότητας πίνακα ή αναπαράστασης πυρήνα και αμφιμονοσήμαντης (<΄΄1 – 1΄΄> και επί) απεικόνισης (άρθρα [4], [5] και [6]).

Ειδικότερα, MP <=> Αναπαράσταση πυρήνα και ZP <=> Αντιστρεψιμότητα. Εντούτοις, όταν *ZP* => *MP* => *LFP*, η λύση εύρεσης ενός αντιστρόφου εγγυάται την ύπαρξη της ιεραρχίας των πρώτων πολυωνυμικών πινάκων και θα επιτρέπει καλύτερη κατανόηση της δυναμικής συστημάτων. Στην περίπτωση μη τετράγωνων πινάκων $G(z)$ διάστασης κ x n, κ < n, χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Quillen-Suslin θα απαιτούνταν unimodular ολοκλήρωση του $G(z)$, με οριοθέτηση σειρών, τέτοια ώστε ο επακόλουθος τετραγωνικός πίνακας να είναι μη ιδιάζων. Η unimodular ολοκλήρωση του $G(z)$ και η διαδικασία αντιστροφής του επακόλουθου τετραγωνικού πίνακα περιλαμβάνει πολυωνυμικές διαδικασίες. Αλγόριθμοι για αντιστροφή πινάκων χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Quillen-Suslin έχουν αναπτυχθεί χρησιμοποιώντας βάση Gröbner και συζυγείς βασισμένους αλγορίθμους. Άλλες προσσεγγίσεις χρησιμοποιώντας παρεμβολή και μετασχηματισμό Fourier έχουν επίσης προταθεί. Γίνεται αντιληπτό ότι σε m – D κωδικοποιητές με μεγάλο m και πολύ περιορισμένα μήκη, η περιλαμβανόμενη πολυπλοκότητα σε τέτοιους αλγορίθμους ίσως αποδειχθεί ότι είναι υπολογιστικά μη ελκυστική.

Η δυαδικότητα κωδίκων και συστημάτων είναι καλά καθιερωμένη (άρθρο [7]). Οι Fornasini και Valcher (άρθρο [5]) περιγράφουν 2 – D κώδικες συνέλιξης με πεπερασμένη υποστήριξη χρησιμοποιώντας το δακτύλιο $R[\ z_1^{\pm 1},\ z_2^{\pm 2}\ ]$, όπου ο κώδικας είναι καθορισμένος σαν ένα submodule του Laurent πολυωνυμικού δακτυλίου R^n και μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν ένα σύνολο εξισώσεων συντασσόμενες μέσα στο διακριτό πλάνο $\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}$.

Ο Weiner (άρθρα [4] και [8]) καθορίζει έναν m – D κώδικα συνέλιξης σαν ένα submodule του δακτυλίου $R[\ \mathrm{z}_1, \ldots, \mathrm{z}_\mathrm{m}\ ]$ όπου ο κώδικας αντιμετωπίζεται σαν ένα σύνολο εξισώσεων συντασσόμενες μέσα στο δικτυωτό πλέγμα των μη αρνητικών ακεραίων $\mathbb{N}^m$. Σε αυτή την εργασία επιδιώκουμε να εκμεταλλευτούμε την ισοδυναμία μεταξύ του πολλαπλασιασμού πολυωνύμων και της διακριτής συνέλιξης για να βρούμε τον αντίστροφο ορισμένων πολυμεταβλητών πολυωνυμικών πινάκων με μεταβλητές από το δακτύλιο $R[\ z_1, \ldots, z_m\ ]$ που ικανοποιεί τα κριτήρια της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης (άρθρο [1]). Στο κεφάλαιο 2 θα ασχοληθούμε με την καθιέρωση σημειώσεων και ορισμών έτσι ώστε να διευκρινήσουμε το πρόβλημα της διατύπωσης. Στο κεφάλαιο 3 επανερχόμαστε στην έννοια της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης για 1 – D κώδικες και χρησιμοποιούμε τοπική αντιστρεψιμότητα για να βρούμε τον αντίστροφο πολυωνυμικών πινάκων μιας μεταβλητής. Τέλος, στο κεφάλαιο 4, επεκτείνουμε αυτή την έννοια σε πολυμεταβλητούς πολυωνυμικούς πίνακες. Ένα μεγάλο πλήθος παραδειγμάτων συνοδεύουν την διπλωματική εργασία για την παρουσίαση βασικών εννοιών, αλλά και την κατανόηση της θεωρίας.

Στην προσπάθεια της εργασίας θα αναπτυχθεί μια προσέγγιση σε χώρο ακολουθιών βασισμένη στην τοπική αντιστρεψιμότητα για πολυδιάστατους μετασχηματισμούς, εκμεταλλευόμενοι έμφυτες ιδιότητες που ορισμένοι πίνακες έχουν προκειμένου να βρούμε λύσεις για αντιστροφή αποφεύγοντας πολυωνυμικές διαδικασίες.

2 . ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Α. Ο G είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός

Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο με q στοιχεία, $R = \mathbb{F}[\, z_1, \ldots, z_m \,]$ είναι ένας πολυωνυμικός δακτύλιος με m μεταβλητές από το $\mathbb{F}$ και $G(\, z \,) \in R^{k\,x\,n}$ είναι ένας πίνακας με κ γραμμές και n στήλες (κ < n) και έχει στοιχεία από το R. Όταν ο $G(\, z \,)$ αντιμετωπίζεται σαν ένας γραμμικός μετασχηματισμός χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμό πινάκων, η παρακάτω απεικόνιση περιλαμβάνει έναν R – module ομομορφισμό και είναι καθορισμένη ως εξής :

$$\Phi : \quad R^k \to R^n$$

$$\mathrm{u} \mapsto \mathrm{u}.G$$

Η εικόνα C της απεικόνισης Φ ($\boldsymbol{C = im\ (\ \Phi\ )}$) είναι ένα R – submodule του R - module R^n και μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν ***C = χώρος γραμμών του G*** = $\boldsymbol{R^k G}$. Είναι γνωστό, (άρθρα [4] και [7]), ότι υπάρχει ένας $\mathbb{F}$ – ισομορφισμός μεταξύ του πολυμεταβλητού πολυωνυμικού δακτυλίου R και του m – D χώρου ακολουθιών S που δίνεται παρακάτω :

$$S = \{\omega : \ \mathbb{N}^m \to \mathbb{F}\},$$

όπου η απεικόνιση ω έχει πεπερασμένη υποστήριξη και τα στοιχεία του $\mathbb{F}$ είναι συνδεδεμένα με τις συντεταγμένες ($i_1, \ \ldots \ , \ i_m$) του δικτυωτού πλέγματος των ακεραίων $\mathbb{N}^m$. Ο ισομορφισμός δίνεται ως εξής :

$$\psi : S \to R$$

$$\omega \mapsto \sum_{(\, i_1, \ldots \,, i_2\,)} \omega(\, i_1\,, \ \ldots \,, i_m\,).\, z_1^{i_1}. \ \ldots . \ . z_m^{i_m}$$

Οι συντεταγμένες του δικτυωτού πλέγματος $\mathbb{N}^m$ είναι συνδεδεμένες με μονώνυμα του R μέσω της παρακάτω αντιστοιχίας :

$$(i_1, \ldots ,i_m) \leftrightarrow z_1^{i_1} . \; .... \; . z_m^{i_m}$$

Οι τιμές $i_1, \ldots ,i_m$ διαμορφώνουν τους άξονες του *m* – D χώρου ακολουθιών *S* και το πιο αριστερό σημείο στην κορυφή του δικτυωτού πλέγματος θεωρείται η συντεταγμένη (0, … ,0).

Παράδειγμα 2.1 : Θεωρούμε μια 1 – D πεπερασμένη ακολουθία u Є S^2 με στοιχεία από το πεπερασμένο σύνολο $\mathbb{F}_2$. Παρακάτω φαίνεται η αναπαράσταση του γραμμικού μετασχηματισμού *G*(z) μέσω της απεικόνισης ψ^2 :

$$\begin{array}{ccc} S^2 & & R^2 \\ 11 \;\; 01 \;\; 10 & \xrightarrow{\psi^2} & \begin{pmatrix} 1+z_1^2 \\ 1+z_1 \end{pmatrix} , \end{array}$$

όπου $\begin{pmatrix} 1+z_1^2 \\ 1+z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} z_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} z_1^2$

Δηλαδή ισχύει ψ^2(u) = $\begin{pmatrix} 1+z_1^2 \\ 1+z_1 \end{pmatrix}$ Є R^2.

Το στοιχείο 11 αντιστοιχεί στον σταθερό όρο, το στοιχείο 01 στον συντελεστή της μεταβλητής z_1 και το στοιχείο 10 στον συντελεστή της μεταβλητής z_1^2.

Σε αυτή την περίπτωση βάζουμε τους αντίστοιχους συντελεστές ανά γραμμές, δηλαδή, βάζουμε τον συντελεστή του σταθερού όρου, του z_1 και του z_1^2 στην πρώτη γραμμή και αντίστοιχα τους δεύτερους συντελεστές στη δεύτερη γραμμή.

Παράδειγμα 2.2 : Θεωρούμε μια 2 – D πεπερασμένη ακολουθία u ∈ R^4 με στοιχεία από το πεπερασμένο σύνολο $\mathbb{F}_2$. Τότε το πιο αριστερό σημείο στην κορυφή του δικτυωτού πλέγματος $\mathbb{N}^2$ είναι η συντεταγμένη (0,0) και η αναπαράσταση του γραμμικού μετασχηματισμού G(z) μέσω της απεικόνισης ψ^4 θα είναι η παρακάτω :

$$S^4 \qquad\qquad\qquad\qquad R^4$$

$$\begin{array}{cc} 0110 & 1001 \\ 0000 & 0101 \\ 0010 & 1000 \end{array} \xrightarrow{\psi^4} [z_1{+}z_1z_2^2 \quad 1{+}z_1z_2 \quad 1{+}z_2^2 \quad z_1{+}z_1z_2]^T$$

Το στοιχείο 0110 αντιστοιχεί στον σταθερό όρο (συντεταγμένη (0,0)), το στοιχείο 1001 στον συντελεστή της μεταβλητής z_1 (συντεταγμένη (1,0)), το στοιχείο 0000 στον συντελεστή της μεταβλητής z_2 (συντεταγμένη (0,1)), το στοιχείο 0101 στον συντελεστή του γινομένου $z_1.z_2$ (συντεταγμένη (1,1)), το στοιχείο 0010 στον συντελεστή της δύναμης z_2^2 (συντεταγμένη (0,2)) και το στοιχείο 1000 στον συντελεστή του γινομένου $z_1.z_2^2$ (συντεταγμένη (1,2)).

Κάθε συντεταγμένη δηλώνει τη δύναμη του z_1 και του z_2 αντίστοιχα. Δηλαδή η συντεταγμένη (x,ψ) δηλώνει το γινόμενο $z_1^{\chi}\,.\,z_2^{\psi}$.

Και σε αυτή την περίπτωση βάζουμε τους αντίστοιχους συντελεστές ανά γραμμές, δηλαδή, βάζουμε τον συντελεστή του σταθερού όρου, του z_1 του z_2 του $z_1.z_2$ του z_2^2 και του $z_1.z_2^2$ στην πρώτη γραμμή και αντίστοιχα τους δεύτερους συντελεστές στη δεύτερη γραμμή, τους τρίτους συντελεστές στην τρίτη γραμμή και τους τέταρτους συντελεστές στην τέταρτη γραμμή.

Δηλαδή τοποθετούμε τους συντελεστές του γινομένου $z_2^j z_1^i$ στο (i+1,j+1) στοιχείο του πίνακα.

Β. Διαδικασίες στην περιοχή μετατροπής S

Η διακριτή συνέλιξη στην περιοχή του χώρου ακολουθιών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των συντελεστών του αποτελέσματος των δύο πολυωνύμων (πολλαπλασιάζοντας δύο πολυώνυμα μεταξύ τους, είναι το ίδιο με το να πολλαπλασιάσουμε τους συντελεστές τους). Έστω πίνακας $G \in R^{k\,x\,n}$, με στοιχεία $g_{\chi}^{(\psi)}(z) = g_{\chi}^{(\psi)}(z_1,\ldots, z_m) \in R$. Ο πίνακας *G* έχει την παρακάτω μορφή :

$$G=\begin{bmatrix} g_1^{(1)}(z) & \cdots & g_1^{(n)}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_k^{(1)}(z) & \cdots & g_k^{(n)}(z) \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας, είναι πίνακας μεταβλητών.

Η αναπαράσταση του χώρου ακολουθιών του πίνακα *G* που ορίζεται από την αντίστροφη απεικόνιση ψ^{-1} είναι η παρακάτω :

$$\begin{bmatrix} g_1^{(1)} & \cdots & g_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_k^{(1)} & \cdots & g_k^{(n)} \end{bmatrix}$$

Αυτός ο πίνακας, είναι πίνακας συντελεστών (των συντελεστών του σταθερού όρου και όλων των συνδυασμών δυνάμεων των $z_1,\ldots, z_m$ και μεταξύ τους γινομένων).

Τα στοιχεία $g_{\chi}^{(\psi)} \in S$ ονομάζονται ***ακολουθίες γεννητριών*** (άρθρο [9]).

Έστω K_{z_i} είναι ο μέγιστος βαθμός από τις δυνάμεις των πολυωνυμικών εισόδων του πίνακα *G*. Τότε το K_{z_i} δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$K_{z_i} = \max_{\substack{1 \le \chi \le k \\ 1 \le \psi \le n}} [\, \deg g_{\chi}^{(\psi)}(z_i) \,]$$

Ισοδύναμα, ορίζουμε ότι $K_{z_i} = K_i - 1$, όπου K_i είναι το μήκος της μεγαλύτερης ***ακολουθίας γεννητριών*** κατά μήκος του i-οστού άξονα του m – D χώρου ακολουθιών *S.* Τότε το K_i δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$K_i = \max_{\substack{1 \leq \chi \leq k \\ 1 \leq \psi \leq n}} [\text{ len } g_\chi^{(\psi)}]$$

Για μια πεπερασμένη ακολουθία u Є S^k, η διακριτή m – D συνέλιξη (που συμβολίζεται με *) ορίζεται ως εξής :

$$\upsilon = u * g \qquad (1)$$

με
$$\upsilon^{(1)} = u^{(1)} * g_1^{(1)} + \ldots + u^{(\kappa)} * g_k^{(1)}$$
$$\vdots$$
$$\upsilon^{(n)} = u^{(1)} * g_1^{(n)} + \ldots + u^{(\kappa)} * g_k^{(n)}$$

Η λειτουργία της συνέλιξης $u^{(\chi)} * g_\chi^{(\psi)}$ υπονοεί ότι για κάθε ($i_1, \ldots, i_m$) ≥ 0, ισχύει ο παρακάτω τύπος :

$$\upsilon_{(i_1,\ldots,i_m)}^{(\psi)} = \sum_{l_m=0}^{K_m-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{K_1-1} u_{((i_1-l_1),\ldots,(i_m-l_m))}^{(\chi)} \cdot g_{\chi(l_1,\ldots,l_m)}^{(\psi)} \qquad (2)$$

όπου $u_{((i_1-l_1),\ldots,(i_m-l_m))}^{(\chi)} \triangleq 0$ για κάθε $i_r < l_r$. Η πρόσθεση κι ο πολλαπλασιασμός πραγματοποιούνται στο module – q (δυαδικό σύστημα).

Όταν χρησιμοποιείται διακριτή συνέλιξη η παρακάτω απεικόνιση φ περιλαμβάνει έναν ομομορφισμό και είναι καθορισμένη ως εξής :

$$\varphi: S^k \to S^n$$
$$u \mapsto u * g$$

Για το ισομορφισμό ψ : $S \to R$, όταν έχουμε διακριτή συνέλιξη στην περιοχή S και πολλαπλασιασμό πολυωνύμων στον δακτύλιο R, τότε ο νόμος της σύνθεσης μεταφράζεται ως εξής :

$$\psi(\omega_1 * \omega_2) = \psi(\omega_1) . \psi(\omega_2)$$

<u>Παράδειγμα 2.3</u> : Διευκρινίζουμε την παραπάνω απεικόνιση με ένα παράδειγμα. Έστω ότι $R = \mathbb{F}_2[\ z_1\ ]$ και ένας πίνακας $G \in R^{2\ x\ 3}$ που δίνεται παρακάτω :

$$G = \begin{bmatrix} 1+z_1 & z_1 & 1+z_1 \\ z_1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Για αυτόν τον πίνακα μιας μεταβλητής, έχουμε ότι $K_{z_1} = 1$.

Η αναπαράσταση του χώρου ακολουθιών του πίνακα G είναι η παρακάτω :

$$\begin{bmatrix} 11 & 01 & 11 \\ 01 & 10 & 10 \end{bmatrix},\ \text{όπου } K_1 = 2.$$

Για την ακολουθία u = 11 01 10 $\overset{\psi^2}{\rightarrow}$ $[\ 1+z_1^2 \quad 1+z_1\ ]$, το αποτέλεσμα υ είναι :

$$\upsilon = \mathrm{u}.G = [\ 1+z_1^3 \quad 1+z_1^3 \quad z_1^2+z_1^3\ ]$$

Αν κάνουμε τον πολυωνυμικό πολλαπλασιασμό : υ = u.G τότε έχουμε ότι :

$$\upsilon = [\ 1+z_1^2 \quad 1+z_1\ ]\ .\ \begin{bmatrix} 1+z_1 & z_1 & 1+z_1 \\ z_1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [\ 1+z_1^3 \quad 1+z_1^3 \quad z_1^2+z_1^3\ ],$$

αφού, $(\ 1+z_1^2\ ).(1+z_1\ ) + (\ 1+z_1\ ).z_1 = 1 + z_1 + z_1^2 + z_1^3 + z_1 + z_1^2 = 1 + z_1^3$,

$(\ 1+z_1^2\ ).z_1 + (\ 1+z_1\ ).\ 1 = z_1 + z_1^3 + 1 + z_1 = 1 + z_1^3$ και

$(\ 1+z_1^2\ ).(1+z_1\ ) + 1 + z_1 = 1 + z_1 + z_1^2 + z_1^3 + 1 + z_1 = z_1^2 + z_1^3$ και οι πράξεις γίνονται στο δυαδικό σύστημα όπου όπως είναι γνωστό ισχύει ότι : 1 + 1 = 0.

Στην περιοχή μετατροπής οι εξισώσεις μπορούν να γραφτούν όπως η εξίσωση υ = u * g. Όταν m = 1, η εξίσωση (2) γράφεται ως εξής :

$$\upsilon_{(i_1)}^{(\psi)} = \sum_{l_1=0}^{1} u_{(i_1-l_1)}^{(\chi)} \cdot g_{\chi\ (l_1)}^{(\psi)},$$

όπου για $1 \leq \chi \leq 2$ και για $1 \leq \psi \leq 3$ έχουμε ότι :

$$\upsilon^{(1)} = u^{(1)} * g_1^{(1)} + u^{(2)} * g_2^{(1)} = ([101] * [11]) + ([110] * [01]) \longrightarrow \left[1001\right]$$

$$\upsilon^{(2)} = u^{(1)} * g_1^{(2)} + u^{(2)} * g_2^{(2)} = ([101] * [01]) + ([110] * [10]) \longrightarrow \left[1001\right]$$

$$\upsilon^{(3)} = u^{(1)} * g_1^{(3)} + u^{(2)} * g_2^{(3)} = ([101] * [11]) + ([110] * [10]) \longrightarrow \left[0011\right]$$

όπου : $u^{(1)} = 101 = 1.1 + 0.\, z_1 + 1.\, z_1^2$

$u^{(2)} = 110 = 1.1 + 1.\, z_1 + 0.\, z_1^2$

$g_1^{(1)} = 11 = 1.1 + 1.\, z_1$

$g_2^{(1)} = g_1^{(2)} = 01 = 0.1 + 1.\, z_1$

$g_2^{(2)} = g_2^{(3)} = 10 = 1.1 + 0.\, z_1$

και $g_1^{(3)} = 11 = 1.1 + 1.\, z_1$

Η πράξη της προσθέσης ορίζεται στο δυαδικό σύστημα, ενώ αυτή του πολλαπλασιασμού τον οποίο αναφέραμε παραπάνω, ορίζεται **<u>μόνο</u>** σε αυτή την περίπτωση (1 – D) με δύο τρόπους :

Α΄ τρόπος : Ως καθαρά αλγεβρικός πολλαπλασιασμός . Δηλαδή καθένα από τα στοιχεία 1001, 1001 και 0011 προκύπτουν μετά από συνδυασμό πολλαπλασιασμού – πρόσθεσης στο δυαδικό σύστημα (θεωρούμε ότι κάθε στοιχείο από τα 101, 110, 01, 10, 11 είναι κανονικός αριθμός) ο οποίος εκτελείται ως εξής :

$$([101] * [11]) + ([110] * [01]) \longrightarrow \left[1001\right]$$

$$([101] * [01]) + ([110] * [10]) \longrightarrow \left[1001\right]$$

και $([101] * [11]) + ([110] * [10]) \longrightarrow \left[0011\right]$

Β΄ τρόπος : Πολλαπλασιάζοντας (ας πούμε για το στοιχείο $\upsilon^{(1)} \longrightarrow 1001$) και πάλι αλγεβρικά κάθε συντελεστή του 101 (δηλαδή τα 1, 0 και 1) με κάθε συντελεστή του 11 (δηλαδή τα 1 και 1) και αθροίζοντας ταυτόχρονα τους συντελεστές οι οποίοι αναφέρονται στους ίδιους όρους (πρόσθεση μέσα στον πολλαπλασιασμό).

Κάνοντας το ίδιο με τους συντελεστές των 110 και 01 και αθροίζοντας τα αποτελέσματα τα οποία παίρνουμε από κάθε περίπτωση παίρνουμε σαν αποτέλεσμα το στοιχείο $\upsilon^{(1)} \rightarrow [1001] = 1.1 + 0.z_1 + 0.z_1^2 + 1.z_1^3$.

Δηλαδή το στοιχείο $\upsilon^{(1)} = [1001] = 1.1 + 0.z_1 + 0.z_1^2 + 1.z_1^3$ προκύπτει ως εξής :

<u>Βήμα 1</u> : Ο συντελεστής του σταθερού όρου στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ = [101] * [11] προκύπτει με πολλαπλασιασμό των συντελεστών των σταθερών όρων των στοιχείων $u^{(1)}$ (που είναι το 1) και $g_1^{(1)}$(που είναι πάλι το 1). Έτσι επειδή 1.1 = 1 στο δυαδικό σύστημα έχουμε ότι ο συντελεστής του σταθερού όρου του γινομένου $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ είναι το 1. Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ = [110] * [01] προκύπτει ότι ο συντελεστής του σταθερού όρου του είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε (πάντα στο δυαδικό σύστημα) αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (1 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του σταθερού όρου του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 1 (1 + 0 = 1).

<u>Βήμα 2</u> : Ο συντελεστής του z_1 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ = [101] * [11] προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του σταθερού όρου του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του z_1 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 1), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 1.1 = 1, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του σταθερού όρου της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του z_1 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.1 = 0. Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (1 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_1 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 1 (1 + 0 = 1). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ = [110] * [01] προκύπτει ότι ο συντελεστής του z_1 θα είναι το 1.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (1 και 1) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_1 του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (1 + 1 = 0).

<u>Βήμα 3</u> : Ο συντελεστής του z_1^2 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ = [101] * [11] προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_1^2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του σταθερού όρου της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 1), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 1.1 = 1, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_1 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_1 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 1), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.1 = 0. Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (1 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_1^2 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 1 (1 + 0 = 1). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ = [110] * [01] προκύπτει ότι ο συντελεστής του z_1^2 θα είναι το 1.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (1 και 1) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_1^2 του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (1 + 1 = 0).

<u>Βήμα 4</u> : Ο συντελεστής του z_1^3 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ = [101] * [11] προκύπτει με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_1^2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του z_1 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 1), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 1.1 =1. Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ = [110] * [01] προκύπτει ότι ο συντελεστής του z_1^3 θα είναι το 0. Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (1 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_1^3 του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 1 (1 + 0 = 1).

Τέλος βάζοντας με τη σειρά τους συντελεστές του σταθερού όρου, του z_1, του z_1^2 και του z_1^3 τον έναν δίπλα στον άλλο προκύπτει το στοιχείο :

$$\upsilon^{(1)} \longrightarrow [1001] = 1.1 + 0.\,z_1 + 0.\,z_1^2 + 1.\,z_1^3.$$

Ανάλογα προκύπτουν και τα στοιχεία $\upsilon^{(2)} \longrightarrow 1001$ και $\upsilon^{(3)} \longrightarrow 0011$ αντιστοίχως.

Η ακολουθία εισόδου u Є S^2 και η έξοδος της συνέλιξης υ Є S^3.

Η αναπαράσταση του χώρου ακολουθιών του υ πετυχαίνεται χρησιμοποιώντας τα $\upsilon^{(1)}$, $\upsilon^{(2)}$ και $\upsilon^{(3)}$ ως εξής :

$$\upsilon = 110\ \ 000\ \ 001\ \ 111 \xrightarrow{\psi^3} [\ 1 + z_1^3 \quad 1 + z_1^3 \quad z_1^2 + z_1^3\ ]$$

Δηλαδή βάζουμε με τη σειρά όλους τους συντελεστές των $\upsilon^{(1)}$, $\upsilon^{(2)}$ και $\upsilon^{(3)}$ που αντιστοιχούν στον σταθερό όρο, στο z_1, στο z_1^2 και στο z_1^3, τον έναν δίπλα στον άλλο (εξαρτάται κάθε φορά πόσες μεταβλητές z_i έχουμε και μέχρι ποια δύναμη φτάνει κάθε μια από αυτές). Οι στήλες του πίνακα υ = [110 000 001 111] είναι ίσες με το μέγιστο βαθμό που μπορεί να πάρει το z_1 συν μιας, ενώ ο πίνακας έχει όπως βλέπουμε **<u>μόνο</u>** μία γραμμή αφού δεν έχουμε άλλη μεταβλητή (ουσιαστικά έχουμε την μεταβλητή z_2^0 = 1, άρα θα έχουμε τόσες γραμμές όσος είναι ο μέγιστος βαθμός που μπορεί να πάρει το z_2 συν μιας, δηλαδή μία). Ο μέγιστος βαθμός που μπορεί να πάρει το z_1 είναι το 3, αφού αν πολλαπλασιαστεί ένας συντελεστής του z_1 της $g_1^{(1)}$ ή της $g_2^{(1)}$ με έναν συντελεστή του z_1^2 από του $u^{(1)}$ ή του $u^{(2)}$) παίρνουμε έναν συντελεστή του z_1^3. Επίσης το μήκος κάθε στοιχείου του πίνακα θα είναι ίσο με το n (στήλες του πολυωνυμικού πίνακα). Για αυτό το λόγο ο πίνακας υ = [110 000 001 111] είναι ένας 1 x 4 πίνακας.

Παράδειγμα 2.4 : Θεωρούμε ένα πολυωνυμικό διάνυσμα u(z_1 , z_2) Є R^2, όπου $R = \mathbb{F}_2[\, z_1 , z_2 \,]$ και u = $[\, 1 + z_1 z_2 \quad z_2^2 \,]$.

Έστω πίνακας G Є $R^{2\,x\,6}$, ο οποίος δίνεται παρακάτω :

$$G = \begin{bmatrix} z_1^2 z_2 & 0 & z_2 & z_1^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 + z_1^2 z_2 & 0 & z_1 z_2 & z_1 & 1 + z_1^2 + z_2 \end{bmatrix}$$

Το αποτέλεσμα $\upsilon = \mathrm{u}.G$ μας δίνει την μετατροπή υ (z_1, z_2) Є R^6 που φαίνεται παρακάτω :

$$\upsilon = \begin{pmatrix} z_1^2 z_2 + z_1^3 z_2^2 \\ z_2^2 + z_1^2 z_2^3 \\ z_2 + z_1 z_2^2 \\ z_1^2 + z_1^3 z_2 + z_1 z_2^3 \\ 1 + z_1 z_2 + z_1 z_2^2 \\ z_2^2 + z_1^2 z_2^2 + z_2^3 \end{pmatrix}^{T}$$

Για την ακολουθία εισόδου u Є R^2 έχουμε :

$$\begin{array}{ccc} R^2 & & S^2 \\ [\, 1 + z_1 z_2 \quad z_2^2 \,] & \xrightarrow{\psi^{-1}} & \begin{bmatrix} 10 & 00 \\ 00 & 10 \\ 01 & 00 \end{bmatrix} \end{array}$$

όπου $u^{(1)} \rightarrow \begin{matrix} 10 \\ 01 \\ 00 \end{matrix}$ και $u^{(2)} \rightarrow \begin{matrix} 00 \\ 00 \\ 10 \end{matrix}$.

Τα $u^{(1)}$ και $u^{(2)}$ προκύπτουν ως εξής :

Τοποθετούμε την πρώτη και την τρίτη στήλη του πίνακα $\begin{bmatrix} 10 & 00 \\ 00 & 10 \\ 01 & 00 \end{bmatrix}$ την μια δίπλα στην άλλη οπότε παίρνουμε το $u^{(1)} \rightarrow \begin{matrix} 10 \\ 01 \\ 00 \end{matrix}$ (δηλαδή την πρώτη στήλη του u) και τοποθετώντας την δεύτερη και την τέταρτη στήλη του ίδιου πίνακα την μια δίπλα στην άλλη παίρνουμε το $u^{(2)} \rightarrow \begin{matrix} 00 \\ 00 \\ 10 \end{matrix}$ (δηλαδή την δεύτερη στήλη του u).

Για το $u^{(1)}$ το στοιχείο 1 (πρώτη γραμμή – πρώτη στήλη) αντιστοιχεί στον σταθερό όρο, το στοιχείο 0 (πρώτη γραμμή – δεύτερη στήλη) αντιστοιχεί στον συντελεστή της μεταβλητής z_1, το στοιχείο 0 (δεύτερη γραμμή – πρώτη στήλη) αντιστοιχεί στον συντελεστή της μεταβλητής z_2, το στοιχείο 1 (δεύτερη γραμμή – δεύτερη στήλη) αντιστοιχεί στον συντελεστή του γινομένου $z_1 z_2$, το στοιχείο 0 (τρίτη γραμμή – πρώτη στήλη) αντιστοιχεί στον συντελεστή της μεταβλητής z_2^2 και το στοιχείο 0 (τρίτη γραμμή – δεύτερη στήλη) αντιστοιχεί στον συντελεστή του γινομένου $z_1\ z_2^2$.

Ανάλογα ισχύει και για το $u^{(2)}$.

Η αναπαράσταση του χώρου ακολουθιών του πίνακα *G* είναι η παρακάτω :

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 000 \\ 001 \end{matrix} & \begin{matrix} 000 \\ 000 \end{matrix} & \begin{matrix} 000 \\ 100 \end{matrix} & \begin{matrix} 001 \\ 000 \end{matrix} & \begin{matrix} 100 \\ 000 \end{matrix} & \begin{matrix} 000 \\ 000 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 000 \\ 000 \end{matrix} & \begin{matrix} 100 \\ 001 \end{matrix} & \begin{matrix} 000 \\ 000 \end{matrix} & \begin{matrix} 000 \\ 010 \end{matrix} & \begin{matrix} 010 \\ 000 \end{matrix} & \begin{matrix} 101 \\ 100 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

με $K_1 = 3$ και $K_2 = 2$.

Κάθε στοιχείο της αναπαράστασης αναφέρεται στο αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα G.

Το στοιχείο $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ αντιστοιχεί στον όρο $z_1^2 z_2$,

το στοιχείο $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ αντιστοιχεί στον όρο 0,

το στοιχείο $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$ αντιστοιχεί στον όρο z_2,

το στοιχείο $\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ αντιστοιχεί στον όρο z_1^2,

το στοιχείο $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ αντιστοιχεί στον σταθερό όρο,

το στοιχείο $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ αντιστοιχεί στον όρο 1 + $z_1^2 z_2$,

το στοιχείο $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$ αντιστοιχεί στον όρο $z_1 z_2$,

το στοιχείο $\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ αντιστοιχεί στον όρο z_1

και το στοιχείο $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$ αντιστοιχεί στον όρο $1 + z_1^2 + z_2$.

Στην περιοχή μετατροπής οι εξισώσεις δίνονται από τον τύπο υ = u * g.

Όταν m = 2, η εξίσωση (2) γράφεται ως εξής :

$$\upsilon^{(\psi)}_{(i_1, \iota_2)} = \sum_{l_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{2} u^{(\chi)}_{((i_1 - l_1), (i_2 - l_2))} \cdot g^{(\psi)}_{\chi(l_1, l_2)}$$

$$S^2$$

10 00
00 10
01 00

*g↓

$$S^6$$

000010 000000 000100 000000

001000 000010 100000 000100

010001 001010 000001 100000

000001 000100 010000 000000

Η πράξη της προσθέσης ορίζεται στο δυαδικό σύστημα, ενώ αυτή του πολλαπλασιασμού τον οποίο αναφέραμε παραπάνω, ορίζεται ως εξής :

Ας μιλήσουμε για το στοιχείο $\upsilon^{(1)} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Κάθε συντελεστής του $u^{(1)} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 \\ 01 \\ 00 \end{bmatrix}$ πολλαπλασιάζεται με κάθε συντελεστή της

$g_1^{(1)} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

και αθροίζονται ταυτόχρονα οι συντελεστές οι οποίοι αναφέρονται στους ίδιους όρους (πρόσθεση μέσα στον πολλαπλασιασμό). Κάνοντας το ίδιο με τους

συντελεστές των $u^{(2)} \rightarrow \begin{bmatrix} 00 \\ 00 \\ 10 \end{bmatrix}$ και $g_2^{(1)} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

και αθροίζοντας τα αποτελέσματα τα οποία παίρνουμε από κάθε περίπτωση παίρνουμε σαν αποτέλεσμα το στοιχείο :

$$\upsilon^{(1)} = u^{(1)} * g_1^{(1)} + u^{(2)} * g_2^{(1)} =$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 01 \\ 00 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 00 \\ 00 \\ 10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή το στοιχείο $\upsilon^{(1)}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(αν θεωρηθεί ως πίνακας) προκύπτει ως εξής :

<u>Βήμα 1</u> : Ο συντελεστής του σταθερού όρου στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει με πολλαπλασιασμό των συντελεστών των σταθερών όρων των στοιχείων $u^{(1)}$ (που είναι το 1) και $g_1^{(1)}$(που είναι το 0). Έτσι επειδή 1.0 =0 έχουμε ότι ο συντελεστής του σταθερού όρου του γινομένου $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ είναι το 0. Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του σταθερού όρου του είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του σταθερού όρου του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (0,0) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 αλλά και του z_2 θα είναι ίσος με το 0).

<u>Βήμα 2</u> : Ο συντελεστής του z_1 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του σταθερού όρου του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του z_1 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 1.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του σταθερού όρου της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_1 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.0 = 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_1 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 0

(0 + 0 = 0). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του z_1 θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_1 του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (1,0) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 θα είναι ίσος με το 1 και του z_2 με το 0).

<u>Βήμα 3</u> : Ο συντελεστής του z_1^2 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του σταθερού όρου του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του z_1^2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 1.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_1 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_1 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.0 = 0. Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_1^2 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του z_1^2 θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_1^2 του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (2,0) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 θα είναι ίσος με το 2 και του z_2 με το 0).

<u>Βήμα 4</u> : Ο συντελεστής του z_1^3 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_1 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_1^2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.0 = 0. Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του z_1^3 θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_1^3 του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (3,0) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 θα είναι ίσος με το 3 και του z_2 με το 0).

Βήμα 5 : Ο συντελεστής του z_2 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του σταθερού όρου του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του z_2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 1.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του σταθερού όρου της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.0 = 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_2 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του του z_2 θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_2 του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (0,1) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 θα είναι ίσος με το 0 και του z_2 με το 1).

Βήμα 6 : Ο συντελεστής του $z_1 z_2$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_1 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_1 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε γινόμενο 0.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του σταθερού όρου του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του $z_1 z_2$ της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε γινόμενο 1.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του $z_1 z_2$ του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του σταθερού όρου της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0) δηλαδή θα έχουμε γινόμενο 0.0 = 0. Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους τέσσερις συντελεστές που βρήκαμε (0, 0, 0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1\ z_2$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 + 0 + 0 = 0). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του $z_1 z_2$ θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1 z_2$ του στοιχείου $v^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (1,1) του $v^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 αλλά και του z_2 θα είναι ίσος με το 1).

<u>Βήμα 7</u> : Ο συντελεστής του $z_1^2 z_2$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_1^2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του $z_1 z_2$ του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του z_1 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 1.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του σταθερού όρου του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του $z_1^2 z_2$ της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 1), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 1.1 = 1. Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους τρεις συντελεστές που βρήκαμε (0, 0 και 1) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1^2 z_2$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 1 (0 + 1 + 0 = 1). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του $z_1^2 z_2$ θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (1 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1^2 z_2$ του στοιχείου $v^{(1)}$ που θα είναι το 1 (1 + 0 = 1) και θα είναι το στοιχείο (2,1) του $v^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 θα είναι ίσος με το 2 και του z_2 με το 1).

Βήμα 8 : Ο συντελεστής του $z_1^3 z_2$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του $z_1 z_2$ του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του z_1^2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 1 . 0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_1 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0), με τον συντελεστή του $z_1^2 z_2$ της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 1), δηλαδή θα έχουμε γινόμενο 0 . 1 = 0. Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1^3 z_2$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του $z_1^3 z_2$ θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1^3 z_2$ του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (3,1) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 θα είναι ίσος με το 3 και του z_2 με το 1).

Βήμα 9 : Ο συντελεστής του z_2^2 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_2^2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του σταθερού όρου της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.0 = 0. Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_2^2 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του z_2^2 θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_2^2 του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (0,2) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 θα είναι ίσος με το 0 και του z_2 με το 2).

Βήμα 10 : Ο συντελεστής του $z_1z_2^2$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_2^2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_1 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_1z_2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε πάλι γινόμενο 0.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_1z_2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του z_2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε γινόμενο 1.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του $z_1z_2^2$ του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του σταθερού όρου της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε γινόμενο 1.0 = 0. Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους τέσσερις συντελεστές που βρήκαμε (0, 0, 0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1z_2^2$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 +0 + 0 = 0). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του $z_1z_2^2$ θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1z_2^2$ του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (1,2) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 θα είναι ίσος με το 1 και του z_2 με το 2).

Βήμα 11 : Ο συντελεστής του $z_1^2z_2^2$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_2^2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_1^2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_1z_2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του z_1z_2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε γινόμενο 1.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του $z_1^2z_2$ της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 1), δηλαδή θα έχουμε γινόμενο 0.1 = 0. Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους τρεις συντελεστές που βρήκαμε (0,0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1^2z_2^2$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 0

(0 + 0 + 0 = 0). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του $z_1^2 z_2^2$ θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1^2 z_2^2$ του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (2,2) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 αλλά και του z_2θα είναι ίσος με το 2).

<u>Βήμα 12</u> : Ο συντελεστής του $z_1^3 z_2^2$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του $z_1 z_2$ του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του $z_1^2 z_2$ της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 1), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 1.1 = 1, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του $z_1 z_2^2$ του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_1^2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.0 = 0. Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δυο συντελεστές που βρήκαμε (1 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1 z_2^2$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 1 (1 + 0 = 0). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του z_2^2 θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (1 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1^3 z_2^2$ του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 1 (1 + 0 = 1) και θα είναι το στοιχείο (3, 2) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 θα είναι ίσος με το 3 και του z_2 με το 2).

<u>Βήμα 13</u> : Ο συντελεστής του z_2^3 στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_2^2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0 . 0 = 0. Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του z_2^3 θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του z_1^3 του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (0,3) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 θα είναι ίσος με το 0 και του z_2 με το 3).

<u>Βήμα 14</u> : Ο συντελεστής του $z_1 z_2^3$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_2^2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του $z_1 z_2$ της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.0 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του $z_1 z_2^2$ του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του z_2 της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε πάλι γινόμενο 0.0 = 0. Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1 z_2^3$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του $z_1 z_2^3$ θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1 z_2^3$ του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (1,3) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 θα είναι ίσος με το 1 και του z_2 με το 3).

<u>Βήμα 15</u> : Ο συντελεστής του $z_1^2 z_2^3$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του z_2^2 του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του $z_1^2 z_2$ της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 1), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.1 = 0, είτε με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του $z_1 z_2^2$ του $u^{(1)}$ (που είναι το 1) με τον συντελεστή του $z_1 z_2$ της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 0), δηλαδή θα έχουμε γινόμενο 1.0 = 0. Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δυο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1 z_2^2$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0). Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του $z_1^2 z_2^3$ θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε το συντελεστή του $z_1^2 z_2^3$ του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (2,3) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 θα είναι ίσος με το 2 και του z_2 με το 3).

<u>Βήμα 16</u> : Ο συντελεστής του $z_1^3 z_2^3$ στο γινόμενο $u^{(1)} * g_1^{(1)}$ προκύπτει μόνο με πολλαπλασιασμό του συντελεστή του $z_1 z_2^2$ του $u^{(1)}$ (που είναι το 0) με τον συντελεστή του $z_1^2 z_2$ της $g_1^{(1)}$ (που είναι το 1), δηλαδή θα έχουμε το γινόμενο 0.1 = 0. Ανάλογα για το γινόμενο $u^{(2)} * g_2^{(1)}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του $z_1^3 z_2^3$ θα είναι το 0.

Στη συνέχεια αθροίζουμε αυτούς τους δύο συντελεστές που βρήκαμε (0 και 0) και παίρνουμε τον συντελεστή του $z_1^3 z_2^3$ του στοιχείου $\upsilon^{(1)}$ που θα είναι το 0 (0 + 0 = 0) και θα είναι το στοιχείο (3,3) του $\upsilon^{(1)}$, (που σημαίνει ότι ο βαθμός του z_1 αλλά και του z_2θα είναι ίσος με το 3).

Με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε και τα στοιχεία :

$$\upsilon^{(2)} \longrightarrow \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\upsilon^{(3)} \longrightarrow \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\upsilon^{(4)} \longrightarrow \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\upsilon^{(5)} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

και $\upsilon^{(6)} \longrightarrow \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ αντιστοίχως.

Στη συνέχεια βάζουμε με τη σειρά όλους τους συντελεστές των $\upsilon^{(1)}$, $\upsilon^{(2)}$, $\upsilon^{(3)}$, $\upsilon^{(4)}$, $\upsilon^{(5)}$ και $\upsilon^{(6)}$που αντιστοιχούν σε όλους τους συνδυασμούς των γινομένων $z_1^{\chi} z_2^{\psi}$ που προαναφέρθηκαν, (εξαρτάται κάθε φορά πόσες μεταβλητές z_i έχουμε και μέχρι ποια δύναμη φτάνει κάθε μια από αυτές) και έτσι προκύπτει ο 4 x 4 πίνακας :

$$\begin{pmatrix} 000010 & 000000 & 000100 & 000000 \\ 001000 & 000010 & 100000 & 000100 \\ 010001 & 001010 & 000001 & 100000 \\ 000001 & 000100 & 010000 & 000000 \end{pmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας συντελεστών ανήκει στο S^6 και οι στήλες του θα είναι ίσες με το μέγιστο βαθμό που μπορεί να πάρει το z_1 συν μιας, ενώ οι γραμμές του θα είναι ίσες με το μέγιστο βαθμό που μπορεί να πάρει το z_2 συν μιας. Ο μέγιστος βαθμός που μπορεί να πάρει το z_1 είναι το 3, αφού αν πολλαπλασιαστεί ένας συντελεστής του z_1 από το στοιχείο $u^{(1)}$ (ή $u^{(2)}$) με έναν συντελεστή του z_1^2 από το στοιχείο $g_1^{(1)}$ (ή $g_2^{(1)}$) παίρνουμε έναν συντελεστή του z_1^3. Ο μέγιστος βαθμός που μπορεί να πάρει το z_2 είναι το 3, αφού αν πολλαπλασιαστεί ένας συντελεστής του z_2 από το στοιχείο $g_1^{(1)}$ (ή $g_2^{(1)}$) με έναν συντελεστή του z_2^2 από το στοιχείο $u^{(1)}$ (ή $u^{(2)}$) παίρνουμε έναν συντελεστή του z_2^3. Επίσης το μήκος κάθε στοιχείου του πίνακα θα είναι ίσο με το n (στήλες του πολυωνυμικού πίνακα). Για αυτό το λόγο προκύπτει ο παραπάνω 4 x 4 πίνακας.

C. Πρόβλημα Διατύπωσης

Ο μετασχηματισμός από τον δακτύλιο *R* στον m – D χώρο ακολουθιών *S* μπορεί να απεικονισθεί με το ακόλουθο διάγραμμα απεικόνισης :

$$\begin{tikzcd} R^k \arrow[r, "\Phi" above, ".G" below] & R^n \arrow[d, "\downarrow\psi^{n^{-1}}"] \\ S^k \arrow[u, "\psi^{\kappa}\uparrow"] & S^n \arrow[l, "*\,g^{-1}" above, "\varphi^{-1}" below] \end{tikzcd}$$

Η προσπάθειά μας είναι να βρούμε τον αντίστροφο του πολυωνυμικού πίνακα $G_{k\,x\,n}$, κ < n. Ο πίνακας *G* μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας γραμμικός μετασχηματισμός από το R^k στο R^n ($R^k \rightarrow R^n$). Σε όλο το δεύτερο κεφάλαιο χρησιμοποιούμε τον ισομορφισμό ψ^{-1} για να μετατρέψουμε τον πίνακα *G* στην ισοδύναμή του αναπαράσταση *G* στον χώρο ακολουθιών.

Μέχρι τώρα θεωρούσαμε το *G* σαν έναν μετασχηματισμό από το S^k στο S^n ($S^k \rightarrow S^n$), αλλά δεν ξέρουμε την αντίστροφη απεικόνιση. Μια λύση για το g^{-1} στο χώρο ακολουθιών S θα μας δώσει τον G^{-1} στον δακτύλιο *R*. Αυτό γίνεται βρίσκοντας το g^{-1}, χρησιμοποιώντας διακριτή συνέλιξη βασισμένη στην έννοια της ***τοπικής αντιστρεψιμότητας*** και έπειτα επιστρέφοντας πίσω στον δακτύλιο *R* και χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό ψ, παίρνουμε τον n x κ αντίστροφο πολυωνυμικό πίνακα G^{-1}.

3 . ΤΟΠΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΤΗΤΑ

Α. Ένα προς ένα απεικόνιση

Στις αναφορές τους (άρθρα [1], [10] και [11]) οι Bitzer, Vouκ, Dholaκia και Koorapaty ορίζουν μια κλάση από 1 – D κώδικες γνωστή ***<΄΄Τοπικά αντιστρέψιμοι κώδικες συνέλιξης΄΄>*** στην έννοια της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης. Από το παράδειγμα 2.3 βλέπουμε ότι για τον πίνακα $G \in R^{k\,x\,n}$ η λειτουργία της συνέλιξης υ = u * g παράγει n σύμβολα εξόδου για κάθε κ σύμβολα εισόδου. Η αναλογία r = κ/n καλείται ***αναλογία της συνέλιξης***.

Η τεχνική της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης βρίσκει μια σχέση μεταξύ των ακολουθιών εισόδου και εξόδου που περιέχουν τον ίδιο αριθμό συμβόλων. Ξεκινάμε εξηγώντας αυτή την έννοια για την 1 – D περίπτωση (μιας μεταβλητής) και αργότερα θα την επεκτείνουμε στις m – διαστάσεις (m – μεταβλητές). Όταν κ > 1, οι ***ακολουθίες γεννητριών*** αναπαρίστανται με μια σύνθετη μορφή, όπου, για ένα συγκεκριμένο ψ κάθε $g_\chi^{(\psi)}$, χ = 1, … ,κ είναι πολλαπλασιασμένο με μια ενιαία ακολουθία, κ συμβόλων τη φορά.

Η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** αναπαρίσταται ως εξής :

$$\tilde{g} = \{\, g^{(1)}, \dots, g^{(n)} \,\}, \text{ όπου κάθε } g^{(\psi)} \in S^k.$$

Αν K_1 είναι το μήκος της μεγαλύτερης ακολουθίας γεννητριών $g_\chi^{(\psi)}$, τότε το μήκος κάθε ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** $g^{(\psi)}$ είναι τώρα $L_1 = \kappa.K_1$ (3).

Παρατήρηση 3.1 :

Οι ακολουθίες γεννητριών $g_{\chi}^{(\psi)} \in S$ πολλαπλασιάζονται για να διαμορφώσουν τις ***σύνθετες ακολουθίες γεννητριών*** έτσι ώστε η $g^{(\psi)} \in S$ να είναι τώρα σύμφωνη με την αναπαράσταση του χώρου ακολουθιών της ακολουθίας εισόδου u Є S^k.

Όταν οι ***ακολουθίες γεννητριών*** εκφράζονται με σύνθετη μορφή, η συνέλιξη υ = u * g από την εξίσωση (1) για την 1 – D περίπτωση αναπαρίσταται ως εξής :

$$\upsilon^{(1)} = u * g^{(1)}$$
$$\vdots$$
$$\upsilon^{(n)} = u * g^{(n)}$$

Η συνέλιξη u * $g^{(\psi)}$ υπονοεί ότι, ισχύει ότι:

$$\upsilon_{(i_1)}^{(\psi)} = \sum_{l_1=1}^{L_1} u_{(i_1-l_1+k)} \cdot \bar{g}_{(L_1-l_1)}^{(\psi)}, \text{ για κάθε } (i_1) \geq 0 \qquad (4)$$

όπου $u_{(i_1-l_1+k)} \triangleq 0$ για κάθε $i_1 \leq l_1$ και $\bar{g}^{(\psi)}$ είναι η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** που προκύπτει αν αντιστρέψουμε κ σύμβολα τη φορά.

Παράδειγμα 3.1 : Για τον πολυωνυμικό πίνακα $G \in R^{2\,x\,3}$ του παραδείγματος 2.3 με αναπαράσταση χώρου ακολουθιών την παρακάτω :

$$\begin{bmatrix} 11 & 01 & 11 \\ 01 & 10 & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{, έχουμε } K_1 = 2.$$

Η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** επιτυγχάνεται ενώνοντας κ = 2 σύμβολα τη φορά έτσι ώστε να ισχύει $L_1 = \kappa \,.\, K_1 = 4$.

Τότε θα έχουμε ότι : $\tilde{g}$= { 10 11 01 10 11 10 }.

Τα πρώτα στοιχεία 10, 01 ,11 αντιστοιχούν στον σταθερό όρο, ενώ τα δεύτερα στοιχεία 11, 10, 10 αντιστοιχούν στον συντελεστή της μεταβλητής z_1.

Αν στο g αντιστραφούν κ = 2 σύμβολα τη φορά τότε θα έχουμε ότι :

$$\bar{g} = \{\ 11\ \ 10 \quad 10\ \ 01 \quad 10\ 11\ \}.$$

Όταν m = 1, η εξίσωση (4) γράφεται ως εξής :

$$\upsilon_{(i_1)}^{(\psi)} = \sum_{l_1=1}^{4} u_{(i_1 - l_1 + 2)} \cdot \bar{g}_{(4 - l_1)}^{(\psi)}, \text{ όπου}$$

$$\upsilon^{(1)} = \mathrm{u} * g^{(1)} = [11\ 01\ 10] * [10\ 11] \longrightarrow [1001]$$

$$\upsilon^{(2)} = \mathrm{u} * g^{(2)} = [11\ 01\ 10] * [01\ 10] \longrightarrow [1001]$$

$$\upsilon^{(3)} = \mathrm{u} * g^{(3)} = [11\ 01\ 10] * [11\ 10] \longrightarrow [0011].$$

Η αναπαράσταση του χώρου ακολουθιών του υ πετυχαίνεται χρησιμοποιώντας τα $\upsilon^{(1)}$, $\upsilon^{(2)}$ και $\upsilon^{(3)}$ ως εξής :

$$\upsilon = [110\ 000\ 001\ 111]$$

Θεωρούμε την παραγωγή των συμβόλων εξόδου κατά τη διάρκεια της λειτουργίας της συνέλιξης.

Επανάληψη	***Είσοδος***	***Έξοδος***
1	L_1	n
2	L_1 + κ	2n
3	L_1 + 2κ	3n
⋮	⋮	⋮
i	L_1 + (i – 1) κ	i.n

Στην εξίσωση (4), η σχέση $u_{(i_1-l_1+k)} \triangleq 0$ για κάθε $i_1 \leq l_1$ σημαίνει ότι η ακολουθία εισόδου u Є S^k είναι γεμισμένη με μηδενικά. Τα πρώτα L_1 σύμβολα εισόδου παράγουν n σύμβολα εξόδου. Στην επόμενη επανάληψη, κ επιπρόσθετα σύμβολα εισόδου παράγουν άλλα n σύμβολα εξόδου επιπλέον. Αν απαιτήσουμε ο αριθμός των συμβόλων εισόδου να είναι ίσος με αυτόν των συμβόλων εξόδου, τότε παίρνουμε την παρακάτω σχέση :

$$L_1 + (i - 1) . \kappa = i.n$$

από την οποία τελικά προκύπτει η σχέση :

$$i = \frac{L_1 - \kappa}{n - \kappa}$$

Το μέγεθος της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης τότε θα είναι :

$$\omega = i.n = \frac{n(L_1 - \kappa)}{n - \kappa} \qquad (5)$$

<u>Ορισμός 3.1</u> :

Αν οι παράμετροι L_1, n και κ επιλεγούν έτσι ώστε το ω να είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, τότε, αυτό ικανοποιεί τα κριτήρια της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης και έχουμε μια σχέση χώρου ακολουθιών ω συμβόλων εισόδου τα οποία απεικονίζονται σε ω σύμβολα εξόδου.

<u>Παράδειγμα 3.2</u> : Για τον πίνακα $G = [\, 1 + z_1 \quad 1 + z_1 + z_1^2 \,] \xrightarrow{\psi^{-1}} (110 \quad 111)$, έχουμε $\kappa = 1$, $n = 2$, $K_1 = 3$ και $L_1 = \kappa.\, K_1 = 3$.

Η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** είναι η παρακάτω :

$$\tilde{g} = \{\, 110 \quad 111 \,\}.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην εξίσωση (5), παίρνουμε το μέγεθος της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης το οποίο φαίνεται παρακάτω :

$$\omega = \frac{2(3-1)}{2-1} = 4.$$

Για τον πίνακα $G \in R^{2\,x\,3}$ από το παράδειγμα 2.3 έχουμε ότι η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** είναι η παρακάτω :

$$\tilde{g} = \{\ 10\ 11 \quad 01\ \ 10 \quad 11\ \ 10\ \}$$

Εδώ βλέπουμε ότι το μήκος κάθε στοιχείου είναι τόσο όσες είναι οι γραμμές του πίνακα *G*. Στην παραπάνω ***ακολουθία γεννητριών*** έχουμε κ = 2, n = 3 και L_1 = 4. Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην εξίσωση (5), παίρνουμε το μέγεθος της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης το οποίο φαίνεται παρακάτω :

$$\omega = \frac{3(4-2)}{3-2} = 6.$$

Β. Εξαγωγή του πίνακα κωδικοποίησης

Θεωρούμε την απεικόνιση που παράγεται από ένα σύνολο *E* που περιέχει ω τυποποιημένα διανύσματα βάσης. Έστω το σύνολο *E* = { $e_1, \cdots, e_\omega$ } το οποίο ορίζεται ως εξής :

$$\begin{aligned} e_1 &= 100 \cdots 0 \\ e_2 &= 010 \cdots 0 \\ e_3 &= 001 \cdots 0 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ e_\omega &= 000 \cdots 1 \end{aligned}$$

όπου κάθε διάνυσμα $e_r \in S^k$, r = 1, … , ω, είναι διαστάσεων 1 x ω. Η λειτουργία της συνέλιξης

$$\hat{g}_r = e_r * g^{(\psi)}, \ \psi = 1, \cdots, n \qquad (6)$$

μας δίνει μια απεικόνιση εξόδου, όπου κάθε διάνυσμα $\hat{g}_r \in S^n$ είναι διαστάσεων 1 x ω. Ο ω x ω τετραγωνικός πίνακας $\hat{G} = [\ \hat{g}_1, \hat{g}_2, \cdots, \hat{g}_\omega\ ]^T$, μορφοποιείται χρησιμοποιώντας κάθε διάνυσμα $\hat{g}_r$, r = 1, ⋯ , ω, σαν ένα διάνυσμα – γραμμή. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα :

$$\hat{G}_{\omega\, \chi\, \omega} = \begin{pmatrix} g^{(1)}_{L-1} & \cdots & g^{(n)}_{L-1} & & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & & & & \\ g^{(1)}_{L-1-k} & \cdots & g^{(n)}_{L-1-k} & g^{(1)}_{L-1} & \cdots & g^{(n)}_{L-1} & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & g^{(1)}_{L-1} & \cdots & g^{(n)}_{L-1} \\ g^{(1)}_{0} & \cdots & g^{(n)}_{0} & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & g^{(1)}_{0} & \cdots & g^{(n)}_{0} & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & g^{(1)}_{0} & \cdots & g^{(n)}_{0} \end{pmatrix}$$

Σημειώνουμε ότι οι πρώτες n στήλες του πίνακα κωδικοποίησης είναι οι ***σύνθετες ακολουθίες γεννητριών*** που προκύπτουν αντιστρέφοντας κ στοιχεία-κομμάτια τη φορά. Οι επόμενες n στήλες μορφοποιούνται μετατοπίζοντας προς τα κάτω τις ***σύνθετες ακολουθίες γεννητριών*** κατά κ γραμμές και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο. Αυτό γίνεται εξ' αιτίας του γεγονότος ότι ο πίνακας $\hat{G}$ είναι μια ω x ω υποενότητα του ημιάπειρου πίνακα γεννητριών (αρθρο [9]). Έτσι ο πίνακας $\hat{G}$ μπορεί να μορφοποιηθεί με επιθεώρηση χωρίς πραγματικά να εκτελεστεί η λειτουργία της συνέλιξης που καθορίζεται στην εξίσωση (6).

Όταν ο πίνακας $\hat{G}$ είναι κατασκευασμένος από την τυποποιημένη ακολουθία εισαγωγής βάσης, για κάθε u Є S^k, η διακριτή συνέλιξη μπορεί τώρα να αναπαρασταθεί με πολλαπλασιασμό πινάκων όπως θα δείξουμε παρακάτω, θεωρώντας υποακολουθίες $\hat{u}$ μεγέθους 1 x ω και μετατοπίζοντας πέρα από την ακολουθία εισαγωγής u, κ σύμβολα τη φορά. Η σχέση που αναφέραμε πιο πάνω είναι η εξής :

$$\hat{\upsilon} = \hat{u}.\hat{G} \qquad (7)$$

Αν ο πίνακας $\hat{G}$ (ο οποίος ονομάζεται ***πίνακας κωδικοποίησης*** στο άρθρο [1]) είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας *G* λέγεται ***τοπικά αντιστρέψιμος*** (άρθρο [10]) και η αντίστροφη απεικόνιση δίνεται από τη σχέση :

$$\hat{u} = \hat{\upsilon}.\hat{G}^{-1} \qquad (8)$$

Η ακολουθία u δημιουργείται θεωρώντας υποακολουθίες $\hat{\upsilon}$ μεγέθους 1 x ω και μετατοπίζοντας πέρα από την ακολουθία υ, n σύμβολα τη φορά.

Παράδειγμα 3.3 : Για τον πολυωνυμικό πίνακα G = [1 + z_1 1 + $z_1 + z_1^2$] από το παράδειγμα 3.2, έχουμε ότι $\tilde{g}$ = { 110 111 } και μέγεθος της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης ω = 4. Τώρα η εξίσωση (6) μας δίνει το μετασχηματισμό :

$$\underset{1000}{e_1} \overset{*\tilde{g}}{\rightarrow} \underset{01\ \ 00}{\hat{g}_1} \qquad \underset{0100}{e_2} \overset{*\tilde{g}}{\rightarrow} \underset{11\ \ 01}{\hat{g}_2}$$

$$\underset{0010}{e_3} \overset{*\tilde{g}}{\rightarrow} \underset{11\ \ 11}{\hat{g}_3} \qquad \underset{0010}{e_4} \overset{*\tilde{g}}{\rightarrow} \underset{00\ \ 11}{\hat{g}_4}$$

Ο πίνακας κωδικοποίησης $\hat{G}$ διαμορφώνεται χρησιμοποιώντας κάθε διάνυσμα $\hat{g}_r$, r = 1, ⋯ ,4 ,σαν ένα διάνυσμα – γραμμή. Έτσι έχω τον παρακάτω πίνακα :

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \\ \hat{g}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1 \end{pmatrix}$$

Για το διάνυσμα $\hat{u}$ = 1011 Є S^1 οι εξισώσεις (7) και (8) μας δίνουν :

$$\hat{v} = \hat{u}.\hat{G} = [\ 1\ 0\ 1\ 1].\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [1\ 0\ 0\ 0\ ] \qquad \text{και}$$

$$\hat{u} = \hat{v}.\hat{G}^{-1} = [\ 1\ 0\ 0\ 0\ ].\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [1\ 0\ \ 1\ 1\ ]$$

Αν ο ω x ω πίνακας $\widehat{G}$ είναι μη ιδιάζων, δηλαδή η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός, τότε ο αντίστροφός του βρίσκεται με στοιχειώδεις διαδικασίες σειρών

(γραμμοπράξεις).

Δηλαδή ο πίνακας :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

προκύπτει από τον πίνακα :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ως εξής :

Τοποθετούμε δίπλα στον παραπάνω πίνακα τον μοναδιαίο και εφαρμόζουμε τη μέθοδο Newton.

Έτσι παίρνω τον παρακάτω πίνακα (επαυξημένος)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Προσθέτω την δεύτερη γραμμή στην πρώτη για να κανω το στοιχείο (1,1) του πίνακα μονάδα. Έτσι παίρνω τον πίνακα

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Έπειτα μηδενίζω τα υπόλοιπα στοιχεία, εκτός του (1,1) της πρώτης στήλης και γραμμής του πίνακα ως εξής :

Προσθέτω την τρίτη γραμμή στην δεύτερη οπότε παίρνω τον παρακάτω πίνακα :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

όπου φαίνεται ότι μηδενίζεται το στοιχείο (2,1) του πίνακα και μετά προσθέτω την πρώτη γραμμή στην τρίτη οπότε παίρνω τον παρακάτω πίνακα :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

όπου φαίνεται ότι μηδενίζεται το στοιχείο (3,1) του πίνακα. Τα στοιχεία (4,1), (1,2), (1,3), είναι ήδη 0, άρα μένει να μηδενίσουμε το στοιχείο (1,4) του πίνακα. Αυτό το επιτυγχάνουμε ως εξής :

Προσθέτουμε την δεύτερη γραμμή στην πρώτη οπότε παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

και έπειτα προσθέτουμε την τέταρτη γραμμή στην πρώτη οπότε παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Στη συνέχεια κάνουμε το στοιχείο (2,2) του πίνακα μονάδα ως εξής :

Προσθέτουμε την τρίτη γραμμή στη δεύτερη οπότε παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Έπειτα μηδενίζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της δεύτερης στήλης και γραμμής του πίνακα ως εξής :

Επειδή τα στοιχεία (2,1), (2,3), (2,4), (1,2) και (4,2) είναι ήδη 0, αρκεί να προσθέσουμε τη δεύτερη γραμμή στην τρίτη οπότε το μηδενίζεται το στοιχείο (3,2) του πίνακα όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα που παίρνουμε :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Επόμενο βήμα είναι να κάνουμε το στοιχείο (3,3) του πίνακα μονάδα, αλλά επειδή είναι ήδη μονάδα θέλουμε να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της τρίτης στήλης και γραμμής του πίνακα ως εξής :

Επειδή τα στοιχεία (3,1), (3,2), (3,4), (1,3) και (2,3) είναι ήδη 0, αρκεί να προσθέσουμε την τρίτη γραμμή στην τέταρτη οπότε το μηδενίζεται το στοιχείο (4,3) του πίνακα όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα που παίρνουμε :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Τελευταίο βήμα είναι να κάνουμε το στοιχείο (4,4) του πίνακα μονάδα, αλλά επειδή είναι ήδη μονάδα θέλουμε να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της τέταρτης στήλης και γραμμής του πίνακα που επειδή και αυτά θα είναι αναγκαστικά 0 σύμφωνα με τη μέθοδο που ακολουθήσαμε και έχουμε σχηματίσει τον μοναδιαίο πίνακα στο αριστερό μέρος του επαυξημένου πίνακα όπως φαίνεται παραπάνω, βρίσκουμε ότι ο αντίστροφος του πίνακα :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι ο παρακάτω πίνακας :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ όπως τον θέλαμε.

Η ακολουθία $\hat{\upsilon} = \hat{u}.\hat{G}$ = 10 00 αποτελεί μόνο ένα μέρος της ακολουθίας εξόδου

υ = u * g = 11 11 ***10 00*** 10 01. Η εξ'ολοκλήρου ακολουθία εξόδου μπορεί να επιτευχθεί γεμίζοντας το $\hat{u}$ με μηδενικά (δεξιά και αριστερά) και πολλαπλασιάζοντας με τον πίνακα $\hat{G}$ υποακολουθίες μεγέθους 1 x ω μετατοπίζοντας κ σύμβολα τη φορά όπως φαίνεται παρακάτω :

Για $\hat{u}$ = 1011 ≅ 00<u>1011</u>00 έχουμε ότι

u		υ
0010		1111
0101		1110
1011	$\xrightarrow{.\hat{G}}$	1000
0110		0010
1100		1001

και έτσι θα έχουμε ότι :

00101100 ⟶ 11 11 10 00 10 01

Η διακριτή συνέλιξη που πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας την λειτουργία $\hat{u}.\hat{G}$ οδηγεί σε μια ω – n επικάλυψη συμβόλων στην ακολουθία εξόδου υ. Αυτό συμβαίνει γιατί ω – κ σύμβολα από το u αναγνωρίζονται με κάθε μετατόπιση των κ συμβόλων πέρα από την ακολουθία εισαγωγής u.

Η αντίστροφη απεικόνιση πετυχαίνεται θεωρώντας υποακολουθίες του υ μεγέθους 1 x ω και πολλαπλασιάζοντάς τες με τον πίνακα $\hat{G}^{-1}$ μετατοπίζοντας n σύμβολα τη φορά.

Δηλαδή έχω ότι :

υ		u
1111		0010
1110		0101
1000	$\xrightarrow{.\hat{G}^{-1}}$	1011
0010		0110
1001		1100

και έτσι θα έχουμε ότι :

$$11 \quad 11 \quad 10 \quad 00 \quad 10 \quad 01 \longrightarrow \quad 00101100$$

Η ω – κ επικάλυψη συμβόλων στην ακολουθία u οφείλεται στο γεγονός ότι ω – n σύμβολα του υ αναγνωρίζονται με κάθε μετατόπιση n συμβόλων κατά τη διάρκεια της λειτουργίας $\hat{u} = \hat{\upsilon}.\hat{G}^{-1}$.

C. Εξαγωγή του αντιστρόφου

Το αντιμεταθετικό διάγραμμα που δείξαμε στο κεφάλαιο 2 – C της εργασίας μπορεί τώρα να αντιμετωπιστεί χρησιμοποιώντας τον ***πίνακα κωδικοποίησης*** $\hat{G}$ ως εξής :

$$\begin{tikzcd} R^k \arrow[r, ".G"] & R^n \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\ S^k \arrow[u, "\psi"] & S^n \arrow[l, "\hat{G}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Σημειώνουμε ότι ο μετασχηματισμός από $S^n \rightarrow S^k$ πραγματοποιείται τώρα χρησιμοποιώντας τον πίνακα $\hat{G}^{-1}$ αντί της ***αντίστροφης ακολουθίας γεννητριών*** $\tilde{g}^{-1}$. Από την απεικόνιση φ : $S^k \rightarrow S^n$, φαίνεται ότι κάθε γραμμή του πίνακα $\hat{G}$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία που ανήκει στο S^n. Επειδή $\hat{G}.\,\hat{G}^{-1} = I$, κάθε στήλη $\hat{g}_r^{-1}$ του πίνακα $\hat{G}^{-1} = [\ \hat{g}_1^{-1}, \dots, \hat{g}_\omega^{-1}\ ]$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία που ανήκει στο S^n. Από τον ορισμό της διακριτής συνέλιξης βλέπουμε ότι μια από τις ακολουθίες αντιστρέφεται. Σημειώνουμε επίσης ότι κάθε γραμμή του πίνακα $\hat{G}$ έχει στοιχεία από το g αντίστροφα διατεταγμένα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα 3.3.

Έτσι οι στήλες του πίνακα $\hat{G}^{-1}$ θα είναι επίσης πεπερασμένες ακολουθίες που ανήκουν στο S^n και αντίστροφα διατεταγμένες. Κατά τη διάρκεια της λειτουργίας $\hat{u} = \hat{v}.\hat{G}^{-1}$, παρατηρούμε από τα στοιχεία επικάλυψης στο προηγούμενο παράδειγμα ότι οι πρώτες ω – κ στήλες $\hat{g}_1^{-1}, \dots, \hat{g}_{\omega-k}^{-1}$ του πίνακα $\hat{G}^{-1}$ παράγουν μπροστινές μετατοπίσεις κατά μήκος του i-οστού άξονα στο S^k και αντιστοιχούν σε πολλαπλασιασμό με το $z_1^{i_1}$ στον δακτύλιο R^k. Μόνο οι τελευταίες κ στήλες του πίνακα $\hat{G}^{-1}$ παράγουν νέα σύμβολα και επομένως αντιπροσωπεύουν την αντίστροφη ακολουθία γεννητριών g^{-1}. Αυτές οι κ στήλες $\hat{g}_{\omega-k+1}^{-1}, \dots, \hat{g}_\omega^{-1}$, αντιστοιχούν στα στοιχεία $e_k, \dots, e_1$ της τυποποιημένης βάσης E. Αφού ο πίνακας $\hat{G}^{-1}$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός ($S^n \rightarrow S^k$) και ψ είναι ένας ισομορφισμός από $S \rightarrow R$, η πολυωνυμική αναπαράσταση αυτών των στηλών του πίνακα $\widehat{G}^{-1}$ θα μας δώσει τον πίνακα G^{-1} που είναι προφανώς ο αντίστροφος του πολυωνυμικού πίνακα G.

Παράδειγμα 3.4 : Από το προηγούμενο παράδειγμα 3.3 ο αντίστροφος πίνακας του ***πίνακα κωδικοποίησης*** $\widehat{G}$ είναι ο παρακάτω :

$$\widehat{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Κάθε στήλη του $\widehat{G}^{-1}$ είναι μια αντίστροφη ακολουθία που ανήκει στο S^2. Αφού κ =1, η στήλη $\widehat{g}_4^{-1}$ αντιστοιχεί στο διάνυσμα e_1 και ισχύει ότι : $\widehat{g}_4^{-1} \longrightarrow 1001$.

Αντιστρέφωντας n = 2 σύμβολα τη φορά παίρνουμε την ***αντίστροφη σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** $\tilde{g}^{-1}$.

Έχουμε λοιπόν ότι : $\tilde{g}^{-1} = \{\ 01\ \ 10\ \} \xrightarrow{\psi^2} \begin{bmatrix} z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = G^{-1}$, δηλαδή ισχύει ότι :

$$[\ 1 + z_1 \quad 1 + z_1 + z_1^2\ ] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\ 1\ ].$$

Η ακολουθία $\tilde{g}^{-1} = \{\ 01\ \ 10\ \}$ αντιστοιχεί στον πίνακα $[\ 1 + z_1 \quad 1 + z_1 + z_1^2\ ]$ και επειδή σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι κ = 1, για αυτό παίρνουμε με τον παραπάνω πολλαπλασιασμό τον 1 x 1 πίνακα [1] που αντιστοιχεί στον μοναδιαίο πίνακα για την περίπτωση της μιας μεταβλητής.

Όπως αναφέρεται παραπάνω, οι πρώτες ω – κ στήλες του πίνακα $\widehat{G}^{-1}$ παράγουν μπροστινές μετατοπίσεις κατά μήκος του i – οστού άξονα στο S^1 και αντιστοιχούν σε πολλαπλασιασμό με το $z_1^{i_1}$ στον δακτύλιο R^1.

Αν για $\hat{g}_4^{-1}$ παίρναμε την τρίτη στήλη του πίνακα $\hat{G}^{-1}$, δηλαδή $\hat{g}_4^{-1} \longrightarrow$ 1011, τότε αντιστρέφωντας n = 2 σύμβολα τη φορά, όπως κάναμε προηγουμένως, έχουμε ότι :

$$\tilde{g}^{-1} = \{\, 11 \;\; 10 \,\} \xrightarrow{\psi^2} \begin{bmatrix} 1+z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και
$$[\, 1+ z_1 \quad 1+ z_1 + z_1^2 \,] \,.\, \begin{bmatrix} 1+z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\, z_1 \,] \,.$$

Αν για $\hat{g}_4^{-1}$ παίρναμε τη δεύτερη στήλη του πίνακα $\hat{G}^{-1}$, δηλαδή $\hat{g}_4^{-1} \longrightarrow$ 0011, τότε κάνοντας ακριβώς την ίδια δουλειά όπως πριν, θα έχουμε σαν αποτέλεσμα το παρακάτω :

$$\tilde{g}^{-1} = \{\, 11 \;\; 00 \,\} \xrightarrow{\psi^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και
$$[\, 1+ z_1 \quad 1+ z_1 + z_1^2 \,] \,.\, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\, z_1^2 \,]$$

Τέλος, αν για $\hat{g}_4^{-1}$ παίρναμε την πρώτη στήλη του πίνακα $\hat{G}^{-1}$, δηλαδή $\hat{g}_4^{-1} \longrightarrow$ 1100, τότε όμοια με πριν θα έχουμε ότι :

$$\tilde{g}^{-1} = \{\, 00 \;\; 11 \,\} \xrightarrow{\psi^2} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

$$[\, 1+ z_1 \quad 1+ z_1 + z_1^2 \,] \,.\, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = [\, z_1^3 \,] \,.$$

Άρα βλέπουμε ότι στην περίπτωση της μιας μεταβλητής εκτός από τον μοναδιαίο πίνακα παίρνουμε και γινόμενα του ίδιου πίνακα με δυνάμεις της μεταβλητής z_1, δηλαδή έχουμε περισσότερες πληροφορίες, ανάλογα βέβαια τη στήλη του πίνακα $\hat{G}^{-1}$ που θα επιλέξουμε.

<u>Παράδειγμα 3.5</u> : Για τον πίνακα $G \in R^{2\,x\,3}$ από το παράδειγμα 2.3 έχουμε ότι ω = 6 και τότε ο αντίστροφος πίνακας του ***πίνακα κωδικοποίησης*** $\hat{G}$ είναι ο παρακάτω :

$$\hat{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι στήλες $\hat{g}_5^{-1}$ και $\hat{g}_6^{-1}$ αντιστοιχούν στα διανύσματα e_2 και e_1 και προφανώς ισχύει ότι :

$$\hat{g}_5^{-1} \longrightarrow 000011$$

και $\hat{g}_6^{-1} \longrightarrow 011010.$

Αντιστρέφωντας n = 3 σύμβολα τη φορά παίρνουμε την ***αντίστροφη σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** $\tilde{g}^{-1}$, όπου σε αυτή την περίπτωση θα είναι η παρακάτω :

$$\tilde{g}^{-1} = \begin{Bmatrix} 011 & 000 \\ 010 & 011 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\psi^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1+z_1 \\ 1 & z_1 \end{bmatrix} = G^{-1}$$

και $$\begin{bmatrix} 1+z_1 & z_1 & 1+z_1 \\ z_1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1+z_1 \\ 1 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4 . ΤΟΠΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΤΗΤΑ ΣΕ Μ – ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Α. Δημιουργία του m-D χώρου ακολουθιών

Το μέγεθος ω της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης είναι μια σχέση μεταξύ των ακολουθιών εισόδου και εξόδου που περιέχουν τον ίδιο αριθμό συμβόλων. Για τον πολυωνυμικό δακτύλιο με μια μεταβλητή $R[\ z_1\ ]$ ή αλλιώς τον 1 – D χώρο ακολουθιών, αυτό το μέγεθος μεταφράζει μια μονάδα μήκους. Ας εξετάσουμε τις παραμέτρους που περιλαμβάνονται στον υπολογισμό του ω όπως καθορίζονται στην εξίσωση (5). Έχουμε ότι :

$$\omega = \frac{n(L_1 - k\,)}{n-k}$$

Το μήκος της ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** είναι το L_1, ενώ τα κ και n αντιστοιχούν στον αριθμό των συμβόλων εισόδου και εξόδου που παράχθηκαν κατά την διάρκεια κάθε βήματος της διαδικασίας της συνέλιξης. Τα σύμβολα της ακολουθίας διατάσσονται κατά μήκος του i_1 άξονα μιας και αυτός είναι ο μοναδικός πιθανός άξονας στον 1 – D χώρο και επομένως τα κ και n δηλώνουν μονάδες μήκους. Κατά την επέκταση της έννοιας της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης σε m – διαστάσεις ή σε έναν πολυμεταβλητό πολυωνυμικό δακτύλιο $R[\ z_1, \ldots, z_m\ ]$, είναι επιβεβλημένο να διατηρηθεί αυτή η σχέση κατά μήκος του άξονα κάθε διάστασης. Σημειώνουμε ότι εάν διαμορφώσουμε τη ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** με την παρεμβολή κενών συμβόλων, για παράδειγμα κ σύμβολα κατά μήκος του i_1 άξονα, κατόπιν για τον όρο L, έχουμε τα μήκη L_1 = κ.K_1 και L_2 = K_2, … , L_m = K_m κατά μήκος κάθε μιας από τις m διαστάσεις. Όμως οι όροι κ και n δεν δηλώνουν πλέον μονάδες μήκους. Η αναλογία r = $^{k}/_{n}$ για την m – D συνέλιξη σημαίνει ότι παράγονται n σύμβολα εξόδου για κάθε κ σύμβολα εισόδου χωρίς να διευκρινίζεται η διαταξή τους στον m – D χώρο.

Ο χώρος ακολουθιών S ορίζεται απλά σαν να έχει πεπερασμένη υποστήριξη με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ που συνδέονται με τις συντεταγμένες ($i_1, \ldots, i_m$) του δικτυωτού πλέγματος των ακέραιων αριθμών $\mathbb{N}^m$. Στη τρέχουσα βιβλιογραφία (άρθρα [4], [8] και [12]), για παράδειγμα για έναν 2 – D χώρο ακολουθιών, μια ακολουθία S^k δημιουργείται πάντοτε χρησιμοποιώντας κ σύμβολα κατά μήκος του i_1 άξονα και 1 σύμβολο κατά μήκος του i_2 άξονα.

Εφ' όσον ο χώρος ακολουθιών S είναι ένα γραμμικό αμετάβλητο σύστημα μετατόπισης και οι διαδικασίες στο S είναι σύμβολα σαφώς γραμμικά ανεξάρτητα, η επαναδιάταξη των συμβόλων που συνδέονται με κάθε σημείο του δικτυωτού πλέγματος δεν θα αλλάξει τη δομή της ακολουθίας, εφ' όσον διατηρείται η διάταξη κατά τη διάρκεια του υπολογισμού.

Πρόταση 4.1:

Όταν διευκρινίζεται η m – D αναλογία r της συνέλιξης, η έκφραση :

$$r = k/n = k_1/n_1 \text{ x } k_2/n_2 \text{ x} \ldots \text{x } k_m/n_m \qquad (9)$$

διευκρινίζει την αναλογία της συνέλιξης κατά μήκος των διαστάσεων $i_1, \ldots, i_m$ του m – D χώρου ακολουθιών, και οι τιμές των $k_1, \ldots, k_m$ και των $n_1, \ldots, n_m$ καθορίζουν τη διάταξη των χώρων εισαγωγής και εξαγωγής ακολουθιών.

Όταν είναι κ > 1, η m – D ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** διαμορφώνεται από την αναπαράσταση του χώρου ακολουθιών του πίνακα $G(z_1, \ldots, z_m)$ με την παρεμβολή k_i κενών συμβόλων τη φορά κατά μήκος του i – οστού άξονα. Η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** αναπαρίσταται ως εξής :

$$\tilde{g} = \{ g^{(1)}, \ldots, g^{(n)} \}, \text{ όπου κάθε } g^{(\psi)} \in S^k.$$

Αν K_i είναι το μήκος της μεγαλύτερης ***ακολουθίας γεννητριών*** $g_\chi^{(\psi)}$, τότε το μήκος κάθε ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** $g^{(\psi)}$ είναι τώρα $L_i = \kappa_i . K_i$ (10).

Για την m – D συνέλιξη υ = u * G, η λειτουργία u * $g^{(\psi)}$ υπονοεί ότι για κάθε ($i_1, \ldots, i_m$) ≥ 0, ισχύει ο παρακάτω τύπος :

$$\upsilon^{(\psi)}_{(i_1,\ldots,i_m)} = \sum_{l_m=1}^{L_m} \ldots \sum_{l_1=1}^{L_1} u((i_1 - l_1 - k_1),\ldots,(i_m - l_m - k_m)).\,\bar{g}^{(\psi)}_{((L_1 - l_1),\ldots,(L_m - l_m))} \quad (11)$$

όπου $u((i_1 - l_1 - k_1), \ldots, (i_m - l_m - k_m)) \triangleq 0$ για κάθε $i_r < l_r$ και $\bar{g}^{(\psi)}$ είναι η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** που προκύπτει αντιστρέφωντας $k_1, \ldots, k_m$ σύμβολα τη φορά κατά μήκος των αξόνων $i_1, \ldots, i_m$ αντιστοίχως.

Παράδειγμα 4.1 : Έστω $R = \mathbb{F}_2[z_1, z_2]$. Για τον πολυωνυμικό πίνακα :

$$G(z) = \begin{pmatrix} z_1^2 z_2 & 0 & z_2 & z_1^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1+z_1^2 z_2 & 0 & z_1 z_2 & z_1 & 1+z_1^2+z_2 \end{pmatrix}$$

που ανήκει στο R^{2x6} από το παράδειγμα 2.4, η αναπαράσταση του χώρου ακολουθιών του πίνακα G(z), όπως αυτή ορίστηκε από ισομορφισμό ψ^{-1} είναι η παρακάτω :

$$\begin{pmatrix} 000 & 000 & 000 & 001 & 100 & 000 \\ 001 & 000 & 100 & 000 & 000 & 000 \\ 000 & 100 & 000 & 000 & 010 & 101 \\ 000 & 001 & 000 & 010 & 000 & 100 \end{pmatrix}$$

Αν θεωρήσουμε την αναλογία της συνέλιξης ως εξής : r = $2/6 = 1/2 \; x \; 2/3$ όπως ορίστηκε στην πρόταση 4.1, τότε, η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** του πίνακα G διαμορφώνεται με την παρεμβολή k_1 = 1 κενού συμβόλου κατά μήκος του i_1 και k_2 = 2 κενών συμβόλων κατά μήκος του i_2 άξονα αντιστοίχως.

Έτσι θα έχουμε ότι :

$$\tilde{g} = \left\{ \begin{matrix} 000 & 000 & 000 & 001 & 100 & 000 \\ 000 & 100 & 000 & 000 & 010 & 101 \\ 001 & 000 & 100 & 000 & 000 & 000 \\ 000 & 001 & 000 & 010 & 000 & 100 \end{matrix} \right\}$$

Βλέπουμε ότι το στοιχείο 001 της δεύτερης γραμμής και της πρώτης στήλης της ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** αντικαθίσταται από το στοιχείο 000 της τρίτης γραμμής και της πρώτης στήλης της ίδιας ακολουθίας και αντίστροφα, το στοιχείο 000 της δεύτερης γραμμής και της δεύτερης στήλης της ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** αντικαθίσταται από το στοιχείο 100 της τρίτης γραμμής και της δεύτερης στήλης της $\tilde{g}$ και αντίστροφα και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε την παραπάνω ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών***.

Κατόπιν αντιστρέφονται στην $\tilde{g}$, k_1 = 1 και k_2 = 2 σύμβολα τη φορά κατά μήκος του i_1 και του i_2 άξονα αντιστοίχως για να διαμορφωθεί έτσι η ***αντεστραμμένη σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** :

$$\bar{g} = \left\{ \begin{matrix} 100 & 000 & 001 & 000 & 000 & 000 \\ 000 & 100 & 000 & 010 & 000 & 001 \\ 000 & 000 & 000 & 100 & 001 & 000 \\ 000 & 001 & 000 & 000 & 010 & 101 \end{matrix} \right\}$$

Αν θεωρήσουμε ότι το στοιχείο $\begin{matrix} 000 \\ 000 \end{matrix}$ είναι το στοιχείο της πρώτης γραμμής και της πρώτης στήλης της ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** $\tilde{g}$, τότε αυτό αντιστρέφεται (οπότε παραμένει ως έχει λόγω του ότι αποτελείται μόνο από μηδενικά) και καταλαμβάνει τη θέση (2,1) στην ***αντεστραμμένη σύνθετη ακολουθία γεννητριών***, ενώ το στοιχείο $\begin{matrix} 001 \\ 000 \end{matrix}$ που θα είναι τώρα το στοιχείο της δεύτερης γραμμής και της πρώτης στήλης της ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** $\tilde{g}$, μετά από αντιστροφή θα μας δώσει το στοιχείο $\begin{matrix} 100 \\ 000 \end{matrix}$ το οποίο θα καταλάβει τη θέση (1,1) στην

αντεστραμμένη σύνθετη ακολουθία γεννητριών. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε την παραπάνω ***αντεστραμμένη σύνθετη ακολουθία γεννητριών***.

Τα μήκη της ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** είναι $L_1 = 3$ $και$ $L_2 = 4$. Η αναλογία r = $^1/_2$ x $^2/_3$ επιβάλλει μια διάταξη $k_1\, x\, k_2$ = 1 x 2 στην ακολουθία εισόδου u Є S^2 ως εξής :

$$
\begin{array}{ccccc}
R^2 & & S^2 & & S^2 \\
[\, 1 + z_1 z_2 \quad z_2^2 \,] & \xrightarrow{\psi^{-1}} & \begin{array}{cc} 10 & 00 \\ 00 & 10 \\ 01 & 00 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}
\end{array}
$$

Η 2 – D συνέλιξη υ = u * $\tilde{g}$ μας δίνει τον μετασχηματισμό υ Є S^6, όπου το υ διατάσσεται σαν μια n_1 x n_2 = 2 x 3 ακολουθία εξόδου όπως αυτή ορίζεται από την αναλογία r = $^1/_2$ x $^2/_3$. Όταν m = 2 η εξίσωση (11) γράφεται ως εξής :

$$
\upsilon^{(\psi)}_{(i_1, i_2)} = \sum_{l_2=0}^{3} u_{((\, i_1 - l_1 + 1\,),\ (\, i_2 - l_2 + 2\,))} \cdot \bar{g}^{(\psi)}_{((\,3 - l_1\,),\ (\,4 - l_2\,))}
$$

και έτσι θα έχουμε ότι :

$$
\begin{array}{ccc}
S^2 & & S^6 \\
\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} & \xrightarrow{*\,g} & \begin{array}{cccc} 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 01 & 00 \\ 10 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 10 & 00 \\ 10 & 00 & 00 & 01 \\ 00 & 10 & 00 & 00 \\ 01 & 00 & 00 & 10 \\ 00 & 10 & 00 & 00 \\ 01 & 10 & 01 & 00 \\ 00 & 00 & 01 & 00 \\ 00 & 01 & 00 & 00 \\ 01 & 00 & 00 & 00 \end{array}
\end{array}
$$

Σύμφωνα με τον ισομορφισμό ψ η πολυωνυμική αναπαράσταση της ακολουθίας υ είναι η ίδια με αυτή που προκύπτει από τη σχέση : υ = u . G

Β. Εξαγωγή του πίνακα κωδικοποίησης

Η διάταξη των ακολουθιών σύμφωνα με την πρόταση 4.1 μας δίνει έναν απλό τρόπο για επέκταση της έννοιας της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης στον m – D χώρο χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους :

$$\omega_i = \frac{n_i\,(L_i - k_i)}{n_i - k_i}\,,\ \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{m} \qquad (12)$$

και

$$\omega = \omega_1\, x\ \dots\ x\, \omega_m \qquad (13)$$

Το μέγεθος της m – D <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης ω, υπονοεί ότι ω_i σύμβολα εισόδου απεικονίζονται σε ω_i σύμβολα εξόδου κατά μήκος του i- οστού άξονα του m – D χώρου. Για παράδειγμα έχουμε ορθογώνια (τετράγωνα) διαστάσεων $\omega_1\, x\, \omega_2$ στον 2 – D, κύβους διαστάσεων $\omega_1\, x\, \omega_2\, x\, \omega_3$ στον 3 – D, . . . , υπερκύβους διαστάσεων $\omega_1\, x\ \dots\ x\, \omega_m$ στον m – D χώρο αντίστοιχα. Όμοια με πριν, κάθε ω_i χρειάζεται να είναι θετικός ακέραιος αριθμός.

<u>*Ορισμός 4.1*</u> :

Αν ο πολυμεταβλητός πολυωνυμικός πίνακας G(z) Є $R^{k\,x\,n}$ έχει αναλογία r = k/n, η οποία μπορεί να κατασκευαστεί ως εξής : r = $k_1/n_1\ x \dots x\ k_m/n_m$ έτσι ώστε να ισχύει $n_i > k_i$ σε κάθε διάσταση και το αντίστοιχο L_i να παράγει έναν θετικό ακέραιο αριθμό ω, τότε, αυτό ικανοποιεί τα κριτήτια της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης.

Έστω E αντιπροσωπεύει το σύνολο των ω, m – D τυποποιημένων διανυσμάτων βάσης. Τότε θα έχουμε ότι :

$$E = \{\, e_1, \dots, e_\omega \,\}$$

όπου, κάθε e_r Є S^k είναι μια m – D ακολουθία μεγέθους $\omega_1\, x\ \dots\ x\, \omega_m$.

Η διακριτή m – D συνέλιξη όπως αυτή ορίστηκε στην εξίσωση (11) μας δίνει την απεικόνιση εξόδου :

$$\hat{g}_r = e_r * g^{(\psi)} \qquad (14)$$

όπου, κάθε $\hat{g}_r \in S^n$ είναι μια m – D ακολουθία μεγέθους $\omega_1\, x\, \ldots\, x\, \omega_m$. Αν αυτή η πολυδιάστατη απεικόνιση είναι ένεση, τότε, ο πολυωνυμικός πίνακας G είναι τοπικά αντιστρέψιμος. Ο αντίστροφος του πίνακα G, ο G^{-1}, μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τον πίνακα κωδικοποίησης όπως φαίνεται παρακάτω. Ο πίνακας κωδικοποίησης $\hat{G}$ κατασκευάζεται παίρνοντας κάθε $\hat{g}_r$ και ρυθμίζοντάς το εκ νέου σαν ένα 1 x ω 1 – D διάνυσμα γραμμή για να διαμορφώσουμε μια γραμμή του πίνακα $\hat{G}$, ο οποίος γράφεται ως εξής :

$$\hat{G} = [\ \hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_\omega\ ]^T$$

Αν ο ω x ω πίνακας $\hat{G}$ είναι μη ιδιάζων, τότε, ο αντιστροφός του πίνακας G^{-1} μπορεί να βρεθεί με στοιχειώδεις διαδικασίες σειρών (γραμμοπράξεις). Δεδομένου ότι η διάταξη της ακολουθίας διατηρείται κατά τη διάρκεια της συνέλιξης και των στοιχειωδών διαδικασιών γραμμών η δομή της ακολουθίας διατηρείται. Δεδομένου ότι ο πίνακας $\hat{G}$ κατασκευάζεται από την ακολουθία εισαγωγής της τυποποιημένης βάσης E, για το οποιοδήποτε u $\in S^k$ και υ $\in S^n$ οι μετασχηματισμοί μπορούν τώρα να αντιπροσωπευθούν από τον πολλαπλασιασμό πινάκων που δίνονται στις παρακάτω εξισώσεις :

$$\hat{\upsilon}_{1\,x\,\omega} = \hat{u}_{1\,x\,\omega} \,.\, \hat{G}_{\omega\,x\,\omega} \qquad (15)$$

και

$$\hat{u}_{1\,x\,\omega} = \hat{\upsilon}_{1\,x\,\omega} \,.\, \hat{G}^{-1}_{\omega\,x\,\omega} \qquad (16)$$

Εδώ τα $\hat{u}$ και $\hat{\upsilon}$ είναι m – D υποακολουθίες μεγέθους $\omega_1\, x\, \ldots\, x\, \omega_m$ αντιπροσωπευόμενα σαν 1 – D διανύσματα μεγέθους 1 x ω. Η υποακολουθία $\hat{\upsilon} = \hat{u}.\hat{G}$ αποτελεί μόνο ένα μέρος της ακολουθίας εξόδου υ = u * G. Η πλήρης ακολουθία εξόδου μπορεί να επιτευχθεί θεωρώντας υποακολουθίες του ακολουθίας εισαγωγής u μεγέθους ω και πολλαπλασιάζοντάς τες με τον πίνακα $\hat{G}$ μετατωπίζοντας γύρω από το u, k_i – σύμβολα τη φορά. Η αντίστροφη απεικόνιση πετυχαίνεται θεωρώντας υποακολουθίες του ακολουθίας εξόδου u μεγέθους ω και πολλαπλασιάζοντάς τες με τον πίνακα $\hat{G}^{-1}$ μετατωπίζοντας γύρω από το υ, n_i – σύμβολα τη φορά.

Παρατήρηση 4.1 :

Ο πίνακας κωδικοποίησης $\widehat{G}$ μπορεί να διαμορφωθεί με επιθεώρηση. Δηλαδή δεδομένου ότι η τυποποιημένη βάση χρησιμοποιείται ως ακολουθία εισόδου, οι στήλες του πίνακα $\widehat{G}$ είναι ακριβείς μετατοπίσεις των ***σύνθετων ακολουθιών γεννητριών*** οι οποίες προκύπτουν αντιστρέφοντας k_i – σύμβολα τη φορά σε κάθε διάσταση και παρουσιάζονται ως διανύσματα στηλών.

Ορισμός 4.2 :

Ένας πολυμεταβλητός πολυωνυμικός πίνακας $G(z) \in R^{k \, x \, n}$ ο οποίος ικανοποιεί τα κριτήρια της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης και έχει έναν μη ιδιάζων πίνακα κωδικοποίησης $\widehat{G}_{\omega \, x \, \omega}$ καλείται τοπικά αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα 4.2 : Για τον πίνακα $G(z) \in R^{2 \, x \, 6}$ από το παράδειγμα 4.1 με αναλογία συνέλιξης r = $^2/_6$ = $^1/_2$ x $^2/_3$ έχουμε k_1 = 1, k_2 = 2 και n_1 = 1, n_2 = 3. Τα μήκη της ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** είναι L_1 = 3 και L_2 = 4.

Η εξίσωση (12) μας δίνει:

$$\omega_1 = \frac{2\,(\,3-1\,)}{2-1} = 4 \text{ και } \omega_2 = \frac{3\,(\,4-2\,)}{3-2} = 6.$$

Τώρα έχουμε 4 x 6 σύμβολα εισόδου τα οποία απεικονίζονται σε 4 x 6 σύμβολα εξόδου και το μέγεθος της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης από την εξίσωση (13) είναι ω = 24.

Το σύνολο E = { e_1, . . . , e_{24} } των 24 διανυσμάτων της τυποποιημένης βάσης, μεγέθους 4 x 6 το καθένα, μας δίνει την απεικόνιση εξόδου :

$$e_1 \quad \begin{matrix} 1000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \end{matrix} \quad \overset{*\,g}{\rightarrow} \quad \hat{g}_1 \quad \begin{matrix} 10 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \end{matrix} \qquad e_2 \quad \begin{matrix} 0100 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \end{matrix} \quad \overset{*\,g}{\rightarrow} \quad \hat{g}_2 \quad \begin{matrix} 00 & 10 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \end{matrix}$$

… … … …

$$e_5 \quad \begin{matrix} 0000 \\ 1000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \end{matrix} \quad \overset{*\,g}{\rightarrow} \quad \hat{g}_5 \quad \begin{matrix} 01 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \end{matrix} \qquad e_{24} \quad \begin{matrix} 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0001 \end{matrix} \quad \overset{*\,g}{\rightarrow} \quad \hat{g}_{24} \quad \begin{matrix} 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 01 \\ 00 & 00 \\ 00 & 01 \end{matrix}$$

Κάθε $\hat{g}_r$ είναι μεγέθους 4 x 6 και αναπαρίσταται σαν ένα 1 x 24, 1 – D διάνυσμα – γραμμή και διαμορφώνει μια γραμμή του 24 x 24 πίνακα κωδικοποίησης $\hat{G} = [\ \hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_{24}\ ]^T$ (όπως θα δούμε στο παράρτημα (17)). Εάν ο πίνακας $\hat{G}$ είναι μη ιδιάζων, τότε ο πολυωνυμικός πίνακας $G(\ z_1, z_2\ )$ είναι τοπικά αντιστρέψιμος.

Σημειώνουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με τη χρησιμοποίηση των μετατοπίσεων των ***σύνθετων ακολουθιών γεννητριών*** ως στήλες όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Σε αυτό το σχήμα το → αντιπροσωπεύει μια μετατόπιση κατά μήκος του i_1 άξονα και το ↓ αντιπροσωπεύει μια μετατόπιση κατά μήκος του i_2 άξονα. Όλα τα κενά, → και ↓ πρέπει να θεωρηθούν ως μηδενικά (κενά σύμβολα).

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
1 & 0 & \rightarrow & \rightarrow & 0 & 0 & \rightarrow & \rightarrow & 0 & 0 & \rightarrow & \rightarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
 & & 0 & 0 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
 & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & & & 0 & 1 & & & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & \rightarrow & \rightarrow & 0 & 0 & \rightarrow & \rightarrow & 0 & 0 & \rightarrow & \rightarrow \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & & & 0 & 0 & & & 0 & 1 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & & & 0 & 0 & & & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Σχήμα 1 : Πίνακας Κωδικοποίησης $\hat{G}_{24\ x\ 24}$

C. Εξαγωγή του αντιστρόφου

Η απεικόνιση εξόδου από την εξίσωση (14) παράγει m – D ακολουθίες, (παρουσιασμένες ανωτέρω), μεγέθους $\omega_1\ x\ \ldots\ x\ \omega_m$ με διάταξη $n_1\ x\ \ldots\ x\ n_m$, όπως αυτή ορίστηκε στην πρόταση 4.1. Ο πίνακας $\hat{G}$ κατασκευάζεται με την εκ νέου ρύθμιση αυτών των m – D ακολουθιών ως διανύσματα – γραμμές. Ακριβώς όπως και στην 1 – D περίπτωση κάθε στήλη του πίνακα $\hat{G}^{-1}$ είναι μια αντεστραμμένη m – D ακολουθία που ανήκει στο S^n με διάταξη $n_1\ x\ \ldots\ x\ n_m$.

Οι μετασχηματισμοί που καθορίζονται στις εξισώσεις (15) και (16) οδηγούν σε μια m – D επικάλυψη ακολουθίας, παράγουν δηλαδή μια (ω_i – k_i) επικάλυψη συμβόλων στην ακολουθία εισόδου σε καθεμιά από τις m διαστάσεις. Αυτό οδηγεί σε $\frac{\omega_i}{k_i}$ διαδοχικά μπλοκ επικάλυψης σε κάθε διάσταση και παράγει ένα σύνολο από $\frac{\omega}{k} = \frac{\omega_1}{k_1}$ x...x $\frac{\omega_m}{k_m}$ μπλοκ επικάλυψης στον m – D χώρο ακολουθιών. Επειδή οι ω – κ στήλες του πίνακα $\hat{G}^{-1}$ είναι αρμόδιες για αυτή την επικάλυψη, οι εναπομείναντες κ στήλες παράγουν μη – επικαλυμένα σύμβολα και επομένως αντιστοιχούν στην ***αντίστροφη σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** $\bar{g}^{-1}$.

Σημειώνουμε ότι στην 1 – D περίπτωση λόγω της υπονοούμενης διάταξης της ακολουθίας εισόδου κατά μήκος του άξονα i_1, μόνο οι τελευταίες κ στήλες του πίνακα $\hat{G}^{-1}$ παράγουν τον αντίστροφο πίνακα. Όμως, για έναν πολυμεταβλητό πολυωνυμικό πίνακα με αναλογία συνέλιξης r = $k/_n$, η διάταξη $k_1/_{n_1}\ x \ldots\ x\ k_m/_{n_m}$,

όπου $k_i < n_i$ δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** με αναλογία r = $2/_6$ ενός 2 – D πολυωνυμικού πίνακα μπορεί να διαταχθεί ως εξής : $1/_2$ x $2/_3$ ή ως εξής : $2/_3$ x $1/_2$ η οποία (διάταξη) στη συνέχεια θα επέβαλλε μια διάταξη 1 x 2 ή 2 x 1 στην ακολουθία εισόδου αντίστοιχα.

Επομένως οι στήλες του πίνακα $\hat{G}^{-1}$ που αντιπροσωπεύουν την ***αντίστροφη σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** $\bar{g}^{-1}$ εξαρτώνται από την αρίθμηση της ω_1 x . . . x ω_m ταξινομημένης τυποποιημένης βάσης *E*.

Για το 2 – D παράδειγμά μας έχουμε διαλέξει να αριθμήσουμε την τυποποιημένη βάση σε μια σαφώς αύξουσα διάταξη γραμμών, όπως φαίνεται παρακάτω :

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} \\ e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{17} & e_{18} & e_{19} & e_{20} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \end{matrix}$$

Οι κ στήλες του πίνακα $\hat{G}^{-1}$ που αντιστοιχούν στα στοιχεία της τυποποιημένης βάσης που αντιστοιχούν στη διάταξη $k_1\ x\ \dots\ x\ k_m$ αντιπροσωπεύει την ***αντίστροφη σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** $\bar{g}^{-1}$. Η πολυωνυμική αντιπροσώπευση της $\bar{g}^{-1}$ που χρησιμοποιεί τον ισομορφισμό $\psi^n : S^n \to R^n$ μας δίνει τον αντίστροφο πολυωνυμικό πίνακα $G(z)^{-1}$ έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω σχέση :

$$G(z)\, G(z)^{-1} = I_{k\,x\,k}$$

Οι υπόλοιπες ω – κ στήλες που είναι αρμόδιες για την επικάλυψη, παράγουν τις μπροστινές μετατοπίσεις των k_i στοιχείων κατά μήκος κάθε άξονα της m – D ακολουθίας και αντιστοιχούν σε $\frac{\omega - k}{k}$ ψευδο – αντιστρόφους $G(z)^{-1}_{(d_1,\dots,d_m)}$ στο R. Έτσι ισχύει η παρακάτω σχέση :

$$G(z)\, G(z)^{-1}_{(d_1,\dots,d_m)} = z_1^{d_1} \,...\, z_m^{d_m} I_{k\,x\,k},$$

όπου για κάθε d_i, i = 1, ... , m έχουμε ότι $0 \le d_i \le \frac{\omega_i - k_i}{k_i}$ έτσι ώστε $d_1 + \dots + d_m \ne 0$.

<u>Παράδειγμα 4.3</u> : Για τον πίνακα $G(z) \in R^{2\,x\,6}$ από το παράδειγμα 4.1, κάθε στήλη του πίνακα $\hat{G}^{-1}_{24\,x\,24}$ (όπως φαίνεται στο παράρτημα (18)) είναι μια αντεστραμμένη ακολουθία που ανήκει στο S^6 διατεταγμένη σαν ένα $n_1\ x\ n_2 = 2$ x 3, διάνυσμα – στήλη. Τα στοιχεία e_1 και e_5 αντιστοιχούν στη διάταξη $k_1\ x\ k_2$ = 1 x 2. Οι στήλες του πίνακα οι οποίες αντιστοιχούν στα στοιχεία e_5 και e_1 είναι οι παρακάτω :

$$g_{20}^{-1} \longrightarrow 000000010110011000100010$$

και

$$g_{24}^{-1} \longrightarrow 000000001000000110000000$$

Ρυθμίζοντάς τα εκ νέου ως μια 4 x 6, 2 – D ακολουθία οι στήλες g_{20}^{-1} και g_{24}^{-1} γράφονται ως εξής :

$$g_{20}^{-1} \longrightarrow \begin{matrix} 0000 \\ 0001 \\ 0110 \\ 0110 \\ 0010 \\ 0010 \end{matrix} \quad \text{και} \quad g_{24}^{-1} \longrightarrow \begin{matrix} 0000 \\ 0000 \\ 1000 \\ 0001 \\ 1000 \\ 0000 \end{matrix}$$

Αντιστρέφοντας $n_1 = 2$ και $n_2 = 3$ σύμβολα κατά μήκος των αξόνων i_1 και i_2 αντίστοιχα, παίρνουμε τις παρακάτω στήλες :

$$g_{20}^{-1} \rightarrow \begin{matrix} 0000 \\ 0001 \\ 0110 \\ 0110 \\ 0010 \\ 0010 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 00 & 00 \\ 01 & 00 \\ 10 & 01 \\ 10 & 01 \\ 10 & 00 \\ 10 & 00 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 10 & 01 \\ 10 & 00 \\ 10 & 00 \\ 00 & 00 \\ 01 & 00 \\ 10 & 01 \end{matrix} \xrightarrow{\psi^6} [1 \ z_1 \ 1 \ z_2 \ 1+z_2 \ z_1 z_2]^T$$

και

$$g_{24}^{-1} \rightarrow \begin{matrix} 0000 \\ 0000 \\ 1000 \\ 0001 \\ 1000 \\ 1000 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 10 \\ 01 & 00 \\ 00 & 10 \\ 00 & 00 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 01 & 00 \\ 00 & 10 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 00 \\ 00 & 10 \end{matrix} \xrightarrow{\psi^6} [\,0 \ 1 \ z_1 \ 0 \ z_1 z_2 \ 0\,]^T$$

Επειδή **μόνο** οι στήλες g_{20}^{-1} και g_{24}^{-1} παράγουν τον αντίστροφο του πίνακα $G($ z $)$, τότε, βάζοντας την μια στήλη δίπλα στην άλλη παίρνουμε τον πίνακα :

$$G(\ z\ )^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_1 & 1 \\ 1 & z_1 \\ z_2 & 0 \\ 1+z_2 & z_1 z_2 \\ z_1 z_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι υπόλοιπες ω – κ = 22 στήλες, παράγουν τις μπροστινές μετατοπίσεις των k_i στοιχείων κατά μήκος κάθε άξονα της m – D ακολουθίας S^k και αντιστοιχούν σε $\frac{\omega - k}{k}$ = 11 ψευδο – αντιστρόφους στο *R*. Για παράδειγμα οι στήλες g_{19}^{-1} και g_{23}^{-1} αντιπροσωπεύουν έναν πίνακα $G(\ z\ )^{-1}_{(1,0)}$, έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω σχέση :

$$G(\ z\ )\ G(\ z\ )^{-1}_{(1,0)} = z_1 .\ I_{2\,x\,2}.$$

D. Ποικιλομορφία των διατάξεων της 2 – D ακολουθίας

Ο πίνακας $G_{k\,x\,n}$, όπου, κ < n είναι μη τετράγωνος, έτσι αντίθετα από την περίπτωση του μη ιδιάζωντος πίνακα, που έχει έναν ενιαίο μοναδικό αντίστροφο, ο πίνακας *G* μπορεί να μην έχει αντίστροφο ή αυτός μπορεί να έχει μια πολλαπλότητα από γενικευμένους αντιστρόφους (αρθρα [13] και [14]). Από την πρόταση 4.1 ξέρουμε ότι η διάταξη ${}^{k_1}/_{n_1}\, x \ldots x\, {}^{k_m}/_{n_m}$, όπου $k_i < n_i$ δεν είναι μοναδική, έτσι είναι φυσικό να εξεταστεί η επιλογή της συνέλιξης αναλογίας r = ${}^{2}/_{6} = {}^{1}/_{2}$ x ${}^{2}/_{3}$ στο ανωτέρω παράδειγμα. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί τι συμβαίνει εάν η αναλογία $r = {}^{2}/_{6} = {}^{2}/_{3}$ x ${}^{1}/_{2}$ επιλεγεί διατάσσοντας τη ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών***. Η αναπαράσταση του χώρου ακολουθιών του πίνακα *G* είναι η παρακάτω :

$$\begin{pmatrix} 000 & 000 & 000 & 001 & 100 & 000 \\ 001 & 000 & 100 & 000 & 000 & 000 \\ 000 & 100 & 000 & 000 & 010 & 101 \\ 000 & 001 & 000 & 010 & 000 & 100 \end{pmatrix}$$

Εάν θεωρήσουμε την εξής αναλογία συνέλιξης : r = ${}^{2}/_{6} = {}^{2}/_{3}$ x ${}^{1}/_{2}$, τότε, η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** $\tilde{g}^{-1}$ διαμορφώνεται με την παρεμβολή k_1 = 2 κενών συμβόλων κατά μήκος του i_1 και k_2 = 1 κενού συμβόλου κατά μήκος του άξονα i_2 αντίστοιχα.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα :

$$\begin{Bmatrix} 00\ 00\ 00 & 01\ 00\ 00 & 00\ 00\ 00 & 00\ 00\ 10 & 10\ 01\ 00 & 01\ 00\ 01 \\ 00\ 00\ 10 & 00\ 00\ 01 & 10\ 00\ 00 & 00\ 01\ 00 & 00\ 00\ 00 & 01\ 00\ 00 \end{Bmatrix}$$

Τα μήκη της ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** είναι L_1 = 6 και L_2 = 2. Η εξίσωση (12) μας δίνει ω_1 = 12, ω_2 = 2 και ω = ω_1 x ω_2 = 24. Ο ***πίνακας κωδικοποίησης*** $\hat{G}_{24\,x\,24}$ (βλέπε παράρτημα (19)) κατασκευάζεται από την 2 – D τυποποιημένη βάση E με κάθε e_i να έχει μέγεθος 12 x 2. Σημειώνουμε ότι οι γραμμές 9 και 11 του πίνακα $\hat{G}$ είναι όλες – μηδενικές γραμμές και ως εκ τούτου τον καθιστούν μοναδικό.

Επομένως ο αντίστροφος πολυωνυμικός πίνακας G^{-1} δεν μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας αυτήν την μέθοδο για αναλογία r = $^2/_6$ = $^2/_3$ x $^1/_2$. Εντούτοις, για μερικούς πίνακες G, ο πίνακας κωδικοποίησησης $\hat{G}$ είναι μη ιδιάζων όταν κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας διαφορετικές αναλογίες (βλέπε παράρτημα Β) και ο αντίστροφος πολυωνυμικός πίνακας G^{-1} που λαμβάνεται για κάθε αναλογία δεν χρειάζεται να είναι μοναδικός.

<u>Παράρτημα :</u>

A. *Αναλογία συνέλιξης* $r = {}^{2}/_{6} = {}^{1}/_{2}\ x\ {}^{2}/_{3}$

Ο πίνακας κωδικοποίησης $\hat{G} = [\ \hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_{24}\ ]^T$ ο οποίος κατασκευάστηκε από την 2 – D τυποποιημένη βάση *E*, είναι ο παρακάτω :

$$\hat{G}_{24\,x\,24} = \begin{pmatrix} 100000000000000000000000 \\ 001000000000000000000000 \\ 000010000000000000000000 \\ 000000100000000000000000 \\ 010000000000000000000000 \\ 001010000000000000000000 \\ 000000010100000000000000 \\ 000000000001000000000000 \\ 000000000000000001000000 \\ 000000000000000000001000 \\ 000000000000000000000010 \\ 000000000000000000000001 \\ 000000000000000000000100 \\ 000000000000000000001001 \\ 000000000000010000000110 \\ 000000000000000100000001 \\ 000001000000100000000000 \\ 000000010000001000000000 \\ 000000001000000010000000 \\ 000000000010000000100000 \\ 000000000100010000000000 \\ 000000001001000101000000 \\ 010000000110000000101000 \\ 000100000001000000000001 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Ο αντίστροφος του πίνακα κωδικοποίησης είναι ο παρακάτω :

$$\hat{G}^{-1}_{24\,x\,24} = \begin{pmatrix} 100000000000000000000000 \\ 000010000000000000000000 \\ 010000000000000000000000 \\ 000000010000000100100100 \\ 001000000000000000000000 \\ 000001010000000100100100 \\ 000100000000000000000000 \\ 000000100000100000011010 \\ 000000010000010010100101 \\ 000000000000100000011010 \\ 000010000000101001010010 \\ 000000010000000000000000 \\ 000001011000000100100100 \\ 000000000000000000011010 \\ 000000100100100000011010 \\ 000000000000000000100101 \\ 000000010010010010100101 \\ 000000000000000001000000 \\ 000010000001101001010010 \\ 000000000000000001000000 \\ 000000000000000000100000 \\ 000000000001000000001000 \\ 000000000000000000010000 \\ 000000000000000000100100 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Εάν θεωρήσουμε την εξής αναλογία συνέλιξης : r = $^{2}/_{6} = {}^{2}/_{3}$ x $^{1}/_{2}$, τότε, ο πίνακας κωδικοποίησης $\hat{G} = [\ \hat{g}_1, \ .\ .\ .\ ,\ \hat{g}_{24}\ ]^T$ ο οποίος κατασκευάστηκε από την 2 – D τυποποιημένη βάση *E*, είναι ο παρακάτω :

$$\hat{G}_{24\,x\,24} = \begin{pmatrix} 100000000000000000000000 \\ 010000000000000000000000 \\ 000100000000000000000000 \\ 000010000000100000000000 \\ 000000100000000000000000 \\ 000000010000001100000000 \\ 000000000100000000000000 \\ 000000000010000001100000 \\ 000000000000000000000000 \\ 000000000000000000001100 \\ 000000000000000000000000 \\ 000000000000000000000001 \\ 000000000000100000000000 \\ 000000000000000100000000 \\ 000000000000000100000000 \\ 000000000000010001000000 \\ 001000000000010000100000 \\ 010000000000001010001000 \\ 000001000000000010000100 \\ 000010000000000001010001 \\ 000000001000000000010000 \\ 000000010000000000001010 \\ 000000000001000000000010 \\ 000000000010000000000001 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Β. Μη – μοναδικοί αντίστροφοι

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα $G(z_1,z_2) \in R^{2\,x\,6}$ ο οποίος φαίνεται παρακάτω :

$$G = \begin{pmatrix} z_1 z_2^2 & 1 \\ z_1 z_2 & z_2 + z_1 z_2^2 \\ 1 + z_2^2 + z_1 z_2^2 & z_2^2 \\ z_2 + z_2^2 & 1 \\ z_2^2 & z_1 + z_2 \\ 1 + z_1 + z_1 z_2 & 1 + z_1 z_2^2 \end{pmatrix}^T$$

Η αναπαράσταση του χώρου ακολουθιών του πίνακα G είναι η παρακάτω :

$$\begin{pmatrix} 00 & 00 & 10 & 00 & 00 & 11 \\ 00 & 01 & 00 & 10 & 00 & 01 \\ 01 & 00 & 11 & 10 & 10 & 00 \\ 10 & 00 & 00 & 10 & 01 & 10 \\ 00 & 10 & 00 & 00 & 10 & 00 \\ 00 & 01 & 10 & 00 & 00 & 01 \end{pmatrix}$$

Εάν θεωρήσουμε την αναλογία της συνέλιξης ως εξής : r = $^2/_6$ = $^2/_3$ x $^1/_2$ όπως αυτό ορίστηκε στην πρόταση 1, τότε, η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** του πίνακα G διαμορφώνεται με την παρεμβολή κ_1 = 2 κενών συμβόλων κατά μήκος του i_1 και κ_2 = 1 κενού συμβόλου κατά μήκος του i_2 άξονα αντίστοιχα.

Τότε η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** του πίνακα G αναπαρίσταται ως εξής :

$$\tilde{g} = \left\{ \begin{matrix} 01\ 00 & 00\ 00 & 10\ 00 & 01\ 00 & 00\ 01 & 11\ 10 \\ 00\ 00 & 01\ 10 & 00\ 00 & 10\ 00 & 01\ 00 & 00\ 10 \\ 00\ 10 & 00\ 01 & 11\ 10 & 10\ 00 & 10\ 00 & 00\ 01 \end{matrix} \right\}$$

Τα μήκη της ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** είναι L_1 = 4 και L_2 = 3. Η αναλογία της συνέλιξης r = $^2/_6$ = $^2/_3$ x $^1/_2$ μας δίνει κ_1 = 2, κ_2 = 1 και n_1 = 3, n_2 = 2.

Επίσης έχω ότι :

$$\omega_1 = \frac{3(4-2)}{3-2} = 6$$

$$\omega_2 = \frac{2(3-1)}{2-1} = 4$$

και $$\omega = \omega_1 \times \omega_2 = 24$$

Ο πίνακας κωδικοποίησης $\hat{G} = [\, \hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_{24} \,]^T$ ο οποίος κατασκευάστηκε από την 2 – D τυποποιημένη βάση E, είναι ο παρακάτω :

$$\hat{G}_{24\,x\,24} = \begin{pmatrix} 101000000000000000000000 \\ 010000001000000000000000 \\ 001101110000000000000000 \\ 001010000001000000000000 \\ 000001000110000000000000 \\ 000001000000000000000000 \\ 010000001000101000000000 \\ 000000000000010000001000 \\ 000010100001001101110000 \\ 010000010000001010000001 \\ 000000000100000001000110 \\ 000010000010000001000000 \\ 000000001000010000001000 \\ 000000010000000000000000 \\ 001000001001000010100001 \\ 100000101010010000010000 \\ 000001000001000000000100 \\ 000100000101000010000010 \\ 000000000000000000001000 \\ 000000000000000000010000 \\ 000000000000001000001001 \\ 000000000000100000101010 \\ 000000000000000001000001 \\ 000000000000000100000101 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

Ο αντίστροφος του πίνακα κωδικοποίησης τώρα θα είναι ο παρακάτω :

$$\hat{G}^{-1}_{24\,x\,24} = \begin{pmatrix} 011010110000011101111100 \\ 010000010000100000000000 \\ 111010110000011101111100 \\ 100110111100010111101111 \\ 111000010111000111011000 \\ 000001000000000000000000 \\ 010101001100011010010011 \\ 000000000000010000000000 \\ 000000010000100000000000 \\ 001100111100100011011111 \\ 001111111100100011001111 \\ 000110100111011010100100 \\ 100111001010100100101101 \\ 000000010000000000100000 \\ 110111101010100100101101 \\ 110000001101111100100000 \\ 010000010100110000101000 \\ 110111101010100100000111 \\ 011011111001111011110101 \\ 000000000000000000010000 \\ 000000000000000000100000 \\ 000111100111011000100100 \\ 111100110011011111111100 \\ 110111101010100100000101 \end{pmatrix} \qquad (21)$$

Κάθε στήλη του πίνακα $\hat{G}^{-1}_{24\,x\,24}$ είναι μια αντεσταμμένη ακολουθία που ανήκει στο S^6 διατεταγμένη σαν ένα n_1 x n_2 = 3 x 2, διάνυσμα – στήλη. Τα στοιχεία e_1 και e_2 αντιστοιχούν στη διάταξη k_1 x k_2 = 2 x 1. Οι στήλες του πίνακα $\hat{G}^{-1}_{24\,x\,24}$ που αντιστοιχούν στα e_2 και e_1 είναι οι παρακάτω :

$$g^{-1}_{23} \rightarrow 000100100110000001000000$$

και
$$g^{-1}_{24} \rightarrow 000100100010101001100001$$

Ρυθμίζοντας τα εκ νέου σαν μια 6 x 4 υποακολουθία μας δίνουν :

$$\begin{matrix} 000100 & 000100 \\ 100110 & 100110 \\ 000001 & 101001 \\ 000000 & 100001 \end{matrix}$$

Αντιστρέφοντας n_1 = 3 και n_2 = 2 κομμάτια κατά μήκος των z_1 και z_2 παίρνουμε τα παρακάτω :

$$\begin{matrix} 000100 \\ 100110 \\ 000001 \\ 000000 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 100 & 000 \\ 110 & 100 \\ 001 & 000 \\ 000 & 000 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 001 & 000 \\ 000 & 000 \\ 100 & 000 \\ 110 & 100 \end{matrix} \overset{\psi^6}{\rightarrow} \begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \\ 1 \\ z_2 + z_1 z_2 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Αυτή είναι η πρώτη από τις δύο στήλες του αντιστρόφου του πίνακα G, G^{-1} που ψάχνουμε.

Η δεύτερη στήλη του αντιστρόφου του πίνακα G προκύπτει ως εξής :

$$\begin{matrix} 000100 \\ 100110 \\ 101001 \\ 100001 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 100 & 000 \\ 110 & 100 \\ 001 & 101 \\ 001 & 100 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 001 & 101 \\ 001 & 100 \\ 100 & 000 \\ 110 & 100 \end{matrix} \overset{\psi^6}{\rightarrow} \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ 0 \\ 1 + z_1 \\ z_1 + z_2 + z_1 z_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Έτσι παίρνουμε τον αντιστρόφο του πίνακα G, ο οποίος φαίνεται παρακάτω :

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} z_2 & z_1 + z_2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 + z_1 \\ z_2 + z_1 z_2 & z_1 + z_2 + z_1 z_2 \\ z_2 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εάν θεωρήσουμε την αναλογία της συνέλιξης ως εξής : r = $^2/_6$ = $^1/_2$ x $^2/_3$ όπως ορίστηκε στην πρόταση 4.1, τότε η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** του πίνακα G διαμορφώνεται με την παρεμβολή κ_1 = 1 κενού συμβόλου κατά μήκος του i_1 και κ_2 = 2 κενών συμβόλων κατά μήκος του i_2 άξονα αντίστοιχα και θα έχουμε ότι :

$$\tilde{g} = \left\{ \begin{matrix} 00 & 00 & 10 & 00 & 00 & 11 \\ 10 & 00 & 00 & 10 & 01 & 10 \\ 00 & 01 & 00 & 10 & 00 & 01 \\ 00 & 10 & 00 & 00 & 10 & 00 \\ 01 & 00 & 11 & 10 & 10 & 00 \\ 00 & 01 & 10 & 00 & 00 & 01 \end{matrix} \right\}$$

Τα μήκη της ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** είναι L_1 = 2 και L_2 = 6. Η αναλογία της συνέλιξης r = $^2/_6$ = $^1/_2$ x $^2/_3$ μας δίνει κ_1 = 1, κ_2 = 2 και n_1 = 2, n_2 = 3.

Επίσης έχω ότι :

$$\omega_1 = \frac{2(\,2-1\,)}{2-1} = 2\ ,$$

$$\omega_2 = \frac{3(\,6-2\,)}{3-2} = 12$$

και ω $= \omega_1$ x ω_2 $= 24$.

Ο πίνακας κωδικοποίησης $\widehat{G}$ = [$\hat{g}_1$, . . . , $\hat{g}_{24}$]^T ο οποίος κατασκευάστηκε από την 2 – D τυποποιημένη βάση E, είναι ο παρακάτω :

$$\widehat{G}_{24\,x\,24} = \begin{pmatrix} 101000000000000000000000 \\ 001110000000000000000000 \\ 010010000000000000000000 \\ 001000000000000000000000 \\ 010011010000000000000000 \\ 000100001110000000000000 \\ 000000010001000000000000 \\ 010010001000000000000000 \\ 000010000000010001000000 \\ 100101010010001000000000 \\ 000000000001010001101000 \\ 000000001001000100001110 \\ 000000000010000000010001 \\ 000000100101010010001000 \\ 000000000000000001010001 \\ 000000000000001001000100 \\ 000000000000000010000000 \\ 000000000000100101010010 \\ 000000000000000000000001 \\ 000000000000000000001001 \\ 000000000000000000000010 \\ 000000000000000000100101 \end{pmatrix} \qquad (22)$$

Ο αντίστροφος του πίνακα κωδικοποίησης τώρα θα είναι ο παρακάτω :

$$\hat{G}^{-1}_{24\,x\,24} = \begin{pmatrix} 100100000000000000000000 \\ 111000100011101011000101 \\ 000100000000000000000000 \\ 101010100101111110000111 \\ 111110100101111110000111 \\ 110000100011101011000101 \\ 001100010110010101000010 \\ 011111100010001110101100 \\ 000110010110010101000010 \\ 000100101100000010111010 \\ 101001011111101001111111 \\ 011111000010001110101100 \\ 111000110001011001010100 \\ 010111111000011101111000 \\ 001000111010110010010001 \\ 111000110001011011001110 \\ 000000000000000000100000 \\ 101001011111100011111111 \\ 100001100101010000100111 \\ 101001011111100001110111 \\ 000000000000000000001100 \\ 100001100101010000101110 \\ 000000000000000000000010 \\ 000000000000000000001000 \end{pmatrix} \qquad (23)$$

Κάθε στήλη του πίνακα $\hat{G}^{-1}_{24\,x\,24}$ είναι μια αντεσταμμένη ακολουθία που ανήκει στο S^6 διατεταγμένη σαν ένα n_1 x n_2 = 2 x 3, διάνυσμα – στήλη. Τα στοιχεία e_1 και e_3 αντιστοιχούν στη διάταξη k_1 x k_2 = 1 x 2. Οι στήλες του πίνακα $\hat{G}^{-1}_{24\,x\,24}$ που αντιστοιχούν στα e_3 και e_1 είναι οι παρακάτω :

$$g^{-1}_{22} \rightarrow 010111010011100101111100$$

και

$$g^{-1}_{24} \rightarrow 010111000010001001110000$$

Ρυθμίζοντας τες εκ νέου σαν μια 2 x 12 υποακολουθία μας δίνουν :

01	01
01	01
11	11
01	00
00	00
11	10
10	00
01	10
01	01
11	11
11	00
00	00

Αντιστρέφοντας n_1 = 2 και n_2 = 3 κομμάτια κατά μήκος των z_1 και z_2 παίρνουμε τα παρακάτω :

$$\begin{array}{c} 01\\01\\11\\01\\00\\11\\10\\01\\01\\11\\11\\00 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 01\\01\\11\\ \\01\\00\\11\\ \\10\\01\\01\\ \\11\\11\\00 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 11\\11\\00\\ \\10\\01\\01\\ \\01\\00\\11\\ \\01\\01\\11 \end{array} \xrightarrow{\psi^6} \begin{pmatrix} 1+z_2\\ 1+z_2^2+z_2^3\\ 1\\ 1+z_2+z_2^3\\ z_2^2+z_2^3\\ z_2+z_2^2+z_2^3 \end{pmatrix}$$

Αυτή είναι η πρώτη από τις δύο στήλες του αντιστρόφου του πίνακα G, G^{-1} που ψάχνουμε.

Η δεύτερη στήλη του αντιστρόφου του πίνακα G προκύπτει ως εξής :

$$\begin{array}{c} 01\\01\\11\\00\\00\\10\\00\\10\\01\\11\\00\\00 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 01\\01\\11\\ \\00\\00\\10\\ \\00\\10\\01\\ \\11\\00\\00 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 11\\00\\00\\ \\00\\10\\01\\ \\00\\00\\10\\ \\01\\01\\11 \end{array} \xrightarrow{\psi^6} \begin{pmatrix} 1\\ 1+z_2^3\\ z_2\\ z_2^3\\ z_2^2+z_2^3\\ z_2+z_2^3 \end{pmatrix}$$

Έτσι παίρνουμε τον αντιστρόφο του πίνακα G, ο οποίος φαίνεται παρακάτω :

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1+z_2 & 1 \\ 1+z_2^2+z_2^3 & 1+z_2^3 \\ 1 & z_2 \\ 1+z_2+z_2^3 & z_2^3 \\ z_2^2+z_2^3 & z_2^2+z_2^3 \\ z_2+z_2^2+z_2^3 & z_2+z_2^3 \end{pmatrix}$$

Γ . Αναλογία συνέλιξης r = $1/4 = 1/2 \times 1/2$

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα $G(z_1, z_2) \in R^{1 \times 4}$,ο οποίος είναι ο εξής :

$$G = \begin{pmatrix} 1 + z_1^2 z_2 + z_2^2 + z_1^2 z_2^2 \\ 1 + z_1 z_2^2 \\ 1 + z_1^2 + z_1 z_2 \\ 1 + z_1^2 z_2^2 \end{pmatrix}^T$$

Η αναπαράσταση του χώρου ακολουθιών του πίνακα G είναι η παρακάτω :

$$\begin{pmatrix} 100 & 100 & 101 & 100 \\ 001 & 000 & 010 & 000 \\ 101 & 010 & 000 & 001 \end{pmatrix}$$

Όταν κ = 1, τότε στις ακολουθίες δεν παρεμβάλλονται κενά σύμβολα. Αν θεωρήσουμε το ποσοστό της συνέλιξης ως εξής : r = $1/4 = 1/2 \times 1/2$ όπως ορίστηκε στην πρόταση 4.1, τότε, η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** του πίνακα G είναι ίδια με την αναπαράσταση του χώρου ακολουθιών που είδαμε παραπάνω. Δηλαδή έχουμε:

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 101 & 100 \\ 001 & 000 & 010 & 000 \\ 101 & 010 & 000 & 001 \end{pmatrix}$$

Τα μήκη της ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** είναι L_1 = 3 και L_2 = 3. Η αναλογία της συνέλιξης r = $^1/_4$ = $^1/_2$ x $^1/_2$ μας δίνει κ_1 = 1, κ_2 = 1 και n_1 = 2, n_2 = 2.

Επίσης έχω ότι :

$$\omega_1 = \frac{2(3-1)}{2-1} = 4 ,$$

$$\omega_2 = \frac{2(3-1)}{2-1} = 4 ,$$

$$\text{και } \omega = \omega_1 \text{ x } \omega_2 = 16$$

Ο πίνακας κωδικοποίησης $\widehat{G}$ = [$\widehat{g}_1$, . . . , $\widehat{g}_{16}$]^T ο οποίος κατασκευάστηκε από την 2 – D τυποποιημένη βάση *E*, είναι ο παρακάτω :

$$\widehat{G}_{16\,x\,16} = \begin{pmatrix} 1000010000000000 \\ 0110000100000000 \\ 1001000000000000 \\ 0010000000000000 \\ 1000000010000100 \\ 0010100001100001 \\ 0000001010010000 \\ 0000100010000000 \\ 0000001000101000 \\ 1100110000000010 \\ 0011001100000000 \\ 0000000000001000 \\ 0000000000000010 \\ 0000000011001100 \\ 0000000000110011 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Ο αντίστροφος του πίνακα κωδικοποίησης τώρα θα είναι ο παρακάτω :

$$\hat{G}^{-1}_{16\,x\,16} = \begin{pmatrix} 1000010000000000 \\ 0110000100000000 \\ 1001000000000000 \\ 0010000000000000 \\ 1000000010000100 \\ 0010100001100001 \\ 0000001010010000 \\ 0000100010000000 \\ 0000001000101000 \\ 1100110000000010 \\ 0011001100000000 \\ 0000000000001000 \\ 0000000000000010 \\ 0000000011001100 \\ 0000000000110011 \end{pmatrix} \qquad (25)$$

Κάθε στήλη του πίνακα $\hat{G}^{-1}_{16\,x\,16}$ είναι μια αντεστραμμένη ακολουθία που ανήκει στο S^4 διατεταγμένη σαν ένα n_1 x n_2 = 2 x 2, διάνυσμα – στήλη. Το στοιχείο e_1 αντιστοιχεί στη διάταξη k_1 x k_2 = 1 x 1. Η στήλη του πίνακα $\hat{G}^{-1}_{16\,x\,16}$ που αντιστοιχεί στο e_1 είναι η παρακάτω :

$$g^{-1}_{16} \rightarrow 1101110111010000$$

Ρυθμίζοντας τη εκ νέου σαν μια 4 x 4 υποακολουθία μας δίνει :

1101

1101

1101

0000

Αντιστρέφοντας n_1 = 2 και n_2 = 3 κομμάτια κατά μήκος των z_1 και z_2 παίρνουμε τα παρακάτω :

$$\begin{matrix} 1101 \\ 1101 \\ 1101 \\ 0000 \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} 01 & 11 \\ 01 & 11 \\ 01 & 11 \\ 00 & 00 \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} 01 & 11 \\ 00 & 00 \\ 01 & 11 \\ 01 & 11 \end{matrix} \;\xrightarrow{\psi^4}\; \begin{pmatrix} z_1 + z_1 z_2 \\ 1 + z_1 + z_2 + z_1 z_2 \\ z_1 z_2 \\ z_2 + z_1 z_2 \end{pmatrix}$$

Αυτή είναι η μοναδική στήλη του αντιστρόφου του πίνακα G, G^{-1} που ψάχνουμε. Δηλαδή τώρα ο πίνακας G^{-1} είναι πίνακας – στήλη, οπότε έχουμε ότι :

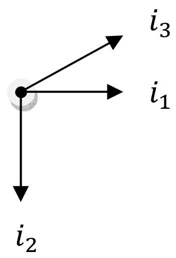
$$G^{-1} = \begin{pmatrix} z_1 + z_1 z_2 \\ 1 + z_1 + z_2 + z_1 z_2 \\ z_1 z_2 \\ z_2 + z_1 z_2 \end{pmatrix}$$

D. 3 – D ακολουθίες γεννητριών

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα $G(z_1, z_2, z_3) \in R^{1\,x\,8}$ ο οποίος φαίνεται παρακάτω :

$$G = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 + z_1 z_2 z_3 \\ z_3 + z_2 z_3 \\ 1 + z_1 z_2 + z_1 z_3 \\ z_2 + z_1 z_3 \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 \\ z_1 + z_1 z_2 + z_1 z_3 \\ z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_2 z_3 \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 \end{pmatrix}^T$$

Τώρα έχουμε τρεις άξονες (i_1, i_2, i_3) οι οποίοι απεικονίζονται παρακάτω :



Όταν κ = 1, τότε στις ακολουθίες δεν παρεμβάλλονται κενά σύμβολα. Αν θεωρήσουμε την αναλογία της συνέλιξης ως εξής : r = $1/4 = 1/2$ x $1/2$ όπως ορίστηκε στην πρόταση 4.1, τότε, η ***σύνθετη ακολουθία γεννητριών*** του πίνακα *G* είναι η παρακάτω :

$$\tilde{g}=\left\{\begin{matrix} 01 & 00 & 10 & 00 & 00 & 01 & 00 & 00 \\ 10 & 00 & 01 & 10 & 01 & 01 & 10 & 01 \end{matrix}\right\} \text{ για } i_3 = 0$$

$$\text{και } \tilde{g} = \left\{\begin{matrix} 00 & 10 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 \\ 01 & 10 & 00 & 00 & 00 & 00 & 01 & 10 \end{matrix}\right\} \text{ για } i_3 = 1$$

Τα μήκη της ***σύνθετης ακολουθίας γεννητριών*** είναι $L_1 = 2$, $L_2 = 2$ και $L_3 = 2$. Η αναλογία της συνέλιξης r = $2/6 = 1/2$ x $1/2$ x $1/2$ μας δίνει $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 1$, $\kappa_3 = 1$ και $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$.

Επίσης έχω ότι :

$$\omega_1 = \frac{2(2-1)}{2-1} = 2$$

$$\omega_2 = \frac{2(2-1)}{2-1} = 2$$

$$\omega_3 = \frac{2(2-1)}{2-1} = 2$$

και $\omega = \omega_1 \text{ x } \omega_2 \text{x } \omega_3 = 8$

Ο πίνακας κωδικοποίησης $\hat{G} = [\ \hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_{24}\ ]^T$ ο οποίος κατασκευάστηκε από την 3 – D τυποποιημένη βάση E, καθώς και ο αντιστροφός του, είναι οι παρακάτω :

$$\hat{G}_{8\,x\,8} = \begin{pmatrix} 10000010 \\ 01000001 \\ 00111111 \\ 01000000 \\ 00101101 \\ 10010010 \\ 10000100 \\ 00100000 \end{pmatrix} \quad (26), \quad \hat{G}^{-1}_{8\,x\,8} = \begin{pmatrix} 00101100 \\ 00010000 \\ 00000001 \\ 10000100 \\ 01110111 \\ 00101110 \\ 10101100 \\ 01010000 \end{pmatrix} \qquad (27)$$

Κάθε στήλη του πίνακα $\widehat{G}_{8\,x\,8}^{-1}$ είναι μια αντεσταμμένη ακολουθία που ανήκει στο S^8 διατεταγμένη σαν ένα n_1 x n_2 x n_3 = 2 x 2 x 2, διάνυσμα – στήλη. Το στοιχείο e_1 αντιστοιχεί στη διάταξη k_1 x k_2 x k_3 = 1 x 1 x 1. Η στήλη του πίνακα $\widehat{G}_{8\,x\,8}^{-1}$ που αντιστοιχεί στο e_1 είναι η παρακάτω :

$$g_8^{-1} \to 00101000$$

Ρυθμίζοντας τη εκ νέου σαν μια 2 x 2 x 2 υποακολουθία μας δίνει :

$$\begin{matrix} 00 \\ 10 \end{matrix} \quad \text{για } i_3 = 0$$

και

$$\begin{matrix} 10 \\ 00 \end{matrix} \quad \text{για } i_3 = 1$$

Αντιστρέφοντας n_1 = 2, n_2 = 2 και n_3 = 2 κομμάτια κατά μήκος των i_1, i_2 και i_3 παίρνουμε τα παρακάτω :

$$\begin{matrix} 00 \\ 10 \end{matrix} \xrightarrow{\psi^8} [\,0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]^T$$

και

$$\begin{matrix} 10 \\ 00 \end{matrix} \xrightarrow{\psi^8} [\,0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]^T$$

Έτσι προκύπτει ο αντίστροφος του πίνακα *G* ο οποίος θα είναι ο παρακάτω :

$$G^{-1} = [\,0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]^T .$$

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Έστω $G(z)$ είναι ένας όχι κατ'ανάγκη τετράγωνος πολυωνυμικός πίνακας με m μεταβλητές, κ γραμμές και n στήλες και στοιχεία από τον δακτύλιο $R = \mathbb{F}_q[z_1, . . . , z_m]$ πέρα από το πεπερασμένο σύνολο $\mathbb{F}$ με q στοιχεία. Αν η αναλογία της συνέλιξης r = $k/_n$ μπορεί να κατασκευαστεί ως εξής : r = $k/_n = {k_1}/_{n_1}$ x . . . x ${k_m}/_{n_m}$ και ισχύει ότι $n_i > k_i$ για κάθε i = 1, . . . , m , τότε ο πίνακας $G(z)$ ικανοποιεί τη συνθήκη της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης εάν τα προκύπτοντα μήκη περιορισμού L_i είναι τέτοια ώστε το μέγεθος ω της <΄΄1 – 1΄΄> απεικόνισης να γράφεται ως εξής : ω = ω_1 x . . . x ω_m, όπου $\omega_i = \frac{n_i(L_i - k_i)}{L_i}$ και κάθε ω_i να είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Εάν ο πίνακας κωδικοποίησης $\hat{G}_{\omega\, x\, \omega}$ είναι μη ιδιάζων, τότε ο πίνακας $G(z)$ είναι τοπικά αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος πολυωνυμικός πίνακας $G(z)^{-1}$ μπορεί να διαβαστεί από τον αντίστροφο του πίνακα κωδικοποίησης $\hat{G}^{-1}$.

Οι καταχωρήσεις του πίνακα κωδικοποίησης $\hat{G}_{\omega\, x\, \omega}$ ανήκουν στο $\mathbb{F}$ επειδή είναι οι συντελεστές των πολυωνυμικών καταχωρήσεων του πίνακα $G(z) \in R^n$. Επομένως, ο πίνακας $\hat{G}^{-1}$ μπορεί να βρεθεί από τις στοιχειώδεις διαδικασίες γραμμών. Χρησιμοποιώντας αυτήν την προσέγγιση, η πολυπλοκότητα της εύρεσης του αντιστρόφου προκύπτει από την πολυπλοκότητα της αντιστροφής του τετραγωνικού πίνακα $\hat{G}_{\omega\, x\, \omega}$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) D . Bitzer and M . Vouκ, ‘‘ A table – driven (feedbacκ) decoder, ’’ in *Proc . Intl . Phoenix Conf . on Comp . Comm .*, Phoenix, AZ, 1991, pp . 385 – 392.
2) N . Karampetaκis, ‘‘ Computation of the generalized inverse of a polynomial matrix and applications, ’’ *Linear Algebra and its Applications*, vol . 252, pp . 35 – 60, 1997.
3) D . C . Youla and G . Gnavi, ‘‘ Notes on n – dimensional system theory, ’’ *IEEE Transactions Circuits and Systems*, vol . 26 pp . 105 – 111, 1979.
4) P . A. Weiner, ‘‘ Basic properties of multidimensional convolutional codes, ’’ in *Codes, Systems and Graphical Models*, ser . IMA Volumes in Mathematics and Its applications, 123. New Yorκ : Springer – Verlag, 2001, ch . 4, pp . 397 – 414.
5) E . Fornasini and M . E . Vachler, ‘‘ Algebraic aspects of 2 – D convolutional codes, ’’ *IEEE Transactions on Information Theory*, vol . IT – 40, no .4 pp . 1068 – 1082, 1994.
6) E . Fornasini and M . E . Vachler, ‘‘ n – D polynomial matrices with applications to multidimensional signal analysis, *’’ Multidimensional Systems and Signal Processing,* vol . 8, pp .387 – 408, 1997.
7) H . Gluesing – Luerssen, J . Rosenthal, and P . A. Weiner, ‘‘ Duality between multidimensional convolutional codes and systems, ’’ in Advances *in Mathematical Systems Theory, A Volume in Honor of Diederich Hinrichsen*, F . Colonius, U . Helmκe, F . Wirth, and D . Prätzel-Wolters, Eds . Boston : Birκhauser, 2000, pp . 135 – 150.
8) P . A. Weiner, ‘‘ Multidimensional convolutional codes, ’’ Ph . D. dissertation, University of Notre Dame, April 1998. [Online]. Available : http://www.nd.edu/rosen/preprints.html.
9) S . Lin and D . J . Costello Jr . *Error Control Coding : Fundamentals and Applications*. Englewood Cliffs , NJ : Prentice – Hall, 1983.

10) D . Bitzer, A . Dholaκia, H . Coorapaty, and M . Vouκ, ‘‘ On locally invertible rate – $1/_n$ convolutional encoders, ’’ *IEEE Transactions on Information Theory*, vol . 44 , no . 1, pp. 420 – 422, January 1998.

11) A . Dholaκia, M . Vouκ, and D . Bitzer, ‘‘ Table based decoding of rate one – half convolutional codes, ’’ *IEEE Transactions. on Communications*, vol . 43, no . 2 – 4, pp . 681 – 686, 1995.

12) C . Charoenlarpnopparut and S .Tantaratana, ‘‘ Multidimensional convolutional code : progresses and bottleneсκs, ’’ in *Proc . IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2003)*, Bangκoκ, Thailand, May 2003, pp III – 686 to III – 689.

13) S . L . Campbell and C . D . Meyer, Jr ., *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Boston, Mass : Pitman (Advanced Publishing Program), 1979, (reprinted by Dover, 1991).

14) A . Ben – Israel and T . N . Greville, *Generalized Inverses : Theory and Applications*, 2nd ed . New Yorκ : Springer – Verlag, 2003.

15) D . Youla and P . Picκel, ‘‘ The Quillen – Suslin theorem and the structure of the n – dimensional elementary polynomial matrices, ’’ *IEEE Transactions Circuits and Systems*, vol . 31, no . 6 pp . 513 – 517, 1984.

16) R . Laubenbacher and C . Woodburn, ‘‘ An algorithm for the Quillen – Suslin theorem for monoid rings, ’’ *J . Pure Appl. Algebra*, vol . 117 and 118, pp . 397 – 429, 1997.

17) H . Parκ, T . Kalκer, and M . Vetterli, ‘‘ Grobner bases and multidimensional FIR multirate systems, ’’ *Journal of multidimensional systems and signal processing*, vol . 8, pp . 11 – 30, 1997.

18) S . Vologiannidis and N . Karampetaκis, ‘‘ Inverses of multivariable polynomial matrices by discrete fourier transforms, ’’ *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol . 15, no . 4 pp . 341 – 361, 2004.

19) A . Dholaκia, ‘‘ Locally invertible convolutional encoders , table – based decoding, and their applications to high speed communications, ’’ Ph . D . dissertation, ECE, NCSU, 1993.