ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

Τεχνικές Γραμμικοποίησης Πολυωνυμικών Πινάκων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αικατερίνη Καρέτσου

Επιβλέπων: Καραμπετάκης Νικόλαος
Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2012

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ ”

Τεχνικές Γραμμικοποίησης Πολυωνυμικών Πινάκων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αικατερίνη Καρέτσου

Επιβλέπων: Καραμπετάκης Νικόλαος
Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την .

………………………	………………………	………………………
Α. Βαρδουλάκης	Ε. Αντωνίου	Ν. Καραμπετάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.	Επικ.Καθηγητής Α.Τ.Ε.Ι.Θ.	Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ.

....

Αικατερίνη Καρέτσου
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νικόλαο Καραμπετάκη για την πολύτιμη βοήθειά του, το διαρκές ενδιαφέρον του, τις υποδείξεις του και το χρόνο που αφιέρωσε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασία μου.

Οφείλω ακόμη να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Αντώνιο Βαρδουλάκη και κ. Ευστάθιο Αντωνίου για τον χρόνο που αφιέρωσαν στην μελέτη και αξιολόγηση της εργασίας μου.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τη γραμμικοποίηση πολυωνυμικών πινάκων. Στόχος της γραμμικοποίησης δοσμένου πολυωνυμικού πίνακα τάξης $n \geq 2$ είναι αρχικά η εύρεση ισοδύναμου πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα, ο οποίος θα έχει τις ίδιες ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα με τον αρχικό πολυωνυμικό πίνακα. Στη συνέχεια, εμβαθύνοντας τη μελέτη μας, μας ενδιαφέρει και η διατήρηση τόσο των μηδενικών όσο και των στοιχειωδών διαιρετών, πεπερασμένων και άπειρων. Η πιο διαδεδομένη και εύχρηστη μέθοδος γραμμικοποίησης είναι η πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή ($companion\ forms$). Τα πλεονεκτήματά τους πολλά. Εντούτοις, ένα μειονέκτημά τους αποτέλεσε το έναυσμα για περαιτέρω έρευνα. Η αδυναμία των συνοδευουσών μορφών να διατηρούν τη δομή του δοσμένου πολυωνυμικού πίνακα οδήγησε στην ανάπτυξη νέων μεθόδων οι οποίες δίνουν πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες οι οποίοι θα έχουν όσο το δυνατόν περισσότερα από τα πλεονεκτήματα των συνοδευουσών μορφών και επιπλέον θα διατηρούν και τη δομή του πολυωνυμικού πίνακα. Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τρεις μεθόδους γραμμικοποίησης πολυωνυμικών πινάκων, την προσθετική μέθοδο, τη μέθοδο των μεταθέσεων και την πολλαπλασιαστική μέθοδο. Την κάθε μία από αυτές τις μεθόδους συνοδεύουν αρκετά παραδείγματα και ορισμένα σχόλια και παρατηρήσεις. Τέλος, θα ολοκληρώσουμε τη μελέτη μας με την παρουσίαση μιας παραλλαγής της πολλαπλασιαστικής μεθόδου που προτείνουμε.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Πολυωνυμικός πίνακας, γραμμικοποίηση, ισχυρή γραμμικοποίηση, συνοδεύουσες μορφές, ισοδυναμία πολυωνυμικών πινάκων.

Abstract

This master thesis discusses the techniques used for linearization polynomial matrices. The aim of linearization is to convert the original polynomial matrix into a larger matrix pencil with the same eigenvalues and eigenvectors. Also, we want to have the same zeros and the same elementary divisors. The most common and convenient method of linearization are the first and second companion forms. The companion forms have plenty advantages. However, a disadvantage haw triggered further research. The inability of companion forms to reflect the structure of the original polynomial matrix led to the development of new methods. These new methods give matrix pencils which will have as many as possible of the advantages who have the companion forms and also they will reflect the structure of the original polynomial matrix. In this thesis we discuss three methods of linearization, the additive method, the permutation method and the multiplication method, each of these will be accompanied by many examples and several comments. Finally, we will complete our study by proposing a variant of the multiplication method.

KEY WORDS

Polynomial matrix, matrix pencil, linearization, strong linearization, companion forms, polynomial matrix equivalence.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Θέμα της παρούσας εργασίας αποτελεί η γραμμικοποίηση πολυωνυμικών πινάκων και οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται για να καταλήξουμε στην γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα. Στόχος της γραμμικοποίησης πολυωνυμικού πίνακα τάξης $k \geq 2$ είναι η εύρεση πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα, ο οποίος θα έχει τις ίδιες ιδιοτιμές και τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον αρχικό πολυωνυμικό πίνακα. Βρίσκοντας τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα, ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του αρχικού μας πολυωνυμικού πίνακα και χρησιμοποιώντας τον στην θέση του μπορούμε να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς μας πετυχαίνοντας το ίδιο αποτέλεσμα.

Οι πολυωνυμικοί πίνακες συναντώνται σε πολλά προβλήματα και έχουν πολλές εφαρμογές. Μια εφαρμογή τους είναι τα πολυωνυμικά προβλήματα ιδιοτιμών. Ως πολυωνυμικά προβλήματα ιδιοτιμών αναφέρονται προβλήματα της μορφής $P(\lambda)x \equiv 0$, όπου $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i$ είναι πολυωνυμικός πίνακας k τάξης, με πίνακες συντελεστές A_i, πραγματικών ή μιγαδικών συντελεστών. Τα πολυωνυμικά προβλήματα ιδιοτιμών βρίσκουν εφαρμογή κυρίως σε προβλήματα που αφορούν την ανάλυση ταλαντώσεων κτιρίων, μηχανών και οχημάτων. Η βασική ιδέα της μεθόδου για την επίλυση του πολυωνυμικού προβλήματος ιδιοτιμών, είναι ο μετασχηματισμός του αρχικού προβλήματος ιδιοτιμών $P(\lambda)x \equiv 0$ σε ένα γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών της μορφής $L(\lambda)z = (\lambda X + Y)z = 0$ με τις ίδιες ιδιοτιμές. Έχοντας μετασχηματίσει το πολυωνυμικό πρόβλημα ιδιοτιμών σε γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών με τις ίδιες ιδιοτιμές, χρησιμοποιούμε τις κλασικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών προβλημάτων ιδιοτιμών για να επιλύσουμε το πρόβλημα.

Η γραμμικοποίηση πολυωνυμικών πινάκων αποδείχτηκε πολύ χρήσιμη στην επίλυση διαφόρων προβλημάτων, όπως τα πολυωνυμικά προβλήματα ιδιοτιμών. Γι΄ αυτό αναπτύχθηκαν αρκετές μέθοδοι γραμμικοποίησης πολυωνυμικών πινάκων και ως θέμα παραμένει ανοιχτό.

Η πιο διαδεδομένη και εύχρηστη μέθοδος γραμμικοποίησης είναι η πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή ($Companion\ forms$). Τα πλεονεκτήματά τους πολλά. Η απλή μορφή τους, η απλή κατασκευή τους από τα στοιχεία του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα και φυσικά η ιδιότητά τους να διατηρούν ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα, ήταν οι λόγοι που τις έκαναν ένα δυνατό εργαλείο, με πολλές εφαρμογές. Όμως, ένα σημαντικό μειονέκτημά τους αποτέλεσαι την αφετηρία για περαιτέρω έρευνα με αποτέλεσμα την ανάπτυξη μεθόδων γραμμικοποίησης, με τρεις από τις οποίες θα ασχοληθούμε σε αυτή την εργασία.

Το βασικό μειονέκτημα της πρώτης και δεύτερης συνοδεύουσας μορφής είναι ότι δεν διατηρούν την δομή του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα. Δηλαδή, αν ο αρχικός πολυωνυμικός έχει κάποια δομή, όπως για παράδειγμα αν είναι συμμετρικός, η πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή δεν θα έχουν αυτή τη δομή, δηλαδή δεν θα είναι συμμετρικές. Το μειονέκτημα αυτό σε κάποια προβλήματα είναι πολύ σημαντικό, διότι σε ορισμένες περιπτώσεις ενδέχεται να έχει και φυσική σημασία. Για παράδειγμα, υπάρχουν αρκετά προβλήματα στα οποία ο πολυωνυμικός πίνακας είναι συμμετρικός, όπως προβλήματα που αναφέρονται σε ανάλυση κραδασμών μηχανικών συστημάτων. Όταν ο πολυωνυμικός πίνακας είναι συμμετρικός ή Ερμητιανός (*Hermitian*) το φάσμα του είναι και αυτό συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα. Έτσι, η διατήρηση της συμμετρικής δομής και στον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα, ο οποίος είναι γραμμικοποίηση του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα, έχει και φυσική σημασία διότι όταν διατηρείται η συμμετρική δομή και στη γραμμικοποίηση τότε το κόστος αποθήκευσης και το υπολογιστικό κόστος μειώνονται. Επομένως, η διατήρηση των δομών των πολυωνυμικών πινάκων, σε ορισμένα προβλήματα, είναι επιβεβλημένη.

Το γεγονός αυτό οδήγησε στην ανάγκη δημιουργίας νέων μεθόδων γραμμικοποίησης που θα έχουν τις ιδιότητες των συνοδευουσών μορφών και θα διατηρούν επιπλέον και τη δομή του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα. Η αναζήτηση τέτοιων μεθόδων οδήγησε στη δημιουργία διανυσματικών χώρων που έχουν ως στοιχεία πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες, οι οποίοι είναι γενικεύσεις των δύο συνοδευουσών μορφών και έχουν κοινές ιδιότητες με αυτά. Εδώ θα ασχοληθούμε με τρεις μεθόδους γραμμικοποίησης, την προσθετική μέθοδο, την μέθοδο των μεταθέσεων και την πολλαπλασιαστική μέθοδο. Και οι τρεις μέθοδοι προκύπτουν έχοντας ως βάση την πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή. Δηλαδή, με χρήση των συνοδευουσών μορφών και με κατάλληλα ορισμένες πράξεις δημιουργούμε οικογένειες πινάκων, οι οποίες θα δείξουμε ότι αποτελούν γραμμικοποιήσεις δοσμένου πολυωνυμικού πίνακα.

Με τις μεθόδους αυτές θα ασχοληθούμε στα κεφάλαια 2,3 και 4 αντίστοιχα, θα τις μελετήσουμε αναλυτικά και θα δώσουμε και ορισμένα παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση των μεθόδων. Στο κεφάλαιο 1, θα αναφερθούμε στις βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε στην εργασία αυτή όπως επίσης και στην πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή, τις οποίες θα ορίσουμε και θα αποδείξουμε ότι αποτελούν γραμμικοποιήσεις του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το θέμα που θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία είναι οι τεχνικές γραμμικοποίησης πολυωνυμικών πινάκων. Οι τεχνικές αυτές είναι πολύ χρήσιμες και έχουν πολλές εφαρμογές στα πολυωνυμικά προβλήματα ιδιοτιμών. Ως πολυωνυμικά προβλήματα ιδιοτιμών αναφέρονται προβλήματα της μορφής $P(\lambda)x = 0$, όπου $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i$, με πίνακες A_i πραγματικών ή μιγαδικών συντελεστών. Τα πολυωνυμικά προβλήματα ιδιοτιμών συναντώνται σε προβλήματα που αναφέρονται κυρίως στην ανάλυση ταλαντώσεων κτιρίων, μηχανών και οχημάτων. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ο μετασχηματισμός του αρχικού προβλήματος ιδιοτιμών $P(\lambda)x = 0$ σε ένα γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών της μορφής $L(\lambda)z = (\lambda X + Y)z = 0$, με τις ίδιες ιδιοτιμές. Έχοντας μετασχηματίσει το πολυωνυμικό πρόβλημα ιδιοτιμών σε γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών με τις ίδιες ιδιοτιμές, χρησιμοποιούμε τις κλασικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών προβλημάτων ιδιοτιμών για να λύσουμε το πρόβλημα.
Εδώ θα ασχοληθούμε με τρεις τεχνικές γραμμικοποίησης πολυωνυμικών πινάκων, την προσθετική μέθοδο, τη μέθοδο των μεταθέσεων και την πολλαπλασιαστική μέθοδο.
Ξεκινώντας τη μελέτη μας θα χρειαστούμε κάποιους βασικούς ορισμούς οι οποίοι αποτελούν σημαντικά εργαλεία και τους οποίους θα χρησιμοποιήσουμε ευρέως παρακάτω. Μερικά από τα βιβλία που χρησιμοποιήσαμε είναι τα [6], [11], [12], [13], [23] και [33].

1.1 Βασικοί ορισμοί

Βασικά στοιχεία της μελέτης μας θα είναι οι $n \times n$ τετραγωνικοί πολυωνυμικοί πίνακες της μορφής

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i, \quad A_0, A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{F}^{n\times n}, \;\; A_k \neq 0, \tag{1.1}$$

όπου με $\mathbb{F}$ θα συμβολίζουμε το σώμα των μιγαδικών ή πραγματικών αριθμών και k θα είναι ο βαθμός του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Ορισμός 1. Βαθμός (*degree*) πολυωνυμικού πίνακα
Ο βαθμός ενός πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n\times n}$, ορίζεται ως ο μέγιστος βαθμός των πολυωνύμων που εμφανίζεται μεταξύ των στοιχείων του πίνακα και συμβολίζεται με $deg(P(\lambda))$.

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε κυρίως με κανονικούς τετράγωνους πολυωνυμικούς πίνακες. Έτσι θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του κανονικού πολυωνυμικού πίνακα.

Ορισμός 2. Κανονικός (*Regular*) πολυωνυμικός πίνακας
Κανονικός πολυωνυμικός πίνακας ονομάζεται ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ του οποίου η ορίζουσα $detP(\lambda)$ δεν είναι εκ ταυτότητος μηδέν για όλα τα $\lambda \in \mathbb{C}$. Σε αντίθετη περίπτωση ονομάζεται μη - κανονικός ή ιδιάζων (singular).

Ορισμός 3. Μονομετρικός (*Unimodular*) πολυωνυμικός πίνακας
Ως μονομετρικό πολυωνυμικό πίνακα θα ονομάζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $E(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n\times n}$ του οποίου η ορίζουσα $det(E(\lambda))$ είναι μη - μηδενική σταθερά, ανεξάρτητη του λ.

Κύρια στοιχεία της εργασίας μας θα αποτελέσουν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πολυωνυμικού πίνακα που μελετούμε. Έτσι στη συνέχεια θα δώσουμε τους ορισμούς της ιδιοτιμής, του δεξί και του αριστερού ιδιοδιανύσματος πολυωνυμικού πίνακα.

Ορισμός 4. Ιδιοτιμές (*eigenvalues*) **πολυωνυμικού πίνακα**
Ως ιδιοτιμές πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n\times n}$ *θα ονομάζουμε τις τιμές* $l_i \in \mathbb{C}$ *για τις οποίες ισχύει* $det\ P(l_i) = 0$.

Σημειώνουμε ότι στους κανονικούς πολυωνυμικούς πίνακες οι πεπερασμένες ιδιοτιμές είναι ακριβώς οι ρίζες του βαθμωτού πολυωνύμου $detP(\lambda)$.
Έστω l_i οι διακεκριμένες ρίζες της $det\ P(l_i) = 0$ με αντίστοιχες πολλαπλότητες m_i, όπου $i = 1, \ldots, l$, $\sum_{i=1}^{l} m_i = k$. Οι δείκτες m_i ονομάζονται αλγεβρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών l_i για $i = 1, \ldots, l$. Το σύνολο $U_{l_i} = \{x \in \mathbb{C}^k : P(l_i)x = 0\}$ ονομάζεται ιδιοχώρος του $P(\lambda)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και η διάσταση του χώρου ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής l_i.

Ορισμός 5. Δεξί ιδιοδιάνυσμα (*right eigenvector*) **πολυωνυμικού πίνακα**
Θεωρούμε $l \in \mathbb{C}$ *και μη - μηδενικό διάνυσμα* $x \in \mathbb{C}^n$ *το οποίο ικανοποιεί τη σχέση* $P(\lambda)x = 0$. *Το διάνυσμα* x *θα ονομάζεται δεξί ιδιοδιάνυσμα του πολυωνυμικού πίνακα* $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n\times n}$ *το οποίο αντιστοιχεί στην πεπερασμένη ιδιοτιμή* l.

Ορισμός 6. Αριστερό ιδιοδιάνυσμα (*left eigenvector*) **πολυωνυμικού πίνακα**
Ως αριστερό ιδιοδιάνυσμα ενός $n \times n$ *πολυωνυμικού πίνακα* P *το οποίο αντιστοιχεί σε πεπερασμένη ιδιοτιμή* l *ορίζουμε να είναι ένα μη-μηδεικό διάνυσμα* $y \in \mathbb{C}^n$ *τέτοιο ώστε* $yP(l) = 0$.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε και τον ορισμό του γενικευμένου ιδιοδιανύσματος.

Έστω η γραμμική ομογενής διαφορικη εξίσωση

$$A(\rho)\beta(t) = 0, \ \ t \geq 0 \tag{1.2}$$

όπου $\rho = \frac{d}{dt}$ είναι ο διαφορικός τελεστής, $A(\rho)$ είναι ένας $r \times r$ κανονικός πολυωνυμικός πίνακας δηλαδή $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r\times r}$ και $\beta(t) : (0^-, \infty) \to \mathbb{R}^r$ δηλαδή ένα r-διάστατο διάνυσμα που περιέχει στοιχεία συναρτήσεις και το οποίο αναζητούμε.

Υποθέτουμε ότι το $\beta(t)$ ανήκει στο χώρο των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων, έτσι ώστε $\beta^{(q)}(0^-) = \beta^{(q)}(0^+) = \beta^{(q)}(0)$ με $q = 0, 1, 2, \ldots$ και όπου $\beta^{(q)}$ δηλώνει την παράγωγο τάξης q του $\beta(t)$ ως προς t.
Έστω

$$A(\rho) = A_k\rho^k + A_{k-1}\rho^{k-1} + \cdots + A_1\rho + A_0 \tag{1.3}$$

όπου $A_i \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $i = 0, 1, \ldots, k$ και έστω $\beta(0^-), \beta^{(1)}(0^-), \ldots, \beta^{(k-1)}(0^-)$ είναι οι " αρχικές συνθήκες " του διανύσματος $\beta(t)$ και των παραγώγων του τάξης $1, 2, \ldots, k-1$ στο σημείο $t = 0^-$. Έστω $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ένα πεπερασμένο μηδενικό του $A(\rho)$.
Έστω $\mid A(\lambda_0) \mid = 0$, τότε έχουμε

Πρόταση 1. *Έστω*

$$\beta(t) = \left[\frac{t^\mu}{\mu!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_1 + \cdots + \frac{t}{1!}\beta_{\mu-1} + \beta_\mu\right]e^{\lambda_0 t} \tag{1.4}$$

όπου $\beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, \mu$ και $\beta_0 \neq 0$.
Τότε η $\beta(t)$ ικανοποιεί την γραμμική διαφορική εξίσωση (1.2) εαν και μόνον εαν οι επόμενες εξισώσεις ικανοποιούνται:

$$\begin{aligned}
&A(\lambda_0)\beta_0 = 0\\
&A^{(1)}(\lambda_0)\beta_0 + A(\lambda_0)\beta_1 = 0 \qquad (1.5)\\
&\vdots\\
&\frac{1}{\mu!}A^{(\mu)}(\lambda_0)\beta_0 + \frac{1}{(\mu-1)!}A^{(\mu-1)}(\lambda_0)\beta_1 + \cdots + A^{(1)}(\lambda_0)\beta_{\mu-1} + A(\lambda_0)\beta_\mu = 0
\end{aligned}$$

Ορισμός 7. Γενικευμένο Ιδιοδιάνυσμα (*generalized eigenvector*)
Η ακολουθία $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\mu$ η οποία ικανοποιεί τις εξισώσεις (1) είναι γνωστή ως Jordan αλυσίδα μήκους $\mu + 1$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ του πίνακα $A(\rho)$. Το διάνυσμα $\beta_0 \in \mathbb{R}^r$, $\beta_0 \neq 0$ είναι γνωστό ως ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί την ιδιοτιμή $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ του πίνακα $A(\rho)$. Τα διανύσματα $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ ονομάζονται γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ του πίνακα $A(\rho)$. Ένα διάνυσμα $\beta(t)$ όπως αυτο της σχέσης (1.4) ονομάζεται λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (1.2)

Παρατηρούμε ότι οι προηγούμενοι ορισμοί αναφέρονται σε πεπερασμένες ιδιοτιμές. Κρίνουμε αναγκαίο όμως να αναφερθούμε και στις περιπτώσεις που κάποια ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα είναι και το ∞. Για να μιλήσουμε για αυτή την περίπτωση χρειάζεται να δώσουμε πρώτα δυο ακόμη ορισμούς.

Ορισμός 8. Δυϊκός (*Dual*) πολυωνυμικός πίνακας
Για τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$, όπως περιγράφεται στην σχέση (1.1), ο δυϊκός του $P(\lambda)$ θα είναι ο πολυωνυμικός πίνακας της μορφής

$$revP(\lambda) := \lambda^k P\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_{k-i}. \tag{1.6}$$

Σημειώνουμε ότι οι μη - μηδενικές και πεπερασμένες ιδιοτιμές του $revP(\lambda)$ είναι οι αντίστροφες των ιδιοτιμών του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς του δυϊκού πολυωνυμικού πίνακα και του κανονικού πολυωνυμικού πίνακα μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό της ιδιοτιμής και του ιδιοδιανύσματος στο ∞.

Ορισμός 9. Ιδιοτιμή στο ∞
Θεωρούμε τον κανονικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ βαθμού $k \geq 1$. Τότε θα λέμε ότι ο κανονικός πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει ιδιοτιμή στο ∞ με ιδιοδιάνυσμα το x αν ο πολυωνυμικός πίνακας $revP(\lambda)$ έχει ιδιοτιμή το 0 με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το x. Η αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής ∞ ορίζεται να είναι η ίδια με την αντίστοιχη αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 0 του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$.

Ορισμός 10. Ιδιοδιανύσματα στο ∞
Ένα δεξι (αριστερό) ιδιοδιάνυσμα του $n \times n$ πολυωνυμικού πίνακα P το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή ∞ ορίζεται ως ένα δεξί (αριστερό) ιδιοδιάνυσμα του πολυωνυμικού πίνακα $revP$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0.

Ορισμός 11. [19] **Αυστηρά Ισοδύναμοι (*Strict equivalent*) πολυωνυμικοί πίνακες**

Δυο πολυωνυμικοί πίνακες ίδιου βαθμού $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$ θα λέγονται αυστηρά ισοδύναμοι (strict equivalent) αν υπάρχουν μονομετρικοί σταθεροί πίνακες $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $N \in \mathbb{R}^{l\times l}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\begin{bmatrix} M & P_2(\lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1(\lambda) \\ -N \end{bmatrix} = 0.$$

Ο προηγούμενος ορισμός της αυστηρής ισοδυναμίας διατηρεί ταυτόχρονα τις πεπερασμένες και άπειρες ιδιοτιμές, συνδέοντας όμως μόνο πίνακες ίδιας διάστασης και βαθμού.
Στη συνέχεια, θα δώσουμε τους ορισμούς της *Smith* μορφής πολυωνυμικού πίνακα και του πεπερασμένου και άπειρου στοιχειώδη διαιρέτη.

Ορισμός 12. *Smith* **μορφή πολυωνυμικού πίνακα**
Έστω πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n\times n}$, με $rank(P(\lambda)) = n$. Τότε ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι αυστηρά ισοδύναμος με το διαγώνιο πίνακα $\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n\times n}$ ο οποίος έχει τη μορφή

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = block\ diag\{\varepsilon_1(\lambda), \varepsilon_2(\lambda), \ldots, \varepsilon_n(\lambda)\}$$

και ονομάζεται Smith μορφή (Smith form) στο $\mathbb{C}$ του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Τα πολυώνυμα $\varepsilon_i(\lambda)$ καλούνται αναλλοίωτα πολυώνυμα (invariant polynomial) του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, έχουν ως μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα, είναι μοναδικά ορισμένα από τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ και ικανοποιούν την παρακάτω ιδιότητα

$$\varepsilon_i(\lambda) \diagup \varepsilon_{i+1}(\lambda) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Επίσης ισχύει

$$\varepsilon_i(\lambda) = \frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta_{i+1}(\lambda)}, \quad i = 1, \ldots, n$$

όπου $\Delta_0(\lambda) := 1$, $\Delta_i(\lambda) :=$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των $i \times i$ ελάσσονων οριζουσών του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Ορισμός 13. Μηδενικά (*zeros*) πολυωνυμικού πίνακα
Μηδενικά ενός πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n\times n}$, ονομάζονται οι ρίζες των αναλλοιώτων πολυωνύμων $\varepsilon_i(\lambda)$.

Ορισμός 14. Πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες (*finite elementary divisors*) **πολυωνυμικού πίνακα**
Αν $\lambda_j \in \mathbb{C}, j = 1, \ldots, \upsilon$ είναι τα διαφορετικά μεταξύ τους μηδενικά του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, τότε τα αναλλοίωτα πολυώνυμα $\varepsilon_i(\lambda)$, μπορούν να γραφούν ως

$$\varepsilon_i(\lambda) = \prod_{j=1}^{\upsilon}(\lambda - \lambda_j)^{m_{ij}}$$

και οι όροι $(\lambda - \lambda_j)^{m_{ij}}$ ονομάζονται πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες (finite elementary divisors) του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Ορισμός 15. Στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο (*infinite elementary divisors*) **πολυωνυμικού πίνακα**
Στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n\times n}$ ονομάζονται οι πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες του δυϊκού του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, $revP(\lambda)$, στο $\lambda = 0$.
Έστω

$$\mathbb{S}^0_{revP(\lambda)}(\lambda) = diag\{\lambda^{\mu_1}, \ldots, \lambda^{\mu_n}\}$$

η Smith μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$ στο $\lambda = 0$, με $\mu_j \in \mathbb{Z}^+$ και $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n$.
Ο συνολικός αριθμός στοιχειωδών διαιρετών στο άπειρο είναι $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$.

Παρατήρηση 1. Ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n\times n}$ βαθμού k, δεν έχει στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο αν και μόνον αν $rank(A_k) = n$.

Πρόταση 2. *[32], [2] , [19]*
Έστω πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = A_k\lambda^k + \cdots + A_1\lambda + A_0 \in \mathbb{R}[\lambda]^{n\times n}$ *και* $det(P(\lambda)) \neq 0$. *Τότε ο συνολικός αριθμός των στοιχειωδών διαιρετών (πεπερασμένων και άπειρων συμπεριλαμβανομένων και των αντίστοιχων πολλαπλοτήτων) είναι ίσος με* kn, *δηλαδή* $r + q = kn$ *όπου* r *είναι το πλήθος των πεπερασμένων στοιχειωδών διαιρετών του πολυωνυμικού πίνακα* $P(\lambda)$ *(συμπεριλαμβανομένων και πολλαπλοτήτων) και* q *είναι το πλήθος των στοιχειωδών διαιρετών στο άπειρο του πολυωνυμικού πίνακα* $P(\lambda)$*(συμπεριλαμβανομένων και πολλαπλοτήτων).*

Έχοντας όλα τα παραπάνω ως εφόδια, στόχος μας είναι η επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών της μορφής $P(\lambda)x = 0$. Μια κλασσική μέθοδος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων είναι με τη μέθοδο της γραμμικοποίησης. Η βασική ιδέα για να το πετύχουμε αυτό είναι να μετασχηματίσουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ σε ένα γραμμικό πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα της μορφής $L(\lambda) = \lambda X + Y$ με τις ίδιες ιδιοτιμές και να δουλέψουμε με αυτόν χρησιμοποιώντας τις συνήθεις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων ιδιοτιμών. Για να πραγματοποιήσουμε τον μετασχηματισμό του πολυωνυμικού πίνακα σε πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα χρησιμοποιούμε ένα μονομετρικό πολυωνυμικό πίνακα.

Ορισμός 16. Γραμμικοποίηση (*Linearization*) πολυωνυμικού πίνακα
Θεωρούμε ένα $n\times n$ *πολυωνυμικό πίνακα* $P(\lambda)$, *βαθμού* k *με* $k \geq 1$. *Ένας πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας της μορφής* $L(\lambda) = \lambda X + Y$ *με* $X, Y \in \mathbb{F}^{kn\times kn}$ *θα ονομάζεται γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα* $P(\lambda)$ *αν υπάρχουν μονομετρικοί πολυωνυμικοί πίνακες* $E(\lambda), F(\lambda)$ *τέτοιοι ώστε*

$$E(\lambda)L(\lambda)F(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & I_{(k-1)n} \end{array}\right] \tag{1.7}$$

Παρατήρηση 2. Σημειώνουμε ότι μια άμεση συνέπεια του προηγούμενου ορισμού είναι ότι

$$\gamma det(L(\lambda)) = det(P(\lambda))$$

για κάποια μη - μηδενική σταθερά γ. Διότι,

$$\begin{aligned} det[E(\lambda)\ L(\lambda)\ F(\lambda)] &= det \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & I_{(k-1)n} \end{array}\right] \Rightarrow \\ det(E(\lambda))det(L(\lambda))det(F(\lambda)) &= det(P(\lambda)). \end{aligned}$$

Επειδή E, F είναι μονομετρικοί πολυωνυμικοί πίνακες θα έχουμε

$$det(E(\lambda))det(F(\lambda)) := \gamma$$

γ μη - μηδενική σταθερά .
Έτσι,$\gamma det(L(\lambda)) = det(P(\lambda))$.
Επομένως, ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Υπάρχουν πολλές δυνατότητες επιλογής κατάλληλων πινάκων X, Y έτσι ώστε ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας που θα προκύψει να αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Οι πιο συνηθισμένες μορφές τέτοιων γραμμικοποιήσεων είναι οι συνοδεύουσες μορφές ($companion\ forms$). Οι μορφές αυτές γραμμικοποιήσεων χρησιμοποιούνται ευρέως στην πράξη λόγω της απλής τους κατασκευής και των πολλών εφαρμογών που έχουν.

1.2 Συνοδεύουσες Μορφές ($companion\ forms$)

Οι συνοδεύουσες μορφές αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο γραμμικοποίησης πολυωνυμικών πινάκων. Η απλή τους μορφή, η άμεση κατασκευή τους από τα στοιχεία του πολυωνυμικού πίνακα και το γεγονός ότι έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα με τον πολυωνυμικό πίνακα, τις κάνει ιδανική μέθοδο γραμμικοποίησης πολυωνυμικών πινάκων. Ένα όμως σημαντικό μειονέκτημά τους, το οποίο θα αναφέρουμε παρακάτω, αποτέλεσαι το κίνητρο για περαιτέρω έρευνα.
Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις δυο συνοδεύουσες μορφές ($companion\ forms$). Στην αρχή θα ορίσουμε τις δυο συνοδεύουσες μορφές, θα δείξουμε ότι αποτελούν γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και σύμφωνα με την Παρατήρηση 2 θα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.

Ορισμός 17. Συνοδεύουσες Μορφές ($Companion\ Forms$)
Θεωρούμε τους πίνακες:

$$X_1 = X_2 = diag(A_k, I_{(k-1)n}) \tag{1.8}$$

και

$$Y_1 = \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_0 \\ -I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} A_{k-1} & -I_n & \cdots & 0 \\ A_{k-2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -I_n \\ A_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

τότε οι μορφές $C_1(\lambda) = \lambda X_1 + Y_1$ και $C_2(\lambda) = \lambda X_2 + Y_2$ ονομάζονται πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή (companion $form$) του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, αντίστοιχα.

Τώρα, θα δείξουμε ότι η πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή είναι γραμμικοποιήσεις του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i A^i$.

Θεώρημα 1. *Η πρώτη συνοδεύουσα μορφή είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i A^i$.*

Απόδειξη.
Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i A^i$ και την πρώτη συνοδεύουσα μορφή

$$C_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda A_k + A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_1 & A_0 \\ -I_n & \lambda I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I_n & \lambda I_n \end{bmatrix}.$$

Για να είναι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i A^i$, σύμφωνα με τον ορισμό της γραμμικοποίησης που δώσαμε προηγουμένως, θα πρέπει να υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $E(\lambda)$ και $F(\lambda)$ τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$E(\lambda) C_1(\lambda) F(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & I_{(k-1)n} \end{array}\right]. \tag{1.10}$$

Θεωρούμε, λοιπόν, τους πίνακες

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & \lambda A_k + A_{k-1} & \Lambda^2 A_k + \lambda A_{k-1} + A_{k-2} & \cdots & \lambda^{k-1} A_k + \ldots + \lambda A_2 + A_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -I_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -I_n & \cdots & 0 \\ 0 & -I_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n \\ 0 & 0 & \cdots & -I_n & -\lambda I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ I_n & -\lambda I_n & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε θα έχουμε ότι

$$E(\lambda) \cdot C_1(\lambda) =$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & \lambda A_k + A_{k-1} & \cdots & \lambda^{k-1} A_k + \ldots + \lambda A_2 + A_1 \\ 0 & 0 & \cdots & -I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -I_n & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda A_k + A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_1 & A_0 \\ -I_n & \lambda I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I_n & \lambda I_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(\lambda) \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & -\lambda I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ I_n & -\lambda I_n & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

και

$$\left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & I_{(k-1)n} \end{array}\right] \cdot F(\lambda) =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & I_{(k-1)n} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n \\ 0 & 0 & \cdots & -I_n & -\lambda I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ I_n & -\lambda I_n & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(\lambda) \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & -\lambda I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ I_n & -\lambda I_n & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

Από τις σχέσεις (1.11) και (1.12) προκύπτει

$$E(\lambda)\cdot C_1(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & I_{(k-1)n} \end{array}\right]\cdot F(\lambda).$$

Ακόμη, έχουμε ότι $det(E(\lambda)) = \pm 1$ και $det(F(\lambda)) = 1$. Επομένως οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες είναι μονομετρικοί και έτσι ο $kn \times kn$ πίνακας $F(\lambda)$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή υπάρχει ο $F^{-1}(\lambda)$.
Έτσι,

$$E(\lambda)C_1(\lambda)F^{-1}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & I_{(k-1)n} \end{array}\right],$$

όπου οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες $E(\lambda)$ και $F^{-1}(\lambda)$ είναι μονομετρικοί.
Άρα η πρώτη συνοδεύουσα μορφή είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

$\square$

Ομοίως προκύπτει ότι και η δεύτερη συνοδεύουσα μορφή είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Για καλύτερη κατανόηση όλων όσων περιγράψαμε προηγουμένως θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα, στο οποίο θα πάρουμε ένα συγκεκριμένο πολυωνυμικό πίνακα, θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του, όπως επίσης τη πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά τους.

Παράδειγμα

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2-1 \\ \lambda-2 & \lambda^3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \end{aligned}$$

Αρχικά θα βρούμε τις ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$:

$$\begin{aligned} det\ P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda^2-1 \\ \lambda-2 & \lambda^3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3-\lambda-(\lambda^2-1)(\lambda-2) = \lambda^3-\lambda-(\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2) \\ &= 2(\lambda^2-1). \end{aligned}$$

• Ιδιοτιμές : $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Στη συνέχεια θα βρούμε τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Δεξιά Ιδιοδιανύσματα του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$:

$$P(\lambda)\cdot x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2-1 \\ \lambda-2 & \lambda^3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1+(\lambda^2-1)x_2 = 0 \\ (\lambda-2)x_1+(\lambda^3-\lambda)x_2 = 0 \end{array} \tag{1.13}$$

• Δεξιά ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$:

Από το σύστημα (1.13) για $\lambda = 1$ προκύπτει $x_1 = 0$. Έτσι θέτοντας $x_2 = t,\ t \in \mathbb{R}$, προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα:

$$x_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix},\ \ t \in \mathbb{R}$$

• Δεξιά ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$:

Από το σύστημα (1.13) για $\lambda = -1$ προκύπτει $x_1 = 0$, $-3x_1 = 0$. Έτσι θέτοντας $x_2 = t,\ t \in \mathbb{R}$, προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα:

$$x_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix},\ \ t \in \mathbb{R}$$

Τώρα θα βρούμε και τα αριστερά ιδιοδιανύσματα του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Αριστερά ιδιοδιανύσματα του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$:

$$y \cdot P(\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 - 1 \\ \lambda - 2 & \lambda^3 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{array}{l} y_1 + (\lambda^2 - 1)y_2 = 0 \\ (\lambda - 2)y_1 + (\lambda^3 - \lambda)y_2 = 0 \end{array} \tag{1.14}$$

• Αριστερά ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$:

Από το σύστημα (1.14) για $\lambda = 1$ προκύπτει $y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$. Έτσι θέτοντας $y_2 = t,\ t \in \mathbb{R}$, προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα:

$$y_1^* = \begin{bmatrix} t & t \end{bmatrix} \;,\;\; t \in \mathbb{R}$$

• Αριστερά ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$:

Από το σύστημα (1.14) για $\lambda = -1$ προκύπτει $y_1 - 3y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = 3y_2$. Έτσι θέτοντας $y_2 = t,\ t \in \mathbb{R}$, προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα:

$$y_2^* = \begin{bmatrix} 3t & t \end{bmatrix} \;,\;\; t \in \mathbb{R}.$$

Στο σημείο αυτό θα βούμε την *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει δυο μηδενικά $m = 1$ και $m = -1$ τάξης 1 και δυο πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες τους $(\lambda - 1)$ και $(\lambda + 1)$.
Τώρα, επειδή ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής A_3 του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων πίνακας, δηλαδή $det(A_3) = 0$, ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ θα έχει και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Για να βούμε, λοιπόν, τους στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα βρούμε πρώτα τον δυϊκό πίνακα του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και στη συνέχεια τη *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$ για $\lambda = 0$.

Επομένως θα έχουμε

$$\begin{aligned} revP(\lambda) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^3 & \lambda-\lambda^3 \\ \lambda^2-2\lambda^3 & 1-\lambda^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Έτσι, η $Smith$ μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$ για $\lambda = 0$ θα είναι

$$\mathbb{S}^0_{revP(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει ένα στοιχειώδη διαιρέτη στο άπειρο τέταρτης τάξης, τον λ^4.
Παρατηρούμε ακόμη, ότι το σύνολο των στοιχειωδών διαιρετών πεπερασμένων και άπειρων (συμπεριλαμβανομένων και των πολλαπλοτήτων τους) είναι $2+4=6$ το οποίο είναι ίσο με το γινόμενο 3×2 του βαθμού του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ επί τη διάστασή του. (βλ. Πρόταση 2)

Στη συνέχεια θα βρούμε τις συνοδεύουσες μορφές του $P(\lambda)$.

Η πρώτη συνοδεύουσα μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι:

$$\begin{aligned} C_1(\lambda) &= \lambda X_1 + Y_1 \\ &= \begin{bmatrix} \lambda A_3 + A_2 & A_1 & A_0 \\ -I_2 & \lambda I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 & \lambda I_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&1&0&0&1&-1 \\ 0&0&1&-1&-2&0 \\ -1&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&0 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0&1&0&0&1&-1 \\ 0&\lambda&1&-1&-2&0 \\ \hline -1&0&\lambda&0&0&0 \\ 0&-1&0&\lambda&0&0 \\ \hline 0&0&-1&0&\lambda&0 \\ 0&0&0&-1&0&\lambda \end{array}\right] \end{aligned}$$

- Ιδιοτιμές της πρώτης συνοδεύουσας μορφής:

$$
\begin{aligned}
det\ C_1(\lambda) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \cdots = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda^3 - \lambda + \lambda - 2 \\
&= 2(\lambda^2 - 1).
\end{aligned}
$$

○ Ιδιοτιμές : $\lambda^1_{1,2} = \pm 1$.

Στη συνέχεια θα βρούμε τα δεξιά ιδιοδιανύσματα της πρώτης συνοδεύουσας μορφής.

<u>Δεξιά ιδιοδιανύσματα της πρώτης συνοδεύουσας μορφής:</u>

$$
C_1(\lambda) \cdot x = 0 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{array}{l} x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ \lambda x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_1 + \lambda x_3 = 0 \\ -x_2 + \lambda x_4 = 0 \\ -x_3 + \lambda x_5 = 0 \\ -x_4 + \lambda x_6 = 0 \end{array}
$$

• Δεξιά ιδιοδιανύσματα της πρώτης συνοδεύουσας μορφής για $\lambda_1^1 = 1$:

$$\begin{array}{l} x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_5 = 0 \\ x_1 = x_3 = x_5 \\ x_2 = x_4 = x_6 \end{array}$$

Επομένως θέτοντας $x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$, τα δεξιά ιδιοδιανύσματα της πρώτης συνοδεύουσας μορφής για την ιδιοτιμή $\lambda_1^1 = 1$ θα είναι της μορφής:

$$x_1^{1*} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} , \quad t \in \mathbb{R}.$$

• Δεξιά ιδιοδιανύσματα της πρώτης συνοδεύουσας μορφής για $\lambda_1^1 = -1$:

$$\begin{array}{l} x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 - x_4 = 0 \\ -x_3 - x_5 = 0 \\ -x_4 - x_6 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_5 = 0 \\ x_1 = -x_3 = x_5 \\ x_2 = -x_4 = x_6 \end{array}$$

Άρα θέτοντας $x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$, τα δεξιά ιδιοδιανύσματα της πρώτης συνοδεύουσας μορφής για την ιδιοτιμή $\lambda_1^1 = -1$ θα είναι της μορφής:

$$x_2^{1*} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Στο σημείο αυτό θα βούμε την *Smith* μορφή της πρώτης συνοδεύουσας μορφής $C_1(\lambda)$.

Η $Smith$ μορφή της πρώτης συνοδεύουσας μορφής $C_1(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{C_1(\lambda)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή $C_1(\lambda)$ έχει δυο μηδενικά $m = 1$ και $m = -1$ τάξης 1 και δυο πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες τους $(\lambda - 1)$ και $(\lambda + 1)$.
Τώρα, επειδή ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής X_1 της πρώτης συνοδεύουσας μορφής $C_1(\lambda)$ είναι ιδιάζων πίνακας, δηλαδή $det(X_1) = 0$, η πρώτη συνοδεύουσα μορφή $C_1(\lambda)$ θα έχει και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Για να βούμε, λοιπόν, τους στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο της πρώτης συνοδεύουσας μορφής $C_1(\lambda)$ θα βρούμε πρώτα τον δυϊκό πίνακα της πρώτης συνοδεύουσας μορφής $C_1(\lambda)$ και στη συνέχεια τη $Smith$ μορφή της πρώτης συνοδεύουσας μορφής $revC_1(\lambda)$ για $\lambda = 0$.
Επομένως θα έχουμε

$$revC_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & -\lambda & -2\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η $Smith$ μορφή της πρώτης συνοδεύουσας μορφής $revC_1(\lambda)$ για $\lambda = 0$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revC_1(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή $C_1(\lambda)$ έχει ένα στοιχειώδη διαιρέτη στο άπειρο τέταρτης τάξης, τον λ^4.

Η δεύτερη συνοδεύουσα μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι:

$$\begin{aligned} C_2(\lambda) &= \lambda X_2 + Y_2 = \begin{bmatrix} \lambda A_3 + A_2 & -I_2 & 0 \\ A_1 & \lambda I_2 & -I_2 \\ A_0 & 0 & \lambda I_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&1&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\1&-1&0&0&0&-1\\1&-1&0&0&0&0\\-2&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0&1&-1&0&0&0\\0&\lambda&0&-1&0&0\\ \hline 0&0&\lambda&0&-1&0\\1&-1&0&\lambda&0&-1\\ \hline 1&-1&0&0&\lambda&0\\-2&0&0&0&0&\lambda \end{array}\right] \end{aligned}$$

• Ιδιοτιμές της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής:

$$det\ C_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 0&1&-1&0&0&0\\0&\lambda&0&-1&0&0\\0&0&\lambda&0&-1&0\\1&-1&0&\lambda&0&-1\\1&-1&0&0&\lambda&0\\-2&0&0&0&0&\lambda \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0&0&-1&0&0\\0&\lambda&0&-1&0\\1&0&\lambda&0&-1\\1&0&0&\lambda&0\\-2&0&0&0&\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0&\lambda&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\1&-1&\lambda&0&-1\\1&-1&0&\lambda&0\\-2&0&0&0&\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0&\lambda&-1&0\\1&0&0&-1\\1&0&\lambda&0\\-2&0&0&\lambda \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 0&0&-1&0\\1&\lambda&0&-1\\1&0&\lambda&0\\-2&0&0&\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0&0&-1&0\\1&-1&0&-1\\1&-1&\lambda&0\\-2&0&0&\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda - \lambda - 2$$
$$= 2(\lambda^2 - 1).$$

∘ Ιδιοτιμές : $\lambda^2_{1,2} = \pm 1$.

Τώρα, θα βρούμε τα αριστερά ιδιοδιανύσματα της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής.

Αριστερά ιδιοδιανύσματα της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής:

$$y \cdot C_2(\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} y_4 + y_5 - 2y_6 = 0 \\ y_1 + \lambda y_2 - y_4 - y_5 = 0 \\ -y_1 + \lambda y_3 = 0 \\ -y_2 + \lambda y_4 = 0 \\ -y_3 + \lambda y_5 = 0 \\ -y_4 + \lambda y_6 = 0 \end{array}$$

• Αριστερά ιδιοδιανύσματα της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής για $\lambda^2_1 = 1$:

$$\begin{array}{l} y_4 + y_5 - 2y_6 = 0 \\ y_1 + y_2 - y_4 - y_5 = 0 \\ -y_1 + y_3 = 0 \\ -y_2 + y_4 = 0 \\ -y_3 + y_5 = 0 \\ -y_4 + y_6 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_3 = y_5 = y_2 = y_4 = y_6$$

Επομένως θέτοντας $y_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$, τα αριστερά ιδιοδιανύσματα της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής για την ιδιοτιμή $\lambda_1^2 = 1$ θα είναι της μορφής:

$$y_1^{2*} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} \ , \ t \in \mathbb{R}.$$

- Αριστερά ιδιοδιανύσματα της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής για $\lambda_2^2 = -1$:

$$\begin{array}{l} y_4 + y_5 - 2y_6 = 0 \\ y_1 - y_2 - y_4 - y_5 = 0 \\ -y_1 - y_3 = 0 \\ -y_2 - y_4 = 0 \\ -y_3 - y_5 = 0 \\ -y_4 - y_6 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y_5 = 3y_6 \\ y_1 = -y_3 = y_5 \\ y_2 = -y_4 = y_6 \end{array}$$

Άρα θέτοντας $y_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$, τα αριστερά ιδιοδιανύσματα της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής για την ιδιοτιμή $\lambda_2^2 = -1$ θα είναι της μορφής:

$$y_2^{2*} = \begin{bmatrix} 3t \\ t \\ -3t \\ -t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} \ , \ t \in \mathbb{R}.$$

Στο σημείο αυτό θα βούμε την *Smith* μορφή της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής $C_2(\lambda)$.
Η *Smith* μορφή της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής $C_2(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}_{C_2(\lambda)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η δεύτερη συνοδεύουσα μορφή $C_2(\lambda)$ έχει δυο μηδενικά $m = 1$ και $m = -1$ τάξης 1 και δυο πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες

τους $(\lambda-1)$ και $(\lambda+1)$.
Τώρα, επειδή ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής X_2 της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής $C_2(\lambda)$ είναι ιδιάζων πίνακας, δηλαδή $det(X_2)=0$, η δεύτερη συνοδεύουσα μορφή $C_2(\lambda)$ θα έχει και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Για να βούμε, λοιπόν, τους στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής $C_2(\lambda)$ θα βρούμε πρώτα τον δυϊκό πίνακα της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής $C_2(\lambda)$ και στη συνέχεια τη $Smith$ μορφή της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής $revC_2(\lambda)$ για $\lambda=0$.
Επομένως θα έχουμε

$$revC_2(\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η $Smith$ μορφή της δεύτερης συνοδεύουσας μορφής $revC_2(\lambda)$ για $\lambda=0$ θα είναι

$$\mathbb{S}^0_{revC_2(\lambda)}(\lambda)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η δεύτερη συνοδεύουσα μορφή $C_2(\lambda)$ έχει ένα στοιχειώδη διαιρέτη στο άπειρο τέταρτης τάξης, τον λ^4.

Θα ολοκληρώσουμε το παράδειγμά μας με μια παρατήρηση. Παρατηρούμε στο παράδειγμά μας ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$, η πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, τα ίδια ιδιοδιανύσματα, τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Αυτή η ιδιότητα των συνοδευουσών μορφών, την οποία θα αποδείξουμε παρακάτω, μαζί με την απλή κατασκευή τους είναι που κάνει τις συνοδεύουσες μορφές τόσο χρήσιμες και με τόσες πολλές εφαρμογές.

1.3 Ισοδυναμίες πολυωνυμικών πινάκων

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μερικά σημαντικά θεωρήματα και ορισμούς τα οποία θα χρειαστούμε στη συνέχεια της μελέτης μας.
Στην παράγραφο 1.1, δώσαμε τον ορισμό της γραμμικοποίησης πολυωνυμικού πίνακα. Όμως ο ορισμός όπως δόθηκε χρησιμοποιεί πολυωνυμικούς πίνακες $P(\lambda)$ της μορφής (1.1) με μονομετρικούς πίνακες A_k. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ να είναι πεπερασμένες, όπως επίσης και οι στοιχειώδεις διαιρέτες θα είναι μόνο πεπερασμένοι. Τι γίνεται όμως όταν ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει και μη πεπερασμένες ιδιοτιμές, μηδενικά και στοιχειώδεις διαιρέτες, δηλαδή όταν ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής του κανονικού πολυωνυμικού πίνακας $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων πίνακας (δηλαδή $det(A_k) = 0$). Σε αυτή την περίπτωση θα υπάρχει και η ιδιοτιμή ∞ με κάποια πολλαπλότητα $m > 0$. Για τις πεπερασμένες ιδιοτιμές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε γραμμικοποίηση, όμως για την ιδιοτιμή ∞ θα έχουμε πρόβλημα. Για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία θα δώσουμε τον ορισμό της ισχυρής γραμμικοποίησης. Ο ορισμός αυτός στηρίζεται στην παρατήρηση που κάναμε παραπάνω για τη σχέση ανάμεσα στην ιδιοτιμή ∞ του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και της ιδιοτιμής 0 του δυϊκού πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$.
Ένα ακόμη ερώτημα που δημιουργείται είναι το τι γίνεται στην περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων (δηλαδή $det(P(\lambda)) = 0$). Αυτή η περίπτωση δεν θα αποτελέσει αντικείμενο μελέτης μας, εντούτοις όμως θα κάνουμε κάποια σχόλια και για αυτή την περίπτωση.

Ορισμός 18. Ισχυρή Γραμμικοποίηση (*Strong Linearization*) **πολυωνυμικού πίνακα** [12]
Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ βαθμού k, με $k \geq 1$. Αν ο $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση για τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ και ο $revL(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση για τον πίνακα $revP(\lambda)$, τότε θα λέμε ότι ο πίνακας $L(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση για τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τον προηγούμενο ορισμό, ένας πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$, ο οποίος είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ και για να έχει και τις ίδιες ιδιοτιμές στο άπειρο θα πρέπει να δείξουμε ότι είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, δηλαδή ότι ο δυϊκός $revL(\lambda)$ του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L(\lambda)$ αποτελεί γραμμικοποίηση του δυϊκού του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Πρόταση 3. *[12]*
Οι συνοδεύουσες μορφές κανονικών πολυωνυμικών πινάκων $P(\lambda)$ έχουν την ιδιότητα ότι αν ο $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του $P(\lambda)$ τότε και ο $revL(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του $revP(\lambda)$. Επομένως είναι ισχυρές γραμμικοποιήσεις.

Η προηγούμενη πρόταση μας λέει ότι όταν ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι κανονικός ($det(P(\lambda)) \neq 0$ για κάποια λ) τότε οι δυο συνοδεύουσες μορφές είναι πάντοτε ισχυρές γραμμικοποιήσεις του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, δηλαδή έχουν τις ίδιες πεπερασμένες και άπειρες ιδιοτιμές.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε ένα λήμμα το οποίο συνδέει τη γραμμικοποίηση και ισχυρή γραμμικοποίηση με τη διατήρηση των πεπερασμένων και άπειρων στοιχειωδών διαιρετών. Πρώτα, όμως, θα δώσουμε κάποιους ορισμούς.
Ως $\mathbb{F}(\lambda)$ θα συμβολίζουμε το σώμα των ρητών συναρτήσεων με συντελεστές από το σώμα των μιγαδικών ή πραγματικών αριθμών $\mathbb{F}$. Έτσι, ως $\mathbb{F}(\lambda)^(n)$ θα συμβολίζουμε το διανυσματικό χώρο του οποίου τα στοιχεία είναι n-αδες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{F}(\lambda)$.
Ακόμη, με $nrank(P(\lambda))$ θα συμβολίζουμε τη διάσταση της μεγαλύτερης μημηδενικής υποορίζουσας του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Ορισμός 19. [27] **Δεξιός και Αριστερός μηδενικός χώρος** (*Right and Left nullspace*) *Ως δεξί και αριστερό μηδενικό χώρο ενός πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n\times n}$, τους οποίους θα συμβολίσουμε με $N_r(P)$ και $N_l(P)$ αντίστοιχα, ορίζουμε να είναι οι παρακάτω υποχώροι του $\mathbb{F}(\lambda)^{(n)}$:*

$$\begin{aligned} N_r(P) &:= \{x(\lambda) \in \mathbb{F}(\lambda)^{(n)} \; : \; P(\lambda)x(\lambda) \equiv 0\} \\ N_l(P) &:= \{y(\lambda) \in \mathbb{F}(\lambda)^{(n)} \; : \; y^\tau(\lambda)P(\lambda) \equiv 0\}. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε, ακόμη, ότι ισχύει $nrank(P) = n - dim(N_r(P)) = n - dim(N_l(P))$. Δηλαδή, $dim(N_r(P)) = dim(N_l(P))$.

Λήμμα 1. *[27]*
Έστω πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n\times n}$, βαθμού k, και ένας πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{kn\times kn}$.
Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα εξής:

(α) $dim(N_r(L)) = dim(N_r(P))$

(β) οι πεπερασμένοι στοιχειώδης διαιρέτες των πολυωνυμικών πινάκων $L(\lambda)$ και $P(\lambda)$ είναι οι ίδιοι

(γ) οι στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο των πολυωνυμικών πινάκων $L(\lambda)$ και $P(\lambda)$ είναι οι ίδιοι.
Τότε ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ είναι:

- *γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ αν και μόνον αν ισχύουν οι συνθήκες (α) και (β) .*

- *ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ αν και μόνον αν ισχύουν οι συνθήκες (α) , (β) και (γ) .*

Για την απόδειξη βλ. [27].

Τώρα, προχωρώντας στη μελέτη μας θα ορίσουμε τον ομογενή πολυωνυμικό πίνακα και την *factor* ισοδυναμία για να δείξουμε καταλήγοντας ότι οι συνοδεύουσες μορφές έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Ολοκληρώνοντας την εισαγωγή θα αποδείξουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα, το οποίο δίνει απάντηση στην παρατήρηση που κάναμε στο τέλος του παραδείγματος που δώσαμε. Θα δείξουμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και η πρώτη συνοδεύουσα μορφή $C_1(\lambda)$ είναι ισοδύναμοι πίνακες και έχουν τους ίδιους στοιχειώδεις διαιρέτες, πεπερασμένους και άπειρους. Πριν το θεώρημα, θα αναφέρουμε μερικούς χρήσιμους ορισμούς.

Ορισμός 20. [19] **Ομογενής (*Homogeneous*) πολυωνυμικός πίνακας**
Η ομογενής μορφής ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0$ ορίζεται να είναι ο πίνακας

$$A^H(\lambda,\mu) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1}\mu + \cdots + A_1\lambda\mu^{k-1} + A_0\mu^k.$$

Ορισμός 21. [19] **factor coprime equivalent**
Δυο πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(\lambda)$ και $A_2(\lambda)$ θα είναι factor coprime equivalent αν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $M(\lambda,\mu)$ και $N(\lambda,\mu)$ τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} M(\lambda,\mu) & A_2(\lambda,\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(\lambda,\mu) \\ -N(\lambda,\mu) \end{bmatrix} = 0$$

όπου οι πίνακες $\begin{bmatrix} M(\lambda,\mu) & A_2(\lambda,\mu) \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} A_1(\lambda,\mu) \\ -N(\lambda,\mu) \end{bmatrix}$ είναι factor coprime, δηλαδή αν όλες οι $kn \times kn$ και $n \times n$ υποορίζουσες των πινάκων $\begin{bmatrix} M(\lambda,\mu) & A_2(\lambda,\mu) \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} A_1(\lambda,\mu) \\ -N(\lambda,\mu) \end{bmatrix}$ αντίστοιχα, δεν έχουν τους ίδιους πολυωνυμικούς παράγοντες.

Ορισμός 22. [19] **factor equivalent**
Δυο πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(\lambda)$ και $A_2(\lambda)$ θα είναι factor equivalent αν οι αντίστοιχοι ομογενείς πολυωνυμικοί πίνακες $A_1^H(\lambda,\mu)$ και $A_2^H(\lambda,\mu)$ είναι factor coprime equivalent.

Θεώρημα 2. *[19] Ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i$ και η πρώτη συνοδεύουσα μορφή $C_1(\lambda) = \lambda X_1 + Y_1$ είναι factor equivalent.*

Απόδειξη.
Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0$ και τον αντίστοιχο ομογενή $P^H(\lambda,\mu) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1}\mu + \cdots + A_1\lambda\mu^{k-1} + A_0\mu^k$. Στη συνέχεια θεωρούμε την πρώτη συνοδεύουσα μορφή

$$C_1(\lambda) = \lambda X_1 + Y_1 = \begin{bmatrix} \lambda A_k + A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_0 \\ -I_n & \lambda I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -I_n & \lambda I_n \end{bmatrix}$$

και η αντίστοιχη ομογενής πρώτη συνοδεύουσα μορφή

$$C_1^H(\lambda) = \lambda X_1 + \mu Y_1 = \begin{bmatrix} \lambda A_k + \mu A_{k-1} & \mu A_{k-2} & \cdots & \mu A_0 \\ -\mu I_n & \lambda I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\mu I_n & \lambda I_n \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η σχέση:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_p \\ 0_{(k-1)n,p} \end{bmatrix}}_{M(\lambda,\mu)} P^H(\lambda,\mu) = C_1^H(\lambda,\mu) \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda^{k-1} I_n \\ \lambda^{k-2}\mu I_n \\ \vdots \\ \lambda\mu^{k-2} I_n \\ \mu^{k-1} I_n \end{bmatrix}}_{N(\lambda,\mu)}$$

Πράγματι,

$$\begin{bmatrix} I_p \\ 0_{(k-1)n,p} \end{bmatrix} (A_k\lambda^k + \cdots + A_0\mu^k) = \begin{bmatrix} \lambda A_k + \mu A_{k-1} & \mu A_{k-2} & \cdots & \mu A_0 \\ -\mu I_n & \lambda I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\mu I_n & \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{k-1} I_n \\ \lambda^{k-2}\mu I_n \\ \vdots \\ \lambda\mu^{k-2} I_n \\ \mu^{k-1} I_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^k A_k + \cdots + A_0\mu^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^k A_k + \cdots + A_0\mu^k \\ -\lambda^{k-1}\mu + \lambda^{k-1}\mu \\ \vdots \\ -\mu^{k-1}\lambda + \mu^{k-1}\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^k A_k + \cdots + A_0\mu^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ακόμη ο πίνακας $\begin{bmatrix} M(\lambda,\mu) & C_1^H(\lambda,\mu) \end{bmatrix}$ έχει δυο $kn \times kn$ υποορίζουσες της μορφής

$$det \begin{bmatrix} I_n & A_{k-2}\mu & \cdots & A_2\mu & A_1\mu & A_0\mu \\ 0 & \lambda I_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda I_n & -\mu I_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda I_n & -\mu I_n \end{bmatrix} = \lambda^{(k-1)n}$$

και

$$det \begin{bmatrix} I_n & A_k\lambda + A_{k-1}\mu & \cdots & A_2\mu & A_1\mu \\ 0 & \mu I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\mu I_n & \lambda I_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\mu I_n \end{bmatrix} = (-\mu)^{(k-1)n}$$

οι οποίες δεν έχουν κανένα κοινό παράγοντα, δηλαδή είναι πρώτες μεταξύ τους.

Έτσι ο πίνακας $\begin{bmatrix} M(\lambda,\mu) & C_1^H(\lambda,\mu) \end{bmatrix}$ είναι *factor coprime.*

Ομοίως ο πίνακας $\begin{bmatrix} P^H(\lambda,\mu) \\ -N(\lambda,\mu) \end{bmatrix}$ έχει δυο $n \times n$ υποορίζουσες της μορφής

$$det\begin{bmatrix} \mu^{(k-1)n} & I_n \end{bmatrix} = \mu^{(k-1)n} \quad \text{και} \quad det\begin{bmatrix} \lambda^{(k-1)n} & I_n \end{bmatrix} = \lambda^{(k-1)n}$$

οι οποίες δεν έχουν κανένα κοινό παράγοντα, δηλαδή είναι πρώτες μεταξύ τους και επομένως ο πίνακας $\begin{bmatrix} P^H(\lambda,\mu) \\ -N(\lambda,\mu) \end{bmatrix}$ είναι *factor coprime.*

Επίσης ισχύει ότι

$$\begin{bmatrix} M(\lambda,\mu) & C_1^H(\lambda,\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^H(\lambda,\mu) \\ -N(\lambda,\mu) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & \lambda A_k + \mu A_{k-1} & \mu A_{k-2} & \cdots & \mu A_0 \\ 0 & -\mu I_n & \lambda I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\mu I_n & \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1}\mu + \cdots + A_0\mu^k \\ -\lambda^{k-1} I_n \\ -\lambda^{k-2}\mu I_n \\ \vdots \\ -\lambda\mu^{k-2} I_n \\ -\mu^{k-1} I_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_k\lambda_k + \cdots + A_0\mu^k - \lambda^k A_k - \cdots - \mu^k A_0 \\ \lambda^{k-1}\mu - \lambda^{k-1}\mu \\ \vdots \\ \lambda\mu^{k-1} - \lambda\mu^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι οι ομογενείς πίνακες $P^H(\lambda,\mu)$ και $C_1^H(\lambda,\mu)$ είναι *factor coprime* ισοδύναμοι. Αυτό σημαίνει ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και η πρώτη συνοδεύουσα μορφή είναι *factor* ισοδύναμοι.

□

Πόρισμα 1. *[19] Αν δυο πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(\lambda)$ και $A_2(\lambda)$ είναι $factor$ $equivalent$ τότε έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.*

Δείξαμε στο θεώρημα 2 ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και η πρώτη συνοδεύουσα μορφή είναι $factor$ ισοδύναμοι. Από το πόρισμα έχουμε ότι οι δυο αυτοί πίνακες έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες, δηλαδή έχουν τις ίδιες πεπερασμένες και άπειρες ιδιοτιμές.

1.4 Περίληψη

Στο πρώτο κεφάλαιο, το οποίο είναι και η εισαγωγή της εργασίας μας, αρχικά δώσαμε μερικούς βασικούς ορισμούς, έπειτα μελετήσαμε την πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή και τέλος αναφέραμε ορισμένα θεωρήματα που θα χρειαστούμε.
Ξεκινήσαμε δίνοντας τους ορισμούς της ιδιοτιμής και ιδιοδιανύσματος (δεξί και αριστερό), του δυϊκού πολυωνυμικού πίνακα, της ιδιοτιμής και του ιδιοδιανύσματος στο άπειρο, του μονομετρικού πολυωνυμικού πίνακα και της $Smith$ μορφής πολυωνυμικού πίνακα. Βασικός ορισμός, είναι και ο ορισμός της γραμμικοποίησης, η οποία αποτελεί και τον κύριο στόχο της εργασίας .
Στη δεύτερη παράγραφο ασχοληθήκαμε με την πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή . Όπως αναφέραμε, ο δυο συνοδεύουσες μορφές αποτελούν ισχυρό εργαλείο γραμμικοποίησης πολυωνυμικού πίνακα. Είναι απλές στην κατασκευή, προκύπτουν άμεσα από τα στοιχεία του πολυωνυμικού πίνακα και έχουν τις ίδιες πεπερασμένες και άπειρες ιδιοτιμές, μηδενικά και στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$. Αυτά τα πλεονεκτήματα τις κάνουν πολύ εύχρηστες και χρησιμοποιούνται ευρέως σε πολλές εφαρμογές. Ένα μειωνέκτημά τους, όμως, έγινε αφορμή για να ξεκινήσει περαιτέρω έρευνα στον τομέα της γραμμικοποίησης πολυωνυμικών πινάκων.
Στη τρίτη παράγραφο, αναφερθήκαμε στην έννοια της ισχυρής γραμμικοποίησης και συνδέσαμε τις έννοιες της γραμμικοποίησης και ισχυρής γραμμικοποίησης με τη διατήρηση των πεπερασμένων και άπειρων στοιχειωδών διαιρετών.
Ολοκληρώνοντας το πρώτο κεφάλαιο, αποδείξαμε ότι οι δυο συνοδεύουσες μορφές έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.

Έχουμε, λοιπόν, όλα τα απαραίτητα εφόδια για να ξεκινήσουμε τη μελέτη των τριών μεθόδων γραμμικοποίησης με τις οποίες θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία. Θα ξεκινήσουμε με τη μελέτη της πρώτης μεθόδου γραμμικοποίησης, της προσθετικής μεθόδου.

Κεφάλαιο 2

Η Προσθετική Μέθοδος

Είδαμε ότι για την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών της μορφής $P(\lambda)x = 0$ μπορούμε να επιλέξουμε τη μέθοδο της γραμμικοποίησης. Σε αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιούμε πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες της μορφής $L(\lambda) = \lambda X + Y$ με ιδιοτιμές ίδιες με αυτές του $P(\lambda)$. Η πιο συνηθισμένη μορφή τέτοιων γραμμικοποιήσεων αποτελούν η πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή, όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 1. Αυτές οι μορφές χρησιμοποιούνται ευρέως λόγω μερικών πολύ καλών ιδιοτήτων που έχουν. Μερικές από αυτές τις ιδιότητες είναι ότι είναι απλές στην κατασκευή, μπορούν να κατασκευαστούν απευθείας από τα στοιχεία του $P(\lambda)$ και έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Όπως θα δείξουμε στο κεφάλαιο αυτό τα ιδιοδιανύσματα του $P(\lambda)$ μπορούν εύκολα να αναχθούν από τα ιδιοδιανύσματα των συνοδευουσών μορφών.

Όμως παρόλο που οι πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή έχουν τόσες καλές ιδιότητες, έχουν και ένα μεγάλο μειονέκτημα: Δεν μεταφέρουν καμιά δομή ή συμμετρία που ενδεχομένως να έχει ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Θεωρούμε έναν συμμετρικό πολυωνυμικό πίνακα

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η πρώτη συνοδεύουσα μορφή όπως ορίστηκε στο κεφάλαιο 1 θα είναι

$$C_1(\lambda) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{array}\right],$$

ο οποίος προφανώς δεν είναι συμμετρικός διότι

$$C_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \neq C_1^T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Έτσι, για τις περιπτώσεις που ο αρχικός πολυωνυμικός πίνακας έχει κάποια δομή, προκύπτει η ανάγκη δημιουργίας άλλων μορφών που θα διατηρούν τις ιδιότητες που έχει ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και θα έχουν όσες περισσότερες είναι δυνατόν από τις ωραίες ιδιότητες των συνοδευουσών μορφών.
Η αναζήτηση αυτών των μορφών θα μας οδηγήσει στη δημιουργία διανυσματικών χώρων που θα έχουν ως στοιχεία πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες, τα οποία θα είναι γενικεύσεις των δυο συνοδευουσών μορφών και θα έχουν κοινές ιδιότητες με αυτά. Οι πρωτοβάθμιοι αυτοί πίνακες διατηρούν τη συμμετρία του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα. Στο προηγούμενο παράδειγμα, ο αντίστοιχος πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$, ο οποίος θα δούμε παρακάτω πώς προκύπτει, θα είναι

$$L(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο $L(\lambda)$ είναι συμμετρικός διότι

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \end{bmatrix} = L^T(\lambda).$$

Για τη δημιουργία αυτών των διανυσματικών χώρων θα ορίσουμε δυο νέες πράξεις, το μετατοπισμένο κατά στήλη άθροισμα και το μετατοπισμένο κατά γραμμή άθροισμα οι οποίες στηρίζονται στην πρόσθεση πινάκων από την οποία πήρε και την ονομασία της η μέθοδος. Οι πηγές που χρησιμοποιήσαμε για τη μελέτη της προσθετικής μεθόδου είναι κυρίως οι [7], [8], [25], [26] και [30].

2.1 Διανυσματικοί χώροι γραμμικοποιήσεων

Σε αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε δυο διανυσματικούς χώρους οι οποίοι βασίζονται σε γενικεύσεις της πρώτης και δεύτερης συνοδεύουσας μορφής.

2.1.1 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{L}_1(P)$

Αρχικά θα υπενθυμήσουμε τον ορισμό της πρώτης συνοδεύουσας μορφής.
Η πρώτη συνοδεύουσα μορφή είναι ένας πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας της μορφής $C_1(\lambda) = \lambda X_1 + Y_1$, όπου

$$X_1 = diag(A_k, I_{(k-1)n}) \text{ και } Y_1 = \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_0 \\ -I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Θέτοντας

$$x_1 = \lambda^{k-1}x,\ x_2 = \lambda^{k-2}x, \ldots,\ x_{k-1} = \lambda x,\ x_k = x, \tag{2.1}$$

στο $n \times n$ πολυωνυμικό πρόβλημα ιδιοτιμών $P(\lambda)x = \left(\sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i\right)x = 0$ προκύπτει

$$A_k(\lambda x_1) + A_{k-1}x_1 + A_{k-2}x_2 + \cdots + A_1 x_{k-1} + A_0 x_k = 0$$

Θέτοντας στη συνέχεια όπου $P(\lambda)$ την πρώτη συνοδεύσα μορφή προκύπτει

$$\underbrace{\left(\lambda \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_0 \\ -I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -I_n & 0 \end{bmatrix}\right)}_{=C_1(\lambda)} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} = 0. \tag{2.2}$$

Το διάνυσμα $\begin{bmatrix} \lambda^{k-1} & \lambda^{k-2} & \cdots & \lambda & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{F}^k$ των ελαττούμενων δυνάμεων του λ θα το συμβολίζουμε με Λ. Μερικές φορές μπορεί να χρησιμοποιήσουμε το Λ μαζί με κάποιο όρισμα, δηλαδή

$$\Lambda(r) := \begin{bmatrix} r^{k-1} & r^{k-2} & \cdots & r & 1 \end{bmatrix}^T. \tag{2.3}$$

Ακόμη σημειώνουμε ότι με $\otimes$ θα συμβολίζουμε το γινόμενο του *Kronecker*. Έτσι σύμφωνα με τη σχέση (2.1) η λύση της προηγούμενης σχέσης θα είναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} \overset{2.1}{=} \begin{bmatrix} \lambda^{k-1}x \\ \vdots \\ \lambda x \\ x \end{bmatrix} = \Lambda \otimes x$$

για κάποιο $x \in \mathbb{F}^n$. Παρατηρούμε ακόμη ότι

$$\begin{aligned} C_1(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes x) &= \begin{bmatrix} \lambda I_n + A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_0 \\ -I_n & \lambda I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -I_n & \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{k-1}x \\ \vdots \\ \lambda x \\ x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^k A_k x + \lambda^{k-2} A_{k-2} x + \ldots + \lambda A_1 x + A_0 x \\ -I_n \lambda^{k-1} x + \lambda^{k-1} I_n x + 0 + \ldots + 0 \\ 0 \\ 0 + \ldots + 0 - I_n \lambda x + \lambda I_n x \end{bmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$C_1(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes x) = \begin{bmatrix} P(\lambda)x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{F}^n$. Αυτό δείχνει ότι οι λύσεις της (2.2) είναι οι λύσεις του αρχικού μας προβλήματος $P(\lambda)x = 0$.
Τώρα, εφόσον η σχέση (2.4) ισχύει για όλα τα x έχουμε

$$\begin{aligned} C_1(\lambda)\cdot(\Lambda\otimes I_n) &= C_1(\lambda)\begin{bmatrix}\lambda^{k-1}I_n\\ \vdots\\ \lambda I_n\\ I_n\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\lambda^k A_k+\lambda^{k-1}A_{k-1}+\lambda^{k-2}A_{k-2}+\ldots+\lambda A_1+A_0\\ -\lambda^{k-1}I_n+\lambda^{k-1}I_n+0+\ldots+0\\ 0\\ 0+\ldots+0-\lambda I_n+\lambda I_n\end{bmatrix}\Rightarrow \end{aligned}$$

$$C_1(\lambda)\cdot(\Lambda\otimes I_n) = \begin{bmatrix}P(\lambda)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = e_1\otimes P(\lambda) \tag{2.5}$$

Έτσι γενικεύοντας την πρώτη συνοδεύουσα μορφή θεωρούμε όλους τους $kn\times kn$ πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες $L(\lambda)=\lambda X+Y$ οι οποίοι ικανοποιούν την ιδιοτήτα

$$L(\lambda)\cdot(\Lambda\otimes I_n) = L(\lambda)\begin{bmatrix}\lambda^{k-1}I_n\\ \vdots\\ \lambda I_n\\ I_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1P(\lambda)\\ \vdots\\ v_{k-1}P(\lambda)\\ v_kP(\lambda)\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$L(\lambda)\cdot(\Lambda\otimes I_n) = v\otimes P(\lambda) \tag{2.6}$$

για κάποιο διάνυσμα $v=[v_1,\ldots,v_k]^T\in\mathbb{F}^k$.

Θα θεωρήσουμε το σύνολο

$$\mathcal{V}_p=\{v\otimes P(\lambda)\ :\ v\in\mathbb{F}^k\} \tag{2.7}$$

όλων των διανυσμάτων v για τα οποία ισχύει η σχέση (2.6).
Τώρα έχουμε όλα τα απαραίτητα στοιχεία για να δώσουμε τον ορισμό του διανυσματικού χώρου $\mathbb{L}_1(P)$.

Ορισμός 23.

$$\mathbb{L}_1(P) := \{L(\lambda) = \lambda X + Y \ : X, Y \in \mathbb{F}^{kn\times kn}, \ \ L(\lambda)\cdot(\Lambda \otimes I_n) \in \mathcal{V}_p\}$$

Ορισμός 24. Δεξί *ansatz* **διάνυσμα**
Θα λέμε ότι το v είναι δεξί ansatz διάνυσμα για τον $L(\lambda)$ όταν $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ και το v είναι όπως στη σχέση (2.6).

Χρησιμοποιούμε τον όρο "δεξί" *ansatz* διότι ο $L(\lambda)$ πολλαπλασιάζεται από δεξιά με το $\Lambda \otimes I_n$.
Από τις ιδιότητες του *Kronecker* γινομένου προκύπτει ότι το σύνολο $\mathcal{V}_p$ είναι διανυσματικός χώρος ισόμορφος με τον $\mathbb{F}^k$ και κατ΄ επέκταση και ο $\mathbb{L}_1(P)$ είναι επίσης διανυσματικός χώρος.

Πρόταση 4. *Για κάθε πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$, ο $\mathbb{L}_1(P)$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{F}$.*

Στη συνέχεια θα δείξουμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες του διανυσματικού χώρου $\mathbb{L}_1(P)$ από δοσμένο πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$. Για να το κάνουμε όμως αυτό θα ορίσουμε μια καινούργια πράξη στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{L}_1(P)$.

Ορισμός 25. Μετατοπισμένο κατά στήλη άθροισμα (*Column Shifted Sum*)
Θεωρούμε $k \times k$ πίνακες X και Y της μορφής

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{k1} & \cdots & X_{kk} \end{bmatrix}, \ Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{k1} & \cdots & Y_{kk} \end{bmatrix}$$

με blocks $X_{ij}, Y_{ij} \ \in \mathbb{F}^{n\times n}$.
Τότε το Μετατοπισμένο κατά στήλη άθροισμα των X και Y ορίζεται να είναι:

$$X \boxplus\!\!\rightarrow Y := \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_{k1} & \cdots & X_{kk} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Y_{11} & \cdots & Y_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & Y_{k1} & \cdots & Y_{kk} \end{bmatrix},$$

όπου τα μηδενικά blocks είναι επίσης $n \times n$.

Θα δούμε, τώρα, μια εφαρμογή του μετατοπισμένου κατά στήλη αθροίσματος χρησιμοποιώντας τους πίνακες X_1 και Y_1 της πρώτης συνοδεύουσας μορφής $C_1(\lambda) = \lambda X_1 + Y_1$.

Εφαρμογή 1. *Θα βούμε το μετατοπισμένο κατά στήλη άθροισμα των πινάκων X_1 και Y_1 της πρώτης συνοδεύουσας μορφής $C_1(\lambda) = \lambda X_1 + Y_1$.*

Το μετατοπισμένο κατά στήλη άθροισμα $X_1 \boxplus\!\!\rightarrow Y_1$,των πινάκων X_1 και Y_1 της πρώτης συνοδεύουσας μορφής $C_1(\lambda) = \lambda X_1 + Y_1$, θα είναι

$$
\begin{aligned}
X_1 \boxplus\!\!\rightarrow Y_1 &= \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & I_n \end{bmatrix} \boxplus\!\!\rightarrow \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_0 \\ -I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -I_n & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_0 \\ 0 & -I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I_n & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε, όμως, ότι ισχύει

$$
\begin{aligned}
X_1 \boxplus\!\!\rightarrow Y_1 &= \begin{bmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_0 \end{bmatrix} \\
&= e_1 \otimes \begin{bmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

το οποίο μοιάζει πολύ με τη σχέση που είδαμε προηγουμένως $C_1(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I_n) = e_1 \otimes P(\lambda)$.
Έτσι έχουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 2. *Έστω ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i$ και ένας $kn \times kn$ πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda) = \lambda X + Y$. Τότε για $v \in \mathbb{F}^k$ θα έχουμε*

$$(\lambda X+Y)\cdot(\Lambda\otimes I_n) = v\otimes P(\lambda) \;\Leftrightarrow\; X \boxplus\!\!\rightarrow Y = v\otimes\begin{bmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_0\end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

και επομένως ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{L}_1(P)$ μπορεί να οριστεί ως

$$\mathbb{L}_1(P) = \{\lambda X+Y \;\;:\;\; X \boxplus\!\!\rightarrow Y = v\otimes\begin{bmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_0\end{bmatrix},\;\; v\in\mathbb{F}^k\}. \tag{2.9}$$

Απόδειξη.
" $\Rightarrow$ "
Υποθέτουμε ότι ισχύει $(\lambda X + Y)\cdot(\Lambda \otimes I_n) = v \otimes P(\lambda)$.
Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lambda X + Y &= \lambda \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{k1} & \cdots & X_{kk}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{k1} & \cdots & Y_{kk}\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda X_{11}+Y_{11} & \cdots & \lambda X_{1k}+Y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda X_{k1}+Y_{k1} & \cdots & \lambda X_{kk}+Y_{kk}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
(\lambda X + Y)(\Lambda\otimes I_n) &= \begin{bmatrix} \lambda X_{11}+Y_{11} & \cdots & \lambda X_{1k}+Y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda X_{k1}+Y_{k1} & \cdots & \lambda X_{kk}+Y_{kk}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{k-1} I_n \\ \lambda^{k-2} I_n \\ \vdots \\ \lambda I_n \\ I_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda^k X_{11} + \lambda^{k-1} Y_{11} + \lambda^{k-1} X_{12} + \lambda^{k-2} Y_{12} + \cdots + \lambda X_{1k} + Y_{1k} \\ \vdots \\ \lambda^k X_{k1} + \lambda^{k-1} Y_{k-1} + \lambda^{k-1} X_{k2} + \lambda^{k-2} Y_{k2} + \cdots + \lambda X_{kk} + Y_{kk} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda^k X_{11} + \lambda^{k-1}(Y_{11} + X_{12}) + \cdots + \lambda(Y_{1k-1} + X_{1k}) \\ \vdots \\ \lambda^k X_{k1} + \lambda^{k-1}(Y_{k1} + X_{k2}) + \cdots + \lambda(Y_{kk-1} + X_{kk}) + Y_{kk} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} v \otimes P(\lambda) &= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \otimes (\lambda^k A_k + \cdots + \lambda A_1 + A_0) \\ &= \begin{bmatrix} v_1(\lambda^k A_k + \cdots + A_0) \\ \vdots \\ v_k(\lambda^k A_k + \cdots + A_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^k v_1 A_k + \cdots + \lambda v_1 A_1 + v_1 A_0 \\ \vdots \\ \lambda^k v_k A_k + \cdots + \lambda v_k A_1 + v_k A_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Επομένως

$$(\lambda X + Y)(\Lambda \otimes I_n) = v \otimes P(\lambda)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{lll} X_{11} = v_1 A_k\,, & X_{12} + Y_{11} = v_1 A_{k-1}\,, & \cdots\,, \\ X_{1k} + Y_{1k-1} = v_1 A_1\,, & Y_{1k} = v_1 A_0\,, & \cdots\,, \\ \cdots\,, & X_{kk} + Y_{kk-1} = v_k A_1\,, & Y_{kk} = v_k A_0\,. \end{array} \tag{2.10}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} X \boxplus\!\!\rightarrow Y &= \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} + Y_{11} & \cdots & X_{1k} + Y_{1k-1} & Y_{1k} \\ \vdots & & & & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} + Y_{k1} & \cdots & X_{kk} + Y_{kk-1} & Y_{kk} \end{bmatrix} \\ &\overset{(2.10)}{=} \begin{bmatrix} v_1 A_k & v_1 A_{k-1} & \cdots & v_1 A_1 & v_1 A_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_k A_k & v_k A_{k-1} & \cdots & v_k A_1 & v_k A_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \\ &= v \otimes \begin{bmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_1 & A_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ "

Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
X \boxplus\!\!\rightarrow Y &= \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{k1} & \cdots & X_{kk} \end{bmatrix} \boxplus\!\!\rightarrow \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{k1} & \cdots & Y_{kk} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_{k1} & \cdots & X_{kk} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Y_{11} & \cdots & Y_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & Y_{k1} & \cdots & Y_{kk} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12}+Y_{11} & \cdots & X_{1k}+Y_{1k-1} & Y_{1k} \\ \vdots & & & & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2}+Y_{k1} & \cdots & X_{kk}+Y_{kk-1} & Y_{kk} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Από υπόθεση έχουμε ότι

$$
X \boxplus\!\!\rightarrow Y = v \otimes \begin{bmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_1 & A_0 \end{bmatrix} .
$$

Οπότε

$$
\begin{aligned}
X \boxplus\!\!\rightarrow Y &= \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12}+Y_{11} & \cdots & X_{1k}+Y_{1k-1} & Y_{1k} \\ \vdots & & & & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2}+Y_{k1} & \cdots & X_{kk}+Y_{kk-1} & Y_{kk} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_1 A_k & v_1 A_{k-1} & \cdots & v_1 A_1 & v_1 A_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_k A_k & v_k A_{k-1} & \cdots & v_k A_1 & v_k A_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{array}{lll} X_{11} = v_1 A_k \,, & X_{12}+Y_{11} = v_1 A_{k-1} \,, & \cdots \,, \\ X_{1k}+Y_{1k-1} = v_1 A_1 \,, & Y_{1k} = v_1 A_0 \,, & \cdots \,, \\ \cdots \,, & X_{kk}+Y_{kk-1} = v_k A_1 \,, & Y_{kk} = v_k A_0 \,. \end{array}
$$

Έτσι,

$$L(\lambda)(\Lambda \otimes I_n) = \begin{bmatrix} \lambda X_{11} + Y_{11} & \cdots & \lambda X_{1k} + Y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda X_{k1} + Y_{k1} & \cdots & \lambda X_{kk} + Y_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{k-1} I_n \\ \lambda^{k-2} I_n \\ \vdots \\ \lambda I_n \\ I_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^k X_{11} + \lambda^{k-1} Y_{11} + \lambda^{k-1} X_{12} + \lambda^{k-2} Y_{12} + \cdots + \lambda X_{1k} + Y_{1k} \\ \vdots \\ \lambda^k X_{k1} + \lambda^{k-1} Y_{k-1} + \lambda^{k-1} X_{k2} + \lambda^{k-2} Y_{k2} + \cdots + \lambda X_{kk} + Y_{kk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^k X_{11} + \lambda^{k-1}(Y_{11} + X_{12}) + \cdots + \lambda(Y_{1k-1} + X_{1k}) \\ \vdots \\ \lambda^k X_{k1} + \lambda^{k-1}(Y_{k1} + X_{k2}) + \cdots + \lambda(Y_{kk-1} + X_{kk}) + Y_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\overset{(2.10)}{=} \begin{bmatrix} \lambda^k v_1 A_k + \cdots + \lambda v_1 A_1 + v_1 A_0 \\ \vdots \\ \lambda^k v_k A_k + \cdots + \lambda v_k A_1 + v_k A_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1(\lambda^k A_k + \cdots + A_0) \\ \vdots \\ v_k(\lambda^k A_k + \cdots + A_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \otimes (\lambda^k A_k + \cdots + A_0)$$

$$= v \otimes P(\lambda).$$

□

Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3. *Έστω $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i$ και $v \in \mathbb{F}^k$ ένα οποιοδήποτε διάνυσμα. Τότε το σύνολο των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων του $\mathbb{L}_1(P)$ με δεξί ansatz διάνυσμα v αποτελείται από όλα τα $L(\lambda) = \lambda X + Y$ τέτοια ώστε*

$$X = \begin{bmatrix} \overset{n}{v \otimes A_k} & \overset{(k-1)n}{-W} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{bmatrix} W + \left(v \otimes \begin{bmatrix} \overset{(k-1)n}{A_{k-1} \quad \cdots \quad A_1} \end{bmatrix}\right) & \overset{n}{v \otimes A_0} \end{bmatrix},$$

με $W \in \mathbb{F}^{kn \times (k-1)n}$ αυθαίρετο.

Απόδειξη.
Θεωρούμε την απεικόνιση $\mathcal{M}$ με $\mathbb{L}_1(P) \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathcal{V}_p$ η οποία προκύπτει από τον ορισμό του διανυσματικού χώρου $\mathbb{L}_1(P)$ και ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_1(P) &\xrightarrow{\mathcal{M}} \mathcal{V}_p \\ L(\lambda) &\longmapsto L(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I_n). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Προφανώς η απεικόνιση $\mathcal{M}$ είναι γραμμική. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $\mathcal{M}$ είναι επί. Έστω $v \otimes P(\lambda)$ ένα τυχαίο στοιχείο του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_p$ και κατασκευάζουμε τα

$$X_v = \begin{bmatrix} \overset{n}{v \otimes A_k} & \overset{(k-1)n}{0} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Y_v = \begin{bmatrix} v \otimes \begin{bmatrix} \overset{(k-1)n}{A_{k-1} \quad \cdots \quad A_1} \end{bmatrix} & \overset{n}{v \otimes A_0} \end{bmatrix},$$

Τότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned} X_v \boxplus\!\!\!\rightarrow Y_v &= \begin{bmatrix} v \otimes A_k & 0 \end{bmatrix} \boxplus\!\!\!\rightarrow \begin{bmatrix} v \otimes \begin{bmatrix} A_{k-1} & \cdots & A_1 \end{bmatrix} & v \otimes A_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 A_k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_k A_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & v_1 A_{k-1} & \cdots & v_1 A_1 & v_1 A_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & v_k A_k & \cdots & v_k A_k & v_k A_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 A_k & v_1 A_{k-1} & \cdots & v_1 A_1 & v_1 A_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_k A_k & v_k A_{k-1} & \cdots & v_k A_1 & v_k A_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_0 \end{bmatrix} \\ &= v \otimes \begin{bmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και από το λήμμα 2 ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_v(\lambda) := \lambda X_v + Y_v$ είναι μια προ-εικόνα του $v \otimes P(\lambda)$ μέσω της απεικόνισης $\mathcal{M}$. Το σύνολο όλων των προ-εικόνων $v \otimes P(\lambda)$ θα ανήκουν στο $L_v + ker\mathcal{M}$. Έτσι μένει να υπολογίσουμε τον πυρήνα $ker\mathcal{M}$. Από τη σχέση (2.8) του λήμματος 2 ο πυρήνας της απεικόνισης $\mathcal{M}$ αποτελείται από όλους τους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες $\lambda X + Y$ για τους οποίους ισχύει $X \boxplus\!\!\rightarrow Y = 0$. Από τον ορισμό, όμως, του μετατοπισμένου κατά στήλη αθροίσματος προκύπτει ότι τα X και Y πρέπει να είναι της μορφής

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle n & \scriptstyle (k-1)n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & -W \end{array} \right] \end{array} \quad \text{και} \quad Y_v = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle (k-1)n & \scriptstyle n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} W & 0 \end{array} \right] \end{array},$$

όπου $W \in \mathbb{F}^{kn \times (k-1)n}$ είναι αυθαίρετο.
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξή μας.

$\square$

Πόρισμα 2.
$dim\, \mathbb{L}_1(P) = k(k-1)n^2 + k.$

Απόδειξη.
Εφόσον η απεικόνιση $\mathcal{M}$ είναι επί (όπως δείξαμε στην προηγούμενη απόδειξη) θα έχουμε $dim\, \mathbb{L}_1(P) = dim\, ker\, \mathcal{M} + dim\, \mathcal{V}_p = k(k-1)n^2 + k$.

$\square$

Το επόμενο πόρισμα δίνει μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 3 και θα είναι πολύ χρήσιμο για τα επόμενα.

Πόρισμα 3. *Υποθέτουμε ότι* $L(\lambda) = \lambda X + Y \in \mathbb{L}_1(P)$ *έχει δεξί ansatz διάνυσμα το* $v = \alpha e_1$. *Τότε*

$$X = \left[\begin{array}{c|c} \alpha A_k & X_{12} \\ \hline 0 & -Z \end{array} \right] \quad \textit{και} \quad Y = \left[\begin{array}{c|c} Y_{11} & \alpha A_0 \\ \hline Z & 0 \end{array} \right] \tag{2.12}$$

για κάποιο $Z \in \mathbb{F}^{(k-1)n \times (k-1)n}$.

Απόδειξη.
Από το Θεώρημα 3 έχουμε ότι

$$X = \begin{bmatrix} v \otimes A_k & -W \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} W + \left(v \otimes \begin{bmatrix} A_{k-1} & \cdots & A_1 \end{bmatrix}\right) & v \otimes A_0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} v \otimes A_k & -W \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 A_k & -W_{11} & \cdots & -W_{1k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_k A_k & -W_{k1} & \cdots & -W_{kk-1} \end{bmatrix} \\ &\overset{v=\alpha e_1=\begin{bmatrix}\alpha\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}{=} \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha A_k & -W_{11} & \cdots & -W_{1k-1} \\ \hline 0 & -W_{21} & \cdots & -W_{2k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -W_{k1} & \cdots & -W_{kk-1} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \alpha A_k & X_{12} \\ \hline 0 & -Z \end{array}\right] \end{aligned}$$

όπου

$$X_{12} = \begin{bmatrix} -W_{11} & \cdots & -W_{1k-1} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Z = \begin{bmatrix} W_{21} & \cdots & W_{2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ W_{k1} & \cdots & W_{kk-1} \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad Z \in \mathbb{F}^{(k-1)n \times (k-1)n}.$$

Επίσης

$$\begin{aligned} Y &= \begin{bmatrix} W_{11} + v_1 A_{k-1} & \cdots & W_{1k-1} + v_1 A_1 & v_1 A_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ W_{1k} + v_k A_{k-1} & \cdots & W_{1k-1} + v_k A_1 & v_k A_0 \end{bmatrix} \\ &\overset{v=\alpha e_1=\begin{bmatrix}\alpha\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} W_{11} + \alpha A_{k-1} & \cdots & W_{1k-1} + \alpha A_1 & \alpha A_0 \\ \hline W_{21} & \cdots & W_{2k-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ W_{k1} & \cdots & W_{kk-1} & 0 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} Y_{11} & \alpha A_0 \\ \hline Z & 0 \end{array}\right] \end{aligned}$$

όπου

$$Y_{11} = \begin{bmatrix} W_{11} + \alpha A_{k-1} & \cdots & W_{1k-1} + \alpha A_1 \end{bmatrix}$$

και

$$Z = \begin{bmatrix} W_{21} & \cdots & W_{2k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ W_{k1} & \cdots & W_{kk-1} \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad Z \in \mathbb{F}^{(k-1)n \times (k-1)n}.$$

□

Παρατηρούμε ότι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή ικανοποιεί τη μορφή του προηγούμενου πορίσματος όταν $v = e_1$ και $Z = -I_{(k-1)n}$.
Επομένως τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου $\mathbb{L}_1(P)$ αποτελούν γενίκευση της πρώτης συνοδεύουσας μορφής. Η πρώτη συνοδεύουσα μορφή μας ήταν πολύ χρήσιμη λόγω της ενδιαφέρουσας ιδιότητάς της να έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον αρχικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ τον οποίο και γραμμικοποιούσε. Έτσι παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να εξετάσουμε αν ισχύει το ίδιο και με τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου $\mathbb{L}_1(P)$. Είχαμε δει ότι τα ιδιοδιανύσματα της πρώτης συνοδεύουσας μορφής $C_1(\lambda)$ έχουν τη μορφή $\Lambda \otimes x$, όπου x είναι ιδιοδιάνυσμα του $P(\lambda)$. Άρα μπορούμε να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα του $P(\lambda)$ παίρνοντας τις τελευταίες n συντεταγμένες των ιδιοδιανυσμάτων της πρώτης συνοδεύουσας μορφής. Επομένως στόχος μας είναι να δείξουμε ότι και τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου $\mathbb{L}_1(P)$ έχουν την ίδια ιδιότητα.

Θεώρημα 4. *Θεωρούμε $n \times n$ πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ βαθμού k και έναν τυχαίο πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $L(\lambda)$ του $P(\lambda)$, με μη - μηδενικό δεξί ansatz διάνυσμα v. Τότε το $x \in \mathbb{C}^n$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $P(\lambda)$ με πεπερασμένη ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ αν και μόνον αν το $\Lambda \otimes x$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $L(\lambda)$ με ιδιοτιμή λ. Αν, επιπλέον, ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι κανονικός και $L \in \mathbb{L}_1(P)$ είναι μια γραμμικοποίηση του P, τότε κάθε ιδιοδιάνυσμα του L με πεπερασμένη ιδιοτιμή λ είναι της μορφής $\Lambda \otimes x$ για κάποιο ιδιοδιάνυσμα x του P.*

Απόδειξη.
Ο πρώτος ισχυρισμός προκύπτει αμέσως από τη σχέση

$$L(\lambda)(\Lambda \otimes x) = L(\lambda)(\Lambda \otimes I_n)(1 \otimes x) = (v \otimes P(\lambda))(1 \otimes x) = v \otimes (P(\lambda)x).$$

Για το δεύτερο ισχυρισμό υποθέτουμε ότι $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι πεπερασμένη ιδιοτιμή του $L(\lambda)$ με γεωμετρική πολλαπλότητα m, και έστω $y \in \mathbb{C}^{kn}$ είναι ένα οποιοδήποτε ιδιοδιάνυσμα του $L(\lambda)$ το οποίο αναφέρεται στην ιδιοτιμή λ. Εφόσον το $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του $P(\lambda)$, η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ του $P(\lambda)$ είναι επίσης m. Έστω $x_1, \dots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του $P(\lambda)$ τα οποία αναφέρονται στην ιδιοτιμή λ και ορίζουν $y_i = \Lambda \otimes x_i$, για $i = 1, \dots, m$. Τότε τα $y_1, \dots, y_m$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του $L(\lambda)$ με ιδιοτιμή λ και επομένως το y πρέπει να είναι γραμμικός συνδυασμός των $y_1, \dots, y_m$. Άρα το y θα είναι της μορφής $y = \Lambda \otimes x$ για κάποιο ιδιοδιάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ του P.

$\square$

Για καλύτερη κατανόηση του προηγούμενου θεωρήματος θα δώσουμε στο σημείο αυτό ένα παράδειγμα. Θα χρησιμοποιήσουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ του παραδειγματος που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1.

Παράδειγμα

Θεωρήσαμε στο παράδειγμα του Κεφαλαίου 1, τον πολυωνυμικό πίνακα

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 - 1 \\ \lambda - 2 & \lambda^3 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Είδαμε ακόμη ότι ο $P(\lambda)$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ και αντίστοιχες οικογένειες ιδιοδιανυσμάτων $x_1^* = x_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε και την πρώτη συνοδευουσα μορφή

$$C_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Είδαμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και η πρώτη συνοδεύουσα μορφή έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα δεξιά ιδιοδιανύσματα της πρώτης συνοδεύουσας μορφής θα είναι της μορφής $\Lambda \otimes x^*$, όπου x^* είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της πεπερασμένης ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$.
Έτσι, για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ τα ιδιοδιανύσματα της πρώτης συνοδεύουσας

μορφής θα είναι:

$$\Lambda \otimes x_1^* \;=\; \begin{bmatrix} \lambda_1^2 I_2 \\ \lambda_1 I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Έπίσης, για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ τα ιδιοδιανύσματα της πρώτης συνοδεύουσας μορφής θα είναι:

$$\Lambda \otimes x_2^* \;=\; \begin{bmatrix} \lambda_2^2 I_2 \\ \lambda_2 I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Πράγματι, τα ιδιοδιανύσματα που βρήκαμε είναι τα ίδια με αυτά που είχαμε βρει στο παράδειγμα του Κεφαλαίου 1.
Τώρα θέλουμε να κάνουμε το αντίθετο. Θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, παίρνοντας έναν πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα του διανυσματικού χώρου $\mathbb{L}_1(P)$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα.
Θεωρούμε τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα όπως στο Θεώρημα 3 με

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι,

$$
\begin{aligned}
L(\lambda) &= \lambda X + Y \\
&= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \lambda-2 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Αρχικά θα βρούμε τις ιδιοτιμές του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα.

$$
detL(\lambda) = det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \lambda-2 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= -\lambda \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & \lambda-2 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda & -\lambda \end{bmatrix}
$$

$$
= \cdots = \lambda^4 - \lambda^4 + \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda - \lambda^2 + \lambda^2 - \lambda + 2
$$

$$
= 2 - 2\lambda^2 = 2(1 - \lambda^2)
$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Στη συνέχεια θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα:

$$
\begin{aligned}
L(\lambda)\cdot x = 0 \quad &\Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \lambda-2 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{array}{l} \lambda x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ \lambda x_2 + (\lambda-2)x_5 - \lambda x_6 = 0 \\ x_3 + \lambda x_5 = 0 \\ x_1 - \lambda x_3 = 0 \\ x_4 - \lambda x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 - \lambda x_4 - \lambda x_5 = 0 \end{array}
\end{aligned}
$$

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα θα είναι:

$$
\begin{array}{r} x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_5 - x_6 = 0 \\ x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_4 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_5 = 0 \\ x_3 = x_5 = x_1 \\ x_4 = x_6 = x_2 \\ x_2 = t\ ,\ t \in \mathbb{R} \end{array} \overset{\iota\delta\iota o\delta\iota\alpha\nu\upsilon\sigma\mu\alpha}{\rightsquigarrow} x_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.
$$

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα θα είναι:

$$
\begin{array}{r} -x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ -x_2 - 3x_5 + x_6 = 0 \\ x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_5 = 0 \\ -x_3 = x_5 = x_1 \\ -x_4 = x_6 = x_2 \\ x_2 = t\ ,\ t \in \mathbb{R} \end{array} \overset{\iota\delta\iota o\delta\iota\alpha\nu\upsilon\sigma\mu\alpha}{\rightsquigarrow} x_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.
$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το προηγούμενο θεώρημα θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ από τα ιδιοδιανύσματα του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L(\lambda)$.
Έστω u_1^* και u_2^* οι δυο οικογένειες ιδιοδιανυσμάτων του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ για τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και λ_2 αντίστοιχα.

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ η αντίστοιχη οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα είναι:

Από το Θεώρημα 3 έχουμε τη σχέση

$$\begin{aligned}
\Lambda \otimes u_1^* &= x_1^* \Rightarrow \\
\begin{bmatrix} \lambda_1^2 I_2 \\ \lambda_1 I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 0\ ,\ u_2 = t\ \ ,\ \ t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι: $u_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}\ \ ,\ \ t \in \mathbb{R}$.
Δουλεύουμε ομοίως για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ η αντίστοιχη οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα είναι:
Από το Θεώρημα 3 έχουμε τη σχέση

$$\begin{aligned}
\Lambda \otimes u_2^* &= x_2^* \Rightarrow \\
\begin{bmatrix} \lambda_2^2 I_2 \\ \lambda_2 I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ -u_1 \\ -u_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 0\ ,\ u_2 = t\ \ ,\ \ t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ είναι: $u_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}\ \ ,\ \ t \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι βρήκαμε τις οικογένειες ιδιοδιανυσμάτων του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, οι οποίες είναι ίδιες με αυτές που είχαμε βρει στην αρχή.

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, στην παράγραφο αυτή δημιουργήσαμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{L}_1(P)$ χρησιμοποιώντας την πρώτη συνοδεύουσα μορφή. Δείξαμε ότι ο διανυσματικός αυτός χώρος αποτελεί γενίκευσή της και επιπλέον έχει την σημαντική ιδιότητά της, να έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με δοσμένο αρχικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$. Δημιουργείται όμως το ερώτημα του τί θα γινόνταν αν είχαμε χρησιμοποιήσει αντί της πρώτης συνοδεύουοσας μορφής, τη δεύτερη συνοδεύουσα μορφή. Έτσι, στη συνέχεια της μελέτης μας, θα ασχοληθούμε με τη δεύτερη συνοδεύουσα μορφή και θα προσπαθήσουμε να βγάλουμε ανάλογα συμπεράσματα.

2.1.2 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{L}_2(P)$

Θα υπενθυμήσουμε και πάλι τον ορισμό της δεύτερης συνοδεύουσα μορφή.
Η δεύτερη συνοδεύουσα μορφή είναι ένας πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας της μορφής $C_2(\lambda) = \lambda X_2 + Y_2$, όπου

$$X_2 = diag(A_k, I_{(k-1)n}) \;\text{ και }\; Y_2 = \begin{bmatrix} A_{k-1} & -I_n & \cdots & 0 \\ A_{k-2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -I_n \\ A_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Θέτοντας, όπως και προηγούμενα

$$x_1 = \lambda^{k-1}x,\; x_2 = \lambda^{k-2}x, \ldots,\; x_{k-1} = \lambda x,\; x_k = x, \tag{2.13}$$

στο $n \times n$ πολυωνυμικό πρόβλημα ιδιοτιμών $xP(\lambda) = x\Big(\sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i\Big) = 0$ προκύπτει, όπως είδαμε

$$(\lambda x_1)A_k + x_1 A_{k-1} + x_2 A_{k-2} + \cdots + x_{k-1}A_1 + x_k A_0 = 0$$

Θέτοντας στη συνέχεια όπου $P(\lambda)$ την δεύτερη συνοδεύουσα μορφή προκύπτει

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_{k-1} & x_k \end{bmatrix} \underbrace{\left(\lambda \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{k-1} & -I_n & \cdots & 0 \\ A_{k-2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -I_n \\ A_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right)}_{=C_2(\lambda)} = 0.$$

(2.14)

Επομένως η λύση του $xP(\lambda) = 0$ θα είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_{k-1} & x_k \end{bmatrix} \overset{(2.13)}{=} \begin{bmatrix} \lambda^{k-1}x & \cdots & \lambda x & x \end{bmatrix} = \Lambda^T \otimes x$$

για κάποιο διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^n$.

Έτσι θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} \lambda^{k-1}I_n & \cdots & \lambda I_n & I_n \end{bmatrix} \cdot C_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^{k-1}I_n & \cdots & \lambda I_n & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda A_k + A_{k-1} & -I_n & \cdots & 0 \\ A_{k-2} & \lambda I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & -I_n \\ A_0 & 0 & \cdots & \lambda I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \lambda^k A_k + \lambda^{k-1}A_{k-1} + \ldots + \lambda A_1 + A_0 & -\lambda^{k-1}I_n + \lambda^{k-1}I_n & \cdots & -\lambda I_n + \lambda I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

για όλα τα διανύσματα $x \in \mathbb{F}^n$.
Άρα κάθε λύση του (2.14) δίνει λύση του αρχικού προβλήματος $xP(\lambda) = 0$.
Ακόμη προκύπτει η ισότητα

$$\begin{aligned} (\Lambda^T \otimes I_n) \cdot C_2(\lambda) &= \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \otimes P(\lambda) \\ &= e_1^T \otimes P(\lambda) \end{aligned}$$

Έτσι γενικεύοντας τη δεύτερη συνοδεύουσα μορφή θεωρούμε το σύνολο όλων των $kn \times kn$ πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων $L(\lambda) = \lambda X + Y$ τα οποία ικανοποιούν την ιδιότητα

$$\begin{aligned} (\Lambda^T \otimes I_n) \cdot L(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda^{k-1}I_n & \cdots & \lambda I_n & I_n \end{bmatrix} \cdot L(\lambda) \\ &= \begin{bmatrix} w_1 P(\lambda) & \cdots & w_{k-1}P(\lambda) & w_k P(\lambda) \end{bmatrix} \\ &= w^T \otimes P(\lambda) \end{aligned}$$

για κάποιο $w = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_k \end{bmatrix}^T \in \mathbb{F}^k$.

Θα θεωρήσουμε, τώρα, το σύνολο

$$\mathcal{W}_p = \{w^T \otimes P(\lambda) : w \in \mathbb{F}^k\}.$$

και θα δώσουμε τον ορισμό του $\mathbb{L}_2(P)$ διανυσματικού χώρου.

Ορισμός 26.

$$\mathbb{L}_2(P) = \{L(\lambda) = \lambda X + Y : X, Y \in \mathbb{F}^{kn \times kn} \ , \ (\Lambda^T \otimes I_n) \cdot L(\lambda) \in \mathcal{W}_p\}.$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι και για τη δεύτερη συνοδεύουσα μορφή δουλεύουμε όπως και στην πρώτη συνοδευουσα μορφή. Επομένως τα συμπεράσματα θα είναι ανάλογα [25]. Για αυτό το λόγο θα αναφέρουμε εν συντομία τα θεωρήματα και τα λήμματα που ισχύουν για τη δεύτερη συνοδεύουσα μορφή. Οι αποδείξεις είναι ακριβώς ανάλογες με αυτές που αναφέραμε για την πρώτη συνοδεύουσα μορφή.

Όπως είδαμε και στην πρώτη συνοδεύουσα μορφή , θα δώσουμε τον ορισμό του αριστερού *ansatz* διανύσματος.

Ορισμός 27. Αριστερό ansatz διάνυσμα
Θα λέμε ότι το w είναι αριστερό *ansatz* διάνυσμα για τον $L(\lambda)$ όταν $L(\lambda) \in \mathbb{L}_2(P)$ και για το w ισχύει $(\Lambda^T \otimes I_n)L(\lambda) = w \otimes P(\lambda)$.

Χρησιμοποιούμε τον όρο " αριστερό " *ansatz* διάνυσμα διότι ο $L(\lambda)$ πολλαπλασιάζεται από αριστερά με τον $\Lambda^T \otimes I_n$.

Ορισμός 28. Μετατοπισμένο κατά γραμμή άθροισμα (*Row Shifted Sum*)
Θεωρούμε τους block-πίνακες X και Y

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{k1} & \cdots & X_{kk} \end{bmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{k1} & \cdots & Y_{kk} \end{bmatrix}$$

με block X_{ij}, $Y_{ij} \in \mathbb{F}^{n \times n}$.
Τότε το μετατοπισμένο κατά γραμμή άθροισμα των πινάκων X και Y ορίζεται

να είναι:

$$X \boxplus Y := \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{k1} & \cdots & X_{kk} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ Y_{11} & \cdots & Y_{1k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_{k1} & \cdots & Y_{kk} \end{bmatrix}$$

όπου τα μηδενικά blocks είναι διάστασης $n \times n$.

Το επόμενο λήμμα δείχνει τη σχέση του αριστερού *ansatz* διανύσματος και του μετατοπισμένου κατά γραμμή αθροίσματος.

Λήμμα 3. *Θεωρούμε $n \times n$ πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i$ και ένα $kn \times kn$ πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $L(\lambda) = \lambda X + Y$. Τότε για κάθε $w \in \mathbb{F}^k$ ισχύει*

$$(\Lambda^T \otimes I_n) \cdot (\lambda X + Y) = w^T \otimes P(\lambda) \Leftrightarrow X \boxplus Y = w^T \otimes \begin{bmatrix} A_k \\ \vdots \\ A_0 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Κάνοντας χρήση του μετατοπισμένου κατά γραμμή αθροίσματος μπορούμε να κατασκευάσουμε όλους τους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες του $\mathbb{L}_2(P)$.

Θεώρημα 5. *Θεωρούμε $n \times n$ πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i$ και $w \in \mathbb{F}^k$ τυχαίο διάνυσμα. Τότε το σύνολο των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων του $\mathbb{L}_2(P)$ με αριστερό ansatz διάνυσμα w αποτελείται από όλα τα $L(\lambda) = \lambda X + Y$ για τα οποία ισχύει*

$$X = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} w^T \otimes A_k \\ -V \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} {\scriptstyle n} \\ {\scriptstyle (k-1)n} \end{array} \quad \kappa\alpha\iota \quad Y = \begin{bmatrix} V + (w^T \otimes \begin{bmatrix} A_{k-1} & \cdots & A_1 \end{bmatrix}) \\ w^T \otimes A_0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle (k-1)n} \\ {\scriptstyle n} \end{array}$$

όπου $V \in \mathbb{F}^{(k-1)n \times kn}$ τυχαίο διάνυσμα.

Πόρισμα 4.

$$dim(\mathbb{L}_2(P)) = dim(\mathbb{L}_1(P)) = k(k-1)n^2 + k$$

Απόδειξη.
Εφόσον η απεικόνιση $\mathcal{N}$ είναι επί θα έχουμε

$$dim(\mathbb{L}_2(P)) = dim(ker\mathcal{N}) + dim(\mathcal{W}_p) = k(k-1)n^2 + k$$

□

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι τα αριστερά ιδιοδιανύσματα του P μπορούν εύκολα να δημιουργηθούν από τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου $\mathbb{L}_2(P)$.

Θεώρημα 6. *Θεωρούμε $n \times n$ πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ βαθμού k και τυχαίο πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $L(\lambda)$ του $\mathbb{L}_2(P)$ με μη-μηδενικό αριστερό ansatz διάνυσμα w. Τότε το $y \in \mathbb{C}^n$ είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του $P(\lambda)$ με πεπερασμένη ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ αν και μόνον αν $\overline{\Lambda} \otimes y$ είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα για το $L(\lambda)$ με ιδιοτιμή λ. Αν, επιπλέον, ο πολυωνυμικός πίνακας P είναι κανονικός και $L \in \mathbb{L}_2(P)$ είναι γραμμικοποίηση του P, τότε κάθε αριστερό ιδιοδιάνυσμα του L με πεπερασμένη ιδιοτιμή λ είναι της μορφής $\overline{\Lambda} \otimes y$ για κάποιο αριστερό ιδιοδιάνυσμα y του P.*

Στην παράγραφο αυτή δημιουργήσαμε δυο διανυσματικούς χώρους $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$ οι οποίοι αποτελούν γενίκευση της πρώτης και δεύτερης συνοδεύουσας μορφής. Ορίσαμε πάνω στους χώρους αυτούς από μια πράξη, στον $\mathbb{L}_1(P)$ το μετατοπισμένο κατά στήλη άθροισμα και στον $\mathbb{L}_2(P)$ το μετατοπισμένο κατά γραμμή άθροισμα. Με τη βοήθεια αυτών των πράξεων είδαμε ότι αυτοί οι δυο διανυσματικοί χώροι έχουν την ίδια διάσταση και έχουν μια πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα. Κάποια από τα στοιχεία τους αποτελούν γραμμικοποιήσεις δοσμένου αρχικού πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ με τις ίδιες ιδιοτιμές. Επομένως, γεννάται το ερώτημα πότε ένας πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας του διανυσματικού χώρου $\mathbb{L}_1(P)$ αποτελεί γραμμικοποίηση δοσμένου αρχικού πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Με την απάντηση του ερωτήματος αυτού θα ασχοληθούμε στην επόμενη παράγραφο.

2.2 Γραμμικοποιήσεις του $\mathbb{L}_1(P)$ διανυσματικού χώρου

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε ποια από τα στοιχεία των διανυσματικών χώρων $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$ αποτελούν γραμμικοποιήσεις δοσμένου πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Σημειώνουμε ότι δεν είναι όλοι οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες των χώρων $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$ γραμμικοποιήσεις δοσμένου πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Έτσι εδώ θα μας απασχολήσει η εύρεση των κριτηρίων τα οποία θα μας επιτρέπουν να διακρίνουμε πότε ένας πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας αποτελεί γραμμικοποίηση δοσμένου πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε τις συνθήκες και τα κριτήρια που πρέπει να ισχύουν για να έχουμε γραμμικοποίηση στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{L}_1(P)$. Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν και για το διανυσματικό χώρο $\mathbb{L}_2(P)$.

2.2.1 Θεώρημα Ισχυρής Γραμμικοποίησης

Αρχικά θα δώσουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα το οποίο θα μας φανεί πολύ χρήσιμο για την απόδειξη του θεωρήματος ισχυρής γραμμικοποίησης.

Παρατήρηση 3. *Σημειώνουμε ότι για το επόμενο θεώρημα δεν είναι απαραίτητη η υπόθεση που κάναμε στην αρχή της μελέτης μας ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι κανονικός. Το επόμενο θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας είναι ιδιάζων.*

Θεώρημα 7. *Θεωρούμε έναν $n \times n$ πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i A_i$ με $A_k \neq 0$ και έναν πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $L(\lambda) = \lambda X + Y$ το οποίο έχει μη-μηδενικό δεξί ansatz διάνυσμα $v = \alpha e_1$ τέτοιο ώστε*

$$L(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I_n) = \alpha e_1 \otimes P(\lambda) \tag{2.16}$$

Θεωρούμε πίνακες X και Y όπως στο Πόρισμα 3. Θα έχουμε, λοιπόν,

$$L(\lambda) = \lambda X + Y = \lambda \left[\begin{array}{c|c} \alpha A_k & X_{12} \\ \hline 0 & -Z \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} Y_{11} & \alpha A_0 \\ \hline Z & 0 \end{array} \right] \tag{2.17}$$

όπου $Z \in \mathbb{F}^{(k-1)n \times (k-1)n}$. Τότε ο κανονικός πίνακας Z δείχνει ότι το $L(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του $P(\lambda)$.

Απόδειξη.
Αρχικά θα δείξουμε ότι ο $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του $P(\lambda)$.
Θεωρούμε τους πίνακες $R = R_k$ διάστασης $n \times n$ και $N = N_k$ διάστασης $k \times k$

$$R = R_k = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad N = N_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε επίσης τους αντιστρέψιμους πολυωνυμικούς πίνακες

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{k-1} \\ & 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \lambda^2 \\ & & & \ddots & \lambda \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \otimes I_n \quad \kappa\alpha\iota \quad G(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \lambda^{k-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \lambda \\ & & & 1 \end{bmatrix} \otimes I_n$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία *block*- στήλη του $G(\lambda)$ είναι $\Lambda \otimes I_n$ και ότι ο $T(\lambda)$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$T(\lambda) = G(\lambda) \begin{bmatrix} I_n & \lambda I_n & & & \\ & I_n & & & \\ & & I_n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & & & & \\ & I_n & \lambda I_n & & \\ & & I_n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_n \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_n & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_n & \lambda I_n & \\ & & & I_n & \\ & & & & I_n \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Θέλουμε να μετατρέψουμε τον $L(\lambda)$ σε $diag(P(\lambda), I_{(k-1)n})$ χρησιμοποιώντας τους αντιστρέψιμους πολυωνυμικούς πίνακες $T(\lambda)$ και $G(\lambda)$. Στο γινόμενο $L(\lambda) \cdot G(\lambda)$, οι πρώτες $k-1$ *block*-στήλες είναι ίδιες με αυτές του $L(\lambda)$ διότι οι τελευταίες *block*-στήλες του $G(\lambda)$ είναι $\Lambda \otimes I_n$ και επομένως από τη σχέση

$L(\lambda)\cdot(\Lambda\otimes I_n)=v\otimes P(\lambda)$ έχουμε

$$\begin{aligned} L(\lambda)\cdot G(\lambda) &= L(\lambda)\cdot(\Lambda\otimes I_n)=v\otimes P(\lambda) \\ &\overset{v=\alpha e_1}{=} \alpha e_1\otimes P(\lambda)=\begin{bmatrix}\alpha\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}\otimes P(\lambda) \\ &= \begin{bmatrix}\alpha P(\lambda)\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

δηλαδή οι τελευταίες *block*- στήλες του γινομένου $L(\lambda)\cdot G(\lambda)$ είναι $\alpha e_1\otimes P(\lambda)$. Χωρίζοντας το Z της σχέσης (2.17) σε *block*- στήλες $\begin{bmatrix}Z_1 & Z_2 & \cdots & Z_{k-1}\end{bmatrix}$ όπου $Z_i\in\mathbb{F}^{(k-1)n\times n}$ προκύπτει

$$\begin{aligned} L(\lambda)\cdot G(\lambda) &= \begin{bmatrix}\star & \star & \cdots & \star & \star\\ Z_1 & (Z_2-\lambda Z_1) & \cdots & (Z_{k-1}-\lambda Z_{k-2}) & -\lambda Z_{k-1}\end{bmatrix}\cdot G(\lambda) \\ &= \begin{bmatrix}\star & \star & \cdots & \star & \alpha P(\lambda)\\ Z_1 & (Z_2-\lambda Z_1) & \cdots & (Z_{k-1}-\lambda Z_{k-2}) & 0\end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ακόμη έχουμε

$$L(\lambda)\cdot T(\lambda) \overset{(2.18)}{=} L(\lambda)G(\lambda)\begin{bmatrix}I_n & \lambda I_n & & & \\ & I_n & & & \\ & & I_n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & & & & \\ & I_n & \lambda I_n & & \\ & & I_n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_n\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}I_n & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_n & \lambda I_n & \\ & & & I_n & \\ & & & & I_n\end{bmatrix}$$

$$\overset{(2.19)}{=} \begin{bmatrix}\star & \star & \cdots & \star & \alpha P(\lambda)\\ Z_1 & (Z_2-\lambda Z_1) & \cdots & (Z_{k-1}-\lambda Z_{k-2}) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & \lambda I_n & & & \\ & I_n & & & \\ & & I_n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & & & & \\ & I_n & \lambda I_n & & \\ & & I_n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_n\end{bmatrix}$$

$$\cdots\begin{bmatrix}I_n & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_n & \lambda I_n & \\ & & & I_n & \\ & & & & I_n\end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{c|c}\star & \alpha P(\lambda)\\ \hline Z & 0\end{array}\right].$$

Πραγματοποιώντας *block*-μεταθέσεις στο $L(\lambda)\cdot T(\lambda)$ δείχνουν ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πολυωνυμικός πίνακας $F(\lambda)$ τέτοιος ώστε

$$L(\lambda)\cdot F(\lambda)=\left[\begin{array}{c|c}P(\lambda) & W(\lambda)\\ \hline 0 & Z\end{array}\right]$$

για κάποιο πολυωνυμικό πίνακα $W(\lambda)$.
Σημειώνουμε ότι μέχρι τώρα δεν κάναμε καμία υπόθεση για τον πίνακα Z.
Όμως, αν ο Z είναι κανονικός, τότε ο $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση για τον $P(\lambda)$ εφόσον

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c|c} I_n & -W(\lambda)Z^{-1} \\ \hline 0 & Z^{-1} \end{array}\right] \cdot L(\lambda) \cdot F(\lambda) &= \left[\begin{array}{c|c} I_n & -W(\lambda)Z^{-1} \\ \hline 0 & Z^{-1} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & W(\lambda) \\ \hline 0 & Z \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & W(\lambda) - W(\lambda)Z^{-1} \\ \hline 0 & Z^{-1}Z \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & I_{(k-1)n} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι ο $L(\lambda)$ είναι και ισχυρή γραμμικοποίησης για το $P(\lambda)$, μένει να δείξουμε ότι $revL(\lambda) = \lambda X + Y$ είναι γραμμικοποίηση για το $revL(\lambda)$.
Παρατηρούμε ότι

$$\lambda^{k-1}\Lambda(1/\lambda) = \lambda^{k-1}\begin{bmatrix} 1/\lambda^{k-1} \\ 1/\lambda^{k-2} \\ \vdots \\ 1/\lambda \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ 1/\lambda^{k-2} \\ 1/\lambda^{k-1} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

$$= \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{k-1} \\ \lambda^{k-2} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

$$= R_k\Lambda(\lambda) \tag{2.22}$$

όπου R_k όπως έχουμε δει είναι διάστασης $n \times n$.
Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το λ με $\frac{1}{\lambda}$ στη σχέση (2.16) και πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη με λ^k έχουμε

$$\lambda L(1/\lambda) \cdot \left(\lambda^{k-1}\Lambda(1/\lambda) \otimes I_n\right) = \alpha e_1 \otimes \lambda^k P(1/\lambda),$$

ή ισοδύναμα, από τη σχέση (2.22) και τον ορισμό του δυικού πολυωνυμικού πίνακα, έχουμε

$$revL(\lambda) \cdot (R_k\Lambda \otimes I_n) = \alpha e_1 \otimes revP(\lambda) \tag{2.23}$$

Έτσι, θέτουμε $\widehat{L}(\lambda) := revL(\lambda) \cdot (R_k \otimes I_n)$ και η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\widehat{L}(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I_n) = \alpha e_1 \otimes revP(\lambda)$$

Αυτό σημαίνει ότι $\widehat{L} \in \mathbb{L}_1(revP)$ από τον ορισμό του διανυσματικού χώρου $\mathbb{L}_1$. Σημειώνουμε ότι ο $\widehat{L}(\lambda)$ είναι ουσιαστικά ο $revL(\lambda) = \lambda X + Y$ με *block*- στήλες των Y και X διατεταγμένα σε αντίστροφη σειρά.

Εφόσον ο $\widehat{L}$ και ο $revL$ είναι ισοδύναμοι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες, η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν δείξουμε ότι $\lambda\widehat{X} + \widehat{Y} := \widehat{L}(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση για τον $revP(\lambda)$. Αλλά $\widehat{X} = Y \cdot (R_k \otimes I_n)$ και $\widehat{Y} = X \cdot (R_k \otimes I_n)$ και επομένως από τη σχέση (2.17) έχουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{X} &= Y \cdot (R_k \otimes I_n) \\
&= \left[\begin{array}{c|c} Y_{11} & \alpha A_0 \\ \hline Z & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \otimes I_n \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \alpha A_0 & Y_{11}(R_{k-1} \otimes I_n) \\ \hline 0 & Z \cdot (R_{k-1} \otimes I_n) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \alpha A_0 & \widehat{X}_{12} \\ \hline 0 & -\widehat{Z} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\widehat{Y} &= X \cdot (R_k \otimes I_n) \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \alpha A_k & X_{12} \\ \hline 0 & -Z \end{array}\right] \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \otimes I_n \\
&= \left[\begin{array}{c|c} X_{12}(R_{k-1} \otimes I_n) & \alpha A_k \\ \hline -Z \cdot (R_{k-1} \otimes I_n) & 0 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \widehat{Y}_{11} & \alpha A_k \\ \hline \widehat{Z} & 0 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

όπου $\widehat{X}_{12} = Y_{11}(R_{k-1} \otimes I_n)$,$\widehat{Y}_{11} = X_{12}(R_{k-1} \otimes I_n)$ και $\widehat{Z} = -Z(R_{k-1} \otimes I_n)$. Προφανώς ο $\widehat{Z}$ είναι κανονικός αν ο Z είναι κανονικός. Ακολουθώντας όμοια διαδικασία που ακολουθήσαμε στην αρχή της απόδειξης αποδεικνύεται ότι ο $\widehat{L}$ και επομένως και ο $revL$ είναι γραμμικοποίηση για τον $revP(\lambda)$.

$\square$

Σημείωση 1. *Ειδική περίπτωση του προηγούμενου θεωρήματος αποτελεί το γεγονός ότι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή είναι πάντα ισχυρή γραμμικοποίηση.*

Όταν ένας πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι κανονικός τότε από τον ορισμό της γραμμικοποίησης μπορούμε εύκολα να δούμε ότι και κάθε γραμμικοποίησή του θα είναι επίσης κανονικός πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας. Με το επόμενο θεώρημα θα δείξουμε ότι αρκεί η υπόθεση της κανονικότητας για να εξασφαλίσουμε τόσο τη γραμμικοποίηση όσο και την ισχυρή γραμμικοποίηση του P.

Θεώρημα 8. Θεώρημα Ισχυρής Γραμμικοποίησης
Θεωρούμε κανονικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ και έναν πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) *Ο $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του $P(\lambda)$.*

(ii) *Ο $L(\lambda)$ είναι κανονικός πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας.*

(iii) *Ο $L(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του $P(\lambda)$.*

Απόδειξη.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Εαν ο $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του $P(\lambda)$ τότε από τον ορισμό της γραμμικοποίησης υπάρχουν μονομετρικοί πολυωνυμικοί πίνακες $E(\lambda), F(\lambda)$ τέτοιοι ώστε

$$E(\lambda)L(\lambda)F(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix}$$

Έτσι λόγω του ότι ο $P(\lambda)$ είναι κανονικός πολυωνυμικός πίνακας, από υπόθεση, και ο $L(\lambda)$ θα είναι κανονικός πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Εφόσον ο $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ δείξαμε ότι ισχύει η σχέση $L(\lambda)\cdot(\Lambda \otimes I_n) = v \otimes P(\lambda)$ για κάποιο διάνυσμα $v \in \mathbb{F}^k$. Επειδή ο $L(\lambda)$ είναι κανονικός, από υπόθεση, το διάνυσμα v θα είναι μη-μηδενικό. Έστω $M \in \mathbb{F}^{k\times k}$ ένας κανονικός πίνακας τέτοιος ώστε $Mv = \alpha e_1$. Τότε ο κανονικός πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $\tilde{L}(\lambda) := (M \otimes I_n)L(\lambda)$ ανήκει στον $\mathbb{L}_1(P)$ με δεξί *ansatz* διάνυσμα το αe_1 εφόσον ισχύει

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\lambda)\cdot(\Lambda \otimes I_n) &= (M \otimes I_n)L(\lambda)(\Lambda \otimes I_n) \\ &= (M \otimes I_n)\cdot v \otimes P(\lambda) \\ &= (M \cdot v) \otimes P(\lambda) \\ &= \alpha e_1 \otimes P(\lambda) \end{aligned}$$

Επομένως από το Πόρισμα 3 πίνακες $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ του $\tilde{L}(\lambda) := \lambda\tilde{X} + \tilde{Y}$ θα έχουν τη μορφή

$$\tilde{X} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \scriptstyle n & \scriptstyle (k-1)n \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} \alpha A_k & \tilde{X}_{12} \\ \hline 0 & -\tilde{Z} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \scriptstyle n \\ \scriptstyle (k-1)n \end{array} \end{array} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \tilde{Y} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \scriptstyle n & \scriptstyle (k-1)n \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} \tilde{Y}_{11} & \alpha A_0 \\ \hline \tilde{Z} & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \scriptstyle n \\ \scriptstyle (k-1)n \end{array} \end{array}$$

Τώρα αν $\tilde{Z}$ ήταν μη-κανονικός θα υπήρχε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $w \in \mathbb{F}^{(k-1)n}$ τέτοιο ώστε $w^T\tilde{Z} = 0$.
Αλλά θα είχαμε

$$\begin{bmatrix} 0 & w^T \end{bmatrix} (\lambda\tilde{X} + \tilde{Y}) = 0 \quad \text{για όλα τα } \lambda \in \mathbb{F}.$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το ότι ο $L(\lambda)$ είναι κανονικός. Έτσι ο $\tilde{Z}$ είναι κανονικός και από το Θεώρημα 7 έχουμε ότι ο $\tilde{L}(\lambda)$ και επομένως ο $L(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του $P(\lambda)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της ισχυρής γραμμικοποίησης.
□

2.3 Εύρεση γραμμικοποίησης

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ώστε να έχουμε γραμμικοποίηση του P. Όπως έχουμε αναφέρει δεν αποτελούν όλοι οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες των διανυσματικών χώρων $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$ γραμμικοποιήσεις του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Έτσι αναζητούμε τις κατάλληλες συνθήκες με τις οποίες θα διακρίνουμε πότε ένας πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του $P(\lambda)$.
Στη συνέχεια, λοιπόν, θα δώσουμε έναν αλγόριθμο με τον οποίο μπορούμε να ελέγξουμε σε 4 βήματα αν ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ είναι γραμμικοποίηση του $P(\lambda)$.

Αριθμητικός αλγόριθμος εύρεσης γραμμικοποίησης

① Υποθέτουμε ότι ο $P(\lambda)$ είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας και ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda) = \lambda X + Y \in \mathbb{L}_1(P)$ έχει δεξί *ansatz* διάνυσμα $v \in \mathbb{F}^k$ τέτοιο ώστε $L(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I_n) = v \otimes P(\lambda)$.

② Επιλέγουμε τυχαίο πίνακα M τέτοιο ώστε $M \cdot v = \alpha e_1$.

③ Εφαρμόζοντας τους αντίστοιχους *block*-μετασχηματισμούς του $M \otimes I_n$ στο $L(\lambda)$ για να δημιουργήσουμε το $\tilde{L}(\lambda) := (M \otimes I_n)L(\lambda)$ το οποίο θα είναι της μορφής

$$\tilde{L}(\lambda) = \lambda \tilde{X} + \tilde{Y} = \lambda \left[\begin{array}{c|c} \tilde{X}_{11} & \tilde{X}_{12} \\ \hline 0 & -Z \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} \tilde{Y}_{11} & \tilde{Y}_{12} \\ \hline Z & 0 \end{array}\right]$$

όπου οι πίνακες $\tilde{X}_{11}$ και $\tilde{Y}_{12}$ είναι διάστασης $n \times n$ και $\tilde{Y} = (M \otimes I_n)Y$.

④ Επομένως για να έχουμε γραμμικοποίηση του $P(\lambda)$ θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη για το $\boxed{det(Z) \neq 0}$ για το $L(\lambda)$.

Για καλύτερη κατανόηση της παραπάνω μεθόδου θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα του Κεφαλαίου 1, το οποίο συνεχίσαμε σε αυτό το κεφάλαιο και θα δούμε αν ο $L(\lambda)$ που ορίσαμε είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Παράδειγμα

Θεωρήσαμε το πολυωνυμικό πίνακα

$$P(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & \lambda^2-1\\ \lambda-2 & \lambda^3-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\lambda^3+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix}0&0\\1&-1\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}1&-1\\-2&0\end{bmatrix}$$

$$=A_3\lambda^3+A_2\lambda^2+A_1\lambda+A_0$$

και τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα

$$L(\lambda) = \lambda\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&-1&-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&-2&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0&\lambda&1&-1\\0&\lambda&0&0&\lambda-2&-\lambda\\0&0&1&0&-\lambda&0\\1&0&-\lambda&0&0&0\\0&0&0&1&0&-\lambda\\0&1&1&-\lambda&-\lambda&0\end{bmatrix}$$

όπου $L(\lambda)=\lambda X+Y$,
με $X=\begin{bmatrix}v\otimes A_k & -W\end{bmatrix}$ και $Y=\begin{bmatrix}W+[v\otimes(A_{k-1}\dots A_1)] & v\otimes A_0\end{bmatrix}$

ο οποίος προέκυψε για $v=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ και $W=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$.

Έπειτα επιλέγουμε πίνακα M τέτοιο ώστε $M\cdot v=\alpha\cdot e_1$, και $\alpha=1$

$$M\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Επιλέγουμε τον εξής πίνακα

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τέλος για να βρούμε τον πίνακα Z θα υπολογίσουμε τον πίνακα

$$\tilde{Y} = (M \otimes I_n)Y = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{Y}_{11} & \tilde{Y}_{12} \\ \hline Z & 0 \end{array}\right]$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Επομένως ο πίνακα $Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Επειδή $det(Z) = det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$

ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

2.4 Παρατηρήσεις

Ολοκληρώνοντας τη μελέτη μας πάνω στην προσθετική μέθοδο γραμμικοποίησης, θα κάνουμε μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις.
Ξεκινήσαμε έχοντας θεωρήσει τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i A_i$, $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n\times n}$ και επίσης υποθέσαμε ότι είναι κανονικός πολυωνυμικός πίνακας, (δηλαδή $det(P(\lambda)) \neq 0$). Δείξαμε στο Θεώρημα 8 ότι για να είναι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda) = \lambda X + Y$, όπου $X = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle n & \scriptstyle (k-1)n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} v \otimes A_k & -W \end{array}\right] \end{array}$ και $Y = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle (k-1)n & \scriptstyle n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} W + (v \otimes \left[A_{k-1} \ \cdots \ A_1\right]) & v \otimes A_0 \end{array}\right] \end{array}$, με $W \in \mathbb{F}^{kn\times(k-1)n}$ αυθαίρετο, γραμμικοποίηση και μάλιστα ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, αρκεί να δείξουμε μόνο ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι κανονικός. Γεννάται αμέσως το ερώτημα: Τι γίνεται όταν ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι μη - κανονικός, δηλαδή ιδιάζων ($det(P(\lambda)) \equiv 0$). Μια ένδειξη ότι και στην περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων και τότε ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P))$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ έχουμε από την Παρατήρηση 3 , ότι το Θεώρημα 7 ισχύει και στην περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων. Αναλυτικά, όμως, για το τί συμβαίνει στην περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων μπορούμε να δούμε στο [27] . Εκεί γίνεται αναφορά στην περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων, ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P))$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Τέλος θα αναφέρουμε ότι σύμφωνα με το Λήμμα 1, το οποίο το αναφέραμε στην Εισαγωγή, εφόσον δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda \in \mathbb{L}_1(P))$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P))$ θα έχει τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.

Στο σημείο αυτό ας δώσουμε μερικά παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση της προσθετικής μεθόδου γραμμικοποίησης.

2.5 Παραδείγματα

Θα δώσουμε μερικά ακόμη παραδείγματα.

- **Παράδειγμα 1**

  Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ 1 & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \end{aligned}$$

Θεωρούμε επίσης τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $L(\lambda) = \lambda X + Y$ όπου $X = \begin{bmatrix} v \otimes A_k & -W \end{bmatrix}$ και $Y = \begin{bmatrix} W + [v \otimes (A_{k-1} \dots A_1)] & v \otimes A_0 \end{bmatrix}$

με $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $W = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Έτσι θα εξετάσουμε αν ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Επιλέγουμε πίνακα M τέτοιο ώστε $M \cdot v = \alpha \cdot e_1$ με $\alpha = 1$,

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι θα πάρουμε τον πίνακα

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε το πίνακα Z θα υπολογίσουμε τον πίνακα

$$\tilde{Y} = (M \otimes I_n)Y = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{Y}_{11} & \tilde{Y}_{12} \\ \hline Z & 0 \end{array}\right]$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Επομένως ο πίνακας $Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Επειδή

$$det(Z) = det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελαστής A_2 είναι κανονικός δηλαδή $det(A_2) = 1 \neq 0$. Επομένως ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει μόνο πεπερασμένα μηδενικά και πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Εφόσον δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ σύμφωνα με το Λήμμα 1 του Κεφαλαίου 1, θα έχει τα ίδια μηδενικά και στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.
Πράγματι, η $Smith$ μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως τα πεπερασμένα μηδενικά του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ± 1 και $-(-1)^{\frac{1}{3}}$, $(-1)^{\frac{2}{3}}$. Έτσι, οι πεπερασμένοι διαιρέτες θα είναι $(\lambda+1)$,

$(\lambda - 1)$, $(\lambda - (-1)^{\frac{1}{3}})$ και $(\lambda + (-1)^{\frac{2}{3}})$.
Τέλος, η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{L(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

όπου είναι φανερό ότι έχει τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.

- **Παράδειγμα 2**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} 2\lambda^2 + \lambda + 1 & 4\lambda^2 + 2 \\ \lambda^2 + 1 & 2\lambda^2 + \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \end{aligned}$$

Θεωρούμε επίσης τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $L(\lambda) = \lambda X + Y$ όπου $X = \begin{bmatrix} v \otimes A_k & -W \end{bmatrix}$ και $Y = \begin{bmatrix} W + [v \otimes (A_{k-1} \ldots A_1)] & v \otimes A_0 \end{bmatrix}$

με $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $W = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Έτσι θα εξετάσουμε αν ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -2 & \lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & 4\lambda & \lambda + 1 & 2 \\ \lambda & 2\lambda & 1 & \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Επιλέγουμε πίνακα M τέτοιο ώστε $M \cdot v = \alpha \cdot e_1$ με $\alpha = 1$,

$$M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επιλέγουμε λοιπόν

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε το πίνακα Z θα υπολογίσουμε τον πίνακα

$$\tilde{Y} = (M \otimes I_n)Y = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{Y}_{11} & \tilde{Y}_{12} \\ \hline Z & 0 \end{array}\right]$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -I_2 & I_2 \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} \text{-2} & \text{-1} & 1 & 2 \\ \text{-1} & \text{-2} & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Επομένως ο πίνακας $Z = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Έχουμε ότι

$$det(Z) = det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \neq 0.$$

Άρα ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Σημειώνουμε ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων, διότι $det(A_2) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ θα έχει πεπερασμένα και άπειρα μηδενικά και πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Σύμφωνα με το

Θεώρημα 7 της ισχυρής γραμμικοποίησης, δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και επομένως ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ έχει τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Πράγματι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$revP(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda + 2 & 2\lambda^2 + 4 \\ \lambda^2 + 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revP(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια θα βρούμε τη *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L(\lambda)$.
Η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{L(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{12}\lambda - \frac{1}{6}) \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $L(\lambda)$ είναι

$$revL(\lambda) = \begin{bmatrix} -2\lambda & -\lambda & 2 & 1 \\ -\lambda & -2\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 4 & \lambda + 1 & 2\lambda \\ 1 & 2 & \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revL(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revL(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως είναι φανερό από τη μορφή των *Smith* μορφών, ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$

έχουν τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

- **Παράδειγμα 3**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$ ο οποίος υποθέτουμε ότι είναι κανονικός. Θέλουμε να εξετάσουμε αν ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$L(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} A & A \\ A & B-C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B-A & C \\ C & C \end{bmatrix}$$

αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
όπου $L(\lambda) = \lambda X + Y$,
με $X = \begin{bmatrix} v \otimes A_k & -W \end{bmatrix}$ και $Y = \begin{bmatrix} W + [v \otimes (A_{k-1} \dots A_1)] & v \otimes A_0 \end{bmatrix}$

ο οποίος προέκυψε για $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $W = \begin{bmatrix} -A \\ C-B \end{bmatrix}$.

Επιλέγουμε πίνακα M τέτοιο ώστε $M \cdot v = \alpha \cdot e_1$

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επιλέγουμε τον πίνακα

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε το πίνακα Z θα υπολογίσουμε τον πίνακα

$$\tilde{Y} = (M \otimes I_n)Y = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{Y}_{11} & \tilde{Y}_{12} \\ \hline Z & 0 \end{array}\right]$$

Έτσι,

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B-A & C \\ C & C \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} B-A & C \\ \hline C+A-B & 0 \end{array}\right]$$

Επομένως ο πίνακας $Z = A - B + C$.

Άρα για να είναι ο $L(\lambda)$ γραμμικοποίηση το $P(\lambda)$ θα πρέπει $det(Z) \neq 0 \Rightarrow$

$$\boxed{det(A - B + C) \neq 0}$$

$\Rightarrow det[P(-1)] \neq 0$, δηλαδή το -1 να μην είναι ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

- **Παράδειγμα 4**

  Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 + \lambda^2 + 1 & \lambda \\ 0 & \lambda^3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε επίσης τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $L(\lambda) = \lambda X + Y$ όπου $X = \begin{bmatrix} v \otimes A_k & -W \end{bmatrix}$ και $Y = \begin{bmatrix} W + [v \otimes (A_{k-1} \dots A_1)] & v \otimes A_0 \end{bmatrix}$

με $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Έτσι θα εξετάσουμε αν ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$
\begin{aligned}
L(\lambda) &= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Επιλέγουμε πίνακα M τέτοιο ώστε $M \cdot v = \alpha \cdot e_1$ με $\alpha = 1$,

$$
M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Επιλέγουμε τον πίνακα

$$
M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Για να βρούμε το πίνακα Z θα υπολογίσουμε τον πίνακα

$$
\tilde{Y} = (M \otimes I_n)Y = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{Y}_{11} & \tilde{Y}_{12} \\ \hline Z & 0 \end{array}\right]
$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &= \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\end{aligned}$$

Επομένως ο πίνακας $Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Επειδή

$$det(Z) = det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$

Παρατηρούμε ακόμη ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελαστής A_3 είναι κανονικός δηλαδή $det(A_3) = 1 \neq 0$. Επομένως ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει μόνο πεπερασμένα μηδενικά και πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Εφόσον δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ σύμφωνα με το Λήμμα 1 του Κεφαλαίου 1, θα έχει τα ίδια μηδενικά και στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.
Πράγματι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^6 + \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Τέλος, η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{L(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^6+\lambda^5+2\lambda^3+\lambda^2+1 \end{bmatrix}.$$

Από τη μορφή των *Smith* μορφών των πολυωνυμικών πινάκων $P(\lambda)$ και $L(\lambda)$ είναι φανερό ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ έχει τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.

- **Παράδειγμα 5**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} 2\lambda^3+\lambda^2+1 & 4\lambda^3+\lambda \\ \lambda^3 & 2\lambda^3+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \end{aligned}$$

Θεωρούμε επίσης τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $L(\lambda) = \lambda X + Y$ όπου $X = \begin{bmatrix} v \otimes A_k & -W \end{bmatrix}$ και $Y = \begin{bmatrix} W + [v \otimes (A_{k-1} \dots A_1)] & v \otimes A_0 \end{bmatrix}$

με $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Έτσι θα εξετάσουμε αν ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$
\begin{aligned}
L(\lambda) &= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 & 2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & -1 & -2 & \lambda & 2\lambda \\ -2 & -1 & 2\lambda-1 & \lambda & \lambda & 0 \\ -1 & -2 & \lambda & 2\lambda & 0 & 0 \\ 2\lambda & 4\lambda & \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Επιλέγουμε πίνακα M τέτοιο ώστε $M \cdot v = \alpha \cdot e_1$ με $\alpha = 1$,

$$
M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Επιλέγουμε τον πίνακα

$$
M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Για να βρούμε το πίνακα Z θα υπολογίσουμε τον πίνακα

$$
\tilde{Y} = (M \otimes I_n)Y = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{Y}_{11} & \tilde{Y}_{12} \\ \hline Z & 0 \end{array}\right]
$$

Έτσι,

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & I_2 \\ 0 & I_2 & 0 \\ -I_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ \hline -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Επομένως ο πίνακας $Z = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Έχουμε ότι

$$det(Z) = det \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 9 \neq 0$$

Επομένως ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Σημειώνουμε ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής A_3 του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων, διότι $det(A_3) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ θα έχει πεπερασμένα και άπειρα μηδενικά και πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7 της ισχυρής γραμμικοποίησης, δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και επομένως ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ έχει τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Πράγματι, η $Smith$ μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^5 - \frac{1}{2}\lambda^4 + 2\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$\begin{aligned} revP(\lambda) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^3+\lambda+2 & \lambda^2+4 \\ 1 & \lambda^3+2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^0_{revP(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια θα βρούμε τη *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L(\lambda)$.
Η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{L(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^5 - \frac{1}{18}\lambda^4 + \frac{4}{18}\lambda^3 + \frac{1}{18}\lambda^2 + \frac{1}{18}) \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $L(\lambda)$ είναι

$$revL(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\lambda & -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & -2\lambda & 1 & 2 \\ -2\lambda & -\lambda & 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -\lambda & -2\lambda & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revL(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^0_{revL(\lambda)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως είναι φανερό από τη μορφή των *Smith* μορφών, ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$

έχουν τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

- **Παράδειγμα 6**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \lambda^3 A + \lambda^2 B + \lambda C + D$ ο οποίος υποθέτουμε ότι είναι κανονικός. Θεωρούμε επίσης τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $L(\lambda) = \lambda X + Y$
όπου $X = \begin{bmatrix} v \otimes A_k & -W \end{bmatrix}$ και $Y = \begin{bmatrix} W + [v \otimes (A_{k-1} \dots A_1)] & v \otimes A_0 \end{bmatrix}$

με $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $W = \begin{bmatrix} A & A \\ A + B - C & B - D \\ -B - C & C - D \end{bmatrix}$.

Θέλουμε να εξετάσουμε αν ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$L(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} A & A & A \\ A & A + B - C & B - D \\ A & B - C & C - D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B - A & C - A & D \\ C - A & C + D - B & D \\ D & D & D \end{bmatrix}$$

αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Επιλέγουμε πίνακα M τέτοιο ώστε $M \cdot v = \alpha \cdot e_1$

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε το πίνακα Z θα υπολογίσουμε τον πίνακα

$$\tilde{Y} = (M \otimes I_n) Y = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{Y}_{11} & \tilde{Y}_{12} \\ \hline Z & 0 \end{array} \right]$$

Έτσι,

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ -I_n & I_n & 0 \\ -I_n & 0 & I_n \end{bmatrix} \cdot Y$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ -I_n & I_n & 0 \\ -I_n & 0 & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B - A & C - A & D \\ C - A & C + D - B & D \\ D & D & D \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} B-A & C-A & D \\ \hline C-B & A-B+D & 0 \\ A+D-B & A+D-C & 0 \end{array}\right]$$

Επομένως ο πίνακας $Z = \begin{bmatrix} C-B & A-B+D \\ A+D-B & A+D-C \end{bmatrix}$.

Άρα για να είναι ο $L(\lambda)$ γραμμικοποίηση το $P(\lambda)$ θα πρέπει $det(Z) \neq 0 \Rightarrow$

$$det\left(\begin{bmatrix} C-B & A-B+D \\ A+D-B & A+D-C \end{bmatrix}\right) \neq 0$$

2.6 Περίληψη

Στο δεύτερο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με μια από τις τεχνικές γραμμικοποίησης, τη προσθετική μέθοδο γραμμικοποίησης. Αρχικά, ορίσαμε δυο διανυσματικούς χώρους $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$, όπως επίσης και μια πράξη στον καθένα, το μετατοπισμένο κατά στήλη άθροισμα (*column shifted sum*) και το μετατοπισμένο κατά γραμμή άθροισμα (*row shifted sum*) αντίστοιχα. Με τη βοήθεια των δυο αυτών πράξεων ορίσαμε το σύνολο των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ και ($L(\lambda) \in \mathbb{L}_2(P)$, αντίστοιχα) τα οποία αποδείξαμε ότι αποτελούν γραμμικοποίηση και μάλιστα ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Δείξαμε, ακόμη, ότι όταν ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι κανονικός τότε ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Στη συνέχεια, δώσαμε έναν αλγόριθμο με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $L(\lambda)$, ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Τέλος, αναφέραμε ορισμένα παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση της μεθόδου.

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε ακόμη μια τεχνική γραμμικοποίησης, τη μέθοδο των μεταθέσεων.

Κεφάλαιο 3

Μέθοδος των Μεταθέσεων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε την προσθετική μέθοδο γραμμικοποίησης. Αρχικά μιλήσαμε για την πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή οι οποίες αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 1 ότι αποτελούν γραμμικοποιήσεις δοσμένου πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Στη συνέχεια επεκτείναμε τις δυο αυτές μορφές και δημιουργήσαμε δυο διανυσματικούς χώρους, των οποίων σχεδόν όλα τα στοιχεία αποτελούν γραμμικοποιήσεις του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Αυτό που μας οδήγησε στην επέκταση και δημιουργία των δυο διανυσματικών χώρων ήταν η αδυναμία των συνοδευουσών μορφών να διατηρούν συγκεκριμένες ιδιότητες του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα, όπως για παράδειγμα τη συμμετρικότητα.
Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε μια νέα μέθοδο γραμμικοποίησης η οποία είναι η μέθοδος των μεταθέσεων. Στη μέθοδο αυτή θα ξεκινήσουμε και πάλι από την πρώτη συνοδεύουσα μορφή, την οποία θα επεκτείνουμε ώστε η νέα αυτή οικογένεια συνοδευουσών μορφών που θα δημιουργήσουμε να μπορεί να παραμετροποιηθεί ως γινόμενο απλών σταθερών πινάκων και να έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον αρχικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$. Η χρησιμότητα της νέας αυτής οικογένειας έγκειται στο γεγονός ότι υπάρχει συγκεκριμένο μέλος της οικογένειας αυτής το οποίο αποτελεί γραμμικοποίηση ενός ερμητιανού πολυωνυμικού πίνακα και είναι επίσης ερμητιανό. Αυτή η ιδιότητα είναι πολύ σημαντική επειδή οι ερμητιανοί πολυωνυμικοί πίνακες παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη των συστημάτων ταλαντώσεων με απόσβεση με πεπερασμένο βαθμό ελευθερίας, που μπορούν να περιγραφούν από δευτέρου βαθμού συστήματα διαφορικών εξισώσεων με ερμητιανούς πίνακες ως συντελεστές. Τέλος, πριν ξεκινήσουμε τη μελέτη μας, σημειώνουμε ότι στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με κανονικούς πολυωνυμικούς πίνακες ($det(P(\lambda)) \neq 0$).

3.1 Νέα οικογένεια συνοδευουσών μορφών

Αρχικά, θα υπενθυμήσουμε τον ορισμό της πρώτης και δεύτερης συνοδεύουσας μορφής. Μελετούμε, όπως έχουμε δει, τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ ο οποίος είναι της μορφής $P(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0$.
Ως πρώτη συνοδεύουσα μορφή ορίσαμε τον πολυωνυμικό πίνακα της μορφής:

$$\begin{aligned}
C_1(\lambda) &= \lambda \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_0 \\ -I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -I_n & 0 \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -A_{k-1} & -A_{k-2} & \cdots & -A_0 \\ I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} \\
&= \lambda C_{11} - C_{12}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Ως δεύτερη συνοδεύουσα μορφή ορίσαμε τον πολυωνυμικό πίνακα της μορφής:

$$\begin{aligned}
C_2(\lambda) &= \lambda \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{k-1} & -I_n & \cdots & 0 \\ A_{k-2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -I_n \\ A_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -A_{k-1} & I_n & \cdots & 0 \\ -A_{k-2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & I_n \\ -A_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \lambda C_{21} - C_{22}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Είναι γνωστό ότι η πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή είναι γραμμικοποιήσεις του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$,δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πολυωνυμικοί πίνακες $E(\lambda), F(\lambda)$ και $U(\lambda), V(\lambda)$ τέτοιοι ώστε

$$E(\lambda)C_1(\lambda)F(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & I_{(k-1)n} \end{array}\right]$$

και

$$U(\lambda)C_2(\lambda)V(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & I_{(k-1)n} \end{array}\right]$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή έχει τις ίδιες πεπερασμένες ιδιοτιμές, όπως και πεπερασμένα μηδενικά και πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.
Όπως αναφέραμε και στην αρχή, θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις κανονικών πολυωνυμικών πινάκων $P(\lambda)$. Υπενθυμίζουμε ότι ως κανονικό πολυωνυμικό πίνακα ορίσαμε να ειναι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ του οποίου η ορίζουσα $det(P(\lambda))$ δεν είναι εκ ταυτότητος μηδέν για όλα τα $\lambda \in \mathbb{C}$.
Έτσι, παρατηρούμε ότι $det(P(\lambda)) = det(C_1(\lambda)) = det(C_2(\lambda))$. Αυτό σημαίνει ότι αν ο $P(\lambda)$ είναι κανονικός τότε και οι πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή $C_1(\lambda)$ και $C_2(\lambda)$ αντίστοιχα, θα είναι κανονικοί πολυωνυμικοί πίνακες και αντίστροφα.
Στη συνέχεια ορίζουμε τους εξής πίνακες:

$$T_0 = diag\{A_k, I_{n(k-1)}\} = \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & I_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

$$T_p = \begin{bmatrix} I_{n(p-1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & I_{n(k-p-1)} \end{bmatrix} \quad , p = 1, 2, \ldots, k-1 \tag{3.4}$$

και

$$T_k = diag\{I_{n(k-1)}, -A_0\} = \begin{bmatrix} I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_n & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -A_0 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

όπου

$$C_p = \begin{bmatrix} -A_{k-p} & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με τους προηγούμενους ορισμούς, θα δείξουμε στο επόμενο λήμμα ότι η πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθειά τους.

Λήμμα 4. *Η πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:*

α) $C_1(\lambda) = \lambda T_0 - T_1 T_2 \dots T_k$.

β) $C_2(\lambda) = \lambda T_0 - T_k T_{k-1} \dots T_1$.

Απόδειξη.
Για την πρώτη συνοδεύουσα μορφή έχουμε:
Από τη σχέση (3.1) προκύπτει άμεσα ότι $T_0 = C_{11}$.
Αρκεί να δείξουμε ότι

$$T_1 T_2 \dots T_k = C_{12} = \begin{bmatrix} -A_{k-1} & -A_{k-2} & \cdots & A_0 \\ I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} T_1 \cdot T_2 &= \begin{bmatrix} -A_{k-1} & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n(k-2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_{k-2} & I_n & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n(k-3)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -A_{k-1} & -A_{k-2} & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n(k-3)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 = \begin{bmatrix} -A_{k-1} & -A_{k-2} & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n(k-3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_{k-3} & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n(k-4)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -A_{k-1} & -A_{k-2} & -A_{k-3} & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n(k-4)} \end{bmatrix}$$

συνεχίζοντας έτσι καταλήγουμε

$$T_1T_2T_3 \ldots T_{k-1} = \begin{bmatrix} -A_{k-1} & -A_{k-2} & -A_{k-3} & \cdots & -A_{k-1} & I_n \\ I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$T_1T_2T_3 \ldots T_{k-1}T_k = \begin{bmatrix} -A_{k-1} & -A_{k-2} & -A_{k-3} & \cdots & -A_{k-1} & I_n \\ I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -A_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -A_{k-1} & -A_{k-2} & -A_{k-3} & \cdots & -A_{k-1} & -A_0 \\ I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} = C_{12}.$$

Επομένως αποδείξαμε αυτό που θέλαμε.
Για τη δεύτερη συνοδεύουσα μορφή δουλεύουμε ομοίως.

□

Τώρα θα δώσουμε ακόμα ένα λήμμα το οποίο θα μας είναι χρήσιμο για τα επόμενα.

Λήμμα 5. *Έστω E, F, G μια τριάδα τετραγωνικών πινάκων, με F αντιστρέψιμο και $GE = EG$. Τότε:*

α) Ισχύει η ακόλουθη ισότητα

$$(\lambda E - GF)F^{-1}(sE - FG) = (sE - GF)F^{-1}(\lambda E - FG) \quad \text{για κάθε} \ (s, \lambda) \in \mathbb{C}^2. \tag{3.6}$$

β) Αν $kerE^T \cap kerG^T = \{0\}$ και $\lambda E - FG$ είναι αντιστρέψιμος για κάποια $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε ο $\lambda E - GF$ είναι επίσης αντιστρέψιμος.

Απόδειξη.

α)

$$\begin{aligned}
(\lambda E - GF)F^{-1}(sE - FG) &= (\lambda EF^{-1} - GFF^{-1})(sE - FG) \\
&= \lambda EF^{-1}sE - \lambda EF^{-1}FG - GFF^{-1}sE + GFF^{-1}FG \\
&= \lambda EF^{-1}sE - \lambda EG - GsE + GFG \\
&= \lambda sEF^{-1}E - \lambda EG - sGE + GFG \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(sE - GF)F^{-1}(\lambda E - FG) &= (sEF^{-1} - GFF^{-1})(\lambda E - FG) \\
&= sEF^{-1}\lambda E - sEF^{-1}FG - GFF^{-1}\lambda E + GFF^{-1}FG \\
&= sEF^{-1}\lambda E - sEG - G\lambda E + GFG \\
&\overset{GE=EG}{=} \lambda sEF^{-1}E - \lambda EG - sGE + GFG \quad (2)
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο δηλαδή $(\lambda E - GF)F^{-1}(sE - FG) = (sE - GF)F^{-1}(\lambda E - FG)$.

β) Υποθέτουμε ότι ο $\lambda E - GF$ είναι μη αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα γραμμή $x^T \neq 0$ τέτοιο ώστε $x^T(\lambda E - GF) = 0$. Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά τη σχέση (3.6) με το x^T και χρησιμοποιώντας την αντιστρεψιμότητα του $F^{-1}(\lambda E - FG)$ παίρνουμε ότι η $x^T(sE - GF) = 0$ ισχύει για κάθε $s \in \mathbb{C}$, ή ισοδύναμα $x^T E = 0$ και $x^T GF = 0$. Λαμβάνοντας υπόψιν την αντιστρεψιμότητα του F, η $x^T GF = 0$ ανάγεται στην $x^T G = 0$. Άρα $x \in kerE^T \cap kerG^T = \{0\}$ το οποίο είναι αντίθετο με την υπόθεση ότι $x^T \neq 0$. Άρα ο $\lambda E - GF$ είναι αντιστρέψιμος.

□

Με τη βοήθεια των δυο προηγούμενων λημμάτων θα δώσουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα για τη δημιουργία της νέας οικογένειας συνοδευουσών μορφών.

Θεώρημα 9. *Έστω $C_1(\lambda)$ η πρώτη συνοδεύουσα μορφή ενός κανονικού πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Τότε για κάθε δυνατή μετάθεση $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ της κ-άδας $(1, 2, \ldots, k)$ ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda) = \lambda T_0 - T_{i_1} T_{i_2} \ldots T_{i_k}$ είναι αυστηρά ισοδύναμος με τον $C_1(\lambda)$, δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι σταθεροί πίνακες M, N τέτοιοι ώστε να ισχύει*

$$C_1(\lambda) = MQ(\lambda)N \tag{3.7}$$

όπου T_i , $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ ορίστηκαν στις σχέσεις (3.3),(3.4) και (3.5).

Απόδειξη.
Αν $(i_1, i_2, \ldots, i_k) = (1, 2, \ldots, k)$ τότε η σχέση (3.7) προφανώς ισχύει λόγω του Λήμματος 4. Έτσι υποθέτουμε ότι $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \neq (1, 2, \ldots, k)$. Παρατηρούμε ότι εξαιτίας της ειδικής δομής των T_i ισχύει η σχέση $T_i T_j = T_j T_i$ όταν $|i - j| > 1$, γεγονός το οποίο μας παρέχει τη δυνατότητα να αλλάξουμε θέσεις των T_i έτσι ώστε

$$T_{i_1} T_{i_2} \ldots T_{i_n} = (T_{j_v+1} T_{j_v+2} \ldots T_k) \ldots (T_{j_1+1} T_{j_1+2} \ldots T_{j_2})(T_1 T_2 \ldots T_{j_1})$$

όπου $0 < j_1 < j_2 < \ldots < j_v < k$.
Για απλοποίηση των παραστάσεων εισάγουμε το συμβολισμό $T_{m,l} = T_m T_{m+1} \ldots T_l$ με $m \leq l$.
Έτσι ο πίνακας $Q(\lambda)$ θα γράφεται

$$Q(\lambda) = \lambda T_0 - T_{j_v+1,k} \ldots T_{j_1+1,j_2} T_{1,j_1}$$

Παρατηρούμε ότι τα T_i είναι αντιστρέψιμα για $i = 1, 2, 3, \ldots, k-1$ και επομένως τα γινόμενα $T_{m,l}$ είναι επίσης αντιστρέψιμα για $0 < m \leq l < k$. Άρα ο T_{1,j_1} είναι αντιστρέψιμος. Στη συνέχεια, το γινόμενο $(T_{j_v+1,k} \ldots T_{j_1+1,j_2})$ δεν περιέχει τον πίνακα T_1 και άρα αντιμετατίθεται με το T_0. Έτσι οι $T_0, T_{1,j_1}, (T_{j_v+1,k} \ldots T_{j_1+1,j_2})$ ικανοποιούν τις συνθήκες του Λήμματος 5 α) βάση του οποίου καταλήγουμε στην εξής σχέση

$$Q_0(s)T_{1,j_1}^{-1}Q_1(\lambda) = Q_0(\lambda)T_{1,j_1}^{-1}Q_1(s) \quad , \forall(s,\lambda) \in \mathbb{C}^2$$

με

$$Q_0(\lambda) = Q(\lambda)$$

και

$$Q_1(\lambda) = \lambda T_0 - T_{1,j_1}(T_{j_v+1,k} \ldots T_{j_2+1,j_3})T_{j_1+1,j_2} = \lambda T_0 - (T_{j_v+1,k} \ldots T_{j_2+1,j_3})T_{1,j_2}.$$

Έπειτα χρησιμοποιούμε για δεύτερη φορά το Λήμμα 5 α) στους πίνακες τώρα $T_0, T_{1,j_2}, (T_{j_v+1,k} \ldots T_{j_2+1,j_3})$ από το οποίο θα καταλήξουμε στη σχέση

$$Q_1(s)T_{1,j_2}^{-1}Q_2(\lambda) = Q_1(\lambda)T_{1,j_2}^{-1}Q_2(s) \quad , \forall(s,\lambda) \in \mathbb{C}^2$$

όπου

$$Q_2(\lambda) = \lambda T_0 - T_{1,j_2}(T_{j_v+1,k} \ldots T_{j_3+1,j_4})T_{j_2+1,j_3} = \lambda T_0 - (T_{j_v+1,k} \ldots T_{j_3+1,j_4})T_{1,j_3}.$$

Συνεχίζοντας ομοίως, μετά από v κυκλικές μεταθέσεις καταλήγουμε στη σχέση

$$Q_{v-1}(s)T_{1,j_v}^{-1}Q_v(\lambda) = Q_{v-1}(\lambda)T_{1,j_v}^{-1}Q_v(s) \quad \forall(s,\lambda) \in \mathbb{C}^2.$$

όπου

$$Q_{v-1}(\lambda) = \lambda T_0 - T_{j_v+1,k}T_{1,j_v}$$

και

$$Q_v(\lambda) = \lambda T_0 - T_{1,j_v}T_{j_v+1,k} = \lambda T_0 - T_{1,k} = C_1(\lambda).$$

Για να επαληθεύσουμε τη σχέση (3.7) μένει να δείξουμε ότι υπάρχει $s \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε ο $Q_i(s)$, $i = 0, 1, \ldots, v$ να είναι αντιστρέψιμος. Έτσι, εφόσον $Q_v(\lambda) = C_1(\lambda)$ είναι κανονικός πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας (διότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι κανονικός), υπάρχει $s \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε ο $Q_v(s)$ να είναι αντιστρέψιμος. Λόγω της ιδιαίτερης δομής των πινάκων T_i, έχουμε ότι $kerT_0^T \cap kerT_{j_v+1,k}^T = 0$ και επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του Λήμματος 5 β) για τους πίνακες $T_0, T_{1,j_v}, T_{j_v+1,k}$. Αυτό σημαίνει ότι ο $Q_{v-1}(s)$ είναι αντιστρέψιμος. Για την ολοκλήρωση της απόδειξης συνεχίζουμε επαγωγικά με αντίστοιχο τρόπο και δείχνουμε ότι ο $Q_i(s)$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $i = v-2, v-3, \ldots, 0$.

□

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα για κάθε δυνατή μετάθεση $i_1, i_2, \ldots, i_k$ της k-άδας $(1, 2, \ldots, k)$ ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με την πρώτη συνοδεύουσα μορφή και κατ' επέκταση με τον αρχικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$. Σημειώνουμε επίσης ότι τα μέλη της οικογένειας αυτής δεν μπορούν γενικά να παραχθούν από απλές μεταθέσεις γραμμών ή στηλών από την πρώτη ή δεύτερη συνοδεύουσα μορφή. Είναι εύκολο να δούμε ότι με τη χρήση των μεταθέσεων μπορούν να παραχθούν κάποιες επιπλέον συνοδεύουσες μορφές. Έτσι στο επόμενο πόρισμα θα δώσουμε τη μορφή των νέων συνοδευουσών μορφών, κάτι το οποίο αποτελεί γενίκευση του προηγούμενου θεωρήματος.

Πόρισμα 5. *Έστω $C_1(\lambda)$ η πρώτη συνοδεύουσα μορφή ενός κανονικού πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Για καθένα από τα τέσσερα διατεταγμένα σύνολα δεικτών $I_m = (i_{m,1}, i_{m,2}, \ldots, i_{m,k_m})$, $m = 1, 2, 3, 4$ τέτοια ώστε $I_i \cap I_j = \emptyset$ για $i \neq j$ και $\bigcup_{m=1}^{4} I_m = \{1, 2, 3, \ldots, k-1\}$ ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας*

$$R(\lambda) = \lambda T_{I_1}^{-1} T_0 T_{I_2}^{-1} - T_{I_3} T_k T_{I_4}$$

είναι αυστηρά ισοδύναμος με τη πρώτη συνοδεύουσα μορφή $C_1(\lambda)$, όπου $T_{I_m} = T_{i_{m,1}} T_{i_{m,2}} \ldots T_{i_{m,k_m}}$ όταν $I_m \neq \emptyset$ και $T_{I_m} = I_{kn}$ όταν $I_m = \emptyset$.

Απόδειξη.
Ξεκινώντας βλέπουμε ότι οι πίνακες T_{I_m} είναι αντιστρέψιμοι ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων T_i με $0 < i < k$.
Έτσι ο πίνακας $R(\lambda)$ θα είναι

$$R(\lambda) = T_{I_1}^{-1} (\lambda T_0 - T_{I_1} T_{I_3} T_k T_{I_4} T_{I_2}) T_{I_2}^{-1}.$$

Παρατηρούμε όμως ότι ο πρωτοβάθμιος πίνακας $\lambda T_0 - T_{I_1} T_{I_3} T_k T_{I_4} T_{I_2}$ ανήκει στην οικογένεια συνοδευουσών μορφών $Q(\lambda)$ του Θεωρήματος 9, της οποίας

οι πίνακες είναι αυστηρά ισοδύναμοι με το $C_1(\lambda)$.
Επομένως,

$$R(\lambda) = T_{I_1}^{-1} Q(\lambda) T_{I_2}^{-1}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

□

Στο προηγούμενο θεώρημα και πόρισμα χρησιμοποιήσαμε τους αντιστρόφους των πινάκων $T_p \;\; , \;\; p = 1, \ldots, k-1$. Έτσι στο σημείο αυτό θα δώσουμε τη μορφή των αντιστρόφων των πινάκων $T_p \;\; , \;\; p = 1, \ldots, k-1$.
Έχουμε, λοιπόν,

$$T_p^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n(p-1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_p^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{n(k-p-1)} \end{bmatrix} \quad p = 1, \ldots, k-1$$

όπου

$$C_p^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & A_{k-p} \end{bmatrix}.$$

3.2 Παρατηρήσεις

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε μια νέα μέθοδο γραμμικοποίησης, τη μέθοδο των μεταθέσεων.
Αρχικά υποθέσαμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι κανονικός. Ορίσαμε τους πίνακες $T_i, \; i = 1, \ldots, k$ και με τη βοήθειά τους ορίσαμε τους πρωτοβάθμιους πίνακες $Q(\lambda)$ οι οποίοι δείξαμε ότι είναι αυστηρά ισοδύναμοι με την πρώτη συνοδεύουσα μορφή $C_1(\lambda)$. Έχουμε δείξει, στο κεφάλαιο 1, ότι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Έτσι, εφόσον ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ είναι αυστηρά ισοδύναμος με την πρώτη συνοδεύουσα μορφή, θα αποτελεί και αυτός γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Αυτό σημαίνει ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ και ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχουν

τις ίδιες πεπερασμένες ιδιοτιμές, τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες (σύμφωνα με το Λήμμα 1 του Κεφαλαίου 1). Δημιουργούνται, λοιπόν, δυο ερωτήματα. Πρώτον, αν ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ αποτελεί ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και δεύτερον, τί συμβαίνει όταν ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων ($det(P(\lambda)) \equiv 0$). Απάντηση στα δυο αυτά ερωτήματα μπορούμε να βρούμε στο [28]. Εκεί περιγράφεται αναλυτικά ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ αποτελεί ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Έτσι, σύμφωνα με το Λήμμα 1 του Κεφαλαίου 1, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας και ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχουν τις ίδιες πεπερασμένες και άπειρες ιδιοτιμές, τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπρασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Ακόμη στο [28] αναφέρεται και η περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων. Αποδεικνύεται ότι και όταν ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων ισχύουν ανάλογα συμπεράσματα, δηλαδή ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ αποτελεί ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Τώρα θα κάνουμε μια πολύ χρήσιμη παρατήρηση. Το Πόρισμα 5 μας δίνει τη δυνατότητα να βρούμε και κάποιες ακόμη γραμμικοποιήσεις του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Η νέα αυτή μορφή γραμμικοποίησης μας δίνει την ευχέρια να "μετακινήσουμε" πίνακες A_i από το σταθερό όρο του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα στον πρωτοβάθμιο όρο του. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα η νέα αυτή γραμμικοποίηση να έχει ίσως καλύτερη εφαρμογή σε δοσμένο πρόβλημα.
Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και στην περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι μη - τετράγωνος, δηλαδή $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{m\times n}$. Περισσότερα για αυτή την περίπτωση μπορούμε να δούμε στο [29]. Εκεί ορίζονται οι μη - τετράγωνοι πολυωνυμικοί πίνακες $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{m\times n}$ και οι πρωτοβάθμιοι μη - τετράγωνοι πολυωνυμικοί πίνακες $Q(\lambda)$. Στη συνέχεια, αποδεικνύει ότι και στην περίπτωση του μη - τετράγωνου πολωνυμικού πίνακα $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{m\times n}$, ο πρωτοβάθμιος μη - τετράγωνος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ αποτελεί ισχυρή γραμμικοποίηση του μη - τετράγωνου πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{m\times n}$. Σημειώνουμε ακόμη ότι στο [29] αναφέρονται και δυο αλγόριθμοι κατασκευής του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $Q(\lambda)$ για τις δυο περιπτώσεις, όταν ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι τετράγωνος και όταν ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι μη - τετράγωνος.

Τώρα, θα δώσουμε μερικά παραδείγματα για να δούμε την εφαρμογή της μεθόδου των μεταθέσεων.

3.3 Παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μερικά παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση της μεθόδου.

- **Παράδειγμα 1**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ 1 & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελαστής A_2 είναι κανονικός δηλαδή $det(A_2) = 1 \neq 0$. Επομένως ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει μόνο πεπερασμένα μηδενικά και πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Εφόσον δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ σύμφωνα με το Λήμμα 1 του Κεφαλαίου 1, θα έχει τα ίδια μηδενικά και στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.
Πράγματι, η $Smith$ μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^4+\lambda^3-\lambda-1 \end{bmatrix}$$

Επομένως τα πεπερασμένα μηδενικά του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ± 1 και $-(-1)^{\frac{1}{3}}$, $(-1)^{\frac{2}{3}}$. Έτσι, οι πεπερασμένοι διαιρέτες θα είναι $(\lambda+1)$, $(\lambda-1)$, $(\lambda-(-1)^{\frac{1}{3}})$ και $(\lambda+(-1)^{\frac{2}{3}})$.

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $Q(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μεταθέσεων.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 9 ο πίνακας $Q(\lambda) = \lambda T_0 - T_1T_2$ αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Επομένως έχουμε

$$
\begin{aligned}
Q(\lambda) &= \lambda T_0 - T_1 T_2 \\
&= \lambda \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -A_1 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -A_0 \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Έτσι ο πολυωνυμικός πίνακας

$$
Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}
$$

είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Σημειώνουμε ακόμη ότι σύμφωνα με το Θεώρημα 9 και ο πρωτοβάθμιος πολωυνυμικός πίνακας $Q'(\lambda) = \lambda T_0 - T_2 T_1$ αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
Q(\lambda) &= \lambda T_0 - T_2 T_1 \\
&= \lambda \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_1 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Η $Smith$ μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $Q(\lambda)$ και $Q'(\lambda)$

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{Q(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4+\lambda^3-\lambda-1 \end{bmatrix} = \mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{Q'(\lambda)}(\lambda)$$

όπου είναι φανερό ότι έχουν τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 5 μπορούμε να βρούμε έναν ακόμη πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $R(\lambda)$, ο οποίος αποτελεί και αυτός γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα η νέα μορφή γραμμικοποίησης να έχει ίσως καλύτερη εφαρμογή σε δοσμένο πρόβλημα, εφόσον έχουμε την ευχέρια να "μετακινήσουμε" τον πίνακα A_1 από το σταθερό όρο στον πρωτοβάθμιο όρο.

Έχουμε, λοιπόν,

$$\begin{aligned}
R(\lambda) &= \lambda T_0 T_1^{-1} - T_2 \\
&= \lambda \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & A_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -A_0 \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda & 1 & \lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ο οποίος σύμφωνα με το Πόρισμα 5 είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $R(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{R(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

όπου είναι φανερό ότι έχει τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$. Σημειώνουμε τέλος, ότι σύμφωνα με το Πόρισμα 5 τα ίδια θα ισχύουν και για τον πίνακα $R'(\lambda) = \lambda T_1^{-1} T_0 - T_2$.

- **Παράδειγμα 2**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} 2\lambda^2+\lambda+1 & 4\lambda^2+2 \\ \lambda^2+1 & 2\lambda^2+\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής A_2 του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων, διότι $det(A_2) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ θα έχει πεπερασμένα και άπειρα μηδενικά και πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Σύμφωνα με το [28] στο οποίο αποδεικνύεται ότι πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ θα έχει τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες (σύμφωνα με το Λήμμα 1 του Κεφαλαιου 1).

Πράγματι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$revP(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda+2 & 2\lambda^2+4 \\ \lambda^2+1 & \lambda+2 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revP(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $Q(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μεταθέσεων.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 9, ο πίνακας $Q(\lambda) = \lambda T_0 - T_1T_2$ αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Επομένως έχουμε

$$
\begin{aligned}
Q(\lambda) &= \lambda T_0 - T_1 T_2 \\
&= \lambda \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -A_1 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -A_0 \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\lambda & 4\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\lambda+1 & 4\lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 2\lambda+1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Έτσι ο πολυωνυμικός πίνακας

$$
Q(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda+1 & 4\lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 2\lambda+1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}
$$

είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Στη συνέχεια θα βρούμε τη $Smith$ μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $Q(\lambda)$.
Η $Smith$ μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $Q(\lambda)$ θα είναι

$$
\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{Q(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.
$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $Q(\lambda)$ είναι

$$
revQ(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 4 & \lambda & 2\lambda \\ 1 & \lambda+2 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revQ(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revQ(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως είναι φανερό από τη μορφή των *Smith* μορφών, ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Σημειώνουμε ακόμη ότι ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τον πίνακα $Q'(\lambda) = \lambda T_0 - T_2 T_1$.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 5, μπορούμε να βρούμε έναν ακόμη πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $R(\lambda)$, ο οποίος αποτελεί και αυτός γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα η νέα μορφή γραμμικοποίησης να έχει ίσως καλύτερη εφαρμογή σε δοσμένο πρόβλημα, εφόσον έχουμε την ευχέρια να "μετακινήσουμε" τον πίνακα A_1 από το σταθερό όρο στον πρωτοβάθμιο όρο.
Έχουμε ,λοιπόν,

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \lambda T_0 T_1^{-1} - T_2 \\ &= \lambda \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & A_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -A_0 \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2\lambda & 4\lambda \\ 0 & -1 & \lambda & 2\lambda \\ \lambda & 0 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & \lambda & 1 & \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ο οποίος σύμφωνα με το Πόρισμα 5 είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Στη συνέχεια θα βρούμε τη *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $R(\lambda)$.
Η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $R(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{R(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $R(\lambda)$ είναι

$$revR(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \lambda+1 & 2\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revR(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revR(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως είναι φανερό από τη μορφή των *Smith* μορφών, ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $R(\lambda)$ έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Σημειώνουμε, τέλος, ότι ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $R'(\lambda) = \lambda T_1^{-1} T_0 - T_2$

- **Παράδειγμα 3**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 - 1 \\ \lambda - 2 & \lambda^3 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3 A_3 + \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής A_3 του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων, διότι $det(A_3) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ θα έχει πεπερασμένα και άπειρα μηδενικά και πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Σύμφωνα με το [28] στο οποίο αποδεικνύεται ότι πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ θα έχει τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες (σύμφωνα με το Λήμμα 1 του Κεφαλαιου 1).

Πράγματι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$\begin{aligned} revP(\lambda) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^3 & -\lambda^3 + \lambda \\ -2\lambda^3 + \lambda^2 & -\lambda^2 + 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revP(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}.$$

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $Q(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μεταθέσεων.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 9 ο πίνακας $Q(\lambda) = \lambda T_0 - T_1T_2T_3$ αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \lambda T_0 - T_1T_2T_3 \\ &= \lambda \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -A_2 & I_2 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & I_2 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & -A_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Έτσι ο πολυωνυμικός πίνακας

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Στη συνέχεια θα βρούμε τη *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $Q(\lambda)$.
Η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $Q(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{Q(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $Q(\lambda)$ είναι

$$revQ(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & -\lambda & -2\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η $Smith$ μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revQ(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^0_{revQ(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}.$$

Επομένως είναι φανερό από τη μορφή των $Smith$ μορφών, ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ έχουν τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.
Σημειώνουμε ότι ίδια συμπεράσματα προκύπτουν και για τους πίνακες $Q_1(\lambda) = \lambda T_0 - T_1T_3T_2$, $Q_2(\lambda) = \lambda T_0 - T_2T_1T_3$, $Q_3(\lambda) = \lambda T_0 - T_3T_1T_2$, $Q_4(\lambda) = \lambda T_0 - T_2T_3T_1$,$Q_5(\lambda) = \lambda T_0 - T_3T_2T_1$.

Όπως και προηγουμένως θα χρησιμοποιήσουμε το Πόρισμα 5 και θα βρούμε δύο ακόμα γραμμικοποιήσεις στις οποίες οι πίνακες A_2 και A_3 θα "μεταφερθούν" από το σταθερό όρο που βρίσκονται τώρα στον πρωτοβάθμιο όρο.
Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned} R_1(\lambda) &= \lambda T_0 T_1^{-1} - T_2T_3 \\ &= \lambda \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ I_2 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & I_2 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & -A_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \lambda & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια θα βρούμε τη $Smith$ μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $R_1(\lambda)$.
Η $Smith$ μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $R_1(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{R_1(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $R_1(\lambda)$ είναι

$$revR_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & -\lambda & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η $Smith$ μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revR_1(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revR_1(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}.$$

Επομένως είναι φανερό από τη μορφή των *Smith* μορφών, ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $R_1(\lambda)$ έχουν τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Τώρα θα βούμε και τη δεύτερη μορφή γραμμικοποίησης $R_2(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
R_2(\lambda) &= \lambda T_2^{-1} T_0 T_1^{-1} - T_3 \\
&= \lambda \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \\ 0 & I_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ I_2 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & -A_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & 0 & \lambda & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \lambda-2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $R_2(\lambda)$ είναι γραμμικοποιήση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Στη συνέχεια θα βρούμε τη *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $R_2(\lambda)$.
Η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $R_2(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{R_2(\lambda)}(\lambda)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&\lambda^2-1\end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $R_2(\lambda)$ είναι

$$revR_2(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda&0&0&0&0&0\\0&-\lambda&0&1&0&0\\0&0&-\lambda&0&1&0\\0&0&0&-\lambda&0&1\\1&0&0&1&\lambda&-\lambda\\0&1&0&0&1-2\lambda&-1\end{bmatrix}.$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revR_2(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revR_2(\lambda)}(\lambda)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&\lambda^4\end{bmatrix}.$$

Επομένως είναι φανερό από τη μορφή των *Smith* μορφών, ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $R_2(\lambda)$ έχουν τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.
Είναι φανερό ότι ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για τους πίνακες $R_1'(\lambda)=\lambda T_0T_1^{-1}-T_3T_2$, $R_1''(\lambda)=\lambda T_1^{-1}T_0-T_2T_3$, $R_1'''(\lambda)=\lambda T_1^{-1}T_0-T_3T_2$, $R_{2,1}(\lambda)=\lambda T_1^{-1}T_0T_2^{-1}-T_3$, $R_{2,2}(\lambda)=\lambda T_1^{-1}T_2^{-1}T_0-T_3$, $R_{2,3}(\lambda)=\lambda T_2^{-1}T_1^{-1}T_0-T_3$, $R_{2,4}(\lambda)=\lambda T_0T_2^{-1}T_1^{-1}-T_3$, $R_{2,5}(\lambda)=\lambda T_0T_1^{-1}T_2^{-1}-T_3$.

- **Παράδειγμα 4**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda^3+\lambda^2+1 & \lambda \\ 0 & \lambda^3+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3 A_3 + \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0. \end{aligned}$$

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $Q(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μεταθέσεων.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 9 ο πίνακας $Q(\lambda) = \lambda T_0 - T_1T_2T_3$ αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Επομένως έχουμε

$$Q(\lambda) = \lambda T_0 - T_1T_2T_3$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -A_2 & I_2 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & I_2 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & -A_0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}.$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1&0&0&-1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Έτσι ο πολυωνυμικός πίνακας

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελαστής A_3 είναι κανονικός δηλαδή $det(A_3) = 1 \neq 0$. Επομένως ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει μόνο πεπερασμένα μηδενικά και πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Εφόσον δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ σύμφωνα με το Λήμμα 1 του Κεφαλαίου 1, θα έχει τα ίδια μηδενικά και στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.
Πράγματι, η $Smith$ μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^6 + \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $Q(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{Q(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^6+\lambda^5+2\lambda^3+\lambda^2+1 \end{bmatrix}.$$

Από τη μορφή των *Smith* μορφών των πολυωνυμικών πινάκων $P(\lambda)$ και $Q(\lambda)$ είναι φανερό ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ έχει τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.
Τα ίδια συμπεράσματα προκύπτουν και για τους πίνακες $Q_1(\lambda) = \lambda T_0 - T_1T_3T_2$, $Q_2(\lambda) = \lambda T_0 - T_2T_1T_3$, $Q_3(\lambda) = \lambda T_0 - T_3T_1T_2$, $Q_4(\lambda) = \lambda T_0 - T_2T_3T_1$,$Q_5(\lambda) = \lambda T_0 - T_3T_2T_1$.
Όπως και προηγουμένως θα χρησιμοποιήσουμε το Πόρισμα 5 και θα βρούμε δύο ακόμα γραμμικοποιήσεις στις οποίες οι πίνακες A_2 και A_3 θα "μεταφερθούν" από το σταθερό όρο που βρίσκονται τώρα στον πρωτοβάθμιο όρο.
Έχουμε λοιπόν,

$$R_1(\lambda) = \lambda T_0 T_1^{-1} - T_2T_3$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ I_2 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & I_2 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & -A_0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

και

$$R_2(\lambda) = \lambda T_2^{-1} T_0 T_1^{-1} - T_3$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \\ 0 & I_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ I_2 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & -A_0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες $R_1(\lambda)$ και $R_2(\lambda)$ είναι γραμμικοποιήσεις του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Η *Smith* μορφή των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων $R_1(\lambda)$ και $R_2(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{R_1(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^6 + \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + 1 \end{bmatrix} = \mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{R_2(\lambda)}(\lambda).$$

Από τη μορφή των *Smith* μορφών των πολυωνυμικών πινάκων $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ και $R_2(\lambda)$ είναι φανερό ότι οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες $Q(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ και $R_2(\lambda)$ έχουν τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.
Είναι φανερό ότι ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για τους πίνακες $R_1'(\lambda) = \lambda T_0 T_1^{-1} - T_3 T_2$, $R_1''(\lambda) = \lambda T_1^{-1} T_0 - T_2 T_3$, $R_1'''(\lambda) = \lambda T_1^{-1} T_0 - T_3 T_2$, $R_{2,1}(\lambda) = \lambda T_1^{-1} T_0 T_2^{-1} - T_3$, $R_{2,2}(\lambda) = \lambda T_1^{-1} T_2^{-1} T_0 - T_3$, $R_{2,3}(\lambda) = \lambda T_2^{-1} T_1^{-1} T_0 - T_3$, $R_{2,4}(\lambda) = \lambda T_0 T_2^{-1} T_1^{-1} - T_3$, $R_{2,5}(\lambda) = \lambda T_0 T_1^{-1} T_2^{-1} - T_3$.

- **Παράδειγμα 5**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} 2\lambda^3 + \lambda^2 + 1 & 4\lambda^3 + \lambda \\ \lambda^3 & 2\lambda^3 + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3 A_3 + \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής A_3 του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων, διότι $det(A_3) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ θα έχει πεπερασμένα και άπειρα μηδενικά και πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Σύμφωνα με το [28] στο οποίο αποδεικνύεται ότι πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ θα έχει τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες (σύμφωνα με το Λήμμα 1 του Κεφαλαιου 1).

Πράγματι, η $Smith$ μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^5 - \frac{1}{2}\lambda^4 + 2\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$\begin{aligned} revP(\lambda) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^3 + \lambda + 2 & \lambda^2 + 4 \\ 1 & \lambda^3 + 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Έτσι, η $Smith$ μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revP(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $Q(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μεταθέσεων.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 9 ο πίνακας $Q(\lambda) = \lambda T_0 - T_1T_2T_3$ αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Επομένως έχουμε

$$Q(\lambda) = \lambda T_0 - T_1T_2T_3$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -A_2 & I_2 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & I_2 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & -A_0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\lambda+1 & 4\lambda & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Έτσι ο πολυωνυμικός πίνακας

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda+1 & 4\lambda & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Στη συνέχεια θα βρούμε τη *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $Q(\lambda)$.
Η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $Q(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{Q(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^5 - \frac{1}{2}\lambda^4 + 2\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $Q(\lambda)$ είναι

$$revQ(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 4 & 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revQ(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revQ(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως είναι φανερό από τη μορφή των *Smith* μορφών, ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ έχουν τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.
Σημειώνουμε ότι ίδια συμπεράσματα προκύπτουν και για τους πίνακες $Q_1(\lambda) = \lambda T_0 - T_1T_3T_2$, $Q_2(\lambda) = \lambda T_0 - T_2T_1T_3$, $Q_3(\lambda) = \lambda T_0 - T_3T_1T_2$, $Q_4(\lambda) = \lambda T_0 - T_2T_3T_1$,$Q_5(\lambda) = \lambda T_0 - T_3T_2T_1$.

Όπως και προηγουμένως θα χρησιμοποιήσουμε το Πόρισμα 5 και θα

βρούμε δύο ακόμα γραμμικοποιήσεις στις οποίες οι πίνακες A_2 και A_3 θα "μεταφερθούν" από το σταθερό όρο που βρίσκονται τώρα στον πρωτοβάθμιο όρο.
Έχουμε λοιπόν,

$$R_1(\lambda) = \lambda T_0 T_1^{-1} - T_2 T_3$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ I_2 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & I_2 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & -A_0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2\lambda & 4\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 2\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $R_1(\lambda)$ είναι γραμμικοποιήση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Στη συνέχεια θα βρούμε τη *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $R_1(\lambda)$.
Η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $R_1(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{R_1(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^5 - \frac{1}{2}\lambda^4 + 2\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $R_1(\lambda)$ είναι

$$revR_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revR_1(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revR_1(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως είναι φανερό από τη μορφή των *Smith* μορφών, ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $R_1(\lambda)$ έχουν τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Τέλος, θα βρούμε και τη δεύτερη μορφή γραμμικοποίησης.

$$\begin{aligned} &R_2(\lambda) = \lambda T_2^{-1} T_0 T_1^{-1} - T_3 \\ &= \lambda \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \\ 0 & I_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ I_2 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & -A_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2&4&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 2&4&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0&0&2&4&0&0\\ 0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1&0&2\lambda&4\lambda&0&0\\ 0&-1&\lambda&2\lambda&0&0\\ 0&0&-1&0&\lambda&0\\ 0&0&0&-1&0&\lambda\\ \lambda&0&\lambda&0&1&\lambda\\ 0&\lambda&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $R_2(\lambda)$ είναι γραμμικοποιήση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Στη συνέχεια θα βρούμε τη $Smith$ μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $R_2(\lambda)$.

Η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $R_2(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{R_2(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^5 - \frac{1}{2}\lambda^4 + 2\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $R_2(\lambda)$ είναι

$$revR_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revR_2(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revR_2(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως είναι φανερό από τη μορφή των *Smith* μορφών, ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $R_2(\lambda)$ έχουν τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.
Είναι φανερό ότι ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για τους πίνακες $R_1'(\lambda) = \lambda T_0 T_1^{-1} - T_3 T_2$, $R_1''(\lambda) = \lambda T_1^{-1} T_0 - T_2 T_3$, $R_1'''(\lambda) = \lambda T_1^{-1} T_0 - T_3 T_2$, $R_{2,1}(\lambda) = \lambda T_1^{-1} T_0 T_2^{-1} - T_3$, $R_{2,2}(\lambda) = \lambda T_1^{-1} T_2^{-1} T_0 - T_3$, $R_{2,3}(\lambda) = \lambda T_2^{-1} T_1^{-1} T_0 - T_3$, $R_{2,4}(\lambda) = \lambda T_0 T_2^{-1} T_1^{-1} - T_3$, $R_{2,5}(\lambda) = \lambda T_0 T_1^{-1} T_2^{-1} - T_3$.

- **Παράδειγμα 6**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^4 A + \lambda^3 B + \lambda^2 C + \lambda D + E \\ &= \lambda^4 A_4 + \lambda^3 A_3 + \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0, \end{aligned}$$

ο οποίος υποθέτουμε ότι είναι κανονικός. Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $Q(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μεταθέσεων.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 9 ο πίνακας $Q(\lambda) = \lambda T_0 - T_1T_2T_3T_4$ αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Επομένως έχουμε

$$Q(\lambda) = \lambda T_0 - T_1T_2T_3T_4$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -A_3 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_2 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_1 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -B & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -B & -C & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D & -E \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -B & -C & -D & -E \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι ο πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το Πόρισμα 5 και θα βρούμε τρείς ακόμα γραμμικοποιήσεις στις οποίες οι πίνακες B, C και D θα " μεταφερθούν " και πάλι από το σταθερό όρο στον πρωτοβάθμιο όρο.
Έχουμε λοιπόν,

$$R_1(\lambda) = \lambda T_0 T_1^{-1} - T_2 T_3 T_4$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_2 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_1 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ I & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C & -D & I \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ I & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C & -D & -E \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

επίσης,

$$R_2(\lambda) = \lambda T_2^{-1} T_0 T_1^{-1} - T_3 T_4$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_1 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D & -E \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & B & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D & -E \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$R_3(\lambda) = \lambda T_2^{-1} T_0 T_1^{-1} T_3^{-1} - T_4$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & A_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ I & B & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & B & 0 & C \\ 0 & 0 & I & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{bmatrix}$$

Έτσι οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες $R_1(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ και $R_3(\lambda)$ είναι γραμμικοποιήσεις του κανονικού πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

3.4 Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό ασχοληθήκαμε με μια ακόμη μέθοδο γραμμικοποίησης, τη μέθοδο των μεταθέσεων.
Αρχικά, υπενθυμήσαμε τον ορισμό της πρώτης και δεύτερης συνοδεύουσας μορφής. Έπειτα ορίσαμε τους πίνακες T_i, $i = 1, \ldots, k$ με τη βοήθεια των οποίων ορίσαμε τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $Q(\lambda)$, ειδική περίπτωση του οποίου αποτελούν η πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή.
Στη συνέχεια αποδείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ και η πρώτη συνοδεύουσα μορφή είναι αυστηρά ισοδύναμοι πίνακες και επειδή δείξαμε ότι (Θεώρημα 1 του Κεφαλαίου 1) η πρώτη συνοδεύουσα μορφή αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ θα αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Στις Παρατηρήσεις αυτού του κεφαλαίου αναφέραμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ αποτελεί ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και επομένως οι πολυωνυμικοί πίνακες $Q(\lambda)$ και $P(\lambda)$ θα έχουν τους ίδιους πεπρασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.
Τέλος, αναφέραμε και ορισμένα παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση της μεθόδου.
Κρίναμε χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε τα ίδια παραδείγματα και στις τρεις μεθόδους για να μπορούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη τελευταία μέθοδο που θα μας απασχολήσει σε αυτή την εργασία, την πολλαπλασιαστική μέθοδο γραμμικοποίησης.

Κεφάλαιο 4

Η Πολλαπλασιατική Μέθοδος

Στο κεφάλαιο αυτό, το οποίο είναι και το τελευταίο της μελέτης μας, θα παρουσιάσουμε την πολλαπλασιαστική μέθοδο γραμμικοποίσης. Η πολλαπλασιαστική μέθοδος είναι και αυτή μια μέθοδος γραμμικοποίησης ενός πολυωνυμικού πίνακα, η οποία βασιζεται στον διαδοχικό πολλαπλασιασμό πινάκων, από όπου πήρε και το όνομά της η μέθοδος.
Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό δυο πινάκων A και C, τους οποίους θα χρησιμοποιήσουμε κατά την ανάπτυξη της μεθόδου. Ο πολλαπλασιασμός αυτών των δύο πινάκων, δημιουργεί μια ακολουθία πινάκων $(S_i = AC^i)_{i=0}^{k}$ την οποία χρησιμοποιούμε για να δημιουργήσουμε μια οικογένεια πινάκων. Η οικογένεια αυτή, θα δείξουμε ότι αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Σημειώνουμε ότι και σε αυτό το κεφάλαιο θα υποθέσουμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} A_i\lambda^i$ είναι κανονικός πίνακας ($det(P(\lambda)) \neq 0$). Ακόμη, θα κάνουμε επιπλέον την υπόθεση ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής A_k του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι επίσης κανονικός, δηλαδή $det(A_k) \neq 0$. Η υπόθεση $det(A_k) \neq 0$ αποτελεί, βέβαια, έναν περιορισμό τον οποίο όμως με χρήση κατάλληλου μετασχηματισμού μπορούμε να παρακάμψουμε. Στις Παρατηρήσεις της παραγράφου 4.1, αυτού του κεφαλαίου, κάνουμε αναφορά και σε αυτή την περίπτωση.
Στη συνέχεια, θα δώσουμε μια παραλλαγή της πολλαπλασιαστικής μεθόδου στην οποία δεν θα κάνουμε την υπόθεση $det(A_k) \neq 0$. Γι αυτή την παραλλαγή θα αποδείξουμε ότι οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες που προκύπτουν αποτελούν γραμμικοποίηση και μάλιστα ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Έτσι, οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες που θα προκύψουν θα έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Επιπλέον θα βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ώστε ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ να διατηρεί τη συμμετρία του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Θα ολοκληρώσουμε τη μελέτη της πολλαπλασιαστικής μεθόδου αναφέροντας μερικά παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση της μεθόδου.

Αρχικά θα ορίσουμε κάποιους πίνακες τους οποίους θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.
Ορίζουμε

$$A := \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ A_2 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ A_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B := \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & A_3 & \cdots & A_k \\ 0 & A_3 & A_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & A_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

όπου $A_1, \ldots, A_k$ είναι οι πίνακες συντελεστές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} A_i \lambda^i$.
Θεωρούμε ότι $det(A_k) \neq 0$. Έτσι ορίζουμε και τον πίνακα

$$C := \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n \\ -A_k^{-1}A_0 & -A_k^{-1}A_1 & -A_k^{-1}A_2 & \cdots & -A_k^{-1}A_{k-2} & -A_k^{-1}A_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια θα δειξουμε ότι ο πίνακας $\lambda I_n - C$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Θεώρημα 10. *Ο πίνακας $\lambda I_n - C$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} A_i \lambda^i$, όπου $A_k \neq 0$ και $det(A_k) \neq 0$.*

Απόδειξη.
Σύμφωνα με τον ορισμό της γραμμικοποίησης που δώσαμε στη Εισαγωγή, στο Κεφάλαιο 1, για να είναι ο πίνακας $\lambda I_n - C$ γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα πρέπει να υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $E(\lambda)$ και $F(\lambda)$ τέτοιοι ώστε

$$E(\lambda) \cdot (\lambda I_n - C) \cdot F(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε τους $kn \times kn$ πίνακες

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^{k-1}A_k + \cdots + \lambda A_2 + A_1 & \lambda^{k-2}A_k + \cdots + \lambda A_3 + A_2 & \cdots & \lambda A_k + A_{k-1} & A_k \\ -I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda I_n & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda I_n & I_n \end{bmatrix}.$$

Έχουμε ότι $detE(\lambda) = \pm det(A_k) \neq 0$ (από υπόθεση), και $detF(\lambda) = 1$.
Επομένως, οι πίνακες $E(\lambda)$ και $F(\lambda)$ είναι μονομετρικοί.
Ακόμη, έχουμε ότι

$$E(\lambda)(\lambda I_n - C) =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^{k-1}A_k + \cdots + \lambda A_2 + A_1 & \lambda^{k-2}A_k + \cdots + \lambda A_3 + A_2 & \cdots & \lambda A_k + A_{k-1} & A_k \\ -I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \lambda I_n & -I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_n & -I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda I_n & -I_n \\ A_k^{-1}A_0 & A_k^{-1}A_1 & A_k^{-1}A_2 & \cdots & A_k^{-1}A_{k-2} & \lambda I_n + A_k^{-1}A_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda I_n & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda I_n & I_n \end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

και

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix} \cdot F(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda^k A_k + \cdots + A_0 & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda I_n & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda I_n & I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda I_n & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda I_n & I_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Από τις σχέσεις (4.1) και (4.2) έχουμε

$$E(\lambda)(\lambda I_n - C) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix} \cdot F(\lambda)$$

Επειδή $det(F(\lambda)) = 1$ και $F(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{kn\times kn}$ πίνακας, είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή υπάρχει ο $F^{-1}(\lambda)$.

Έτσι

$$E(\lambda)(\lambda I_n - C)F^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix}$$

όπου $E(\lambda)$ και $F^{-1}(\lambda)$ μονομετρικοί πίνακες.
Άρα ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $(\lambda I_n - C)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

□

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε την πολλαπλασιαστική μέθοδο με την οποία θα βρούμε την οικογένεια των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων, οι οποίοι είναι γραμμικοποιήσεις του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

4.1 Η Πολλαπλασιαστική μέθοδος

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} A_i \lambda^i$, όπου $A_k \neq 0$ και $det(A_k) \neq 0$.
Θεωρούμε, ακόμη, τους πίνακες $S_i = A \cdot C^i$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ A_2 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ A_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n \\ -A_k^{-1}A_0 & -A_k^{-1}A_1 & -A_k^{-1}A_2 & \cdots & -A_k^{-1}A_{k-2} & -A_k^{-1}A_{k-1} \end{bmatrix}$$

οι οποίοι ορίζονται για όλους τους ακεραίους i για τους οποίους ο πίνακας C^i είναι καλά ορισμένος.

Πιο αναλυτικά, η μορφή των πινάκων $S_i = A \cdot C^i$ είναι η εξής:

- Για $i = 0$,

$$S_0 = A \cdot C^0 = A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ A_2 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ A_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- Για $i = 1$,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= A \cdot C^1 \\
&= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ A_2 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ A_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n \\ -A_k^{-1}A_0 & -A_k^{-1}A_1 & \cdots & -A_k^{-1}A_{k-2} & -A_k^{-1}A_{k-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & A_k \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & A_k & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= B
\end{aligned}
$$

- Για $i = 2, \ldots, k-2$

$$
S_i := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ -A_0 & \cdots & -A_{i-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{i+1} & \cdots & A_k \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_k & \cdots & 0 \end{bmatrix}
$$

- Για $i = k-1$

$$
S_{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -A_0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ -A_0 & \cdots & -A_{k-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{bmatrix}
$$

- Για $i = k$

$$
\begin{aligned}
S_k &= AC^k = S_{k-1}C \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -A_0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ -A_0 & \cdots & -A_{k-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n \\ -A_k^{-1}A_0 & -A_k^{-1}A_1 & \cdots & -A_k^{-1}A_{k-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_0 & \cdots & -A_{k-2} & -A_{k-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι για όλα τα S_i , $i = 0, 1, \ldots, k$ ο πίνακας S_i δεν εξαρτάται από τον πίνακα A_i. Ακόμη, λόγο της μορφής των S_i παρατηρούμε ότι όλα τα S_i είναι κανονικά αν και μόνον αν οι πίνακες A_k και A_0 είναι κανονικοί. Διότι, όλοι οι πίνακες S_i έχουν σε κάθε γραμμή τους ή τον πίνακα A_0 ή τον πίνακα A_k. Ακόμη, όταν οι πίνακες A_k και A_0 είναι κανονικοί τότε και ο πίνακας C είναι κανονικός, διότι η ορίζουσά του θα είναι $det(C) = (-1)^{kn-1}I_n \cdot det(-A_k^{-1}A_0)$ η οποία δεν είναι εκ ταυτότητος μηδέν, λόγω του ότι οι πίνακες A_k και A_0 είναι κανονικοί.
Για τυχαίο δείκτη m, $0 \leq m \leq k$ έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\lambda S_{m-1} - S_m &\overset{\substack{S_{m-1}=AC^{m-1} \\ S_m=AC^m}}{=} \lambda AC^{m-1} - AC^m \\
&= AC^{m-1}(\lambda I_n - C) \\
&\overset{S_{m-1}=AC^{m-1}}{=} S_{m-1}(\lambda I_n - C)
\end{aligned}
$$

Όταν οι πίνακες A_0 και A_k είναι κανονικοί τότε και ο πίνακας S_{k-1} θα είναι κανονικός. Επειδή ο πίνακας S_{k-1} είναι πίνακας ανεξάρτητος του λ και κανονικός, δηλαδή όχι εκ ταυτότητος μηδέν, θα είναι μονομετρικός πίνακας.
Έτσι,

$$\lambda S_{m-1} - S_m = S_{m-1}(\lambda I_n - C) \Rightarrow (\lambda I_n - C) = S_{m-1}^{-1}(\lambda S_{m-1} - S_m).$$

Ακόμη, έχουμε δει ότι ο πίνακας $\lambda I_n - C$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Δηλαδή, υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $E(\lambda)$ και $F(\lambda)$

τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix} &= E(\lambda)(\lambda I_n - C)F(\lambda) \\ &= E(\lambda)[S_{m-1}^{-1}(\lambda S_{m-1} - S_m)]F(\lambda) \\ &= E(\lambda)S_{m-1}^{-1}(\lambda S_{m-1} - S_m)F(\lambda)\end{aligned}$$

όπου οι πίνακες $E(\lambda)S_{m-1}^{-1}$ και $F(\lambda)$ είναι μονομετρικοί. Επομένως και ο πίνακας $\lambda S_{m-1} - S_m$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Δείξαμε, λοιπόν, ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $\lambda S_{m-1} - S_m$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ όταν οι πίνακες συντελεστές A_0 και A_k είναι κανονικοί. Στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε την υπόθεση ότι ο πίνακας συντελεστής A_0 είναι κανονικός και θα βρούμε τη μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα ο οποίος θα αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο όλων των $kn \times kn$ πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων της μορφής $\lambda M - N$ και τον ονομάζουμε $\mathcal{V}$.

Λήμμα 6. *Αν $A_k \neq 0$ τότε οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες $L_j(\lambda) := \lambda S_{j-1} - S_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$ δημιουργούν έναν k - διάστατο υποχώρο $\mathcal{V}_0$ του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$.*

Απόδειξη.
Αν $A_k \neq 0$ τότε όλα τα $S_i \neq 0$, $\forall i = 0, 1, \ldots, k-1$ διότι όλα τα S_i $\forall i = 0, 1, \ldots, k-1$ περιέχουν τον πίνακα $A_k \neq 0$. Οπότε και οι πίνακες $L_i(\lambda) \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$, διότι για $i = 0, 1, \ldots, k-1$ τα $S_i \neq 0$ και ακόμη κι αν είχαμε $S_k = 0$ τότε $L_k(\lambda) = \lambda S_{k-1} - S_k = \lambda S_{k-1} \neq 0$. Έτσι ο γραμμικός συνδιασμός $\sum_{i=0}^{k} c_i L_i(\lambda)$ είναι ο μηδενικός πίνακας αν και μόνον αν $c_i = 0$. Άρα οι πίνακες $L_1(\lambda), \ldots, L_k(\lambda)$ είναι k σε πλήθος γραμμικά ανεξάρτητοι πίνακες. Έτσι αποτελούν βάση και δημιουργούν έναν k - διάστατο διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}_0$, υποχώρο του του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$.

□

Σημειώνουμε ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}_0$ είναι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{L}_1$, τον οποίο είχαμε αναφέρει στο κεφάλαιο 2, στην προσθετική μέθοδο. [22]

Έπειτα θέλουμε να δείξουμε ότι τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_0$ είναι γραμμικοποιήσεις του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Γι΄ αυτό δίνουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 11. *Υποθέτουμε ότι* $detA_k \neq 0$. *Τότε ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας* $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_j L_j(\lambda) \in \mathcal{V}_0$ *είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα* $P(\lambda)$ *αν και μόνον αν το πολυώνυμο* $p_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda^{i-1}$ *είναι μη - μηδενικό για όλες τις ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα* $P(\lambda)$.

Απόδειξη.

Εφόσον ισχύει $S_i = AC^i$ έχουμε

$$\begin{aligned} L_c(\lambda) &= \sum_{i=1}^{k} c_i(\lambda S_{i-1} - S_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i(\lambda AC^{i-1} - AC^i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i AC^{i-1}(\lambda I_n - C) \\ &= A(\lambda I_n - C)\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}. \end{aligned}$$

Επειδή $det(A_k) \neq 0$ και λόγω της μορφής του $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ A_2 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ A_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, ο πίνακας A θα είναι κανονικός.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι ανεξάρτητος του λ και κανονικός επομένως θα είναι μονομετρικός.

Ακόμη, είδαμε ότι ο πίνακας $\lambda I_n - C$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Δηλαδή, υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $E(\lambda)$ και $F(\lambda)$ τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix} = E(\lambda)(\lambda I_n - C)F(\lambda).$$

Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}$ είναι κανονικός (και επειδή είναι και ανεξάρτητος του λ, μονομετρικός) θα έχουμε ότι

$$L_c(\lambda) = A(\lambda I_n - C)\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1} \Rightarrow (\lambda I_n - C) = A^{-1}L_c(\lambda)\left(\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}\right)^{-1}.$$

Οπότε ισχύει

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix} &= E(\lambda)(\lambda I_n - C)F(\lambda) \\ &= E(\lambda)A^{-1}L_c(\lambda)\left(\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}\right)^{-1} F(\lambda)\end{aligned}$$

όπου $E(\lambda)A^{-1}$ και $\left(\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}\right)^{-1} F(\lambda)$ είναι μονομετρικοί πίνακες. Άρα ο πίνακας $L_c(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Επομένως, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ αν και μόνον αν ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}$ είναι κανονικός.
Τώρα, οι ιδιοτιμές του πίνακα C είναι οι ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, διότι ο πίνακας $\lambda I_n - C$ είναι γραμμικοποίση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και επομένως έχει τις ίδιες ιδιοτιμές. Έστω ότι οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1, \ldots, \lambda_{kn}$. Έτσι οι ιδιοτιμές του πίνακα $p_c(C)$ θα είναι $p_c(\lambda_j)$, $j = 1, 2, \ldots, kn$. Άρα η $det(p_c(C))$ είναι ουσιαστικά το γινόμενο των ιδιοτιμών και επειδή ο πίνακας $p_c(C)$ θεωρήσαμε ότι είναι κανονικός, έχουμε ότι $p_c(\lambda_j) \neq 0$, $\forall\, j = 1, 2, \ldots, kn$. Δηλαδή, $p_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda^{i-1} \neq 0$ για όλες τις ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

□

Έπειτα θα δώσουμε και ένα πόρισμα.

Πόρισμα 6. *Αν $det(A_k) \neq 0$ τότε:*

(α) Για τον $L_1(\lambda) = \lambda A - B$ ισχύει $p_c(\lambda) \equiv 1$.

(β) Ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_i(\lambda)$ με $i \geq 2$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ αν και μόνον αν $det(A_0) \neq 0$.

(γ) Αν a δεν είναι ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ τότε

$$\lambda(S_1 - aS_0) - (S_2 - aS_1)$$

είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Απόδειξη.

(α) Πράγματι, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, για

$$p_c(\lambda) \equiv 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda^{i-1} \equiv 1$$

θα πρέπει $i = 1$ και $c_1 = 1$.
Όμως τότε

$$L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda) \overset{\substack{i=1\\c_1=1}}{=} L_1(\lambda) = \lambda S_0 - S_1 \overset{\substack{S_0=A\\S_1=B}}{=} \lambda A - B$$

(β) Για τυχαίο δείκτη $m \geq 2$ έχουμε

$$L_c(\lambda) = L_m = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda) \Rightarrow \begin{array}{c} c_1 = \ldots = c_{m-1} = c_{m+1} = \ldots = c_k = 0 \\ c_m = 1 \end{array}$$

Τότε από το Θεώρημα 11 έχουμε ότι το $L_c(\lambda) = L_m$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ αν και μόνον αν το πολυώνυμο $p_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda^{i-1}$ με $c_1 = \ldots = c_{m-1} = c_{m+1} = \ldots = c_k = 0$, $c_m = 1$, δηλαδή το $p_c(\lambda) = \lambda^m$ είναι μη - μηδενικό για όλες τις ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή $\lambda = 0$ δεν πρέπει να είναι ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, δηλαδή πρέπει $det(P(0)) \neq 0 \Rightarrow det(A_0) \neq 0$.

(γ) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 11 για το πολυώνυμο $p(c) = \lambda - a$.
Δηλαδή $i = 1, 2$ και $c_1 = -a$, $c_2 = 1$.
Έτσι,

$$\begin{aligned} L_c(\lambda) &= c_1 L_1(\lambda) + c_2 L_2(\lambda) \\ &= -a(\lambda S_0 - S_1) + 1(\lambda S_1 - S_0) \\ &= -a\lambda S_0 + aS_1 + \lambda S_1 - S_2 \\ &= \lambda(S_1 - aS_0) - (S_2 - aS_1) \end{aligned}$$

το οποίο λόγω του Θεωρήματος 11 είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

□

4.2 Παρατηρήσεις

Συνοψίζοντας όλα τα προηγούμενα, στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάσαμε την πολλαπλασιαστική μέθοδο γραμμικοποίησης, η οποία βασίστηκε στη δημιουργία μιας ακολουθίας πινάκων $(S_i)_{i=1}^{k}$ οι οποίοι προέκυψαν με συνεχείς πολλαπλασιασμούς ενός πίνακα C, $(S_i = AC^i)$. Με τη βοήθεια αυτής της ακολουθίας πινάκων, δημιουργήσαμε πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες $L_i(\lambda) = \lambda S_{i-1} - S_i$, οι οποίοι δείξαμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητοι πίνακες και δημιουργούν ένα διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}_0$, υποχώρο του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$, όλων των $kn \times kn$ πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων.
Στη συνέχεια, σύμφωνα με το Θεώρημα 11 , δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ αν και μόνον αν το πολυώνυμο $p_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda^{i-1}$ είναι μη - μηδενικό για όλες τις ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Εφόσον δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, σύμφωμα με το Λήμμα 1 του Κεφαλαίου 1, ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ θα έχουν τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Ακόμη, αξίζει να σημειώσουμε ότι εφόσον κάναμε την υπόθεση ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής A_k του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι κανονικός, δηλαδή $det(A_k) \neq 0$, σημειώνουμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ δεν θα έχει μηδενικά στο άπειρο, ούτε και στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο. Ο περιορισμός αυτός είναι πολύ σημαντικός και μας αποκλείει πολλές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις στις οποίες ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής του πολυωνυμικού πίνακα είναι ιδιάζων. Για να ξεπεράσουμε αυτόν τον περιορισμό $(det(A_k) \neq 0)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μετασχηματισμό, η χρήση του οποίου θα μας επιτρέψει στη συνέχεια να αφαιρέσουμε την υπόθεση ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής θέλουμε να είναι κανονικός.
Για τις ανάγκες, λοιπόν, της απόδειξης του θεωρήματος κάναμε την υπόθεση $det(A_k) \neq 0$. Έπειτα με την ίδια υπόθεση, αποδείξαμε και ένα πόρισμα. Για την (γ) περίπτωση του Πορίσματος 6 , αν για το a γνωρίζαμε για ποιά $det(P(a)) \neq 0$, τότε θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε την υπόθεση $det(A_k) \neq 0$ κάνοντας την εξής παραμετροποίηση: $\mu = (\lambda - a)^{-1}$.
Για παράδειγμα, όταν $k = 2$ τότε θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$P(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$$

όπως επίσης και ότι ο πίνακας A_2 είναι μη - κανονικός.
Τότε εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό

$$\mu = (\lambda - a)^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{1 + \mu a}{\mu}$$

θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\mu^2 P(\mu) &= A_2(1+\mu a)^2 + A_1\mu(1+\mu a) + A_0\mu^2 \\
&= A_2(1+2\mu a+\mu^2 a^2) + A_1\mu + A_1\mu^2 a + A_0\mu^2 \\
&= (A_2 a^2 + A_1 a + A_0)\mu^2 + (2aA_2 + A_1)\mu + A_2
\end{aligned}
$$

ο οποίος έχει πλέον για μεγιστοβάθμιο πίνακα συντελεστή κανονικό πίνακα.

Θα δώσουμε, τώρα, ένα παράδειγμα στο οποίο ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής θα είναι μη - κανονικός πίνακας και θα βρούμε τον πρωτοβάθμιο πίνακα ο οποίος είναι γραμμικοποίησή του κάνοντας χρήση του προηγούμενου μετασχηματισμού.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τον δευτεροβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= \begin{bmatrix} 2\lambda^2+\lambda+1 & 4\lambda^2+1 \\ \lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda+1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A_2 είναι μη - κανονικός.
Έτσι, θα εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό $\mu = (\lambda - a)^{-1}$.
Θα χρησιμοποιήσουμε ως $a = 0$, διότι η τιμή 0 δεν είναι ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, $det(P(0)) = 1$.
Επομένως, ο μετασχηματισμός μας θα γίνει $\mu = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mu}$.
Θα έχουμε τότε

$$
\begin{aligned}
\mu^2 P(\mu) &= A_0\mu^2 + A_1\mu + A_2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mu^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mu + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mu^2+\mu+2 & \mu^2+4 \\ 1 & \mu^2+\mu+2 \end{bmatrix} \\
&= B_2\mu^2 + B_1\mu + B_0
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια, θα βρούμε τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $L_c(\mu)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\mu)$, χρησιμοποιώντας τη

πολλαπλασιαστική μέθοδο. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11, ο πίνακας $L_c(\mu)$ θα είναι της μορφής $L_c(\mu) = \sum_{j=1}^{k} c_j L_j$.
Αρχικά θα υπολογίσουμε τους πίνακες A, C, S_0, S_1, S_2.
Έχουμε, λοιπόν,

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -B_2^{-1}B_0 & -B_2^{-1}B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

και

$$\begin{aligned} S_0 &= A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_1 = A \cdot C = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ S_2 &= A \cdot C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -4 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Έστω ότι $c_1 = 1 = c_2$.
Ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\mu) = \sum_{j=1}^{k} c_j L_j(\mu)$ θα είναι:

$$L_c(\mu) = \sum_{j=1}^{2} c_j L_j(\mu) = c_1 L_1(\mu) + c_2 L_2(\mu) \overset{c_1=1=c_2}{=} \mu S_0 - S_1 + \mu S_1 + S_2$$

$$= \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -4 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu+2 & 4 & \mu & 0 \\ 1 & \mu+2 & 0 & \mu \\ \mu & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \mu & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\mu & -4\mu & 2 & 4 \\ -\mu & -2\mu & 1 & 2 \\ 2 & 4 & \mu+1 & \mu \\ 1 & 2 & 0 & \mu+1 \end{bmatrix}$$

$$L_c(\mu) = \begin{bmatrix} 2-\mu & 4-4\mu & \mu+2 & \mu+4 \\ 1-\mu & 2-\mu & 1 & \mu+2 \\ \mu+2 & \mu+4 & \mu & \mu-1 \\ 1 & \mu+2 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

το οποίο είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\mu)$ διότι $p_c(\mu) = c_1+\mu c_2 = 1+\mu$ το οποίο μηδενίζεται για $\mu = -1$. Η τιμή $\mu = -1$ δεν είναι ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\mu)$ διότι $det(P(\mu)) = -1 \neq 0$ και επομένως το πολυωνύμο $p_c(\mu)$ δεν μηδενίζεται για όλες τις ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\mu)$.
Έτσι, λόγω του Θεωρήματος 11, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\mu)$ αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\mu)$.
Χρησιμοποιώντας ξανά το μετασχηματισμό $\mu = (\lambda + a)^{-1}$ για $a = 0$, δηλαδή $\mu = \frac{1}{\lambda}$ θα έχουμε

$$L_c(\mu) = L_c(\frac{1}{\lambda}) = \begin{bmatrix} \frac{2\lambda-1}{\lambda} & \frac{4\lambda-4}{\lambda} & \frac{2\lambda+1}{\lambda} & \frac{4\lambda+1}{\lambda} \\ \frac{\lambda-1}{\lambda} & \frac{2\lambda-1}{\lambda} & 1 & \frac{2\lambda+1}{\lambda} \\ \frac{2\lambda+1}{\lambda} & \frac{4\lambda+1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1-\lambda}{\lambda} \\ 1 & \frac{2\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$$

δηλαδή,

$$L_c(\lambda) = \lambda L_c(\frac{1}{\lambda}) = \begin{bmatrix} 2\lambda-1 & 4\lambda-4 & 2\lambda+1 & 4\lambda+1 \\ \lambda-1 & 2\lambda-1 & \lambda & 2\lambda+1 \\ 2\lambda+1 & 4\lambda+1 & 1 & 1-\lambda \\ \lambda & 2\lambda+1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Στο σημείο αυτό θα δώσουμε ενδεικτικά μερικά παραδείγματα της πολλαπλασιαστικής μεθόδου την οποία περιγράψαμε προηγουμένως και θα συνεχίσουμε τη μελέτη μας με μια παραλλαγή της μεθόδου.

4.3 Παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μερικά παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση της μεθόδου.

- **Παράδειγμα 1**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ 1 & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0.$$

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $L_c(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιατική μέθοδο. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11 ο πίνακας $L_c(\lambda)$ θα είναι της μορφής $L_c(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} c_j L_j(\lambda)$.
Αρχικά, θα υπολογίσουμε τους πίνακες A, C, S_0, S_1, S_2.
Έχουμε, λοιπόν,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -A_2^{-1}A_0 & -A_2^{-1}A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και

$$S_0 = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad S_1 = A \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$S_2 = A \cdot C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.
Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} c_j L_j(\lambda)$ θα είναι:

$$\begin{aligned}
L_c(\lambda) &= \sum_{j=1}^{2} c_j L_j(\lambda) \\
&= c_1 L_1(\lambda) + c_2 L_2(\lambda) \\
&\overset{\substack{c_1=1 \\ c_2=2}}{=} (\lambda S_0 - S_1) + 2(\lambda S_1 - S_2) \\
&= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \\
&\quad +2\lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \lambda+1 & \lambda & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2\lambda & 0 & 2 \\ -2\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2\lambda+2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda & \lambda & 2 \\ 1-2\lambda & \lambda & 2 & \lambda \\ \lambda & 2 & 2\lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda & 0 & 2\lambda+1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

το οποίο είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, διότι $p_c(\lambda) = c_1 + \lambda c_2 = 1 + 2\lambda$ το οποίο μηδενίζεται για $\lambda = -\frac{1}{2}$. Η τιμή $\lambda = -\frac{1}{2}$ δεν είναι ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ διότι $detP(-\frac{1}{2}) \neq 0$ και επομένως το πολυώνυμο $p_c(\lambda)$ δεν μηδενίζεται για όλες τις ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Έτσι, λόγω του Θεωρήματος 11 ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ που υπολογίσαμε προηγουμένως αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελαστής A_2 είναι κανονικός δηλαδή $det(A_2) = 1 \neq 0$. Επομένως ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει μόνο πεπερασμένα μηδενικά και πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Εφόσον δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ σύμφωνα με

το Λήμμα 1 του Κεφαλαίου 1, θα έχει τα ίδια μηδενικά και στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.
Πράγματι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^4+\lambda^3-\lambda-1 \end{bmatrix}$$

Επομένως τα πεπερασμένα μηδενικά του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ± 1 και $-(-1)^{\frac{1}{3}}$, $(-1)^{\frac{2}{3}}$. Έτσι, οι πεπερασμένοι διαιρέτες θα είναι $(\lambda+1)$, $(\lambda-1)$, $(\lambda-(-1)^{\frac{1}{3}})$ και $(\lambda+(-1)^{\frac{2}{3}})$.
Τέλος, η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L_c(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{L(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-\frac{1}{9}\lambda^3+\frac{1}{9}\lambda+\frac{1}{9}) \end{bmatrix}$$

όπου είναι φανερό ότι έχει τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.

- **Παράδειγμα 2**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda^3+\lambda^2+1 & \lambda \\ 0 & \lambda^3+\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \end{aligned}$$

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $L_c(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιατική μέθοδο. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11 ο πίνακας $L_c(\lambda)$ θα είναι της μορφής $L_c(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} c_j L_j(\lambda)$.
Αρχικά, θα υπολογίσουμε τους πίνακες A, C, S_0, S_1, S_2, S_3.

Έχουμε, λοιπόν,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ -A_3^{-1}A_0 & -A_3^{-1}A_1 & -A_3A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$S_0 = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; S_1 = A{\cdot}C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = A{\cdot}C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; S_3 = A{\cdot}C^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι $c_1 = c_2 = c_3 = 1$.
Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} c_j L_j(\lambda)$ θα είναι:

$$L_c(\lambda) = \sum_{j=1}^{3} c_j L_j(\lambda)$$

$$= c_1 L_1(\lambda) + c_2 L_2(\lambda) + c_3 L_3(\lambda)$$

$$\overset{c_1=c_2=c_3=1}{=} (\lambda S_0 - S_1) + (\lambda S_1 - S_2) + (\lambda S_2 - S_3)$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\lambda \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & \lambda-1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 \\ \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\lambda & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda & 1 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda & 0 & \lambda+1 \\ 1 & 0 & 2\lambda & 1-\lambda & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \lambda+1 & 0 & \lambda-1 \\ \lambda+1 & 0 & \lambda-1 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, διότι $p_c(\lambda) = c_1 + \lambda c_2 + \lambda^2 c_3 = \lambda^2 + \lambda + 1$, για $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, το οποίο μηδενίζεται για $\lambda_1 = \frac{-1+3i}{2}$ και $\lambda_2 = \frac{-1-3i}{2}$. Η τιμές $\lambda_1 = \frac{-1+3i}{2}$ και $\lambda_2 = \frac{-1-3i}{2}$ δεν είναι ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ διότι $detP(\frac{-1+3i}{2}) = \frac{(-6i+30)(-6i+28)}{8} \neq 0$, $detP(\frac{-1-3i}{2}) = \frac{(6i+30)(6i+28)}{8} \neq 0$ και επομένως το πολυώνυμο $p_c(\lambda)$ δεν μηδενίζεται για όλες τις ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Έτσι, λόγω του Θεωρήματος 11 ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ που υπολογίσαμε προηγουμένως αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελαστής A_2 είναι κανονικός δηλαδή $det(A_2) = 1 \neq 0$. Επομένως ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει μόνο πεπερασμένα μηδενικά και πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Εφόσον δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ σύμφωνα με το Λήμμα 1 του Κεφαλαίου 1, θα έχει τα ίδια μηδενικά και στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.
Πράγματι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^6 + \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Τέλος, η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L_c(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{L(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^6 + \frac{1}{12}\lambda^5 + \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{1}{12}\lambda^2 + \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

όπου είναι φανερό ότι έχει τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.

- **Παράδειγμα 3**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$P(\lambda) = A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0.$$

για τον οποίο υποθέτουμε ότι $det(A_3) \neq 0$.

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $L_c(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιατική μέθοδο. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11 ο πίνακας $L_c(\lambda)$ θα είναι της μορφής $L_c(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} c_j L_j(\lambda)$.
Αρχικά, θα υπολογίσουμε τους πίνακες A, C, S_0, S_1, S_2, S_3.
Έχουμε, λοιπόν,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ -A_3^{-1}A_0 & -A_3^{-1}A_1 & -A_3^{-1}A_2 \end{bmatrix}$$

και

$$S_0 = A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad S_1 = A \cdot C = \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & A_3 \\ 0 & A_3 & 0 \end{bmatrix} \; ,$$

$$S_2 = A{\cdot}C^2 = \begin{bmatrix} 0 & -A_0 & 0 \\ -A_0 & -A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad , \quad S_3 = A{\cdot}C^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A_0 \\ 0 & -A_0 & -A_1 \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι $c_1 = a$, $c_2 = b$, $c_3 = c$.
Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} c_j L_j(\lambda)$ θα είναι:

$$L_c(\lambda) = \sum_{j=1}^{3} c_j L_j(\lambda)$$

$$= c_1 L_1(\lambda) + c_2 L_2(\lambda) + c_3 L_3(\lambda)$$

$$\overset{c_1=a, c_2=b, c_3=c}{=} a(\lambda S_0 - S_1) + b(\lambda S_1 - S_2) + c(\lambda S_2 - S_3)$$

$$= a\lambda \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & A_3 \\ 0 & A_3 & 0 \end{bmatrix} + b\lambda \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & A_3 \\ 0 & A_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-b \begin{bmatrix} 0 & -A_0 & 0 \\ -A_0 & -A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} + c\lambda \begin{bmatrix} 0 & -A_0 & 0 \\ -A_0 & -A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A_0 \\ 0 & -A_0 & -A_1 \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\lambda A_1 + aA_0 & a\lambda A_2 & a\lambda A_3 \\ a\lambda A_2 & a\lambda A_3 - aA_2 & -aA_3 \\ a\lambda A_3 & -aA_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b\lambda A_0 & bA_0 & 0 \\ -bA_0 & b\lambda A_2 + bA_1 & b\lambda A_3 \\ 0 & b\lambda A_3 & -bA_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -c\lambda A_0 & cA_0 \\ -c\lambda A_0 & cA_0 & cA_1 \\ cA_0 & cA_1 & c\lambda A_3 + A_2 c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\lambda A_1 + aA_0 - b\lambda A_0 & a\lambda A_2 + bA_0 - c\lambda A_0 & a\lambda A_3 + cA_0 \\ a\lambda A_2 - bA_0 - c\lambda A_0 & a\lambda A_3 - aA_2 + b\lambda A_2 + bA_1 + cA_0 & -aA_3 + b\lambda A_3 - cA_1 \\ a\lambda A_3 + cA_0 & -aA_3 + b\lambda A_3 + cA_1 & -bA_3 + c\lambda A_3 + A_2 c \end{bmatrix}$$

ο οποίος θα αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ στην περίπτωση που έχει μόν πραγματικές ριζες θέλουμε οι τιμές $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ με $b^2 \geq 4ac$ να μην είναι ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Διότι $p_c(\lambda) = c_1 + \lambda c_2 + \lambda^2 c_3 = a + b\lambda + c\lambda^2$ το οποίο μηδενίζεται για $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ με $b^2 \geq 4ac$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 11 για να είναι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα πρέπει το πολυώνυμο $p_c(\lambda)$ να μη μηδενίζεται για όλες τις ιδιοτιμές του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Θα συνεχίσουμε, λοιπόν, τη μελέτη μας με την παρουσίαση μιας παραλλαγής που προτείνουμε για την πολλαπλασιαστική μέθοδο γραμμικοποίησης (την οποία μελετήσαμε προηγουμένως) στην οποία τώρα δεν θα κάνουμε την υπόθεση $det(A_k) \neq 0$, αλλά μόνο την υπόθεση $det(A_0) \neq 0$. Έτσι, εδώ εφόσον δεν έχουμε τον περιορισμό $det(A_k) \neq 0$, μπορούμε να έχουμε ιδιοτιμές, μηδενικά και στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο. Επομένως, θα μας απασχολήσει επιπλέον το ερώτημα αν ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας που θα βρούμε αποτελεί ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ ώστε να έχουμε διατήρηση πεπερασμένων ιδιοτιμών, μηδενικών και πεπρασμένων και άπειρων στοιχειωδών διαιρετών.

4.4 Παραλλαγή πολλαπλασιαστικής μεθόδου

4.4.1 Παραλλαγή της πολλαπλασιαστικής μεθόδου

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} A_i \lambda^i$.
Υπενθυμίζουμε ότι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή

$$\begin{aligned} C_1(\lambda) &= \lambda \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_1 & A_0 \\ -I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I_n & 0 \end{bmatrix} \\ &= \lambda X + Y, \end{aligned}$$

με

$$X = \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix}$$

και

$$Y = \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_1 & A_0 \\ -I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I_n & 0 \end{bmatrix},$$

την οποία μελετήσαμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 1, είδαμε ότι αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Και στην παραλλαγή αυτή της πολλαπλασιαστικής μεθόδου που προτείνουμε, η πρώτη συνοδεύουσα μορφή θα αποτελέσει, όπως και στις προηγούμενες δυο μεθόδους (προσθετική και μέθοδο των μεταθέσεων), βασικό εργαλείο για την εύρεση του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε τους πίνακες $S_i = A \cdot C^i$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} I_n & A_{k-1} & \cdots & A_2 & A_1 \\ 0 & I_n & \cdots & A_3 & A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & A_{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix}$$

και

$$C = \begin{bmatrix} -A_{k-1} & -A_{k-2} & \cdots & -A_1 & -A_0 \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}$$

οι οποίοι ορίζονται για όλους τους ακεραίους i, για τους οποίους ο πίνακας C^i είναι καλά ορισμένος. Σημειώνουμε ότι ισχύει $Y = -C$.
Πιο αναλυτικά, η μορφή των πινάκων $S_i = A \cdot C^i$ είναι η εξής:

- Για $i = 0$,

$$S_0 = A \cdot C^0 = A = \begin{bmatrix} I_n & A_{k-1} & \cdots & A_2 & A_1 \\ 0 & I_n & \cdots & A_3 & A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & A_{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

- Για $i = 1$,

$$\begin{aligned} S_1 = A \cdot C^1 &= \begin{bmatrix} I_n & A_{k-1} & \cdots & A_2 & A_1 \\ 0 & I_n & \cdots & A_3 & A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & A_{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -A_{k-1} & \cdots & -A_1 & -A_0 \\ I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -A_0 \\ I_n & A_{k-1} & \cdots & A_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- Για $i = 2, \ldots, k-2$,

$$S_i := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -A_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -A_{i-1} & \cdots & -A_0 \\ I_n & \cdots & A_{i+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- Για $i = k-1$,

$$S_{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & -A_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -A_{k-2} & \cdots & -A_0 \\ I_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- Για $i = k$,

$$S_k = \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -A_1 & -A_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_{k-1} & -A_{k-2} & \cdots & -A_0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι για όλα τα S_i, $i = 0, 1, \ldots, k$ ο πίνακας S_i δεν εξαρτάται από τον πίνακα A_i.

Για όλα τα $i = 0, \ldots, k$ ισχύει

$$\begin{aligned} \lambda S_{i-1}X - S_i & \overset{\substack{S_{i-1}=AC^{i-1} \\ S_i=AC^i}}{=} && \lambda AC^{i-1}X - AC^i \\ & = && AC^{i-1}(\lambda X - C) \\ & \overset{Y=-C}{=} && AC^{i-1}(\lambda X + Y) \\ & \overset{S_{i-1}=AC^{i-1}}{=} && S_{i-1}(\lambda X + Y) \end{aligned}$$

Λόγω της μορφής του

$$S_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -A_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -A_{i-2} & \cdots & -A_0 \\ I_n & \cdots & A_i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

, όταν ο πίνακας A_0 είναι κανονικός τότε είναι και ο πίνακας S_{i-1}.
Ακόμη, λόγω του ότι ο πίνακας S_{i-1} είναι και ανεξάρτητος του λ θα είναι μονομετρικός πίνακας.

Έτσι,

$$\begin{aligned} \lambda S_{i-1}X - S_i &= S_{i-1}(\lambda X + Y) \Rightarrow \\ \lambda X + Y &= S_{i-1}^{-1}(\lambda S_{i-1}X - S_i) \end{aligned}$$

Επίσης, έχουμε δει ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $\lambda X + Y = C_1(\lambda)$ είναι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Ακόμη, έχουμε αποδείξει, (Θεώρημα 1 του Κεφαλαίου 1), ότι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $E(\lambda)$ και $F(\lambda)$ τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix} &= E(\lambda)(\lambda X + Y)F(\lambda) \\ &= E(\lambda)S_{i-1}^{-1}(\lambda S_{i-1}X - S_i)F(\lambda) \end{aligned}$$

όπου οι πίνακες $E(\lambda)S_{i-1}^{-1}$ και $F(\lambda)$ είναι μονομετρικοί.
Επομένως και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $\lambda S_{i-1}X - S_i$ αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Δείξαμε, λοιπόν, ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $\lambda S_{m-1} - S_m$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ όταν οι πίνακες συντελεστές A_0 και A_k είναι κανονικοί. Στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε την υπόθεση ότι ο πίνακας συντελεστής A_0 είναι κανονικός και θα βρούμε τη μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα ο οποίος θα αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο όλων των $kn \times kn$ πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων της μορφής $\lambda M - N$ και τον ονομάζουμε $\mathcal{V}$.

Λήμμα 7. *Οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες $L_j(\lambda) = \lambda S_{j-1}X - S_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$ δημιουργούν έναν k- διάστατο υποχώρο $\mathcal{V}_0$ του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$.*

Απόδειξη.
Όλα τα $S_i \neq 0$, $\forall\ i = 0, 1, \ldots, k-1$ διότι όλα τα S_i, $\forall\ i = 0, 1, \ldots, k-1$ περιέχουν τον μοναδιαίο πίνακα I_n. Επίσης, ο πίνακας $X = \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix}$ είναι

διάφορος του μηδενός ($X \neq 0$), διότι περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα.
Οπότε και οι πίνακες $L_i(\lambda) \neq 0$, $\forall\, i = 0, 1, \ldots, k-1$.
Για $i = k$ έχουμε ότι ο $L_k(\lambda) = \lambda S_{k-1} X - S_k \neq 0$, διότι $X \neq 0$ και $S_{k-1} \neq 0$.
Άρα ο γραμμικός συνδυασμός $\sum_{i=0}^{k} c_i L_i(\lambda)$ είναι ο μηδενικός πίνακας αν και μόνον αν $c_i = 0$.
Άρα οι πίνακες $L_1(\lambda), \ldots, L_k(\lambda)$ είναι k σε πλήθος γραμμικά ανεξάρτητοι πίνακες. Έτσι, αποτελούν βάση του και δημιουργούν έναν k- διάστατο διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}_0$, υποχώρο του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$.

$\square$

Τώρα, θέλουμε να δείξουμε ότι τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_0$ είναι γραμμικοποιήσεις του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Γι΄ αυτό δίνουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 12. *Ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda) \in \mathcal{V}_0$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ αν και μόνον αν ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}$ είναι κανονικός.*

Απόδειξη.
Εφόσον ισχύει $S_i = AC^i$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
L_c(\lambda) &= \sum_{i=1}^{k} c_i(\lambda S_{i-1} X - S_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} c_i(\lambda A C^{i-1} X - AC^i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} c_i A C^{i-1}(\lambda X - C) \\
&= \sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1}(\lambda X - C) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1}\Big)(\lambda X - C).
\end{aligned}
$$

Έχουμε δει ότι ο πίνακας $\lambda X - C = \lambda X + Y = C_1(\lambda)$ είναι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και είναι γραμμικοποίησή του. Δηλαδή υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $E(\lambda)$ και $F(\lambda)$ τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix} = E(\lambda)(\lambda X + Y)F(\lambda).$$

Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1}$ είναι κανονικός (και επειδή είναι και ανεξάρτητος του λ μονομετρικός) θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} L_c(\lambda) &= \bigg(\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1} \bigg)(\lambda X - C) \\ &= \bigg(\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1} \bigg)(\lambda X + Y) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\lambda X + Y = \bigg(\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1} \bigg)^{-1} L_c(\lambda).$$

Οπότε ισχύει

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix} &= E(\lambda)(\lambda X + Y)F(\lambda) \\ &= E(\lambda)\bigg(\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1} \bigg)^{-1} L_c(\lambda)F(\lambda) \end{aligned}$$

όπου $E(\lambda)\bigg(\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1} \bigg)^{-1}$ και $F(\lambda)$ είναι μονομετρικοί πίνακες.

Άρα, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ αν και μόνον αν ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1}$ είναι κανονικός.
Έχουμε, ακόμη, ότι $\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1} = \sum_{i=1}^{k} c_i A C^{i-1} = A \sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}$ ο οποίος θέλουμε να είναι κανονικός και επειδή ο πίνακας A είναι κανονικός ($det(A) = \pm 1$) θέλουμε ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}$ να είναι κανονικός.

$\square$

Στο προηγούμενο θεώρημα αποδείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, υπο την προϋπόθεση ότι ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}$ είναι κανονικός.
Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 1 που αναφέραμε στην Εισαγωγή, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ και ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχουν τις ίδιες πεπερασμένες ιδιοτιμές, τα ίδια μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Γεννάται, λοιπόν, το ερώτημα αν ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ και ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχουν τους ίδιους στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο. Για να το εξετάσουμε αυτό σύμφωνα πάλι με το Λήμμα 1 που αναφέραμε στην Εισαγωγή, αρκεί να δείξουμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ αποτελεί ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Πράγματι αυτό συμβαίνει, δηλαδή ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ αποτελεί ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 13. *Ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας* $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda) \in \mathcal{V}_0$ *είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα* $P(\lambda)$ *αν και μόνον αν ο πίνακας* $\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}$ *είναι κανονικός.*

Απόδειξη.

Για να δείξουμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, αρκεί να δείξουμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i(\lambda S_{i-1}X - S_i)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $revL_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i(S_{i-1}X - \lambda S_i)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$. Το πρώτο κομμάτι της απόδειξης, δηλαδή ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i(\lambda S_{i-1}X - S_i)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $revL_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i(S_{i-1}X - \lambda S_i)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$.

Εφόσον ισχύει $S_i = AC^i$ έχουμε

$$\begin{aligned} revL_c(\lambda) &= \sum_{i=1}^{k} c_i(S_{i-1}X - \lambda S_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i(AC^{i-1}X - \lambda AC^i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i AC^{i-1}(X - \lambda C) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1}(X - \lambda C) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1}\right)(X - \lambda C). \end{aligned}$$

Έχουμε δει ότι ο πίνακας $\lambda X - C = \lambda X + Y = C_1(\lambda)$.
Έτσι, $X - \lambda C = rev(\lambda X - C) = rev(\lambda X + Y) = revC_1(\lambda)$. Έχουμε δει, ακόμη, ότι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίησή του. Δηλαδή υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $M(\lambda)$ και $N(\lambda)$ τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} revP(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix} &= M(\lambda) revC_1(\lambda) N(\lambda) \\ &= M(\lambda)(X + \lambda Y)N(\lambda). \end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1}$ είναι κανονικός (και επειδή είναι και ανεξάρτητος του λ μονομετρικός) θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} revL_c(\lambda) &= \left(\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1}\right)(X - \lambda C) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1}\right)(X + \lambda Y) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$X + \lambda Y = \left(\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1}\right)^{-1} revL_c(\lambda).$$

Οπότε ισχύει

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} revP(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix} &= M(\lambda)(X+\lambda Y)N(\lambda) \\ &= M(\lambda)\Bigg(\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1}\Bigg)^{-1} revL_c(\lambda)N(\lambda)\end{aligned}$$

όπου $M(\lambda)\Bigg(\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1}\Bigg)^{-1}$ και $N(\lambda)$ είναι μονομετρικοί πίνακες.

Άρα, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $revL_c(\lambda)$ αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$ αν και μόνον αν ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1}$ είναι κανονικός. Έχουμε, ακόμη, ότι $\sum_{i=1}^{k} c_i S_{i-1} = \sum_{i=1}^{k} c_i A C^{i-1} = A\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}$ ο οποίος θέλουμε να είναι κανονικός και επειδή ο πίνακας A είναι κανονικός ($det(A) = \pm 1$) θέλουμε ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}$ να είναι κανονικός.
Άρα ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ αποτελεί ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

$\square$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda) \in \mathcal{V}_0$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1 της Εισαγωγής, προκύπτει άμεσα ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ και ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχουν τις ίδιες πεπερασμένες ιδιοτιμές, τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Συνεχίζοντας τη μελέτη μας πάνω στην παραλλαγή που προτείνουμε για την πολλαπλασιαστική μέθοδο γραμμικοποίησης, θα δώσουμε μερικά παραδείγματα για να δούμε και την εφαρμογή της.

4.4.2 Παραδείγματα

- **Παράδειγμα 1**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ 1 & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0.$$

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $L_c(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας την παραλλαγή της πολλαπλασιατικής μεθόδου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 12 ο πίνακας $L_c(\lambda)$ θα είναι της μορφής $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{2} c_i L_i(\lambda)$.
Αρχικά, θα υπολογίσουμε τους πίνακες A, C, S_0, S_1, S_2, X.
Έχουμε, λοιπόν,

$$A = \begin{bmatrix} I_2 & A_1 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -A_1 & -A_0 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$S_0 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad S_1 = A \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$S_2 = A \cdot C^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad X = diag\{A_2, I_2\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.
Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda)$ θα είναι:

$$L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{2} c_i L_i(\lambda)$$

$$= c_1 L_1(\lambda) + c_2 L_2(\lambda)$$

$$\overset{\substack{c_1=1\\c_2=2}}{=} (\lambda S_0 X - S_1) + 2(\lambda S_1 X - S_2)$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+2\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -2\lambda & 0 \\ -2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 0 & 1-\lambda \\ 2 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 2\lambda-1 & 2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2\lambda+1 & 2 & \lambda \end{bmatrix}$$

το οποίο είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, διότι

$$
\begin{aligned}
G &= \sum_{i=1}^{2} c_i C^{i-1} = c_1 C^0 + c_2 C^1 \\
&= I_4 + 2C \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

με $det(G) = -9 \neq 0$. Επομένως ο πίνακας $\sum_{i=1}^{2} c_i C^{i-1}$ είναι κανονικός. Έτσι, λόγω του Θεωρήματος 12 ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ που υπολογίσαμε προηγουμένως αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελαστής A_2 είναι κανονικός δηλαδή $det(A_2) = 1 \neq 0$. Επομένως ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει μόνο πεπερασμένα μηδενικά και πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Εφόσον δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ σύμφωνα με το Λήμμα 1 του Κεφαλαίου 1, θα έχει τα ίδια μηδενικά και στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.
Πράγματι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$
\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda - 1 \end{bmatrix}
$$

Επομένως τα πεπερασμένα μηδενικά του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ± 1 και $-(-1)^{\frac{1}{3}}$, $(-1)^{\frac{2}{3}}$. Έτσι, οι πεπερασμένοι διαιρέτες θα είναι $(\lambda+1)$, $(\lambda-1)$, $(\lambda-(-1)^{\frac{1}{3}})$ και $(\lambda+(-1)^{\frac{2}{3}})$.
Τέλος, η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L_c(\lambda)$ είναι

$$
\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{L_c(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 - \frac{1}{9}\lambda^3 + \frac{1}{9}\lambda + \frac{1}{9} \end{bmatrix}
$$

όπου είναι φανερό ότι έχει τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.

- **Παράδειγμα 2**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} 2\lambda^2+\lambda+1 & 4\lambda^2+2 \\ \lambda^2+1 & 2\lambda^2+\lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \end{aligned}$$

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $L_c(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας την παραλλαγή της πολλαπλασιατικής μεθόδου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 12 ο πίνακας $L_c(\lambda)$ θα είναι της μορφής $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{2} c_i L_i(\lambda)$.
Αρχικά, θα υπολογίσουμε τους πίνακες A, C, S_0, S_1, S_2, X.
Έχουμε, λοιπόν,

$$A = \begin{bmatrix} I_2 & A_1 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -A_1 & -A_0 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$S_0 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad S_1 = A \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$S_2 = A{\cdot}C^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad X = diag\{A_2, I_2\} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι $c_1 = 1$, $c_2 = 1$.
Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{2} c_i L_i(\lambda)$ θα είναι:

$$L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{2} c_i L_i(\lambda)$$

$$= c_1 L_1(\lambda) + c_2 L_2(\lambda)$$

$$\overset{\substack{c_1=1 \\ c_2=1}}{=} \lambda S_0 X - S_1 + \lambda S_1 X - S_2$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\lambda & 4\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda+1 & 2\lambda & 1-\lambda & \lambda \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda+1 & 2 \\ \lambda & 2\lambda & 1 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\lambda & -2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 2\lambda & 4\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 2\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\lambda+1 & 4\lambda+2 & 1 & 2-2\lambda \\ \lambda+1 & 2\lambda & 1-\lambda & \lambda \\ 2\lambda & 4\lambda & \lambda+1 & 2 \\ \lambda & 2\lambda & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

το οποίο είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, διότι

$$\begin{aligned} G &= \sum_{i=1}^{2} c_i C^{i-1} = c_1 C^0 + c_2 C^1 \\ &= I_4 + C \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

με $det(G) = -2 \neq 0$. Επομένως ο πίνακας $\sum_{i=1}^{2} c_i C^{i-1}$ είναι κανονικός. Έτσι, λόγω του Θεωρήματος 12 ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ που υπολογίσαμε προηγουμένως αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Σημειώνουμε ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων, διότι $det(A_2) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ θα έχει πεπερασμένα και άπειρα μηδενικά και πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Σύμφωνα με το Θεώρημα 13 της ισχυρής γραμμικοποίησης, δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και επομένως ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ έχει τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Πράγματι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$revP(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda + 2 & 2\lambda^2 + 4 \\ \lambda^2 + 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revP(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια θα βρούμε τη *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L_c(\lambda)$.
Η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L_c(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{L_c(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $L_c(\lambda)$ είναι

$$revL_c(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+4 & \lambda & 2\lambda-2 \\ \lambda+1 & 2 & \lambda-1 & 1 \\ 2 & 4 & \lambda+1 & 2\lambda \\ 1 & 2 & \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revL_c(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^{0}_{revL_c(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως είναι φανερό από τη μορφή των *Smith* μορφών, ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

- **Παράδειγμα 3**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$P(\lambda) = K\lambda^2 + M\lambda + N = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0.$$

όπου θεωρούμε ότι ο πίνακας συντελεστής K είναι κανονικός.

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $L_c(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας την παραλλαγή της πολλαπλασιατικής μεθόδου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 12 ο πίνακας $L_c(\lambda)$ θα είναι της μορφής $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{2} c_i L_i(\lambda)$.
Αρχικά, θα υπολογίσουμε τους πίνακες A, C, S_0, S_1, S_2, X.
Έχουμε, λοιπόν,

$$A = \begin{bmatrix} I_2 & A_1 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & M \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -A_1 & -A_0 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M & -N \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$S_0 = A = \begin{bmatrix} I_2 & M \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad , \quad S_1 = A \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & -N \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$S_2 = A \cdot C^2 = \begin{bmatrix} -N & 0 \\ -M & -N \end{bmatrix} \quad , \quad X = diag\{A_2, I_2\} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι $c_1 = a$, $c_2 = b$.
Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{2} c_i L_i(\lambda)$ θα είναι:

$$L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{2} c_i L_i(\lambda)$$

$$= c_1 L_1(\lambda) + c_2 L_2(\lambda)$$

$$\overset{\substack{c_1=a \\ c_2=b}}{=} a(\lambda S_0 X - S_1) + b(\lambda S_1 X - S_2)$$

$$= a\lambda \begin{bmatrix} I_2 & M \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 0 & -N \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ b\lambda \begin{bmatrix} 0 & -N \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} -N & 0 \\ -M & -N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\lambda K & a\lambda M \\ 0 & a\lambda I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & aN \\ -aI_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b\lambda N \\ b\lambda K & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bN & 0 \\ bM & bN \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\lambda K + bN & a\lambda M + aN - b\lambda N + bN \\ -aI_2 + b\lambda K + bM & a\lambda I_2 + bN \end{bmatrix}$$

το οποίο είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, διότι

$$\begin{aligned} G &= \sum_{i=1}^{2} c_i C^{i-1} = c_1 C^0 + c_2 C^1 \\ &= aI_4 + bC \\ &= a \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -M & -N \\ -I_2 & -0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} aI_2 - bM & -bN \\ bI_2 & aI_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Επομένως για να είναι ο πίνακας $\sum_{i=1}^{2} c_i C^{i-1}$ κανονικός θα πρέπει $det(G) \neq 0$.

Τότε, λόγω του Θεωρήματος 12 ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ που υπολογίσαμε προηγουμένως αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

- **Παράδειγμα 4**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda^3 + \lambda^2 + 1 & \lambda \\ 0 & \lambda^3 + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \end{aligned}$$

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $L_c(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας την παραλλαγή της πολλαπλασιατικής μεθόδου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 12 ο πίνακας $L_c(\lambda)$ θα είναι της μορφής $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda)$.
Αρχικά, θα υπολογίσουμε τους πίνακες $A, C, S_0, S_1, S_2, S_3, X$.
Έχουμε, λοιπόν,

$$A = \begin{bmatrix} I_2 & A_2 & A_1 \\ 0 & I_2 & A_2 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -A_2 & -A_1 & -A_0 \\ I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$S_0 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_1 = A \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = A \cdot C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_3 = A \cdot C^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = diag\{A_2, I_2, I_2\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι $c_1 = c_2 = c_3 = 1$.
Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} c_i L_i(\lambda)$ θα είναι:

$$L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} c_i L_i(\lambda)$$

$$= c_1 L_1(\lambda) + c_2 L_2(\lambda) + c_3 L_3(\lambda)$$

$$\overset{\substack{c_1=c_2=1 \\ c_3=1}}{=} \lambda S_0 X - S_1 + \lambda S_1 X - S_2 + \lambda S_2 - S_3$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\lambda\begin{bmatrix}0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&-1&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\-1&0&0&-1&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda&0&\lambda&0&0&\lambda\\0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}0&0&0&0&-\lambda&0\\0&0&0&0&0&-\lambda\\\lambda&0&\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}0&0&-\lambda&0&0&0\\0&0&0&-\lambda&0&0\\0&0&0&-\lambda&-\lambda&0\\0&0&0&0&0&-\lambda\\\lambda&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&-1&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\-1&0&0&-1&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda+1&0&1&0&1-\lambda&\lambda\\0&\lambda+1&0&1-\lambda&0&1-\lambda\\\lambda-1&1&2\lambda&1-\lambda&1&0\\0&\lambda-1&0&\lambda+1&0&1-\lambda\\\lambda&0&\lambda-1&1&\lambda+1&0\\0&\lambda-1&0&\lambda-1&0&\lambda+1\end{bmatrix}$$

το οποίο είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, διότι

$$G = \sum_{i=1}^{3} c_i C^{i-1} = c_1 C^0 + c_2 C^1 + c_3 C^2$$

$$= I_6 + C + C^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

με $det(G) = 40 \neq 0$. Επομένως ο πίνακας $\sum_{i=1}^{3} c_i C^{i-1}$ είναι κανονικός. Έτσι, λόγω του Θεωρήματος 12 ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ που υπολογίσαμε προηγουμένως αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής A_3 είναι κανονικός δηλαδή $det(A_3) = 1 \neq 0$. Επομένως ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει μόνο πεπερασμένα μηδενικά και πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Εφόσον δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ σύμφωνα με το Λήμμα 1 του Κεφαλαίου 1, θα έχει τους ίδιους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.
Πράγματι, η $Smith$ μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^6 + \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Τέλος, η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L_c(\lambda)$ είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{L(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^6 + \frac{1}{12}\lambda^5 + \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{1}{12}\lambda^2 + \frac{1}{12}) \end{bmatrix}.$$

Από τη μορφή των *Smith* μορφών των πολυωνυμικών πινάκων $P(\lambda)$ και $L_c(\lambda)$ είναι φανερό ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ έχει τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$.

- **Παράδειγμα 5**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} 2\lambda^3 + \lambda^2 + 1 & 4\lambda^3 + \lambda \\ \lambda^3 & 2\lambda^3 + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \end{aligned}$$

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $L_c(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας την παραλλαγή της πολλαπλασιατικής μεθόδου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 12 ο πίνακας $L_c(\lambda)$ θα είναι της μορφής $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda)$.
Αρχικά, θα υπολογίσουμε τους πίνακες $A, C, S_0, S_1, S_2, S_3, X$.

Έχουμε, λοιπόν,

$$A = \begin{bmatrix} I_2 & A_2 & A_1 \\ 0 & I_2 & A_2 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -A_2 & -A_1 & -A_0 \\ I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$S_0 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad S_1 = A{\cdot}C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$S_2 = A{\cdot}C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad S_3 = A{\cdot}C^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = diag\{A_2, I_2, I_2\} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι $c_1 = c_2 = c_3 = 1$.
Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} c_i L_i(\lambda)$ θα

είναι:

$$L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} c_i L_i(\lambda)$$

$$= c_1 L_1(\lambda) + c_2 L_2(\lambda) + c_3 L_3(\lambda)$$

$$\overset{\substack{c_1=c_2=1\\ c_3=1}}{=} \lambda S_0 X - S_1 + \lambda S_1 X - S_2 + \lambda S_2 - S_3$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\lambda & 4\lambda & \lambda & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 2\lambda & 4\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 2\lambda & 4\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\lambda+1 & 4\lambda & 1 & 0 & 1-\lambda & \lambda \\ \lambda & 2\lambda+1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 2\lambda-1 & 4\lambda+1 & 2\lambda & 1-\lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 2\lambda-1 & 0 & \lambda+1 & 0 & 1-\lambda \\ 2\lambda & 4\lambda & \lambda-1 & 1 & \lambda+1 & 0 \\ \lambda & 2\lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

το οποίο είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, διότι

$$G = \sum_{i=1}^{3} c_i C^{i-1} = c_1 C^0 + c_2 C^1 + c_3 C^2$$

$$= I_6 + C + C^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

με $det(G) = 40 \neq 0$. Επομένως ο πίνακας $\sum_{i=1}^{3} c_i C^{i-1}$ είναι κανονικός. Έτσι, λόγω του Θεωρήματος 12 ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ που υπολογίσαμε προηγουμένως αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Σημειώνουμε ότι ο μεγιστοβάθμιος πίνακας συντελεστής A_3 του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ιδιάζων, διότι $det(A_3) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ θα έχει πεπερασμένα και άπειρα μηδενικά και πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Σύμφωνα με το Θεώρημα 13 της ισχυρής γραμμικοποίησης, δείξαμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ είναι ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και επομένως ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ έχει τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Πράγματι, η $Smith$ μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{P(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^5 - \frac{1}{2}\lambda^4 + 2\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι

$$\begin{aligned} revP(\lambda) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^3 + \lambda + 2 & \lambda^2 + 4 \\ 1 & \lambda^3 + 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revP(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^0_{revP(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια θα βρούμε τη *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L_c(\lambda)$.
Η *Smith* μορφή του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L_c(\lambda)$ θα είναι

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_{L_c(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^5 - \frac{1}{2}\lambda^4 + 2\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ο δυϊκός του πολυωνυμικού πίνακα $L_c(\lambda)$ είναι

$$revL_c(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 4 & \lambda & 0 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & \lambda+2 & 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 2-\lambda & \lambda+4 & 2 & \lambda-1 & \lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & \lambda+1 & 0 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & 1-\lambda & \lambda & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 1-\lambda & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η *Smith* μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $revL_c(\lambda)$ στο 0 θα είναι

$$\mathbb{S}^0_{revL_c(\lambda)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως είναι φανερό από τη μορφή των *Smith* μορφών, ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

- **Παράδειγμα 6**

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= K\lambda^3 + \Lambda\lambda^2 + M\lambda + N \\ &= A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \end{aligned}$$

όπου θεωρούμε ότι ο πίνακας συντελεστής K είναι κανονικός.

Θα βρούμε τώρα τον πίνακα $L_c(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας την παραλλαγή της πολλαπλασιατικής μεθόδου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 12 ο πίνακας $L_c(\lambda)$ θα είναι της μορφής $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda)$.
Αρχικά, θα υπολογίσουμε τους πίνακες A, C, S_0, S_1, S_2, X.
Έχουμε, λοιπόν,

$$A = \begin{bmatrix} I_2 & A_2 & A_1 \\ 0 & I_2 & A_2 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & \Lambda & M \\ 0 & I_2 & \Lambda \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -A_2 & -A_1 & -A_0 \\ I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Lambda & -M & -N \\ I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$S_0 = A = \begin{bmatrix} I_2 & \Lambda & M \\ 0 & I_2 & \Lambda \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad , \quad S_1 = A \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -N \\ I_2 & \Lambda & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$S_2 = A{\cdot}C^2 = \begin{bmatrix} 0 & -N & 0 \\ 0 & -M & -N \\ I_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad S_3 = A{\cdot}C^3 = \begin{bmatrix} -N & 0 & 0 \\ -M & -N & 0 \\ -\Lambda & -M & -N \end{bmatrix}$$

$$X = diag\{A_2, I_2, I_2\} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι $c_1 = a$, $c_2 = b$, $c_3 = c$.
Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda)$ θα είναι:

$$L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} c_i L_i(\lambda)$$

$$= c_1L_1(\lambda) + c_2L_2(\lambda) + c_3L_3(\lambda)$$

$$\overset{\substack{c_1=a\\c_2=b,c_3=c}}{=} a(\lambda S_0X - S_1) + b(\lambda S_1X - S_2) + c(\lambda S_2 - S_3)$$

$$= a\lambda \begin{bmatrix} I_2 & \Lambda & M \\ 0 & I_2 & \Lambda \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 0 & 0 & -N \\ I_2 & \Lambda & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+b\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & -N \\ I_2 & \Lambda & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} 0 & -N & 0 \\ 0 & -M & -N \\ I_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$c\lambda \begin{bmatrix} 0 & -N & 0 \\ 0 & -M & -N \\ I_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} -N & 0 & 0 \\ -M & -N & 0 \\ -\Lambda & -M & -N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\lambda K & a\lambda\Lambda & a\lambda M + aN \\ -aI_2 & a\lambda I_2 - a\Lambda & a\lambda\Lambda \\ 0 & -aI_2 & a\lambda I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & bN & -b\lambda N \\ b\lambda K & b\lambda\Lambda + bM & bN \\ -bI_2 & b\lambda I_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cN & -c\lambda N & 0 \\ cM & -c\lambda M + cN & -c\lambda N \\ c\lambda K & cM & cN \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\lambda K + cN & a\lambda\Lambda + bN - c\lambda N & a\lambda M + aN - b\lambda N \\ -aI_2 + b\lambda K + cM & a\lambda I_2 - a\Lambda + b\lambda\Lambda + bM - c\lambda M + cn & a\lambda\Lambda + bN - c\lambda N \\ -bI_2 + c\lambda K + c\Lambda & -aI_2 + b\lambda I_2 + cM & a\lambda I_2 + cN \end{bmatrix}$$

το οποίο είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, διότι

$$\begin{aligned} G &= \sum_{i=1}^{3} c_i C^{i-1} = c_1 C^0 + c_2 C^1 + c_3 C^2 \\ &= aI_6 + bC + cC^2 \\ &= a \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \Lambda & -M & -N \\ I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} \Lambda^2 - M & \Lambda M - N & \Lambda N \\ -\Lambda & -M & -N \\ I_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} aI_2 - b\Lambda + c(\Lambda^2 - M) & -bM + c(\Lambda M - N) & -bN - c\Lambda N \\ bI_2 - c\Lambda & aI_2 - cM & -cN \\ cI_2 & bI_2 & aI_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Επομένως για να είναι ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}$ κανονικός θα πρέπει $det(G) \neq 0$.
Τότε, λόγω του Θεωρήματος 12 ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ που υπολογίσαμε προηγουμένως αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

4.4.3 Συμμετρία

Ολοκληρώνοντας τη μελέτη μας πάνω στην παραλλαγή που παρουσιάσαμε πάνω στην πολλαπλασιαστική μέθοδο θα εξετάσουμε αν η παραλλαγή αυτή διατηρεί κάποια δομή που μπορεί να έχει ο πολυωνυμικός μας πίνακας.
Μέχρι τώρα δείξαμε ότι η παραλλαγή που προτείνουμε είναι γραμμικοποίηση και μάλιστα ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας που προκύπτει θα έχει τα ίδια πεπερασμένα μηδενικά και τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$. Όμως αυτό το είχαμε ήδη αποκτήσει από τις δυο συνοδεύουσες μορφές. Το ερώτημα λοιπόν που θα μας απασχολήσει είναι αν η παραλλαγή που προτείνουμε διατηρεί τη δομή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Η πιο συνηθισμένη δομή που συναντάται είναι η συμμετρία.
Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας ο οποίος αποτελεί ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα διατηρεί τη συμμετρία.
Από τη μορφή των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda) = c_1(\lambda S_0 X - S_1) + c_2(\lambda S_1 X - S_2) + c_3(\lambda S_2 - S_3) + \cdots + c_k(\lambda S_{k-1} X - S_k)$ παρα-

τηρούμε ότι αν πάρουμε μόνο τον όρο $c_k(\lambda S_{k-1}X - S_k)$ προκύπτουν τα εξής:

$$\begin{aligned}
L_k(\lambda) &= \lambda S_{k-1}X - S_k \\
&= \lambda \begin{bmatrix} 0 & -A_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & -A_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -A_2 & -A_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -A_{k-2} & -A_{k-3} & \cdots & -A_1 & -A_0 \\ I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A_1 & -A_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A_2 & -A_1 & -A_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -A_{k-2} & -A_{k-3} & -A_{k-4} & \cdots & -A_0 & 0 \\ -A_{k-1} & -A_{k-2} & -A_{k-3} & \cdots & -A_1 & -A_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\lambda A_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda A_1 & -\lambda A_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda A_2 & -\lambda A_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\lambda A_{k-2} & -\lambda A_{k-3} & \cdots & -\lambda A_1 & -\lambda A_0 \\ \lambda A_k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_1 & A_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_2 & A_1 & A_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{k-2} & A_{k-3} & A_{k-4} & \cdots & A_0 & 0 \\ A_{k-1} & A_{k-2} & A_{k-3} & \cdots & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_0 & -\lambda A_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_1 & -\lambda A_1 + A_0 & -\lambda A_0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_2 & -\lambda A_2 + A_1 & -\lambda A_1 + A_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{k-2} & -\lambda A_{k-2} + A_{k-3} & -\lambda A_{k-3} + A_{k-4} & \cdots & -\lambda A_1 + A_0 & -\lambda A_0 \\ A_{k-1} + \lambda A_k & A_{k-2} & A_{k-3} & \cdots & A_1 & A_0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι παίρνοντας μόνο τον όρο $L_k(\lambda) = \lambda S_{k-1}X - S_k$ ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας που προκύπτει *block*- συμμετρικός. Σημειώνουμε ότι αν πάρουμε και τους υπόλοιπους όρους του αθροίσματος $c_1(\lambda S_0 X - S_1) + c_2(\lambda S_1 X - S_2) + c_3(\lambda S_2 - S_3) + \cdots + c_k(\lambda S_{k-1}X - S_k)$ ο πρωτοβάθμιος πολωυνυμικός πίνακας που θα προκύψει δεν θα είναι *block*- συμμετρικός πίνακας.
Επομένως, για να είναι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ *block*-συμμετρικός θα πρέπει να πάρουμε την εξής συνθήκη

$$c_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k-1 \quad \kappa\alpha\iota \quad c_k \neq 0.$$

Όμως για να είναι ο $L_c(\lambda) = L_k(\lambda)$ γραμμικοποίηση και μάλιστα ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα πρέπει ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}$ να είναι κανονικός. Στην περίπτωση όμως που θεωρήσουμε $c_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k-1$ και $c_k \neq 0$ θα έχουμε $\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1} = c_k C^{k-1}$. Επομένως, θέλουμε ο πίνακας $c_k C^{k-1}$ να είναι κανονικός. Δηλαδή $det(C^{k-1}) \neq 0 \Rightarrow det(C) \neq 0$. Έτσι, θέλουμε $det(C) = det(A_0) \neq 0$. Άρα για να διατηρεί ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ τη συμμετρία του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ θα πρέπει να ισχύει $c_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k-1$, $c_k \neq 0$ και $det(A_0) \neq 0$.

Θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα.
Θα δούμε το παράδειγμα 6 που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο. Ανατρέχοντας εκεί μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ που βρήκαμε δεν είναι *block*- συμμετρικός.

Παράδειγμα 6

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= K\lambda^3 + \Lambda\lambda^2 + M\lambda + N \\ &= A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0. \end{aligned}$$

όπου θεωρούμε ότι ο πίνακας συντελεστής N είναι κανονικός.

Θα βρούμε τώρα τον *block*- συμμετρικό πίνακα $L_c(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας την παραλλαγή της πολλαπλασιατικής μεθόδου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 12 ο πίνακας $L_c(\lambda)$ θα είναι της μορφής $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda)$.
Αρχικά, θα υπολογίσουμε τους πίνακες A, C, S_0, S_1, S_2, X.
Έχουμε, λοιπόν,

$$A = \begin{bmatrix} I_2 & A_2 & A_1 \\ 0 & I_2 & A_2 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & \Lambda & M \\ 0 & I_2 & \Lambda \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -A_2 & -A_1 & -A_0 \\ I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Lambda & -M & -N \\ I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$S_0 = A = \begin{bmatrix} I_2 & \Lambda & M \\ 0 & I_2 & \Lambda \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad , \quad S_1 = A \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -N \\ I_2 & \Lambda & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$S_2 = A \cdot C^2 = \begin{bmatrix} 0 & -N & 0 \\ 0 & -M & -N \\ I_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad S_3 = A \cdot C^3 = \begin{bmatrix} -N & 0 & 0 \\ -M & -N & 0 \\ -\Lambda & -M & -N \end{bmatrix}$$

$$X = diag\{A_2, I_2, I_2\} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι $c_1 = 0 = c_2$, $c_3 = c$.
Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda)$ θα είναι:

$$L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} c_i L_i(\lambda)$$

$$= c_1 L_1(\lambda) + c_2 L_2(\lambda) + c_3 L_3(\lambda)$$

$$\overset{\substack{c_1=0 \\ c_2=0, c_3=c}}{=} c(\lambda S_2 - S_3)$$

$$c\lambda \begin{bmatrix} 0 & -N & 0 \\ 0 & -M & -N \\ I_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} -N & 0 & 0 \\ -M & -N & 0 \\ -\Lambda & -M & -N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cN & -c\lambda N & 0 \\ cM & -c\lambda M + cN & -c\lambda N \\ c\lambda K & cM & cN \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cN & -c\lambda N & 0 \\ cM & -c\lambda M + cN & -c\lambda N \\ c\lambda K + c\Lambda & cM & cN \end{bmatrix}$$

το οποίο είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$

$$\begin{aligned} G &= \sum_{i=1}^{3} c_i C^{i-1} = c_1 C^0 + c_2 C^1 + c_3 C^2 \\ &= cC^2 = c \begin{bmatrix} \Lambda^2 - M & \Lambda M - N & \Lambda N \\ -\Lambda & -M & -N \\ I_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Επομένως για να είναι ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}$ κανονικός θα πρέπει $det(G) \neq 0$. Πράγματι, $det(G) = det(N^2) \neq 0 \Rightarrow det(N) \neq 0$ το οποίο ισχύει διότι θεωρήσαμε ότι ο πίνακας συντελεστής N είναι κανονικός. Τότε, λόγω του Θεωρήματος 12 ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ που υπολογίσαμε προηγουμένως αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.

Τέλος, σημειώνουμε ακόμη ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = c_k(\lambda S_{k-1} X - S_k)$ διατηρεί και τη συμμετρία του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Δηλαδή όταν ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι συμμετρικός τότε και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = c_k(\lambda S_{k-1} X - S_k)$ είναι συμμετρικός και όχι μόνο *block*- συμμετρικός. Αυτό είναι εύκολο να το δούμε διότι στην περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι συμμετρικός, τότε όλοι οι πίνακες συντελεστές $A_1, A_2, \ldots, A_k$ είναι επίσης συμμετρικοί πίνακες.
Θα δώσουμε και ένα παράδειγμα για την περίπτωση αυτή.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2+\lambda^2 & \lambda^3 \\ 3 & \lambda^3+\lambda^2 & 2+\lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda & 3 & 1+\lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 \end{aligned}$$

Θα βρούμε τώρα το συμμετρικό πίνακα $L_c(\lambda)$ ο οποίος αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, χρησιμοποιώντας την παραλλαγή της πολλαπλασιατικής μεθόδου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 12 ο πίνακας $L_c(\lambda)$ θα είναι της μορφής $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda)$.

Αρχικά, θα υπολογίσουμε τους πίνακες A, C, S_0, S_1, S_2, X.
Έχουμε, λοιπόν,

$$A = \begin{bmatrix} I_2 & A_2 & A_1 \\ 0 & I_2 & A_2 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -A_2 & -A_1 & -A_0 \\ I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&-1&0&-1&0&0&-1&-2&0\\ 0&-1&-1&0&0&0&-3&0&-2\\ 0&0&0&0&0&-1&0&-3&-1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

και

$$S_0 = A = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} , \quad S_1 = A{\cdot}C = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&3&0&2\\ 0&0&0&0&0&0&0&3&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix} ,$$

$$S_2 = A \cdot C^2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&-1&-2&0&0&0&0\\ 0&0&0&-3&0&-2&0&0&0\\ 0&0&0&0&-3&-1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&-1&-2&0\\ 0&0&0&0&0&0&-3&0&-2\\ 0&0&0&0&0&-1&0&-3&-1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

,

$$S_3 = A \cdot C^3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = diag\{A_2, I_2, I_2\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι $c_1 = 0 = c_2$, $c_3 = c$.
Έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} c_i L_i(\lambda)$ θα είναι:

$$L_c(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} c_i L_i(\lambda)$$

$$= c_1 L_1(\lambda) + c_2 L_2(\lambda) + c_3 L_3(\lambda)$$

$$\overset{\substack{c_1=0 \\ c_2=0, c_3=c}}{=} c(\lambda S_2 - S_3) =$$

$$
= c\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} -
$$

$$
-c \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -\lambda & -2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3\lambda & 0 & -2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -3\lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda+1 & 2 & 0 & -\lambda & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & -3\lambda & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -\lambda+1 & 0 & -3\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}
$$

το οποίο είναι γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$

$$\begin{aligned} G &= \sum_{i=1}^{3} c_i C^{i-1} = c_1 C^0 + c_2 C^1 + c_3 C^2 \\ &= cC^2 = c \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Επειδή $det(C^2) = 144 \neq 0$ ο πίνακας $\sum_{i=1}^{k} c_i C^{i-1}$ είναι κανονικός .
Έτσι λόγω του Θεωρήματος 12 ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ που υπολογίσαμε προηγουμένως αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ είναι συμμετρικός.

4.5 Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό που είναι και το τελευταίο της εργασίας αυτής πριγράψαμε μια ακόμη μέθοδο γραμμικοποίησης, την πολλαπλασιαστική μέθοδο γραμμικοποίησης.
Αρχικά, ορίσαμε τον πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i A_i$ για τον οποίο κάναμε δυο υποθέσεις. Υποθέσαμε ότι ο πίνακας συντελεστής A_k είναι κανονικός, δηλαδή $det(A_k) \neq 0$. Έπειτα αναπτύξαμε μια μέθοδο η οποία βασίστηκε σε διαδοχικό πολλαπλασιασμό πινάκων, απ' όπου και πήρε το όνομά της η μέθοδος. Έτσι βρήκαμε έναν πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα $L_c(\lambda)$ ο οποίος δείξαμε ότι αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$.
Ωστόσο η υποθέση που κάναμε ότι ο πίνακας συντελεστής A_k είναι κανονικός ουσιαστικά μας περιορίζουν στο να έχουμε μόνο πεπερασμένες ιδιοτιμές, μηδενικά και στοιχειώδεις διαιρέτες. Για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία, και να επιτρέψουμε και την ύπαρξη ιδιοτιμών, μηδενικών και στοιχειωδών διαιρετών στο άπειρο (πρέπει $det(A_k) = 0$) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν

μετασχηματισμό τον οποίο περιγράψαμε αναλυτικά στις Παρατηρήσεις του κεφαλαίου αυτού και να βρούμε τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα ο οποίος θα αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Ωστόσο και σε αυτή την περίπτωση παρόλο που επιτρέπουμε την ύπαρξη και στοιχειώδων διαιρετών στο άπειρο δεν γνωρίζουμε αν τελικά είναι οι ίδιοι με τους στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο του πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L_c(\lambda)$.
Στη συνέχεια, μελετώντας πιο διεξοδικά τη μέθοδο αυτή, προτείναμε μια παραλλαγή της πολλαπλασιαστικής μεθόδου που περιγράψαμε στην πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου αυτού, στην οποία δεν απαιτείται η υπόθεση $det(A_k) \neq 0$. Στη παραλλαγή αυτή χρησιμοποιούμε τη πρώτη συνοδεύουσα μορφή, όπως κάναμε και στις δυο προηγούμενες μεθόδους γραμμικοποίησης που αναφέραμε προηγουμένως, και το γεγονός ότι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή αποτελεί γραμμικοποίηση και μάλιστα ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Και σε αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιήσαμε την ιδέα του διαδοχικού πολλαπλασιασμού πινάκων για να καταλήξουμε στην εύρεση ενός πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα $L_c(\lambda)$ ο οποίος να αποτελεί γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Στη συνέχεια δείξαμε ακόμη ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας που βρήκαμε αποτελεί ισχυρή γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Αυτό σημαίνει, σύμφωνα με το Λήμμα 1 που αναφέραμε στην Εισαγωγή, ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda)$ και ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Έπειτα, δώσαμε και ορισμένα παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση της μεθόδου, τόσο της πολλαπλασιαστικής όσο και της παραλλαγής που προτείναμε. Τέλος, μας απασχόλησε το ερώτημα αν ο πρωτοβάθμιος πίνακας που βρήκαμε διατηρεί τη δομή του πολυωνυμικού πίνακα. Βρήκαμε λοιπόν τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας που αναφέραμε να είναι κατ' αρχήν *block* - συμμετρικός και έπειτα εξετάσαμε αν διατηρεί τη συμμετρία. Πράγματι, στην περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι συμμετρικός ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = c_k(\lambda S_{k-1}X - S_k)$ διατηρεί και τη συμμετρία του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ όταν ισχύει $det(A_0) \neq 0$. Δηλαδή όταν ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι συμμετρικός με $det(A_0) \neq 0$ τότε και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $L_c(\lambda) = c_k(\lambda S_{k-1}X - S_k)$ είναι συμμετρικός και όχι μόνο *block*- συμμετρικός.

Επίλογος

Στην εργασία αυτή ασχοληθήκαμε με τη γραμμικοποίηση πολυωνυμικών πινάκων και πιο συγκεκριμένα με τις τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί γι΄ αυτό τον σκοπό. Αρχικά δώσαμε αρκετούς απαραίτητους ορισμούς και ορισμένα βασικά θεωρήματα. Στη συνέχεια ασχοληθήκαμε με τις δυο συνοδεύουσες μορφές οι οποίες αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο γραμμικοποίησης. Τα πολλά τους πλεονεκτήματα ήταν η αφορμή για την ευρεία χρήση τους και τις πολλές εφαρμογές τους. Εντούτοις ένα μειονέκτημά τους έδωσε το έναυσμα για περαιτέρω έρευνα πάνω στο θέμα αυτό. Το μειονέκτημά τους ήταν ότι δεν διατηρούσαν την δομή που ενδεχομένως να είχε ο πολωυνυμικός πίνακας. Η έρευνα για την εύρεση μεθόδων που θα έδιναν πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες οι οποίοι θα είχαν όσο το δυνατόν περισσότερες από τις καλές ιδιότητες των συνοδευουσών μορφών και επιπλέον θα διατηρούσαν και τη δομή του πολυωνυμικού πίνακα. Στην εργασία αυτή ασχοληθήκαμε με τρεις από τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν, την προσθετική μέθοδο, την μέθοδο των μεταθέσεων και την πολλαπλασιαστική μέθοδο. Αναπτύξαμε αναλυτικά κάθε μια από αυτές δίνοντας στο τέλος κάθε παραγράφου ορισμένες παρατηρήσεις και σχόλια όπως και μερικά παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση των μεθόδων. Στο τέλος της πολλαπλασιαστικής μεθόδου δώσαμε και μια παραλλαγή της, η οποία δείξαμε ότι δίνει οικογένεια πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων οι οποίοι αποτελούν γραμμικοποίηση και μάλιστα ισχυρή γραμμικοποίηση του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να έχουμε διατήρηση και των πεπερασμένων και των άπειρων στοιχειωδών διαιρετών. Τέλος, δείξαμε ότι η οικογένεια των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων που προκύπτει από την παραλλαγή της πολλαπλασιαστικής μεθόδου που προτείνουμε διατηρεί τη συμμετρία του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα όταν ο σταθερός πίνακας συντελεστής είναι κανονικός πολυωνυμικός πίνακας.

Μελετήσαμε τις μεθόδους αυτές έχοντας ως αρχικό πολυωνυμικό πίνακα έναν κανονικό πολυωνυμικό πίνακα. Εντούτοις για τις δυο πρώτες μεθόδους υπάρχουν δημοσιεύσεις (βλ. [27], [28]) και για την περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας είναι ιδιάζων πίνακας. Επίσης ο πολυωνυμικός πίνακας που χρησιμοποιήσαμε ήταν τετράγωνος πίνακας. Έχει γίνει μια προσπάθεια για επέκταση των αποτελεσμάτων και την περίπτωση όπου ο πολυωνυμικός πίνακας είναι μη - τετράγωνος. Η προσπάθεια αυτή έγινε για τη μέθοδο των μεταθέσεων (βλ.[29]). Για τις υπόλοιπες μεθόδους παραμένει ως ανοιχτό θέμα. Ακόμη, ως ανοιχτό θέμα είναι και η εύρεση γραμμικοποιήσεως όταν ο πολυωνυμικός πίνακας είναι εκφρασμένος σε διαφορετική πολυωνυμική βάση, όπως για παράδειγμα τα πολυώνυμα *Bernstein* και *Lagrange*. Τα πολυώνυμα *Bernstein* ορίζονται σε κλειστό διάστημα $[a,b]$ και έχουν τη μορφή $b_{j,n}(\lambda;a,b)=\frac{1}{(b-a)^n}\binom{n}{j}(\lambda-a)^j(b-\lambda)^{n-j}$ για $n=1,2,\dots$ και $j=0,1,\dots,n$. Τότε ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ βαθμού n μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των πολυωνύμων *Bernstein* ως εξής:$P(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}A_j b_{j,n}(\lambda;a,b)$. Ομοίως και για τα πολυώνυμα *Lagrange* τα οποία ορίζονται στα πεπερασμένα σημεία $z_0,z_1,\dots,z_n$.Τα πολυώνυμα *Lagrange* ορίζονται ως εξής: $\ell_j(\lambda)w_j\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(\lambda-z_k)$, $j=0,1,\dots,n$ και $w_j=\prod k=0,k\neq j^n\frac{1}{z_j-z_k}$. Τότε ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ μπορει να εκφραστεί με τη βοήθεια των πολυωνύμων *Lagrange* ως εξής: $P(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}\ell_j(\lambda)P(z_j)$. Στην εργασία [1] γίνεται μια προσπάθεια εύρεσης γραμμικοποίησης γι΄ αυτούς τους πολυωνυμικούς πίνακες. Τέλος, ανοιχτό θέμα αποτελεί και η εύρεση γραμμικοποίησης όταν ο πολυωνυμικός πίνακας είναι δυο μεταβλητών δηλαδή $P(\lambda,\mu)$. Γι΄ αυτή την περίπτωση γίνεται μια αναφορά στο [17], όπου επεκτείνει τη μέθοδο των μεταθέσεων και στην περίπτωση των δυο μεταβλητών. Η ανάπτυξη νέων μεθόδων γραμμικοποίησης είναι επίσης ένα ανοιχτό θέμα μιας και οι εφαρμογές της συναντόνται συχνά σε προβλήματα, κυρίως ανάλυσης κραδασμών σε μηχανές και οχήματα.

Βιβλιογραφία

[1] Amiraslani A.,2009, Corless R.M., Lancaster P., *Linearization of matrix polynomials expressed in polynomial bases*, IMA J. Numer. Anal., 29, pp.141-157.

[2] Antoniou E.N., Vardulakis A.I.G. and Karampetakis N.P., *A Spectral characterization of behaviour of discrete time AR - representations over a finite time interval*, Kybernetika (Prague), vol. 34,no. 5, pp.555-564.

[3] Antoniou E.N., Vologiannidis S., 2004a, *A new family of companion forms of polynomial matrices*, Electronic Journal of Linear Algebra, vol.11, pp.78-87.

[4] Antoniou E.N., Vologiannidis S., 2006 , *Linearizations of polynomial matrices with symmetries and their applications* , Electronic Journal of Linear Algebra, vol.15, pp.107-114.

[5] Antoniou E.N., Vologiannidis S.,2011 , *A permuted factors approach for the linearization of polynomial matrices*, Mathematics of Control, Signals and Systems, March 2011.

[6] Bernstein D.S., *Matrix Mathematics, theory, facts and formulas*, Princeton University Press, 2009.

[7] Byers R., Mehrmann V. and Xu H., 2007 ,*Staircase forms and trimmed linearizations for structured matrix polynomials* , Berlin , Germany : DFG Research Center Matheon, Mathematics for key technologies in Berlin.

[8] Byers R., Mehrmann V. and Xu H., 2008,*Trimmed linearizations for structured matrix polynomials*, Linear Algebra and its Applications, 429, pp.2373-2400.

[9] Fiedler M.,2003, *A note on companion matrices*, Linear Algebra Appl., 372, pp.325-331.

[10] Fiedler M.,1990, *Expressing a polynomial as the characteristic polynomial of a symmetric matrix*, Linear Algebra and its applications 141:265-270(1990).

[11] Gantmacher F.R.,1959, *The theory of Matrices*, vols 1 , 2, Translated by K.A. Hirsch, Chelsea Publishing Co, New York.

[12] Gohberg I., Kaashoek M.A. and Lancaster P., *General theory of regular matrix polynomial and band Toeplitz operators, Integral Equations and operator theory*, 11, 1988, pp. 776-882.

[13] Gohberg I., Lancaster P. and Rodman L., *Matrix Polynomials*, Academic Press, New York, 1982.

[14] Higham N., Mackey N. and Tisseur F., 2006 , *Symmetric linearizations for matrix polynomials*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol.29 , pp. 143-159.

[15] Kaczorek T.,2007, *Polynomial and Rational Matrices, Applications in dynamical systems theory*, Springer - Verlag, London, 2007.

[16] Karampetakis N.P., *Notions of equivalence for linear time invariant multivariable systems*, PhD thesis, No.15, Department of Mathemacis, Aristotle University of Thessaloniki, 1993.

[17] Karampetakis N.P., 2009, *Matrix pencil equivalents of symmetric polynomial matrices*, Special issue: Recent developments in multidimesional systems, control and signals - theory and applications, Asian Journal of control, vol. 12,No.2.

[18] Karampetakis N.P., Vologiannidis S., *Infinite elementary divisors structure - preserving transformations for polynomial matrices*, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, vol. 13, No. 4, pp.101-111.

[19] Lancaster P., 1961, *Symmetric transformations of the companion matrix*, NABLA: Bulletin of the Malayan Math. Soc, 8, pp. 146-148.

[20] Lancaster P., 2002 , *Lambda - Matrices and Vibrating Systems*, Pergamon Press, Oxford, UK, 1966. Reprinted by Dover, New York.

[21] Lancster P., Prells S., 2007, *Isospectral families of high - order systems, ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Mechanik*, vol. 87, 2007, pp. 219-234.

[22] Lancaster P. and Tismenetsky M., 1985, *The theory of matrices*, Academic Press, London, 1985.

[23] Lancaster P., 2008, *Linearization of regular matrix polynomials*, Electronic Journal of Linear Algebra, vol. 17, pp. 21-27.

[24] Mackey D., 2006a , *Structured Linearizations for Matrix Polynomials* , PhD Thesis , University of Manchester , Manchester, UK, 2006.

[25] Mackey D., Mackey N., Mehl C. and Mehrmann V., 2006b , *Vector sraces of linearizations for matrix polynomials*, SIAM Journal on Matrix Analysis Applications, vol.28 ,pp. 971-1004.

[26] Mackey D.S., Dopico M.F., Teran D.F., *Linearizations of singular matrix polynomials and recovery of minimal indices*, Electronic Journal Linear Algebra, 18, 2009, pp.371-402.

[27] Mackey D.S., Dopico M.F., Teran D.F., *Fiedler companion linearizations and the recovery of minimal indices*, SIAM Journal Matrix Analysis Applications, 31, 2010, pp.2181-2204.

[28] Mackey D.S., Dopico M.F., Teran D.F.,*Fiedler companion linearizations for rectangular matrix polynomials*,Electronic Journal of Linear Algebra, 2011.

[29] Mackey D.S., Mackey N., Mehl C., Mehrmann V., 2006, *Vector spaces of linearizations for matrix polynomials*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 28, pp.971-1004.

[30] Mackey D.S., Mackey N., Mehl C., Mehrmann V., 2006 ,*Structured polynomial eigenvalue problems: Good vibrations from good linearizations*, SIAM J. Matrix Anal. Appl.28, pp.1029-1051.

[31] Praagman C., *Invariants of polynomial matrices*, pp.1274-1277, 1rst Eurorean Control Conference, 1991.

[32] Vardulakis A.I.G., *Linear Multivariable control*, John Wiley , Sons Ltd, 1991.

[33] Βολογιαννίδης Σ., *Αλγεβρο - πολυωνυμικές υπολογιστικές μέθοδοι στη θεωρία ελέγχου*, διδακτορική διατριβή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2005.