ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Καζαντζίδου Χριστίνα

Επιβλέπων : Αντώνιος - Ιωάννης Βαρδουλάκης
Καθηγητής Α .Π .Θ.

Θεσσαλονίκη , Σεπτέμβριος 2007

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Καζαντζίδου Χριστίνα

Επιβλέπων : Αντώνιος - Ιωάννης Βαρδουλάκης
Καθηγητής Α .Π .Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή την.....

.....	.....	.....
Α.Ι.Βαρδουλάκης	Μ.Γουσίδου-Κουτίτα	Ν.Καραμπετάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.	Αν.Καθηγήτρια Α.Π.Θ.	Επ.Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη , Σεπτέμβριος 2007

.....

Καζαντζίδου Χριστίνα
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι έννοιες της Wiener - Hopf παραγοντοποίησης και των αντίστοιχων δεικτών παραγοντοποίησης είναι ευρέως γνωστές . Οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης παίζουν σημαντικό ρόλο στην αλγεβρική θεωρία συστημάτων . Είναι χρήσιμοι στις singular ολοκληρωτικές εξισώσεις , στις Wiener - Hopf εξισώσεις , στις διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων και στην ταξινόμηση των ολομορφικών διανυσμάτων πάνω στη σφαίρα του Riemann . Επίσης , έχουν μεγάλη σημασία στην θεωρία Fredholm και στην μελέτη της κλάσης των τελεστών Toeplitz . Στο πρώτο κεφάλαιο μελετούμε τους πολυωνυμικούς και ρητούς πίνακες καθώς και την πεπερασμένη και άπειρη δομή τους . Στο δεύτερο κεφάλαιο εισάγουμε βασικές έννοιες της θεωρίας συστημάτων . Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζουμε την Wiener - Hopf παραγοντοποίηση και τους αντίστοιχους δείκτες παραγοντοποίησης όπως και τους τοπικούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης και τους συσχετίζουμε με έννοιες της θεωρίας ελέγχου . Επιπλέον , παρουσιάζονται κάποια αποτελέσματα όσον αφορά τις ιδιότητές τους . Αυτά οδηγούν σε αλγόριθμους , οι οποίοι παρουσιάζονται στο τέταρτο κεφάλαιο , που τους υπολογίζουν . Τέλος , στο πέμπτο κεφάλαιο , ερευνάται η σχέση των Wiener - Hopf δεικτών παραγοντοποίησης με την πεπερασμένη και άπειρη δομή πολυωνυμικών και ρητών πινάκων .

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Πολυωνυμικοί πίνακες , ρητοί πίνακες ,Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης , τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης , πεπερασμένη δομή , άπειρη δομή .

ABSTRACT

The concepts of the Wiener - Hopf factorization and the corresponding indices are widely known . Wiener - Hopf factorization indices play an important role in algebraic system theory . The are useful to singular integral equations , Wiener - Hopf equations , partial differential equations and the classification of vectors on the Riemann shpere . Furthermore , they are of great importance in the Fredholm theory and the study of the class of Toeplitz operators . In the first chapter , we study polynomial and rational matrices and their finite and infinite structure as well . In the second chapter , we introduce some basic concepts of the system theory . In the third chapter , we define Wiener - Hopf factorization , Wiener - Hopf factorization indices and local Wiener - Hopf factorization indices and relate them to concepts of control theory . Moreover , some important results are presented , concerning their properties . These lead to algorithms , which are introduced in the fourth chapter , that compute them . Finally , in the fifth chapter , the relationship between the Wiener - Hopf factorization indices and the finite and infinite structure of polynomial and rational matrices is investigated .

KEY WORDS

Polynomial matrices , rational matrices , Wiener - Hopf factorization indices , local Wiener-Hopf factorization indices , finite structure , infinite structure .

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω

τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Βαρδουλάκη Αντώνιο-Ιωάννη για την καθοδήγησή του κι επειδή πίστεψε σε μένα από την αρχή ,

την σύμβουλο καθηγήτριά μου κυρία Γουσίδου - Κουτίτα Μαρία , επειδή είναι πάντα κοντά στους φοιτητές και

τον καθηγητή μου κύριο Καραμπετάκη Νικόλαο , ο οποίος καθιστά αδύνατο το να μην μάθει κάποιος προγραμματισμό .

Τέλος , οφείλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την αμέριστη υποστήριξή τους .

Π Ι Ν Α Κ Α Σ Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Ω Ν

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΔΟΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΗΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

WIENER-HOPF ΔΕΙΚΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΚΑΙ SMITH - Mc MILLAN ΜΟΡΦΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΔΟΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΗΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

1.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Έστω $\mathbb{R}$ το σώμα των πραγματικών αριθμών .Έστω $\mathbb{R}[s]$ το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{R}$. Το $\mathbb{R}[s]$ εφοδιασμένο με τις πράξεις :

$$\text{πρόσθεση} \ : \ \mathbb{R}[s] \times \mathbb{R}[s] \rightarrow \mathbb{R}[s] \tag{1.1}$$

$$\text{πολλαπλασιασμό} \ : \ \mathbb{R}[s] \times \mathbb{R}[s] \rightarrow \mathbb{R}[s] \tag{1.2}$$

αποτελεί **δακτύλιο** (ring) .

Ο δακτύλιος των πολυωνύμων $\mathbb{R}[s]$ είναι **Ευκλείδειος** (Euclidean ring) , δηλαδή υπάρχει μία συνάρτηση $\partial : \mathbb{R}[s] \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε $\alpha(s) \in \mathbb{R}[s]$, ορίζουμε $\partial\alpha(s) =: \deg \alpha(s) \in \mathbb{N}$ και το καλούμε **βαθμό** του $\alpha(s)$. Ο βαθμός του $\alpha(s)\beta(s) \neq 0$, όπου $\alpha(s), \beta(s) \in \mathbb{R}[s]$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του $\alpha(s)$.

Ένας $p \times q$ **πολυωνυμικός πίνακας** $A(s)$ έχει ως στοιχεία πολυώνυμα . Το σύνολο των $p \times q$ πολυωνυμικών πινάκων συμβολίζεται με $\mathbb{R}[s]^{p\times q}$.

Ορισμός 1.1.1

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$. Ο $T(s)$ ονομάζεται $\mathbb{R}$ **[s] – unimodular** ή απλά **unimodular** αν υπάρχει πολυωνυμικός πίνακας $T'(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ τέτοιος ώστε

$$T(s)\,T'(s) = I_p \ \Leftrightarrow \ |\,T(s)\,| = c \in \mathbb{R} \ , \ c \neq 0 \, .$$

Ορισμός 1.1.2

Ο **βαθμός** ενός **πολυωνυμικού** πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$ **,** που συμβολίζεται με **deg T(s)** , ορίζεται ως ο μέγιστος βαθμός όλων των μέγιστης τάξης (μη μηδενικών) υπο-οριζουσών του $T(s)$.

Παράδειγμα 1.1.3

Αν $T(s) = \begin{bmatrix} 1 & s+2 \\ s^2+1 & 0 \\ s & 2 \end{bmatrix}$ τότε $\deg T(s) = \max\{3,2,2\} = 3$.

Πόρισμα 1.1.4

Αν $T(s)$ τετράγωνος ($p = q$) και $\det T(s) \neq 0$ τότε

$$\deg T(s) = \deg(\det T(s)) \tag{1.3}$$

Πόρισμα 1.1.5

Ο $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ είναι unimodular αν και μόνο αν $\deg T(s) = 0$.

Πόρισμα 1.1.6

Αν $t(s) = [\ t_1(s)\ \ t_2(s)\ \ \dots\ \ t_q(s)\ ] \in \mathbb{R}[s]^{1\times q}$ τότε

$$\deg t(s) = \max\{\deg t_i(s)\}\ ,\ i = 1, 2, \dots, q \tag{1.4}$$

ενώ αν $t(s) = [\ t_1(s)\ t_2(s)\ \dots\ t_p(s)\ ]^T \in \mathbb{R}[s]^{p\times 1}$ τότε

$$\deg t(s) = \max\{\deg t_j(s)\}\ ,\ j = 1, 2, \dots, p \tag{1.5}$$

1.2 ΡΗΤΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Οι **πραγματικές ρητές συναρτήσεις** είναι το σύνολο

$$\mathbb{R}(s) = \{t(s) \mid t(s) = \frac{n(s)}{d(s)},\ n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s]\ , d(s) \neq 0\} \tag{1.6}$$

και είναι **σώμα** .

Το σύνολο $\mathbb{R}_{pr}(s)$ των **proper** (**κανονικών**) ρητών συναρτήσεων ορίζεται ως το :

$$\mathbb{R}_{pr}(s) = \{t(s) \mid t(s) = \frac{n(s)}{d(s)},\ n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s],\ d(s) \neq 0,\ \deg d(s) \geq \deg n(s)\} \tag{1.7}$$

Το $\mathbb{R}_{pr}(s)$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο το 1 και χωρίς διαιρέτες του μηδενός . Οι μονάδες (units) του $\mathbb{R}_{pr}(s)$ είναι εκείνες οι proper ρητές συναρτήσεις $t(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ για τις οποίες υπάρχει $t'(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ τέτοια ώστε $t(s)t'(s) = 1$.

Η $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ είναι μονάδα αν και μόνο αν $\deg n(s) = \deg d(s)$.

Ορισμός 1.2.1

Οι μονάδες του συνόλου $\mathbb{R}_{pr}(s)$ ονομάζονται **biproper** ρητές συναρτήσεις .

Έστω το σύνολο

$$\mathbb{R}(s)^p = \{\ t(s)\ \mid\ t(s) = [\ t_1(s)\ \ t_2(s)\ \dots\ t_p(s)\ ]^T,\ t_i(s) \in \mathbb{R}(s)\ ,\ i = 1, 2\ , \dots\ , p\ \} \tag{1.8}$$

Το $\mathbb{R}(s)^p$ είναι γραμμικός διανυσματικός χώρος με πράξεις την πρόσθεση δύο στοιχείων και τον πολλαπλασιασμό ενός στοιχείου με ρητή συνάρτηση. Το $\mathbb{R}(s)^p$ ονομάζεται **πραγματικός διανυσματικός χώρος ρητών συναρτήσεων** (**real rational vector space**). Τα στοιχεία $t(s) \in \mathbb{R}(s)^p$ ονομάζονται διανύσματα πραγματικών ρητών συναρτήσεων.

Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}(s)^{p\times q}$ το σύνολο των $p\times q$ πινάκων ρητών συναρτήσεων και ονομάζουμε τα στοιχεία του **πίνακες πραγματικών ρητών συναρτήσεων** ή απλά **ρητούς πίνακες**.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times q}$ των $p\times q$ πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}_{pr}(s)$. Ένας πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times q}$ καλείται **proper** (**κανονικός**) ρητός πίνακας. Σημειώνουμε ότι για $p = q$ το σύνολο $\mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times p}$ αποτελεί δακτύλιο.

<u>Ορισμός 1.2.2</u> [Vardulakis et al., 1982]
Οι μονάδες του συνόλου $\mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times p}$ είναι εκείνοι οι $p\times p$ proper ρητοί πίνακες $B(s)$ για τους οποίους υπάρχει $p\times p$ proper ρητός πίνακας $B'(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times p}$ έτσι ώστε $B(s)\,B'(s) = I_p$. Οι μονάδες $B(s)$ του συνόλου $\mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times p}$ ονομάζονται $\mathbb{R}_{pr}(s)$**- unimodular** ή **biproper** ρητοί πίνακες.

Ένας πίνακας $B(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times p}$ είναι biproper αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι μονάδα του $\mathbb{R}_{pr}(s)$, δηλαδή biproper ρητή συνάρτηση.

Είναι γνωστό ότι το **rank** του πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times q}$ στο σώμα $\mathbb{R}(s)$ το οποίο συμβολίζεται με $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s)$ είναι ο μέγιστος αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών του $T(s)$.

Ορισμός 1.2.3

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$, $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)}T(s) = \min\{p, q\}$ και

$$T(s) = \begin{bmatrix} \overline{t}_1(s)^T \\ \overline{t}_2(s)^T \\ \vdots \\ \overline{t}_p(s)^T \end{bmatrix} = [\ t_1(s) \quad t_2(s) \ \dots \ t_q(s)\ ] \tag{1.9}$$

όπου $\overline{t}_i(s)^T \in \mathbb{R}[s]^{1\times q}$, $i = 1, 2,..., p$ οι γραμμές του $T(s)$ και $t_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times 1}$, $j = 1, 2,..., q$ οι στήλες του $T(s)$.

Η **πολυπλοκότητα των γραμμών** $c_r(T)$ (**row complexity**) του $T(s)$ είναι το άθροισμα των βαθμών των γραμμών του $T(s)$, δηλαδή

$$c_r(T) \quad = \sum_{i=1}^{p} \deg \overline{t}_i(s)^T \tag{1.10}$$

Αντίστοιχα ορίζεται η **πολυπλοκότητα των στηλών** $c_c(T)$ **(column complexity)** του $T(s)$ ως το άθροισμα των βαθμών των στηλών του $T(s)$, δηλαδή

$$c_c(T) \quad = \sum_{j=1}^{q} \deg t_j(s) \tag{1.11}$$

Ισχύει πάντα $c_r(T) \geq \deg T(s)$, $c_c(T) \geq \deg T(s)$.

1.3 ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΙΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΚΑΙ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΙΣ ΣΤΗΛΕΣ

Έστω $r_i = \deg \overline{t}_i(s)^T$, $i = 1 ,2 ,..., p$ και $c_j = \deg t_j(s)$, $j = 1 , 2 ,..., q$ έτσι ώστε

$$\overline{t}_i(s)^T = \sum_{k=0}^{r_i} \overline{t}_{ik}^T s^k = \overline{t}_{ir_i}^T s^{r_i} + \overline{t}_{ir_{i-1}}^T s^{r_i-1} + ... + \overline{t}_{i0}^T \quad , \quad i = 1 , 2 ,..., p \tag{1.12}$$

$$t_j(s) = \sum_{k=0}^{c_j} t_{jk} s^k = t_{c_j} s^{c_j} + t_{jc_{j-1}} s^{c_j - 1} + \ldots + t_{j0} \quad , \quad j = 1 , 2 ,.., q \tag{1.13}$$

ο T(s) γράφεται ως

$$T(s) = \text{diag}\,[\, s^{r_1} ,\ s^{r_2} , \ldots ,\ s^{r_p} \,] \begin{bmatrix} \bar{t}_{1r_1}{}^T \\ \bar{t}_{2r_2}{}^T \\ \vdots \\ \bar{t}_{pr_p}{}^T \end{bmatrix} + T_r(s) \tag{1.14}$$

και ως

$$T(s) = [\ t_{1c_1} \quad t_{2c_2} \ \ldots \ t_{qc_q}\ ]\text{diag}\,[\, s^{c_1} ,\ s^{c_2} , \ldots , s^{c_q}\ ] + T_c(s) \tag{1.15}$$

<u>Ορισμός 1.3.1</u>

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} \bar{t}_{1r_1}{}^T \\ \bar{t}_{2r_2}{}^T \\ \vdots \\ \bar{t}_{pr_p}{}^T \end{bmatrix} =: [T(s)]_r^h \in \mathbb{R}^{p\times q}$ ονομάζεται **μεγιστοβάθμιος ως προς τις γραμμές πίνακας συντελεστής** (**highest row degree coefficient matrix**) του T(s) . Αντίστοιχα ο πίνακας $[\, t_{1c_1} \quad t_{2c_2} \ \ldots \ t_{qc_q}\,] =: [T(s)]_c^h \in \mathbb{R}^{p\times q}$ ονομάζεται **μεγιστοβάθμιος ως προς τις στήλες πίνακας συντελεστής** (**highest row degree coefficient matrix**) του T(s) .

<u>Ορισμός 1.3.2</u>

Ο πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$ ονομάζεται **κανονικός ως προς τις γραμμές** του (**row proper**) αν

$$\text{rank}_{\mathbb{R}}[T(s)]_r^h = \min\{\, p , q \,\} \tag{1.16}$$

ενώ ονομάζεται **κανονικός ως προς τις στήλες** του (**column proper**) αν

$$\text{rank}_{\mathbb{R}}[T(s)]_c^h = \min\{\, p , q \,\} \tag{1.17}$$

Πρόταση 1.3.3

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$, $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)}T(s) = p$. Ο $T(s)$ είναι row proper αν και μόνο αν η πολυπλοκότητα των γραμμών $c_r(T)$ ισούται με το βαθμό του , δηλαδή

$$T(s) \text{ row proper } \Leftrightarrow c_r(T) = \deg T(s) \tag{1.18}$$

Παρόμοια αν $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$, $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)}T(s) = q$ τότε

$$T(s) \text{ column proper } \Leftrightarrow c_c(T) = \deg T(s) \tag{1.19}$$

Πρόταση 1.3.4

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$, $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)}T(s) = p\ (= q)$. Τότε υπάρχει unimodular πίνακας $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ($T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times q}$) τέτοιος ώστε ο πίνακας $\overline{T}(s) = T_L(s)T(s)$ είναι row proper ($\overline{T}(s) = T(s)T_R(s)$ είναι column proper) .

1.4 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΓΡΑΜΜΩΝ - ΣΤΗΛΩΝ

1.4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορίζουμε **στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών (στηλών)** ενός πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$ τις εξής :

(I) εναλλαγή των γραμμών (στηλών) i και j του $T(s)$

(II) πολλαπλασιασμός της i γραμμής (στήλης) του $T(s)$ με οποιοδήποτε αντιστρέψιμο στοιχείο α του $\mathbb{R}[s]$, δηλαδή με οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}$

(III) πολλαπλασιασμός της i γραμμής (στήλης) του $T(s)$ με μη μηδενικό στοιχείο $\alpha(s)$ του $\mathbb{R}[s]$ και πρόσθεσή της σε οποιαδήποτε άλλη γραμμή (στήλη) j του $T(s)$.

Οι στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών (στηλών) του T(s) επιτυγχάνονται με πολλαπλασιασμό από αριστερά (δεξιά) με τους **στοιχειώδεις** (**unimodular**) **πίνακες** $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ($U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times q}$) οι οποίοι παράγονται εκτελώντας τις αντίστοιχες πράξεις στον μοναδιαίο πίνακα I_p (I_q) .

(I)
$$U = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \bigcirc & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & \bigcirc & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ i−οστή γραμμή} \\ \\ \leftarrow \text{ j−οστή γραμμή} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{i−οστή} & \text{j−οστή} \\ \text{στήλη} & \text{στήλη} \end{array} \end{array}$$

(II)
$$U = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \bigcirc & \\ & \alpha & & \\ & \bigcirc & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ i−οστή γραμμή} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{j−οστή στήλη} \end{array} \end{array}$$

(III)
$$U = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \bigcirc & \\ & & 1 & \dots & \alpha(s) & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & \bigcirc & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ i−οστή γραμμή} \\ \\ \leftarrow \text{ j−οστή γραμμή} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{i−οστή} & \text{j−οστή} \\ \text{στήλη} & \text{στήλη} \end{array} \end{array}$$

$$
U = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & \\
 & \ddots & & & \bigcirc & \\
 & & 1 & \dots & 0 & \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & \\
 & & \alpha(s) & \dots & 1 & \\
 & \bigcirc & & & & \ddots \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow \ i-\text{οστή} \ \ \text{γραμμή} \\ \\ \leftarrow \ j-\text{οστή} \ \ \text{γραμμή} \\ \\ \\
\end{array} \\
\begin{array}{ccc}
\uparrow & & \uparrow \\
i-\text{οστή} & & j-\text{οστή} \\
\text{στήλη} & & \text{στήλη}
\end{array}
\end{array}
$$

1.4.2 ΡΗΤΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών (στηλών) ενός ρητού πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times q}$ είναι οι εξής :

(I) εναλλαγή δύο γραμμών (στηλών) i και j του T(s)

(II) πολλαπλασιασμός της i γραμμής (στήλης) του T(s) με μία μονάδα $b(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$

(III) πολλαπλασιασμός της i γραμμής (στήλης) του T(s) με $t(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ και πρόσθεσή της σε οποιαδήποτε άλλη γραμμή (στήλη) j του T(s) .

Οι στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών (στηλών) του T(s) επιτυγχάνονται με πολλαπλασιασμό από αριστερά (δεξιά) με τους **στοιχειώδεις** (**biproper**) **πίνακες** $B_L(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times p}$ ($B_R(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{q\times q}$) οι οποίοι παράγονται με τρόπο ανάλογο με αυτόν που είδαμε στην παράγραφο 1.4.1 .

1.5 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ SMITH-McMILLAN ΜΟΡΦΗ ΡΗΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμός 1.5.1

Δύο ρητοί πίνακες $T_1(s)$, $T_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times q}$ ονομάζονται **ισοδύναμοι στο** $\mathbb{C}$ (**equivalent**) αν υπάρχουν unimodular πίνακες $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$, $U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times q}$ τέτοιοι ώστε $U_L(s)T_1(s)U_R(s) = T_2(s)$.

Η παραπάνω ισότητα ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}(s)^{p\times q}$, έστω $E^{\mathbb{C}}$.

Θεώρημα 1.5.2 **(πεπερασμένη Smith - McMillan μορφή ρητού πίνακα)**

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times q}$, $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$, $r \le \min\{p,q\}$.Τότε ο $T(s)$ είναι ισοδύναμος στο $\mathbb{C}$ με τον διαγώνιο πίνακα $S^{\mathbb{C}}_{T(s)}$ που έχει την μορφή :

$$S^{\mathbb{C}}_{T(s)} := \begin{bmatrix} \text{diag}\left[\dfrac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \dfrac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \ldots, \dfrac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}\right] & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

όπου $\varepsilon_i(s)$,$\psi_i(s) \in \mathbb{R}[s]$, $i = 1,2,\ldots, r$ κανονικά και πρώτα μεταξύ τους έτσι ώστε $\varepsilon_1(s) \mid \varepsilon_2(s) \mid \ldots \mid \varepsilon_r(s)$ και $\psi_r(s) \mid \psi_{r-1}(s) \mid \ldots \mid \psi_1(s)$.

Η Smith - McMillan μορφή $S^{\mathbb{C}}_{T(s)}$ του πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times q}$ είναι κανονική μορφή της ισοδυναμίας $E^{\mathbb{C}}$.

Ορισμός 1.5.3

Οι ρητές συναρτήσεις $\varepsilon_i(s)/\psi_i(s) =: f_i(s) \in \mathbb{R}(s)$, $i = 1,2,\ldots, r$ αποτελούν ένα πλήρες σύνολο αναλλοιώτων της ισοδυναμίας $E^{\mathbb{C}}$, δηλαδή

$[T_1(s), T_2(s)] \in E^{\mathbb{C}} \Leftrightarrow T_1(s)$ και $T_2(s)$ έχουν το ίδιο σύνολο $\{f_i(s), i = 1,2,\ldots,r\}$

και καλούνται **αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις** του $T(s)$.

Ορισμός 1.5.4

Αν $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$ τότε $\psi_i(s) = 1$, $i = 1,2,\ldots, r$, αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας $S^{\mathbb{C}}_{T(s)}$ είναι επίσης πολυωνυμικός και καλείται **Smith κανονική μορφή** του T(s). Έτσι η μορφή του είναι :

$$S^{\mathbb{C}}_{T(s)} := \begin{bmatrix} \mathrm{diag}[\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \ldots, \varepsilon_r(s)] & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

και τα πολυώνυμα $\varepsilon_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ ονομάζονται **αναλλοίωτοι παράγοντες** (**invariant factors**) του T(s) .

Ένας τρόπος εύρεσης της Smith - Mc Millan μορφής περιγράφεται στη συνέχεια .

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$ και $m_i(s)$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των ελάσσονων οριζουσών (minors) τάξης i του T(s).Τότε τα αναλλοίωτα πολυώνυμα είναι τα $\varepsilon_i(s) = m_i(s) / m_{i-1}(s)$, $i = 1,2,\ldots, r$, όπου εξ ορισμού $m_0(s) := 1$.

Αν ο πίνακας T(s) είναι μη πολυωνυμικός , τότε d(s) είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών $d_{ij}(s)$ των στοιχείων $t_{ij}(s) = n_{ij}(s) / d_{ij}(s)$ του T(s) , δηλαδή $T(s) = \dfrac{1}{d(s)} N(s)$, όπου $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$.

Έστω $S^{\mathbb{C}}_{N(s)} = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}[n_1(s), n_2(s), \ldots, n_r(s)] & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}$ η Smith κανονική μορφή του N(s).

Μετά τις όποιες απλοποιήσεις κοινών παραγόντων έχουμε $\dfrac{n_i(s)}{d(s)} = \dfrac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1, 2, \ldots, r$ κι έτσι

$$S^{\mathbb{C}}_{T(s)} = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}\left[\dfrac{n_1(s)}{d(s)}, \dfrac{n_2(s)}{d(s)}, \ldots, \dfrac{n_r(s)}{d(s)}\right] & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 1.5.5

Έστω $T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$, τότε $d(s) = s^2(s+1)$

$m_0(s) = 1$, $m_1(s) = 1$, $m_2(s) = s(s+1)$

Άρα $S^{\mathbb{C}}_{T(s)} = \frac{1}{s^2(s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s(s+1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2(s+1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}$

1.6 SMITH - Mc MILLAN ΜΟΡΦΗ ΡΗΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Ορισμός 1.6.1

Δύο ρητοί πίνακες $T_1(s)$, $T_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times q}$ ονομάζονται **ισοδύναμοι στο άπειρο** (**equivalent at infinity**) αν υπάρχουν biproper πίνακες $B_L(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times p}$, $B_R(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{q\times q}$ τέτοιοι ώστε $B_L(s)T_1(s)B_R(s) = T_2(s)$.

Η παραπάνω ισότητα ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}(s)^{p\times q}$, έστω E^{∞} .

Θεώρημα 1.6.2 **(Smith - Mc Millan μορφή ρητού πίνακα στο άπειρο)**

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times q}$, $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$, $r \le \min\{p,q\}$. Τότε ο $T(s)$ είναι **ισοδύναμος στο άπειρο** με ένα διαγώνιο πίνακα $S^{\infty}_{T(s)}$ που έχει την μορφή :

$$S^{\infty}_{T(s)} := \begin{bmatrix} \text{diag}[s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_r}] & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

όπου $q_1 \ge q_2 \ge \dots \ge q_r$, $q_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1,2,\dots,r$.

Ορισμός 1.6.3

Αν $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times q}$, τότε $q_i \le 0$, $i = 1,2,\dots, r$, δηλαδή $S^{\infty}_{T(s)} \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times q}$ και σε αυτή την περίπτωση ο $S^{\infty}_{T(s)}$ ονομάζεται **Smith μορφή** του $T(s)$ **στο άπειρο .**

Ο πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times p}$ είναι biproper αν και μόνο αν $S^{\infty}_{T(s)} = I_p$.

Γενικά κάποια q_i είναι μεγαλύτερα του μηδενός και κάποια μικρότερα του μηδενός . Έτσι μπορούμε να γράψουμε την Smith - McMillan μορφή στο άπειρο και ως εξής :

$$S^{\infty}_{T(s)} := \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left[s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_k}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+1}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_r}} \right] & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

όπου $1 \le k \le r$ και $\hat{q}_i = -q_i$, αν $q_i < 0$, έτσι ώστε $q_1 \ge q_2 \ge \dots \ge q_k \ge 0$ και $\hat{q}_r \ge \hat{q}_{r-1} \ge \dots \ge \hat{q}_{k+1} \ge 0$.

Ορισμός 1.6.4

Οι ρητές συναρτήσεις $s^{q_1}, \dots, s^{q_k}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+1}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_r}}$, που συμβολίζονται με $f_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$, ονομάζονται **αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις** του $T(s)$ **στο άπειρο .**

Παράδειγμα 1.6.5

Έστω $T(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 1 \\ s+1 & 0 \end{bmatrix}$.

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη επί το $\frac{-1}{s^2}$ και την προσθέτουμε στην δεύτερη :

$$\begin{bmatrix} s^2 & 1 \\ s+1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{s^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ s+1 & \frac{-s-1}{s^2} \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη στήλη με το $\frac{-s}{s+1}$:

$$\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ s+1 & \frac{-s-1}{s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-s}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ s+1 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Τέλος πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $\frac{-s-1}{s^2}$ και την προσθέτουμε στη δεύτερη :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-s-1}{s^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ s+1 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = S^{\infty}_{T(s)}$$

<u>Θεώρημα 1.6.6</u>

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times q}$, $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$ και $T(s) \sim S^{\infty}_{T(s)}$ (E^{∞}). Τότε οι εκθέτες q_i, $i = 1, 2, ..., r$ αποτελούν ένα πλήρες σύνολο αναλλοιώτων ως προς την σχέση ισοδυναμίας E^{∞}. Η Smith - McMillan μορφή του $T(s)$ στο άπειρο $S^{\infty}_{T(s)}$ είναι κανονική μορφή της E^{∞} στο σύνολο $\mathbb{R}(s)^{p\times q}$.

<u>1.7 ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΟΙ ΚΟΙΝΟΙ ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ</u>

<u>Ορισμός 1.7.1</u>

Έστω $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$, $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times r}$, $C(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times q}$ έτσι ώστε $A(s) = B(s)C(s)$, τότε ο πίνακας $B(s)$ είναι **αριστερός διαιρέτης** του $A(s)$ και ο πίνακας $C(s)$ είναι **δεξιός διαιρέτης** του $A(s)$. Ο πίνακας $A(s)$ είναι **αριστερό πολλαπλάσιο** του $C(s)$ και **δεξιό πολλαπλάσιο** του $B(s)$.

Ορισμός 1.7.2

Θεωρούμε δύο πίνακες $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times r}$, $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$ με τον ίδιο αριθμό γραμμών p και ένα αριστερό διαιρέτη των $T_1(s), T_2(s)$: $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$, δηλαδή $T_1(s) = T_L(s)\,\overline{T}_1(s)$, $T_2(s) = T_L(s)\,\overline{T}_2(s)$, $\overline{T}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times r}$, $\overline{T}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$.

Ο πίνακας $T_L(s)$ ονομάζεται **κοινός αριστερός διαιρέτης** (**common left divisor**) των $T_1(s),T_2(s)$.Αντίστοιχα , αν $T_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times q}$, $T_4(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times q}$ με τον ίδιο αριθμό στηλών q και ένας δεξιός διαιρέτης των $T_3(s)$, $T_4(s)$: $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times q}$, δηλαδή $T_3(s) = \overline{T}_3(s)\,T_R(s)$, $T_4(s) = \overline{T}_4(s)\,T_R(s)$, $\overline{T}_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times q}$, $\overline{T}_4(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times q}$,

τότε ο πίνακας $T_R(s)$ ονομάζεται **κοινός δεξιός διαιρέτης** (**common right divisor**) των $T_3(s)$, $T_4(s)$.

Ορισμός 1.7.3

Αν ο πίνακας $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ είναι δεξιό πολλαπλάσιο κάθε κοινού αριστερού διαιρέτη $\overline{T}_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ των $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times r}$, $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$ τότε ονομάζεται **μέγιστος κοινός αριστερός διαιρέτης** (**greatest common left divisor**) .

Ενώ ο πίνακας $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times q}$ ονομάζεται **μέγιστος κοινός δεξιός διαιρέτης** (**greatest common right divisor**) αν είναι αριστερό πολλαπλάσιο κάθε κοινού δεξιού διαιρέτη $\overline{T}_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times q}$ των $T_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times q}$, $T_4(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times q}$.

Θεώρημα 1.7.4 [Wolovich , 1974]

Έστω $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times r}$, $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$ με τον ίδιο αριθμό γραμμών . Αν ο πίνακας $[\,T_1(s)\;\; T_2(s)\,]$ μπορεί να αναχθεί στον κάτω τριγωνικό $[\,T_{GL}(s)\;\; \bigcirc\,]$ τότε ο $T_{GL}(s)$ είναι ο μέγιστος κοινός αριστερός διαιρέτης των $T_1(s)$, $T_2(s)$.

Έστω $T_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times q}$, $T_4(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times q}$ με τον ίδιο αριθμό στηλών . Αν ο πίνακας $\begin{bmatrix} T_3(s) \\ T_4(s) \end{bmatrix}$ μπορεί να αναχθεί στον άνω τριγωνικό $\begin{bmatrix} T_{GR}(s) \\ \bigcirc \end{bmatrix}$, τότε ο $T_{GR}(s)$ είναι ο μέγιστος κοινός δεξιός διαιρέτης των $T_3(s)$, $T_4(s)$.

Ορισμός 1.7.5

Δύο πίνακες με τον ίδιο αριθμό γραμμών p : $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times r}$, $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$ και $r+t \geq p = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)}\left[T_1(s) \quad T_2(s)\right]$ ονομάζονται **αριστερά πρώτοι** (**left coprime**) αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $T_{GL}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ των $T_1(s), T_2(s)$ είναι unimodular .

Δύο πίνακες με τον ίδιο αριθμό στηλών q : $T_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times q}$, $T_4(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times q}$ και $r+t \geq q = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)}\begin{bmatrix} T_3(s) \\ T_4(s) \end{bmatrix}$ ονομάζονται **δεξιά πρώτοι** (**right coprime**) αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $T_{GR}(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times q}$ των $T_3(s)$, $T_4(s)$ είναι unimodular .

Πρόταση 1.7.6

Έστω $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times r}$, $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$, $m := r+t \geq p = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)}\left[T_1(s) \quad T_2(s)\right]$.

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες :

(i) Οι πίνακες $T_1(s)$, $T_2(s)$ είναι αριστερά πρώτοι .

(ii) Υπάρχει unimodular πίνακας $\overline{T}_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιος ώστε

$$T(s)\,\overline{T}_R(s) = \left[I_p \quad O\right] = S^{\mathbb{C}}_{T(s)} \quad , \text{ όπου } T(s) = [\, T_1(s) \quad T_2(s) \,] \,. \tag{1.24}$$

(iii) $$\text{rank}_{\mathbb{C}}\left[T_1(s_0) \quad T_2(s_0)\right] = p \quad , \quad \forall s_0 \in \mathbb{C} \,. \tag{1.25}$$

Έστω $T_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times q}$, $T_4(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times q}$, $n := r+t \geq q = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)}\begin{bmatrix} T_3(s) \\ T_4(s) \end{bmatrix}$.

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες :

(i) Οι πίνακες $T_3(s)$, $T_4(s)$ είναι δεξιά πρώτοι .

(ii) Υπάρχει unimodular πίνακας $\overline{T}_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ τέτοιος ώστε

$$\overline{T}_L(s)\, T'(s) = \begin{bmatrix} I_q \\ O \end{bmatrix} = S^{\mathbb{C}}_{T'(s)} \quad , \text{ όπου } T'(s) = \begin{bmatrix} T_3(s) \\ T_4(s) \end{bmatrix} \,. \tag{1.26}$$

(iii) $$\text{rank}_{\mathbb{C}}\begin{bmatrix} T_3(s_0) \\ T_4(s_0) \end{bmatrix} = q \quad , \quad \forall s_0 \in \mathbb{C} \,. \tag{1.27}$$

1.8 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times q}$ και $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$, $U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times q}$ unimodular πίνακες τέτοιοι ώστε $U_L(s)T(s)U_R(s) = S^{\mathbb{C}}_{T(s)}$, όπου

$$S^{\mathbb{C}}_{T(s)} := \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left[\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \ldots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}\right] & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} \quad , \; r = \operatorname{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s).$$

Η Smith - McMillan μορφή μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο δύο πινάκων κατά δύο τρόπους :

$$S^{\mathbb{C}}_{T(s)} = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}[\psi_1(s), \ldots, \psi_r(s)] & \bigcirc \\ \bigcirc & I_{p-r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \operatorname{diag}[\varepsilon_1(s), \ldots, \varepsilon_r(s)] & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Psi(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & I_{p-r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

$$S^{\mathbb{C}}_{T(s)} = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}[\varepsilon_1(s), \ldots, \varepsilon_r(s)] & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{diag}[\psi_1(s), \ldots, \psi_r(s)] & \bigcirc \\ \bigcirc & I_{q-r} \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} E(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & I_{q-r} \end{bmatrix}^{-1} \tag{1.29}$$

$E(s)$, $\Psi(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}$

Αν $U_L(s)^{-1} = T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$, $U_R(s)^{-1} = T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times q}$ τότε

$$T(s) = T_L(s) \begin{bmatrix} \Psi(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & I_{p-r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} T_R(s) =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \Psi(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & I_{p-r} \end{bmatrix} T_L(s)^{-1} \right\}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} E(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} T_R(s) \right\} = D_1(s)^{-1} N_1(s) \tag{1.30}$$

$$T(s) = T_L(s)\begin{bmatrix} E(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Psi(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & I_{q-r} \end{bmatrix}^{-1} T_R(s) =$$

$$= \left\{ T_L(s)\begin{bmatrix} E(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} \right\} \left\{ T_R(s)^{-1}\begin{bmatrix} \Psi(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & I_{q-r} \end{bmatrix} \right\}^{-1} = N_2(s)D_2(s)^{-1} \qquad (1.31)$$

<u>Πρόταση 1.8.1</u>

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times q}$, $r = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)}T(s)$. Υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $D_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$, $N_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$ και αριστερά πρώτοι ώστε $T(s) = D_1(s)^{-1}N_1(s)$ και $D_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times q}$, $N_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$ και δεξιά πρώτοι ώστε $T(s) = N_2(s)D_2(s)^{-1}$.

<u>Παρατήρηση 1.8.2</u>

Οι πίνακες $D_1(s)$, $N_1(s)$ είναι αριστερά πρώτοι γιατί , όπως φαίνεται από την (1.30) οι $T_L(s)$,$T_R(s)$ είναι unimodular ενώ τα πολυώνυμα $\varepsilon_i(s)$, $\psi_i(s)$, i =1,2,...,r είναι πρώτα μεταξύ τους . Άρα $\text{rank}_{\mathbb{C}}\left[D_1(s_0) \quad N_1(s_0)\right] = p$, $\forall\, s_0 \in \mathbb{C}$. Για τον ίδιο λόγο οι πίνακες $D_2(s)$, $N_2(s)$ είναι δεξιά πρώτοι (σχέση (1.31)) . Άρα $\text{rank}_{\mathbb{C}}\begin{bmatrix} D_2(s_0) \\ N_2(s_0) \end{bmatrix} = q$, $\forall\, s_0 \in \mathbb{C}$.

<u>Ορισμός 1.8.3</u>

Η αναπαράσταση $T(s) = D_1(s)^{-1}N_1(s)$ ονομάζεται **αριστερά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή (left coprime polynomial matrix fraction description (MFD)**) του T(s) και η αναπαράσταση $T(s) = N_2(s)D_2(s)^{-1}$ ονομάζεται **δεξιά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή** . Ο πίνακας $D_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ονομάζεται **αριστερός παρονομαστής** του T(s) και ο $D_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times q}$ **δεξιός παρονομαστής** .Ο πίνακας $N_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$ ονομάζεται **αριστερός αριθμητής** του T(s) και ο $N_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$ **δεξιός αριθμητής** .

Πόρισμα 1.8.4

Έστω $T(s) = D_1(s)^{-1}N_1(s)$ μία αριστερά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του $T(s)$. Για κάθε unimodular πίνακα $U_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ τέτοιο ώστε $\overline{D}_1(s) := U_1(s)D_1(s)$ και $\overline{N}_1(s) := U_1(s)N_1(s)$, η αναπαράσταση $T(s) = \overline{D}_1(s)^{-1}\overline{N}_1(s)$ είναι επίσης μία αριστερά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του $T(s)$. Αντίστοιχα αν $T(s) = N_2(s)D_2(s)^{-1}$, τότε για κάθε unimodular πίνακα $U_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times q}$, τέτοιο ώστε $\overline{D}_2(s) := D_2(s)U_2(s)$ και $\overline{N}_2(s) := N_2(s)U_2(s)$, η αναπαράσταση $T(s) = \overline{N}_2(s)\overline{D}_2(s)^{-1}$ είναι επίσης μία δεξιά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του $T(s)$.

Παράδειγμα 1.8.8

Έστω ο πίνακας $T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}$

Σχηματίζουμε τον $D_1(s)$ παίρνοντας το διαγώνιο πίνακα με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των γραμμών του $T(s)$. Έτσι έχουμε :

$$T(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & (s+3)(s+4) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s+2 & s+1 \\ s+4 & s+3 \end{bmatrix} = D_1(s)^{-1}N_1(s)$$

Οι $D_1(s)$ και $N_1(s)$ είναι αριστερά πρώτοι, αφού $\operatorname{rank}_{\mathbb{C}}\left[D_1(s_0) \quad N_1(s_0)\right] = 2$ για $s_0 = -1 = -2 = -3 = -4$.

Για να βρούμε μία δεξιά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του $T(s)$, σχηματίζουμε τον $D_2(s)$ παίρνοντας τον διαγώνιο πίνακα με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των στηλών του $T(s)$. Έτσι έχουμε :

$$T(s) = \begin{bmatrix} s+3 & s+4 \\ s+1 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)(s+3) & 0 \\ 0 & (s+2)(s+4) \end{bmatrix}^{-1} = N_2(s)D_2(s)^{-1}$$

Οι $D_2(s)$ και $N_2(s)$ είναι δεξιά πρώτοι , αφού $\operatorname{rank}_{\mathbb{C}}\begin{bmatrix} D_2(s_0) \\ N_2(s_0) \end{bmatrix} = 2$ για $s_0 = -1 = -2 = -3 = -4$.

Μία σημαντική ιδιότητα των κλασματικών πολυωνυμικών περιγραφών διατυπώνεται στην παρακάτω πρόταση .

<u>Πρόταση 1.8.9</u> [Vardulakis , 1991]

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times q}$ και $T(s) = D_1(s)^{-1}N_1(s) = N_2(s)D_2(s)^{-1}$, $D_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$, $N_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$, $D_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times q}$, $N_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$. Έστω $d_{1i}^{\,T}(s) \in \mathbb{R}[s]^{1\times p}$ και $n_{1i}^{\,T}(s) \in \mathbb{R}[s]^{1\times q}$, $i = 1 , 2 , \dots , p$ οι γραμμές των $D_1(s)$ και $N_1(s)$ αντίστοιχα , $d_{2j}(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times 1}$ και $n_{2j}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times 1}$, $j = 1 , 2 , \dots , q$ οι στήλες των $D_2(s)$ και $N_2(s)$ αντίστοιχα .Τότε

$$\deg d_{1i}^{\,T}(s) \geq \deg n_{1i}^{\,T}(s) \qquad i = 1 , 2 , \dots , p \tag{1.32}$$

$$\deg d_{2j}(s) \geq \deg n_{2j}(s) \qquad j = 1 , 2 , \dots , q \tag{1.33}$$

Αν ο $T(s)$ είναι αυστηρά proper , δηλαδή αν τα στοιχεία του $T(s)$ είναι $t_{ij}(s) = \dfrac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}$, ισχύει $\deg d_{ij}(s) > \deg n_{ij}(s)$ $\forall$ $i = 1 , 2 , \dots , p$, $j = 1 , 2 , \dots , q$ τότε οι ανισότητες στις (1.32) - (1.33) είναι αυστηρές .

<u>Παρατήρηση 1.8.10</u>

Το αντίστροφο του παραπάνω αποτελέσματος δεν ισχύει πάντα , δηλαδή αν για δύο πίνακες $D_1(s)$, $N_1(s)$ ικανοποιείται η (1.32) , αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι ο $T(s) = D_1(s)^{-1}N_1(s)$ είναι proper ρητός πίνακας . Επίσης , αν ικανοποιείται η (1.33) για δύο πίνακες $D_2(s)$, $N_2(s)$, τότε ο $T(s) = N_2(s)D_2(s)^{-1}$ δεν είναι απαραίτητα proper ρητός πίνακας . Το αντίστροφο ισχύει όταν ο $D_1(s)$ είναι row proper για την (1.32) και ο $D_2(s)$ είναι column proper για την (1.33) .

1.9 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο περιέχει κάποιες βασικές έννοιες για την καλύτερη κατανόηση της υπόλοιπης εργασίας . Μελετήθηκε περιληπτικά η αλγεβρική δομή ρητών πινάκων . Συγκεκριμένα δόθηκαν οι ορισμοί των biproper πινάκων, της πολυπλοκότητας γραμμών και στηλών , της πεπερασμένης και άπειρης Smith - McMillan μορφής , των πινάκων πρώτων μεταξύ τους και των κλασματικών πολυωνυμικών περιγραφών . Επίσης αναφέρθηκαν χρήσιμα θεωρήματα των οποίων οι αποδείξεις παραλήφθηκαν καθώς ξεφεύγουν από τον σκοπό της εργασίας .Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην κύρια βιβλιογραφία του κεφαλαίου : [Vardulakis , 2005] , [Vardulakis ,1991] , [Vardulakis et al ., 1982] , [Wolovich , 1974] για περισσότερα .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

Έστω ένα πολυμεταβλητό σύστημα της μορφής :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

όπου $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ το διάνυσμα **κατάστασης**

$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$ το διάνυσμα **εισόδου**

$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$ το διάνυσμα **εξόδου**

και $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Ορισμός 2.1.1

Το παραπάνω σύστημα ονομάζεται **σύστημα στον χώρο των καταστάσεων** (**state-space system**) .

Ορισμός 2.1.2

Έστω ένα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα S της μορφής (2.1). Η τετράδα πινάκων $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ ονομάζεται **περιγραφή** του S.

Ορισμός 2.1.3

Αν $\overline{A} := RAR^{-1}$, $\overline{B} := RB$, $\overline{C} := CR^{-1}$, $\overline{D} := D$ και $Rx(t) =: x(t)$ τότε έχουμε το σύστημα $\begin{array}{l} \dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}\overline{x}(t) + \overline{B}u(t) \\ y(t) = \overline{C}\overline{x}(t) + \overline{D}u(t) \end{array}$ και οι περιγραφές (A,B,C,D), $(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D})$ του S ονομάζονται **όμοιες** (**similar**).

Η ομοιότητα περιγραφών αποτελεί σχέση ισοδυναμίας πάνω στο σύνολο $\boldsymbol{A} = \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{p\times n} \times \mathbb{R}^{p\times m}$.

Ορισμός 2.1.4

Ο πίνακας $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$ ονομάζεται **πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς** (**transfer function matrix**) του συστήματος.

Η συνάρτηση μεταφοράς μιας περιγραφής του χώρου των καταστάσεων αποτελεί αναλλοίωτη κάθε κλάσης ισοδυναμίας μιας ομοιότητας, δηλαδή αν οι περιγραφές (A,B,C,D), $(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D})$ είναι όμοιες τότε έχουν τις ίδιες συναρτήσεις μεταφοράς.

2.2 ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ

Ορισμός 2.2.1

Το σύστημα $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ (ή το ζεύγος $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$) ονομάζεται **ελέγξιμο** (**controllable**) αν για κάθε αρχική συνθήκη $0 \neq x(0) \in \mathbb{R}^n$ και χρόνο $t_1 > 0$ υπάρχει είσοδος $u(t)$, $t \in [0, t_1]$ τέτοια ώστε η κατάσταση $x(t_1) = 0$.

Θεώρημα 2.2.2

Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες :

(i) Το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο .

(ii) $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \left[\lambda I_n - A \quad B\right] = n \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

(iii) Το ζεύγος (A,B) δεν είναι όμοιο με ζεύγος της μορφής

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ \bigcirc & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ \bigcirc \end{bmatrix} \right) \quad \text{(Kalman decomposition)}$$

(iv) Για τον πίνακα ελεγξιμότητας $\boldsymbol{C} = \left[B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B\right]$ ισχύει $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \boldsymbol{C} = n$.

Ένας άλλος χαρακτηρισμός της ελεγξιμότητας δίνεται από τον Rosenbrock . Το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $\left[sI_n - A, B\right] \in \mathbb{R}[s]^{n\times(n+m)}$ είναι ίσοι με 1. Αυτό σημαίνει ότι οι πολυωνυμικοί πίνακες sI_n-A και B είναι αριστερά πρώτοι . Γενικά , οι αναλλοίωτοι παράγοντες ενός πίνακα που είναι διάφοροι του 1 καλούνται **μη τετριμμένοι** αναλλοίωτοι παράγοντες . Έτσι , το (A,B) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $\left[sI_n - A, B\right] \in \mathbb{R}[s]^{n\times(n+m)}$ είναι τετριμμένοι .

[Rosenbrock , 1970] , [Zaballa , 1987] , [Zaballa , 2001] , [Baragaña - Zaballa , 2002] , [Roca-Zaballa , 2004] .

Έστω S,(2.1) ένα γραμμικό , χρονικά αναλλοίωτο πολυμεταβλητό σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$ που έχει πλήρη τάξη στο $\mathbb{R}(s)$. Η T(s) μπορεί πάντα να παραγοντοποιηθεί (όχι κατά μοναδικό τρόπο) ως εξής :

$$T(s) = N(s)D(s)^{-1} \tag{2.2}$$

όπου N(s) , D(s) δεξιά πρώτοι πολυωνυμικοί πίνακες με πλήρη τάξη στο $\mathbb{R}(s)$ και οι βαθμοί των στηλών του N(s) είναι μικρότεροι από τους αντίστοιχους βαθμούς στηλών του D(s) .Ο πίνακας D(s) με αυτή την ιδιότητα θα ονομάζεται **αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα (polynomial matrix representation)**

του συστήματος . Για τον D(s) ισχύει ότι έχει τους ίδιους μη τετριμμένους αναλλοίωτους παράγοντες με τον πίνακα $sI_n - A$ όταν το ζεύγος (A , B) είναι ελέγξιμο [Kailath , 1980] , [Zaballa , 2001] . Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο μπορεί πάντα να βρεθεί ένας unimodular πίνακας $U_R(s)$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $\overline{D}(s) = D(s)U_R(s)$ να είναι column proper . Με εναλλαγές στηλών στον $\overline{D}(s)$, είναι προφανές ότι ανάμεσα σε αυτές τις παραγοντοποιήσεις του T(s) είναι και η $T(s) = \widetilde{N}(s)\widetilde{D}(s)^{-1}$, που ικανοποιεί επιπλέον την συνθήκη ότι οι βαθμοί των στηλών του πίνακα $\widetilde{D}(s)$ είναι σε αύξουσα διάταξη , δηλαδή αν $k_i = \deg\widetilde{D}_i(s)$, $i = 1, 2, ..., m$ ($\widetilde{D}_i(s)$ οι στήλες του $\widetilde{D}(s)$), τότε $k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_m$.

<u>Ορισμός 2.2.3</u> [Vardulakis , 1980] , [Vardulakis , 2005]
Οι ακέραιοι $k_1 , k_2 , ... ,k_m$ ονομάζονται **δείκτες ελεγξιμότητας** (**controllability indices**) του συστήματος .

Ένας άλλος ορισμός δίνεται από τον Wolovich :

<u>Ορισμός 2.2.4</u> [Wolovich , 1974]
Έστω $\overline{\mathbf{C}}$ ο $n \times \overline{n}$ πίνακας που παράγεται επιλέγοντας από τα αριστερά προς τα δεξιά $\overline{n}$ γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα ελεγξιμότητας $\boldsymbol{C}$. Δημιουργούμε τον πίνακα L διάστασης $n \times \overline{n}$ αλλάζοντας τη διάταξη των $\overline{n}$ στηλών του $\overline{\mathbf{C}}$ έτσι ώστε να έχει την εξής μορφή :

$$L = \{ b_1 , Ab_1 , \ldots , A^{d_1 - 1} b_1 , b_2 , Ab_2 , \ldots , A^{d_2 - 1} b_2 , \ldots , b_m , Ab_m , \ldots , A^{d_m - 1} b_m \} \quad (2.3)$$

Αν τα d_i , $i = 1, 2, ..., m$ τα κατατάξουμε σε αύξουσα σειρά και τα συμβολίσουμε με $k_1 , k_2 , ... ,k_m$ έχουμε τους **δείκτες ελεγξιμότητας** του ζεύγους (A,B) όπου $k_1 + k_2 + ... + k_m = \operatorname{rank} \overline{C}$. Είναι προφανές ότι αν το σύστημα είναι ελέγξιμο τότε ο $\overline{C}$ έχει πλήρη τάξη κι έτσι $\overline{n} = n$.

<u>Παράδειγμα 2.2.5</u>

Έστω το σύστημα $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

όπου $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ο πίνακας ελεγξιμότητας $\boldsymbol{C}$ είναι ο

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -10 & -10 & -30 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 13 & 13 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -3 & -9 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ b_1 & b_2 & Ab_1 & Ab_2 & A^2b_1 & A^2b_2 & A^3b_1 & A^3b_2 \end{array} \end{array}$$

$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} C = 4$ άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο .

Επιλέγουμε την πρώτη , δεύτερη , τέταρτη και έκτη στήλη του $\boldsymbol{C}$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητες και δημιουργούμε τον πίνακα $\overline{C}$:

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & Ab_2 & A^2b_2 \end{bmatrix}$$

Άρα $d_1 = 1$, $d_2 = 3$. Οι δείκτες είναι ήδη σε αύξουσα διάταξη κι έτσι $L = \overline{C}$. Επομένως οι δείκτες ελεγξιμότητας του συστήματος είναι οι $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 3$.

Έστω (A_1, B_1) , $(A_2, B_2) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$. Αν είναι όμοια τότε έχουν τους ίδιους δείκτες ελεγξιμότητας .Δηλαδή οι δείκτες ελεγξιμότητας είναι αναλλοίωτες της κλάσης ισοδυναμίας ομοιότητας πινάκων . [Zaballa , 1987]

Έστω το σύστημα $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. Αν δεν είναι ελέγξιμο, τότε από το θεώρημα 2.2.2 (iii) είναι όμοιο με ζεύγος της μορφής $\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ \bigcirc & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ \bigcirc \end{bmatrix}\right)$ και το ζεύγος (A_1, B_1) είναι ελέγξιμο. Οι δείκτες ελεγξιμότητας του (A, B) είναι οι δείκτες ελεγξιμότητας του (A_1, B_1), αφού $C(RAR^{-1}, RB) = \begin{bmatrix} C(A_1, B_1) \\ \bigcirc \end{bmatrix}$ [Amparan et al. , 2004 (I)] , [Zaballa , 1987] .

Το επόμενο θεώρημα είναι το περίφημο **θεώρημα του Rosenbrock** .

<u>Θεώρημα 2.2.6</u> [Rosenbrock , 1970] , [Zaballa , 1989]

Έστω $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ ένα ελέγξιμο ζεύγος . Υπάρχει πίνακας $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας sI_n-(A+BF) να έχει τα πολυώνυμα $\psi'_1(s), \psi'_2(s), ..., \psi'_n(s)$ ως αναλλοίωτους παράγοντες αν και μόνο αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :

$$\psi'_{m+1}(s) = ... = \psi'_n(s) = 1 \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{j} \deg \psi'_{m-i+1}(s) \le \sum_{i=1}^{j} k_i \quad , \quad j = 1, ..., m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} \deg \psi'_i(s) = \sum_{i=1}^{m} k_i \end{gathered} \tag{2.5}$$

όπου $\psi'_i(s) \mid \psi'_{i-1}(s)$, $i = 2, ..., n$ και $0 \le k_1 \le ... \le k_m$ είναι οι δείκτες ελεγξιμότητας του (A,B) .

<u>Παράδειγμα 2.2.7</u>

Έστω $(A,B) \in \mathbb{R}^{5\times 5} \times \mathbb{R}^{5\times 3}$ ελέγξιμο ζεύγος με δείκτες ελεγξιμότητας τους $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 2$, $k_1 \le k_2 \le k_3$. Υπάρχει πίνακας $F \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας sI_n-(A+BF) να έχει τα πολυώνυμα $\psi'_1(s), ..., \psi'_5(s)$ ως αναλλοίωτους παράγοντες αν και μόνο αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :

$$\psi'_5(s) = \psi'_4(s) = 1$$
$$\deg \psi'_3(s) \le k_1 = 1$$
$$\deg \psi'_3(s) + \deg \psi'_2(s) \le k_1 + k_2 = 3$$
$$\deg \psi'_1(s) + \deg \psi'_2(s) + \deg \psi'_3(s) = k_1 + k_2 + k_3 = 5$$
$$0 \le \deg \psi'_3(s) \le \deg \psi'_2(s) \le \deg \psi'_1(s)$$

Άρα ο πίνακας sI_n-(A+BF) θα έχει αναλλοίωτους παράγοντες $\psi'_5(s) = \psi'_4(s) = 1$, ενώ οι βαθμοί των $\psi'_3(s), \psi'_2(s), \psi'_1(s)$ μπορούν να πάρουν τις εξής τιμές :

$\deg \psi'_3(s)$	0	0	0	1	1
$\deg \psi'_2(s)$	0	1	2	1	2
$\deg \psi'_1(s)$	5	4	3	3	2

Στη συνέχεια δίνουμε δύο προτάσεις με σκοπό να ορίσουμε τους τοπικούς δείκτες ελεγξιμότητας .

<u>Πρόταση 2.2.8</u> [Amparan et al. , 2006]

Έστω $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ ελέγξιμο ζεύγος τέτοιο ώστε $\det(sI_n - A) = \pi(s)^d \beta(s)$, όπου d ακέραιος , π(s) κανονικό ανάγωγο πολυώνυμο , ΜΚΔ (π(s),β(s)) = 1 , $\deg \pi(s)^d = n_1$ και $\deg \beta(s) = n_2$. Τότε υπάρχουν ελέγξιμα ζεύγη $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{R}^{n_1\times m}$, $(A_2, B_2) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2} \times \mathbb{R}^{n_2\times m}$ έτσι ώστε :

(i) το ζεύγος (A,B) είναι όμοιο με το ζεύγος $\left(\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$

(ii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $sI_{n_1} - A_1$ είναι δυνάμεις του π(s) .

(iii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $sI_{n_2} - A_2$ είναι πρώτοι προς το πολυώνυμο π(s) .

<u>Πρόταση 2.2.9</u> [Amparan et al. , 2006]

Έστω $\pi(s) \in \mathbb{R}[s]$ κανονικό ανάγωγο πολυώνυμο , $(A_i, B_i),(A_i', B_i') \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \times \mathbb{R}^{n_i \times m}$ ελέγξιμα ζεύγη $i = 1,2$ έτσι ώστε :

(i) το ζεύγος $\left(\begin{bmatrix} A_1 & \bigcirc \\ \bigcirc & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$ είναι όμοιο με το ζεύγος $\left(\begin{bmatrix} A_1' & \bigcirc \\ \bigcirc & A_2' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1' \\ B_2' \end{bmatrix}\right)$.

(ii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $sI_{n_1} - A_1$ και του $sI_{n_1} - A_1'$ είναι δυνάμεις του $\pi(s)$.

(iii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $sI_{n_2} - A_2$ και του $sI_{n_1} - A_2'$ είναι πρώτοι προς το πολυώνυμο $\pi(s)$.

Τότε τα ζεύγη (A_i, B_i) είναι όμοια με τα ζεύγη (A_i', B_i') , $i = 1,2$.

<u>Ορισμός 2.2.10</u> [Amparan et al. , 2006]

Έστω $(A,B) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ ελέγξιμο ζεύγος τέτοιο ώστε $\det(sI_n - A) = \pi(s)^d \beta(s)$, όπου $\pi(s)$ κανονικό ανάγωγο πολυώνυμο και $\text{ΜΚΔ}(\pi(s),\beta(s)) = 1, \deg \pi(s)^d = n_1$ και $\deg \beta(s) = n_2$. Έστω $\kappa_1, ..., \kappa_m$ μη αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\kappa_1 \le ... \le \kappa_m$. Οι αριθμοί αυτοί καλούνται **τοπικοί δείκτες ελεγξιμότητας** (**local controllability indices**) του (A,B) **ως προς το πολυώνυμο π(s)** αν :

(i) το ζεύγος (A,B) είναι όμοιο με το ζεύγος $\left(\begin{bmatrix} A_1 & \bigcirc \\ \bigcirc & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$, όπου $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1} \times \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $(A_2, B_2) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2} \times \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ ελέγξιμα ζεύγη

(ii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $sI_{n_1} - A_1$ είναι δυνάμεις του $\pi(s)$.

(iii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $sI_{n_2} - A_2$ είναι πρώτοι προς το πολυώνυμο $\pi(s)$.

(iv) οι αριθμοί $\kappa_1, ..., \kappa_m$ είναι οι δείκτες ελεγξιμότητας του ζεύγους (A_1,B_1) .

2.3 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

Δυϊκή προς την έννοια της ελεγξιμότητας είναι η έννοια της παρατηρησιμότητας .

Ορισμός 2.3.1

Το σύστημα $\begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{array}$ ή το ζεύγος $(A, C) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{p\times n}$ ονομάζεται **παρατηρήσιμο** (**observable**) αν οι τιμές $\{y(t) : t \in [0, t_1]\}$ της εξόδου $y(t)$ σε ένα αυθαίρετο χρονικό διάστημα $0 \le t \le t_1$ προσδιορίζουν κατά μοναδικό τρόπο την αρχική κατάσταση $x(0)$ του συστήματος .

Το θεώρημα 2.2.2 χαρακτηρίζει την ελεγξιμότητα . Αντίστοιχο θεώρημα για την παρατηρησιμότητα είναι το επόμενο .

Θεώρημα 2.3.2

Οι προτάσεις που ακολουθούν είναι ισοδύναμες :

(i) Το ζεύγος (A,C) είναι παρατηρήσιμο .

(ii) $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

(iii) Το ζεύγος (A, C) δεν είναι όμοιο με ζεύγος της μορφής

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & O \end{bmatrix} \right)$$

(iv) Για τον πίνακα παρατηρησιμότητας $\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ ισχύει $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \boldsymbol{O} = n$.

Έστω S, (2.1) ένα γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο πολυμεταβλητό σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$ που έχει πλήρη τάξη στο $\mathbb{R}(s)$. Η T(s) μπορεί πάντα να παραγοντοποιηθεί (όχι κατά μοναδικό τρόπο) ως εξής :

$$T(s) = D(s)^{-1}N(s) \tag{2.8}$$

όπου N(s),D(s) αριστερά πρώτοι πολυωνυμικοί πίνακες με πλήρη τάξη στο $\mathbb{R}(s)$ και οι βαθμοί των στηλών του N(s) είναι μικρότεροι από τους αντίστοιχους βαθμούς στηλών του D(s).Δηλαδή ο T(s) έχει μία αριστερά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή. Μπορεί πάντα να βρεθεί ένας unimodular πίνακας $U_L(s)$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $\overline{D}(s) = U_L(s)D(s)$ να είναι row proper. Με εναλλαγές γραμμών στον $\overline{D}(s)$, μπορούμε να βρούμε μία παραγοντοποίηση $T(s) = \widetilde{D}(s)^{-1}\widetilde{N}(s)$, που ικανοποιεί επιπλέον την συνθήκη ότι οι βαθμοί των γραμμών του πίνακα $\widetilde{D}(s)$ είναι σε φθίνουσα διάταξη ,δηλαδή αν $l_j = \deg\widetilde{D}_j(s)$, $j=1,2,...,p$ ($\widetilde{D}_j(s)$ οι γραμμές του $\widetilde{D}(s)$), τότε $l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_p$.

<u>Ορισμός 2.3.3</u> [Vardulakis , 2005]

Οι βαθμοί l_i, i = 1 , 2 , ... , p των γραμμών του $\widetilde{D}(s)$ που είναι ο παρονομαστής μιας αριστερά πρώτης κλασματικής πολυωνυμικής περιγραφής της συνάρτησης μεταφοράς $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$ ενός συστήματος ονομάζονται **δείκτες παρατηρησιμότητας** (**observability indices**) του συστήματος .

<u>Παρατήρηση 2.3.4</u> [Roca - Zaballa , 2004]

Κάνοντας χρήση της δυϊκότητας με την ελεγξιμότητα μπορούμε να πούμε ότι το ζεύγος (A,C) είναι παρατηρήσιμο αν το ζεύγος (A^T, C^T) είναι ελέγξιμο και οι δείκτες παρατηρησιμότητας του (A,C) είναι οι δείκτες ελεγξιμότητας του (A^T,C^T) .

Έστω δύο ζεύγη (A_1,C_1) , $(A_2,C_2) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{p\times n}$. Αν είναι όμοια τότε έχουν τους ίδιους δείκτες παρατηρησιμότητας . Δηλαδή οι δείκτες παρατηρησιμότητας είναι αναλλοίωτες της κλάσης ισοδυναμίας ομοιότητας πινάκων .

Από το θεώρημα 2.3.2 (iii) αν το ζεύγος $(A,C) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{p\times n}$ δεν είναι παρατηρήσιμο, τότε είναι όμοιο με ζεύγος της μορφής $\left(\begin{bmatrix} A_1 & \bigcirc \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & \bigcirc \end{bmatrix}\right)$ και το ζεύγος (A_1,C_1) είναι παρατηρήσιμο. Οι δείκτες παρατηρησιμότητας του (A,C) είναι οι δείκτες παρατηρησιμότητας του (A_1,C_1), αφού $O\left(RAR^{-1}, CR^{-1}\right) = \left[O(A_1, C_1) \quad \bigcirc\right]$.

2.4 FEEDBACK ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ - OUTPUT - INJECTION ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

Έστω ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο πολυμεταβλητό σύστημα στον χώρο των καταστάσεων : $\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

Αν αντικαταστήσουμε την είσοδο $u(t)$ με την $u(t) = Fx(t) + r(t)$ παίρνουμε ένα νέο σύστημα όπου ο πίνακας A έχει αντικατασταθεί με τον πίνακα $A+BF$.

Ορισμός 2.4.1 [Vardulakis , 2005] , [Gohberg et al. , 1980]
Παραπάνω ορίστηκε ένας νόμος ελέγχου ο οποίος αποτελεί **ανάδραση του διανύσματος κατάστασης** (**state feedback control law**) μέσω σταθερού πίνακα $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Ορισμός 2.4.2 [Gohberg et al. , 1980]
Τα συστήματα $\Sigma = (A,B,C)$, $\overline{\Sigma} = \left(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\right)$ ονομάζονται **feedback ισοδύναμα** (**feedback equivalent**) αν υπάρχουν non - singular πίνακες $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε

$$\left(\overline{A},\overline{B},\overline{C}\right) = \left(T^{-1}(A+BF)T, T^{-1}BQ, CT\right) \tag{2.9}$$

Επίσης , λέμε ότι το ζεύγος (A,B) είναι feedback ισοδύναμο με το ζεύγος $\left(\overline{A}, \overline{B}\right)$ αν

$$\left(\overline{A},\overline{B}\right) = \left(T^{-1}(A+BF)T, T^{-1}BQ\right) \tag{2.10}$$

Έναν παρόμοιο ορισμό έδωσε ο Brunovsky .

Ορισμός 2.4.3 [Brunovsky , 1970] , [Baragaña - Zaballa , 1997]

Τα ζεύγη $(A,B),(\overline{A},\overline{B}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ καλούνται **feedback ισοδύναμα** αν υπάρχουν non-singular πίνακες $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τέτοιοι ώστε :

$$(\overline{A},\overline{B}) = (T^{-1}AT + T^{-1}BR, T^{-1}BQ) \tag{2.11}$$

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $R = FT$ οι δύο παραπάνω ορισμοί συμπίπτουν .

Η feedback ισοδυναμία είναι σχέση ισοδυναμίας .Οι δείκτες ελεγξιμότητας του ζεύγους (A,B) αποτελούν ένα πλήρες σύνολο αναλλοιώτων για την feedback ισοδυναμία .
[Gohberg et al. , 1980] , [Baragaña -Zaballa , 2002] , [Amparan et al. , 2004 (I)]

Δυϊκή προς την έννοια της feedback ισοδυναμίας είναι η έννοια της output - injection ισοδυναμίας .

Ορισμός 2.4.2 [Gohberg et al. , 1980]

Τα συστήματα $\Sigma = (A,B,C)$, $\overline{\Sigma} = (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ ονομάζονται **output - injection ισοδύναμα** (**output - injection equivalent**) αν υπάρχουν non - singular πίνακες $\overline{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \overline{F} \in \mathbb{R}^{n\times p}, \overline{Q} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ τέτοιοι ώστε

$$(\overline{A},\overline{B},\overline{C}) = (\overline{T}(A + \overline{F}C)\overline{T}^{-1}, \overline{T}B, \overline{Q}C\overline{T}^{-1}) \tag{2.12}$$

Επίσης λέμε ότι το ζεύγος (A,C) είναι output - injection ισοδύναμο με το ζεύγος $(\overline{A},\overline{C})$ αν

$$(\overline{A},\overline{C}) = (\overline{T}(A + \overline{F}C)\overline{T}^{-1}, \overline{Q}C\overline{T}^{-1}) \tag{2.13}$$

Η output - injection ισοδυναμία είναι σχέση ισοδυναμίας . Οι δείκτες παρατηρησιμότητας του ζεύγους (A,C) αποτελούν ένα πλήρες σύνολο αναλλοιώτων για την output - injection ισοδυναμία . [Gohberg et al. , 1980]

2.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός του δεύτερου κεφάλαιου ήταν να περιγράψει συνοπτικά βασικές έννοιες της μαθηματικής θεωρίας πολυμεταβλητών συστημάτων (συνάρτηση μεταφοράς , ελεγξιμότητα , παρατηρησιμότητα) χρησιμοποιώντας και το αλγεβρικό υπόβαθρο που δόθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο . Επιπλέον ορίσαμε τους δείκτες ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας και τις feedback και output - injection ισοδυναμίες , έννοιες που θα μας χρειαστούν σε επόμενο κεφάλαιο . Τέλος , σημειώνουμε ότι το μεγαλύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου υπάρχει στο [Vardulakis , 2005]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

3.1 WIENER - HOPF ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Οι Wiener-Hopf παραγοντοποιήσεις και οι αντίστοιχοι δείκτες παραγοντοποίησης παίζουν σημαντικό ρόλο στην αλγεβρική θεωρία συστημάτων. Επίσης χρησιμοποιούνται στην μελέτη των Wiener - Hopf εξισώσεων, στην θεωρία των τελεστών Toeplitz, στην θεωρία συστημάτων των ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων (singular integral equations),στις μερικές διαφορικές εξισώσεις (partial differential equations) και στην ταξινόμηση των ολομορφικών (holomorphic) διανυσμάτων πάνω στην σφαίρα του Riemann. Έχουν δοθεί διάφοροι ορισμοί για την Wiener-Hopf παραγοντοποίηση, εμείς θα βασιστούμε στον ορισμό των Fuhrmann και Willems.

Ορισμός 3.1.1 [Fuhrmann -Willems ,1979] , [Marcaida - Zaballa ,2004] ,[Amparan et al.,2004 (II)]

Δύο πίνακες $T_1(s), T_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times n}$ ονομάζονται **αριστερά Wiener - Hopf ισοδύναμοι** (**left Wiener -Hopf equivalent**) αν υπάρχουν πίνακες $B(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m\times m}$ biproper και $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ unimodular τέτοιοι ώστε

$$T_2(s) = B(s)T_1(s)U(s) \tag{3.1}$$

Αν

$$T_2(s) = U(s)T_1(s)B(s) \tag{3.2}$$

όπου $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular και $B(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{n\times n}$ biproper τότε οι $T_1(s), T_2(s)$ ονομάζονται **δεξιά Wiener -Hopf ισοδύναμοι** (**right Wiener- Hopf equivalent**) .

Η σχέση (3.1) είναι σχέση ισοδυναμίας .

<u>Ανακλαστική</u> : $T(s) = I_m T(s) I_n$

<u>Συμμετρική</u> : $T_2(s) = B(s)T_1(s)U(s) \Rightarrow T_1(s) = B(s)^{-1}T_2(s)U(s)^{-1} = B(s)'T_2(s)U(s)'$

<u>Μεταβατική</u> : $T_2(s) = B_1(s)T_1(s)U_1(s) \quad \& \quad T_3(s) = B_2(s)T_2(s)U_2(s) \Rightarrow$
$T_3(s) = \left(B_2(s)B_1(s)\right)T_1(s)\left(U_1(s)U_2(s)\right) = B(s)T_1(s)U(s)$

Η σχέση (3.2) είναι σχέση ισοδυναμίας .

<u>Ανακλαστική</u> : $T(s) = I_m T(s) I_n$

<u>Συμμετρική</u> : $T_2(s) = U(s)T_1(s)B(s) \Rightarrow T_1(s) = U(s)^{-1}T_2(s)B(s)^{-1} = U(s)'T_2(s)B(s)'$

<u>Μεταβατική</u> : $T_2(s) = U_1(s)T_1(s)B_1(s) \quad \& \quad T_3(s) = U_2(s)T_2(s)B_2(s) \Rightarrow$
$T_3(s) = \left(U_2(s)U_1(s)\right)T_1(s)\left(B_1(s)B_2(s)\right) = U(s)T_1(s)B(s)$

Δείξαμε ότι ισχύει

(i) $\left(T(s), T(s)\right) \in R_{\text{W-H}} \quad \forall \; T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times n}$

(ii) Αν $\left(T_1(s), T_2(s)\right) \in R_{\text{W-H}} \Rightarrow \left(T_2(s), T_1(s)\right) \in R_{\text{W-H}}$

(iii) Αν $\left(T_1(s), T_2(s)\right) \in R_{\text{W-H}} \;\&\; \left(T_2(s), T_3(s)\right) \in R_{\text{W-H}} \Rightarrow \left(T_1(s), T_3(s)\right) \in R_{\text{W-H}}$

<u>Ορισμός 3.1.2</u> [Fuhrmann -Willems ,1979] , [Marcaida - Zaballa ,2004] , [Amparan et al.,2004 (II)] , [Zaballa , 2001]

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times n}$. Μία **αριστερή Wiener -Hopf παραγοντοποίηση** του T(s) ορίζεται να είναι η αναπαράστασή του ως :

$$T(s) = B(s)\Delta_l(s)U(s) \tag{3.3}$$

όπου $B(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m\times m}$ biproper , $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ unimodular και

$\Delta_l(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left[s^{k_1}, s^{k_2}, \ldots, s^{k_r}\right] & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}$, $k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_r$, δηλαδή ο πίνακας T(s) είναι αριστερά Wiener - Hopf ισοδύναμος με τον διαγώνιο πίνακα $\Delta_l(s)$.

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times n}$. Μία **δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση** του πίνακα T(s) ορίζεται να είναι η αναπαράστασή του ως :

$$T(s) = U(s)\Delta_l(s)B(s) \tag{3.4}$$

όπου $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular , $B(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{n\times n}$ biproper και

$\Delta_r(s) = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}\left[s^{l_1}, s^{l_2}, \ldots, s^{l_r}\right] & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}$, $l_1 \le l_2 \le \ldots \le l_r$, δηλαδή ο πίνακας T(s) είναι δεξιά Wiener - Hopf ισοδύναμος με τον διαγώνιο πίνακα .

Οι ακέραιοι $k_1,\ldots,k_r$, $l_1,\ldots,l_r$ ορίζονται μονοσήμαντα από τον πίνακα T(s) .

Οι στοιχειώδεις πράξεις που πρέπει να γίνουν ώστε να πάρουμε μία Wiener - Hopf παραγοντοποίηση είναι γνωστές από το πρώτο κεφάλαιο (§ 1.4) .

<u>Πόρισμα 3.1.3</u>

Οι διαγώνιοι πίνακες $\Delta_l(s)$, $\Delta_r(s)$ αποτελούν κανονικές μορφές της αριστερής και της δεξιάς Wiener - Hopf ισοδυναμίας αντίστοιχα .

<u>Απόδειξη :</u>

Η απόδειξη , τόσο για την αριστερή Wiener - Hopf ισοδυναμία όσο και για την δεξιά Wiener - Hopf ισοδυναμία είναι ίδια . Για το λόγο αυτό , θα αποδείξουμε ότι ο πίνακας Δ είναι κανονική μορφή της Wiener - Hopf ισοδυναμίας .

Προφανώς ισχύει $\left(T(s), \Delta(s)\right) \in R_{\text{W-H}}$, $\forall\, T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times n}$.

Έστω $\left(T_1(s), T_2(s)\right) \in R_{\text{W-H}}$. Αφού $\left(T_1(s), \Delta_1(s)\right) \in R_{\text{W-H}}$ και $\left(T_2(s), \Delta_2(s)\right) \in R_{\text{W-H}}$, έχουμε ότι $\left(T_1(s), \Delta_2(s)\right) \in R_{\text{W-H}}$. Άρα , ο $T_1(s)$ είναι Wiener - Hopf ισοδύναμος με τον $\Delta_1(s)$ και τον $\Delta_2(s)$, οι οποίοι είναι διαγώνιοι . Όμως , όπως είδαμε παραπάνω τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο είναι δυνάμεις του s που ορίζονται μονοσήμαντα από τον πίνακα $T_1(s)$. Άρα , οι πίνακες $\Delta_1(s)$, $\Delta_2(s)$ αναγκαστικά ταυτίζονται . Δηλαδή , αν $\left(T_1(s), T_2(s)\right) \in R_{\text{W-H}} \Rightarrow \Delta_1(s) = \Delta_2(s)$.

▲

Ορισμός 3.1.4 [Marcaida - Zaballa , 2004] , [Amparan et al. , 2004 (II)]
Οι ακέραιοι $k_1, \dots, k_r$ ονομάζονται **αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης** (**left Wiener - Hopf factorization indices**) .
Όμοια οι ακέραιοι $l_1, \dots, l_r$ ονομάζονται **δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης** (**right Wiener - Hopf factorization indices**) .

Ορισμός 3.1.5 [Fuhrmann - Willems ,1979]
Οι ακέραιοι $k_1, \dots, k_r$, $l_1, \dots, l_r$ ονομάζονται **δείκτες παραγοντοποίησης στο άπειρο** (**factorization indices at infinity**) . Οι αναπαραστάσεις (3.3) , (3.4) ονομάζονται **παραγοντοποιήσεις στο άπειρο** (**factorizations at infinity**) .

Είναι φανερό ότι δύο πίνακες $T_1(s), T_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times n}$ είναι Wiener - Hopf ισοδύναμοι αν και μόνο αν έχουν τους ίδιους Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης . Δηλαδή οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης αποτελούν αναλλοίωτες της σχέσης ισοδυναμίας (3.1)-(3.2) .

Θεώρημα 3.1.6 [Fuhrmann - Willems ,1979] , [Fuhrmann , 2006]
Έστω $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$. Τότε υπάρχει unimodular πίνακας $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ τέτοιος ώστε

$$P(s)U(s) = \begin{bmatrix} P_1(s) & \bigcirc \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

όπου $P_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times r}$ column proper με βαθμούς στηλών $k_1, \dots, k_r$ σε αύξουσα διάταξη . Οι βαθμοί των στηλών είναι μοναδικοί (ενώ ο U(s) όχι) και ονομάζονται **δείκτες στηλών** (**column indices**) του P(s) .
Επίσης υπάρχει unimodular πίνακας $V(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιος ώστε

$$V(s)P(s) = \begin{bmatrix} P_2(s) \\ \bigcirc \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

όπου $P_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times n}$ row proper με βαθμούς γραμμών $l_1, \dots, l_r$ σε αύξουσα διάταξη , που είναι οι **δείκτες γραμμών** (**row indices**) του P(s) .

Το θεώρημα που ακολουθεί αποδεικνύει την ύπαρξη Wiener - Hopf παραγοντοποιήσεων .

<u>Θεώρημα 3.1.7</u> [Fuhrmann - Willems ,1979] , [Fuhrmann , 2006]

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times n}$, δηλαδή ο $T(s)$ είναι ρητός $m\times n$ πίνακας . Τότε υπάρχουν η αριστερή και η δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποιήσεις του $T(s)$.

<u>Απόδειξη :</u>

Θεωρούμε ότι $T(s)\in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$. Από το προηγούμενο θεώρημα , υπάρχει unimodular πίνακας $V(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $T(s)V(s)=\begin{bmatrix} T_1(s) & \bigcirc \end{bmatrix}$, όπου $T_1(s)$ $m\times r$ column proper με δείκτες στηλών $k_1 \le k_2 \le ... \le k_r$. Το γεγονός ότι ο $T_1(s)$ είναι column proper συνεπάγεται ότι ο μεγιστοβάθμιος ως προς τις στήλες πίνακας συντελεστής του $T_1(s)$ $\left[T_1(s)\right]_c^h$ είναι αριστερά αντιστρέψιμος , με E_0 συμβολίζουμε τον αριστερό αντίστροφο του $\left[T_1(s)\right]_c^h$.

Έστω E ένας αντιστρέψιμος $m\times m$ πίνακας του οποίου οι r πρώτες γραμμές συμπίπτουν με αυτές του E_0 . Τότε ο $E\begin{bmatrix} T_1(s) & \bigcirc \end{bmatrix}$ έχει τους s^{k_i}, $i=1,2,...,r$ όρους με συντελεστή μονάδα στην κύρια διαγώνιο , ενώ όλοι οι άλλοι όροι στην i στήλη έχουν μικρότερο βαθμό . Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$E\begin{bmatrix} T_1(s) & \bigcirc \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Omega_{11}(s) & \bigcirc \\ \Omega_{21}(s) & \bigcirc \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_l(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & I_{n-r} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Omega_{11}(s) & \bigcirc \\ \Omega_{21}(s) & I_{m-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_l(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}$$

όπου $\Omega_{11}(s)=I_r+\Omega'_{11}(s)$, $\Omega'_{11}(s)\in \mathbb{R}_{pr}(s)^{r\times r}$ biproper πίνακας , $\Omega_{21}(s)\in \mathbb{R}_{pr}(s)^{(m-r)\times r}$, $\Delta_l(s)=\mathrm{diag}\left[s^{k_1},s^{k_2},...,s^{k_r}\right]\in \mathbb{R}[s]^{r\times r}$. Αφού ο $\Omega_{11}(s)$ είναι biproper έχει αντίστροφο έστω τον $\Gamma_{11}(s)$. Ορίζουμε τον proper $m\times m$ πίνακα $\Gamma_0(s)$ ως τον

$$\Gamma_0(s)=\begin{bmatrix} \Gamma_{11}(s) & \bigcirc \\ -\Omega_{21}(s)\Gamma_{11}(s) & I_{m-r} \end{bmatrix} .$$

Τότε $$\Gamma_0(s)\begin{bmatrix}\Omega_{11}(s) & \bigcirc \\ \Omega_{21}(s) & I_{m-r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta_l(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta_l(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc\end{bmatrix}$$

Έτσι έχουμε

$$\left(\Gamma_0(s)E\right)T(s)V(s)=\begin{bmatrix}\Delta_l(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc\end{bmatrix}$$

από όπου προκύπτει η παραγοντοποίηση

$$T(s)=B_l(s)D_l(s)U_l(s)$$

με $B_l(s)=\left(\Gamma_0(s)E\right)^{-1}$, $U_l(s)=V(s)^{-1}$ και $D_l(s)=\begin{bmatrix}\Delta_l(s) & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc\end{bmatrix}$.

Στη γενική περίπτωση , δηλαδή αν $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{m\times n}$, υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο $g(s)=s^p+g_{p-1}s^{p-1}+...+g_0$ έτσι ώστε ο $g(s)T(s)$ να είναι πολυωνυμικός πίνακας . Αν $g(s)T(s)=\overline{B}_l(s)\overline{D}_l(s)\overline{U}_l(s)$ είναι μία αριστερή Wiener - Hopf παραγοντοποίηση και αφού $g(s)=s^p\gamma(s)$, όπου $\gamma(s)=1+g_{p-1}s^{-1}+...+g_0s^{-p}$, τότε μία αριστερή Wiener - Hopf παραγοντοποίηση του $T(s)$ υπάρχει και είναι η

$$T(s)=B(s)D(s)U(s)$$

όπου $B(s)=\gamma(s)^{-1}\overline{B}_l(s)$, $U(s)=\overline{U}(s)$ και $D(s)=s^{-p}\overline{D}_l(s)$.

Παρόμοια είναι η απόδειξη για την δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση του $T(s)$.

▲

<u>Παράδειγμα 3.1.8</u>

Έστω ο πίνακας $T(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1} \\ 0 & \dfrac{s^2}{s+3}\end{bmatrix}$.

Πρώτα θα γράψουμε τον T(s) ως το γινόμενο $\frac{1}{d(s)}N(s)$, όπου d(s) ο ελάχιστος κοινός παρονομαστής των στοιχείων του T(s) και N(s) πολυωνυμικός πίνακας. Έτσι

$$T(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix}(s+1)(s+3) & (s+2)(s+3)\\ 0 & s^2(s+1)(s+2)\end{bmatrix}=\frac{1}{d(s)}N(s)$$

Θα βρούμε μία αριστερή και μία δεξιά Wiener-Hopf παραγοντοποίηση του N(s).

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του N(s) με την biproper ρητή συνάρτη-ση $\frac{s^2}{(s+1)(s+3)}$:

$$B_{l1}(s)N(s)=\begin{bmatrix}\frac{s^2}{(s+1)(s+3)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(s+1)(s+3) & (s+2)(s+3)\\ 0 & s^2(s+1)(s+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s^2 & \frac{s^2(s+2)}{(s+1)}\\ 0 & s^2(s+1)(s+2)\end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή του $B_{l1}(s)N(s)$ με την biproper ρητή συνάρτηση $\frac{s^2}{(s+1)(s+2)}$:

$$B_{l2}(s)B_{l1}(s)N(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{s^2}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^2 & \frac{s^2(s+2)}{(s+1)}\\ 0 & s^2(s+1)(s+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s^2 & \frac{s^2(s+2)}{(s+1)}\\ 0 & s^4\end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή του $B_{l2}(s)B_{l1}(s)N(s)$ με $\frac{-(s+2)}{s^2(s+1)}$ και την προσθέτουμε στην πρώτη :

$$B_{l3}(s)B_{l2}(s)B_{l1}(s)N(s)=\begin{bmatrix}1 & \frac{-(s+2)}{s^2(s+1)}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^2 & \frac{s^2(s+2)}{(s+1)}\\ 0 & s^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s^2 & 0\\ 0 & s^4\end{bmatrix}$$

$$B_{l3}(s)B_{l2}(s)B_{l1}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{-1}{(s+1)^2}\\ 0 & \dfrac{s^2}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$\left(B_{l3}(s)B_{l2}(s)B_{l1}(s)\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{(s+1)(s+3)}{s^2} & \dfrac{(s+2)(s+3)}{s^4}\\ 0 & \dfrac{(s+1)(s+2)}{s^2}\end{bmatrix}=\overline{B}_l(s)$$

$$U_{l1}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=U_{l1}(s)^{-1}=\overline{U}_l(s)$$

$$d(s)=(s+1)(s+2)(s+3)=s^3+6s^2+11s+6=s^3(1+\frac{6}{s}+\frac{11}{s^2}+\frac{6}{s^3})=s^3\delta(s)$$

$$T(s)=\frac{1}{d(s)}N(s)=\frac{1}{d(s)}\overline{B}_l(s)\overline{D}_l(s)\overline{U}_l(s)=\left(\frac{1}{\delta(s)}\overline{B}_l(s)\right)\left(\frac{1}{s^3}\overline{D}_l(s)\right)\overline{U}_l(s)=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{s+2} & \dfrac{1}{s(s+1)}\\ 0 & \dfrac{s}{s+3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s} & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=B_l(s)D_l(s)U_l(s)$$

Άρα οι αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι οι $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_1 < k_2$.

Για να βρούμε μία δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση θα βρούμε πρώτα μία δεξιά Wiener -Hopf παραγοντοποίηση του πίνακα $N(s)$.

Έτσι, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη του $N(s)$ με την bipropper ρητή συνάρτηση $\dfrac{s^2}{(s+1)(s+3)}$:

$$N(s)B_{r1}(s)=\begin{bmatrix}(s+1)(s+3) & (s+2)(s+3)\\ 0 & s^2(s+1)(s+2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{s^2}{(s+1)(s+3)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s^2 & (s+2)(s+3)\\ 0 & s^2(s+1)(s+2)\end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη του $N(s)B_{r1}(s)$ $\frac{-(s+2)(s+3)}{s^2}$ και την προσθέτουμε στην δεύτερη :

$$N(s)B_{r1}(s)B_{r2}(s)=\begin{bmatrix} s^2 & (s+2)(s+3) \\ 0 & s^2(s+1)(s+2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{-(s+2)(s+3)}{s^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2(s+1)(s+2) \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη στήλη του $N(s)B_{r1}(s)B_{r2}(s)$ με την biproper ρητή συνάρτηση $\frac{s^2}{(s+1)(s+2)}$:

$$N(s)B_{r1}(s)B_{r2}(s)B_{r3}(s)=\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2(s+1)(s+2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{s^2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^4 \end{bmatrix}$$

$$U_{r1}(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=U_{r1}(s)^{-1}=\overline{U}_r(s)$$

$$B_{r1}(s)B_{r2}(s)B_{r3}(s)=\begin{bmatrix} \frac{s^2}{(s+1)(s+3)} & \frac{-s^2}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{s^2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\left(B_{r1}(s)B_{r2}(s)B_{r3}(s)\right)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{(s+1)(s+3)}{s^2} & \frac{(s+2)(s+3)}{s^2} \\ 0 & \frac{(s+1)(s+2)}{s^2} \end{bmatrix}=\overline{B}_r(s)$$

$$T(s)=\frac{1}{d(s)}N(s)=\frac{1}{d(s)}\overline{U}_r(s)\overline{D}_r(s)\overline{B}_r(s)=\overline{U}_r(s)\left(\frac{1}{s^3}\overline{D}_r(s)\right)\left(\frac{1}{\delta(s)}\overline{B}_r(s)\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{s}{s+2} & \frac{s}{s+1} \\ 0 & \frac{s}{s+3} \end{bmatrix}=U_r(s)D_r(s)B_r(s)$$

Άρα οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι οι $l_1 = -1$, $l_2 = 1$, $l_1 < l_2$.

Στην περίπτωση που έχουμε τετραγωνικό πίνακα μπορούμε να βρούμε και με άλλο τρόπο μία Wiener - Hopf παραγοντοποίηση .

<u>Πρόταση 3.1.9</u> [Fuhrmann - Willems ,1979] , [Baragaña - Zaballa , 2002]

Αν ο πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ είναι column proper , τότε οι αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι οι βαθμοί των στηλών του . Αντίστοιχα αν ο $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ είναι row proper , τότε οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι οι βαθμοί των γραμμών του .

<u>Απόδειξη :</u>

Στο πρώτο κεφάλαιο είδαμε ότι ένας column proper πίνακας έχει συγκεκριμένη αναπαράσταση , έτσι ο T(s) γράφεται ως εξής :

$$T(s) = \left[T(s)\right]_c^h \operatorname{diag}\left[s^{m_1},\dots,s^{m_n}\right] + T_c(s) \quad \Rightarrow$$
$$T(s) = \left(\left[T(s)\right]_c^h + T_c(s)\operatorname{diag}\left[s^{-m_1},\dots,s^{-m_n}\right]\right)\operatorname{diag}\left[s^{m_1},\dots,s^{m_n}\right] \quad \Rightarrow \quad T(s) = \overline{B}_l(s)\overline{D}_l(s)$$

όπου $\overline{B}_l(s) = \left[T(s)\right]_c^h + T_c(s)\operatorname{diag}\left[s^{-m_1},\dots,s^{-m_n}\right]$, $\overline{D}_l(s) = \operatorname{diag}\left[s^{m_1},\dots,s^{m_n}\right]$.

Με εναλλαγές γραμμών - στηλών ο $\overline{D}_l(s)$ μπορεί να μετατραπεί σε διαγώνιο πίνακα του οποίου οι δυνάμεις του s είναι σε αύξουσα διάταξη , δηλαδή στον $D_l(s) = \operatorname{diag}\left[s^{k_1},\dots,s^{k_n}\right], k_1 \le \dots \le k_n$. Άρα υπάρχουν πίνακες $U_1(s), U_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $U_1(s)\overline{D}_l(s)U_2(s) = D_l(s) \quad \Rightarrow \quad \overline{D}_l(s) = U_1(s)^{-1}D_l(s)U_2(s)^{-1}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει μία αριστερή Wiener - Hopf παραγοντοποίηση $T(s) = B_l(s)D_l(s)U_l(s)$, όπου $B_l(s) = \overline{B}_l(s)U_1(s)^{-1}$, $U_l(s) = U_2(s)^{-1}$.

Αν ο T(s) είναι row proper γράφεται ως :

$$T(s) = \operatorname{diag}\left[s^{p_1},\dots,s^{p_n}\right]\left[T(s)\right]_r^h + T_r(s) \quad \Rightarrow$$
$$T(s) = \operatorname{diag}\left[s^{p_1},\dots,s^{p_n}\right]\left(\left[T(s)\right]_r^h + \operatorname{diag}\left[s^{-p_1},\dots,s^{-p_n}\right]T_r(s)\right) \quad \Rightarrow \quad T(s) = \overline{D}_r(s)\overline{B}_r(s)$$

όπου $\overline{B}_r(s) = [T(s)]_r^h + \mathrm{diag}\left[s^{-p_1},...,s^{-p_n}\right]T_r(s)$, $\overline{D}_r(s) = \mathrm{diag}\left[s^{p_1},...,s^{p_n}\right]$.

Με εναλλαγές γραμμών - στηλών ο $\overline{D}_r(s)$ μπορεί να μετατραπεί σε διαγώνιο πίνακα του οποίου οι δυνάμεις του s είναι σε αύξουσα διάταξη , δηλαδή στον $D_r(s) = \mathrm{diag}\left[s^{l_1},...,s^{l_n}\right]$, $l_1 \le ... \le l_n$. Άρα υπάρχουν πίνακες $U_3(s), U_4(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $U_3(s)\overline{D}_r(s)U_4(s) = D_r(s) \Rightarrow \overline{D}_r(s) = U_3(s)^{-1}D_r(s)U_4(s)^{-1}$.

Άρα έχουμε μία δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση : $T(s) = U_r(s)D_r(s)B_r(s)$, όπου $U_r(s) = U_3(s)^{-1}$, $B_r(s) = U_4(s)^{-1}\overline{B}_r(s)$.

▲

<u>Παρατήρηση 3.1.10</u>

Σύμφωνα με την πρόταση 3.1.9 μπορούμε πρώτα να ελέγξουμε αν ο πίνακας T(s) είναι column proper ή row proper γιατί έτσι μπορούμε να βρούμε τους αριστερούς και δεξιούς , αντίστοιχα , Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης γλιτώνοντας τις πολλές πράξεις . Δηλαδή , θεωρούμε απευθείας ότι οι αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι οι βαθμοί των στηλών και οι δεξιοί είναι οι βαθμοί των γραμμών του σε φθίνουσα διάταξη .

<u>Παράδειγμα 3.1.11</u>

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $T(s) = \begin{bmatrix} s+3 & s \\ 2 & s^2+1 \end{bmatrix}$. Ο T(s) γράφεται ως :

$$T(s) = \begin{bmatrix} s+3 & s \\ 2 & s^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & s \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = [T(s)]_c^h \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} + T_c(s)$$

Ο πίνακας $[T(s)]_c^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ έχει πλήρη τάξη , άρα ο T(s) είναι column proper .

Επομένως οι αριστεροί Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι οι βαθμοί των στηλών του T(s) σε αύξουσα διάταξη , δηλαδή $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Μένει να βρούμε τους πίνακες $B_l(s)$ και $U_l(s)$.

$$T(s)=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & s\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & 0\\ 0 & \frac{1}{s^2}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s} & \frac{1}{s}\\ \frac{2}{s} & \frac{s^2+1}{s^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s^2\end{bmatrix}I_2=B_l(s)D_l(s)U_l(s)$$

Ο πίνακας $\overline{B}_l(s)$ είναι biproper γιατί έχει ορίζουσα ίση με $\frac{s^3+3s^2-s+3}{s^3}$ που είναι biproper ρητή συνάρτηση .

Για να βρούμε μία δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση γράφουμε τον T(s) ως :

$$T(s)=\begin{bmatrix}s+3 & s\\ 2 & s^2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s^2\end{bmatrix}\left[T(s)\right]_r^h+T_r(s)$$

Ο πίνακας $\left[T(s)\right]_r^h=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ έχει πλήρη τάξη , δηλαδή ο T(s) είναι row proper .

Άρα οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι οι βαθμοί των γραμμών του T(s) σε αύξουσα διάταξη , δηλαδή $l_1=1$, $l_2=2$.

Τέλος , βρίσκουμε τους πίνακες $U_r(s)$ και $B_r(s)$:

$$T(s)=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s^2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & 0\\ 0 & \frac{1}{s^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right)=I_2\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s} & 1\\ \frac{2}{s^2} & \frac{s^2+1}{s^2}\end{bmatrix}=U_r(s)D_r(s)B_r(s)$$

Ο πίνακας $B_r(s)$ είναι biproper γιατί έχει ορίζουσα ίση με $\frac{s^3+3s^2-s+3}{s^3}$ που είναι biproper ρητή συνάρτηση .

Αν ο πίνακας T(s) είναι singular , τότε η Wiener - Hopf παραγοντοποίησή του δεν είναι μοναδική .Ακόμη και όταν ο T(s) είναι non - singular δεν έχουμε μοναδικότητα , αλλά η ελευθερία μη μοναδικότητας είναι μικρότερη .

<u>Θεώρημα 3.1.12</u> [Fuhrmann - Willems ,1979] , [Fuhrmann , 2006]
Έστω T(s) non - singular ρητός $n \times n$ πίνακας και

$$T(s) = B(s)D(s)U(s) = B'(s)D'(s)U'(s)$$

δύο αριστερές Wiener - Hopf παραγοντοποιήσεις του . Τότε $D(s) = D'(s)$ και υπάρχει unimodular πίνακας $V(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ του οποίου τα στοιχεία ικανοποιούν τις συνθήκες :

$$\begin{aligned} v_{ij} &= 0 \quad \text{αν} \quad k_i < k_j \\ \deg(v_{ij}) &\le k_j - k_i \quad \text{αν} \quad k_i \ge k_j \end{aligned} \tag{3.7}$$

και για τους πίνακες B'(s) , U'(s) ισχύει

$$B'(s) = B(s)D(s)V(s)^{-1}D(s)^{-1} \quad , \quad U'(s) = V(s)U(s) \tag{3.8}$$

ή

$$B'(s) = B(s)V(s) \quad , \quad U'(s) = D(s)^{-1}V(s)^{-1}D(s)U(s) \tag{3.9}$$

<u>Ορισμός 3.1.13</u> [Fuhrmann - Willems ,1979] , [Fuhrmann , 2006]
Το σύνολο όλων των unimodular $n \times n$ πινάκων V(s) που ικανοποιούν τις συνθήκες (3.7) είναι πολλαπλασιαστική ομάδα που την ονομάζουμε **ομάδα αριστερής παραγοντοποίησης** (**left factorization group**) .

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δούμε ότι ο T(s) δεν έχει μοναδική δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση και να ορίσουμε την **ομάδα δεξιάς παραγοντοποίησης** .

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ένα θεώρημα που αναφέρεται στο πρόσημο των Wiener - Hopf δεικτών παραγοντοποίησης σε σχέση με τον πίνακα $T(s)$.

<u>Θεώρημα 3.1.14</u> [Fuhrmann , 2006]

Έστω $T(s)$ $m \times n$ πίνακας . Αν ο $T(s)$ είναι πολυωνυμικός τότε όλοι οι αριστεροί και δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι μη αρνητικοί . Αν ο $T(s)$ είναι proper ρητός τότε όλοι οι αριστεροί και δεξιοί Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι μη θετικοί .

<u>Απόδειξη :</u>

Αν ο $T(s)$ είναι πολυωνυμικός είναι προφανές ότι όλοι οι αριστεροί (δεξιοί) Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι μη αρνητικοί .

Αν ο $T(s)$ είναι αυστηρά proper ρητός πίνακας τότε όλοι οι δεξιοί Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι αρνητικοί . Για να το δείξουμε αυτό θέτουμε $T(s) = \frac{1}{d(s)} N(s)$, όπου $N(s)$ πολυωνυμικός πίνακας και $d(s)$ το ελάχιστο πολλαπλάσιο των παρονομαστών όλων των στοιχείων του $T(s)$.

Ισχύει $d(s) = s^p \delta(s)$ για κάποιον μη αρνητικό ακέραιο p .

Έστω $N(s) = U(s)D(s)B(s)$ μία δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση και $D(s) = \mathrm{diag}\left[s^{v_1}, ..., s^{v_m}\right]$. Δηλαδή $T(s) = U(s)\,\mathrm{diag}\left[s^{v_1 - p}, ..., s^{v_m - p}\right]\frac{B(s)}{\delta(s)}$. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας $U(s)\,\mathrm{diag}\left[s^{v_1 - p}, ..., s^{v_m - p}\right] = \delta(s)T(s)B(s)^{-1}$ είναι αυστηρά proper πίνακας , όμως ο $U(s)$ είναι πολυωνυμικός . Άρα $v_i - p < 0$, $i = 1, 2, ..., m$.

Οι ακέραιοι $l_i = v_i - p$, $i = 1, 2, ..., m$ είναι οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $T(s)$. Με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύεται ότι και οι αριστεροί Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης ενός αυστηρά proper ρητού πίνακα είναι αρνητικοί .

▲

3.2 ΤΟΠΙΚΟΙ WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Για να ορίσουμε τους τοπικούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης πολυωνυμικού πίνακα, χρειάζονται οι δύο προτάσεις που ακολουθούν.

Πρόταση 3.2.1 [Amparan et al., 2004 (II)]

Έστω $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ένας non - singular πολυωνυμικός πίνακας και $\pi(s) \in \mathbb{R}[s]$ ένα κανονικό ανάγωγο πολυώνυμο. Τότε υπάρχουν πίνακες $A(s), B(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε:

(i) $P(s) = A(s)B(s)$

(ii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $A(s)$ είναι δυνάμεις του πολυωνύμου $\pi(s)$.

(iii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $B(s)$ είναι πρώτοι προς το πολυώνυμο $\pi(s)$.

Απόδειξη:

Έστω $S(s) = \mathrm{diag}\left[\varepsilon_1(s),...,\varepsilon_m(s)\right]$ η Smith κανονική μορφή του $P(s)$, όπου $\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s)$, $i = 1,...,m-1$ είναι οι αναλλοίωτοι παράγοντές του. Έτσι υπάρχουν unimodular πίνακες $U(s), V(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε

$P(s) = U(s)\mathrm{diag}\left[\varepsilon_1(s),...,\varepsilon_m(s)\right]V(s)$.

Αν το $\pi(s)$ δεν είναι διαιρέτης της ορίζουσας του $P(s)$, τότε αν $A(s) = I_m$ και $B(s) = P(s)$ ικανοποιούνται οι συνθήκες.

Αν $\pi(s) \mid \det(P(s))$, τότε $\varepsilon_i(s) = \pi(s)^{d_i}\beta_i(s)$, $d_m \geq ... \geq d_1 \geq 0$, $\text{ΜΚΔ}(\beta_i(s), \pi(s)) = 1$, $i = 1,2,...,m$. Άρα $P(s) = A(s)B(s)$ με

$$A(s) = U(s)\mathrm{diag}\left[\pi(s)^{d_1},...,\pi(s)^{d_m}\right] \quad , \quad B(s) = \mathrm{diag}\left[\beta_1(s),...,\beta_m(s)\right]V(s)$$

▲

<u>Πρόταση 3.2.2</u> [Amparan et al. , 2004 (II)]

Έστω $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ένας non - singular πολυωνυμικός πίνακας και $\pi(s) \in \mathbb{R}[s]$ κανονικό ανάγωγο πολυώνυμο.Αν υπάρχουν πίνακες $A_1(s),A_2(s),B_1(s),B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε :

(i) $P(s) = A_1(s)B_1(s) = A_2(s)B_2(s)$

(ii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $A_1(s)$ και του $A_2(s)$ είναι δυνάμεις του $\pi(s)$.

(iii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $B_1(s)$ και του $B_2(s)$ είναι πρώτοι προς το πολυώνυμο $\pi(s)$

τότε οι πίνακες $A_1(s)$, $A_2(s)$ είναι δεξιά ισοδύναμοι .

<u>Απόδειξη :</u>

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες (i) , (ii) , (iii) μπορούμε να δούμε ότι οι πίνακες $A_1(s),A_2(s)$ έχουν τους ίδιους αναλλοίωτους παράγοντες που είναι δυνάμεις του $\pi(s)$ και οι πίνακες $B_1(s),B_2(s)$ έχουν τους ίδιους αναλλοίωτους παράγοντες που είναι πρώτοι προς το $\pi(s)$.

Από το (i) έχουμε ότι $A_1(s) = A_2(s)B_2(s)B_1(s)^{-1}$. Έστω $G(s) = B_2(s)B_1(s)^{-1}$.

Επειδή $B_1(s)^{-1} = \dfrac{\mathrm{Adj}B_1(s)}{\det B_1(s)}$ ο πίνακας $(\det B_1(s))G(s)$ είναι πολυωνυμικός .

Έστω $D(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ η Smith κανονική μορφή του $(\det B_1(s))G(s)$.

Άρα υπάρχουν unimodular πίνακες $U(s), V(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε

$$D(s) = U(s)(\det B_1(s))G(s)V(s) \Rightarrow U(s)G(s)V(s) = \frac{D(s)}{\det B_1(s)}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα $D(s)$ με $\dfrac{1}{\det B_1(s)}$ και απαλείψουμε τους κοινούς παράγοντες , θα πάρουμε την Smith - Mc Millan του πίνακα $G(s)$. Έτσι

$$S^{\mathbb{C}}_{G(s)} = U(s)G(s)V(s) = \frac{1}{\det B_1(s)}D(s) = \mathrm{diag}\left[\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)},\ldots,\frac{\varepsilon_m(s)}{\psi_m(s)}\right]$$

όπου $\varepsilon_i(s),\psi_i(s)$, $i = 1,2,...,m$ κανονικά και πρώτα μεταξύ τους πολυώνυμα τέτοια ώστε $\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s),\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s)$, $i = 1,2,...,m-1$. Επιπλέον,αφού το $\psi_k(s)$ διαιρεί την $\det B_1(s)$ για κάθε k , συμπεραίνουμε ότι τα πολυώνυμα $\psi_k(s)$ είναι πρώτα με τους αναλλοίωτους παράγοντες του πίνακα $A_2(s)$.

Σημειώνουμε ότι $\det S^{\mathbb{C}}_{G(s)} = 1$, αφού η $\det(B_2(s)B_1(s)^{-1})$ είναι σταθερά .

Ισχύει $S^{\mathbb{C}}_{G(s)} = I_m$. Αν δεν ίσχυε , θα υπήρχε k τέτοιο ώστε $\psi_k(s) \neq 1$ (γιατί αλλιώς , αφού $\det S^{\mathbb{C}}_{G(s)} = 1$, θα είχαμε ότι $\varepsilon_i(s) = 1$ για κάθε i και τότε $S^{\mathbb{C}}_{G(s)} = I_m$) .

Έστω $a_{ik}(s)\dfrac{\varepsilon_k(s)}{\psi_k(s)}$ ένα οποιοδήποτε στοιχείο της k στήλης του $A_2(s)U(s)^{-1}S^{\mathbb{C}}_{G(s)}$, όπου $a_{ik}(s)$ είναι το (i , k) στοιχείο του πίνακα $A_2(s)U(s)^{-1}$. Το $a_{ik}(s)\dfrac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$ είναι πολυώνυμο , αφού ο $A_1(s)V(s) = A_2(s)U(s)^{-1}S^{\mathbb{C}}_{G(s)}$ είναι πολυωνυμικός πίνακας . Αλλά από το γεγονός ότι ΜΚΔ($\varepsilon_k(s), \psi_k(s)$) = 1 συμπεραίνουμε ότι πρέπει $\psi_k(s) \mid a_{ik}(s)$ για κάθε i , δηλαδή το $\psi_k(s)$ διαιρεί κάθε στοιχείο στην k στήλη του $A_2(s)U(s)^{-1}$ και άρα διαιρεί την ορίζουσά του . Αυτό θα ήταν αντίφαση , εκτός αν $\psi_k(s) = 1$, γιατί το $\psi_k(s)$ διαιρεί την ορίζουσα του $B_1(s)$. Όμως η ορίζουσα του $B_1(s)$ είναι πρώτη προς την ορίζουσα του $A_1(s)$, που είναι ίση με πολλαπλάσιο της ορίζουσας του $A_2(s)U(s)^{-1}$. Άρα $S^{\mathbb{C}}_{G(s)} = I_m$ όπως ισχυριστήκαμε και $A_1(s) = A_2(s)U(s)^{-1}V(s)^{-1}$, δηλαδή οι πίνακες $A_1(s)$ και $A_2(s)$ είναι δεξιά ισοδύναμοι .

▲

Από τις προτάσεις 3.3.1 , 3.3.2 προκύπτει ο επόμενος ορισμός .

<u>Ορισμός 3.2.3</u> [Amparan et al. , 2004 (II)]

Έστω $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ένας non - singular πολυωνυμικός πίνακας και $\pi(s) \in \mathbb{R}[s]$ ένα κανονικό ανάγωγο πολυώνυμο . Έστω $A(s), B(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ πολυωνυμικοί πίνακες τέτοιοι ώστε :

(i) $P(s) = A(s)B(s)$

(ii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $A(s)$ είναι δυνάμεις του πολυωνύμου $\pi(s)$.

(iii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $B(s)$ είναι πρώτοι προς το πολυώνυμο $\pi(s)$.

τότε οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $A(s)$ καλούνται **τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του P(s) ως προς το πολυώνυμο π(s)**.

<u>Παράδειγμα 3.2.4</u>

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας $P(s) = \begin{bmatrix} s^2+2s+1 & 2s^2+2s \\ s^4+2s^3+4s^2+6s+3 & s+1 \end{bmatrix}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση smith του POLYX για να βρούμε την Smith κανονική μορφή του $P(s)$:

```
>> [s,u,v,ui,vi] = smith([s^2+2*s+1 2*s*(s+1);(s^2+3)*(s+1)^2 s+1])

s =
    1 + s     0
    0        -0.5 + 2s + 5.5s^2 + 4s^3 + 2s^4 + s^5

u =
    0   -1
    1   -2s

v =
    0   -0.5
   -1    1.5 + 1.5s + 0.5s^2 + 0.5s^3

ui =
   -2s    1
   -1     0

vi =
   -3 - 3s - s^2 - s^3    -1
          -2                0
```

Η Smith κανονική μορφή του P(s) είναι ο πίνακας

$$S_{P(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+1)^2(s^3+3s-0.5) \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_1(s) = \pi(s)^1\beta_1(s) = (s+1)1 \quad , \quad \varepsilon_2(s) = \pi(s)^2\beta_2(s) = (s+1)^2(s^3+3s-0.5)$$

Ο P(s) γράφεται ως :

$$P(s)=A(s)B(s)=\left(ui\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+1)^2 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^3+3s-0.5 \end{bmatrix}vi\right)=\begin{bmatrix} -2s^2-2s & s^2+2s+1 \\ -s-1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -s^3-s^2-3s-3 & -1 \\ -2s^3-6s+1 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα οι τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του P(s) είναι οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του A(s) .

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση iscolred του POLYX θα δούμε αν ο πίνακας A(s) είναι column proper .

```
>> iscolred(ui*[s+1 0;0 (s+1)^2])

ans
     = 0
```

Η συνάρτηση επέστρεψε την τιμή 0 που σημαίνει ότι ο A(s) δεν είναι column proper . Για να τον μετατρέψουμε σε column proper θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση colred του POLYX .

```
>> [D,rk,U,Ui] = colred(ui*[s+1 0;0 (s+1)^2])

D =
   -2s - 2s^2          1 + s
       -1 - s      -0.5 - 0.5s
```

```
rk =
    2

U =
   1.0000    0.5000
        0    1.0000

Ui =
   1.0000   -0.5000
        0    1.0000
```

Ο πίνακας D είναι το γινόμενο $A(s)U$, ενώ ισχύει $A(s) = DUi$.

Ο πίνακας D μπορεί να γραφτεί σύμφωνα με την πρόταση 3.1.9 ως:

$$A(s)U = D = [D]_c^h \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + D_c = \left([D]_c^h + D_c \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2s & 1 \\ -s-1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2s-2}{s} & \frac{s+1}{s} \\ \frac{-s-1}{s^2} & \frac{-0.5s-0.5}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{-2s-2}{s} \\ \frac{-0.5s-0.5}{s} & \frac{-s-1}{s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{-2s-2}{s} \\ \frac{-0.5s-0.5}{s} & \frac{-s-1}{s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} = B_l(s) D_l(s) U_l(s)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση isrowred του POLYX θα δούμε αν ο A(s) είναι row proper .

```
>> isrowred(ui*[s+1 0;0 (s+1)^2])

ans
    = 1
```

Η συνάρτηση επέστρεψε την τιμή 1 που σημαίνει ότι ο A(s) είναι row proper. Άρα , οι δεξιοί Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του A(s) είναι οι βαθμοί των γραμμών του σε αύξουσα διάταξη .

Ο A(s) μπορεί να γραφτεί σύμφωνα με την πρόταση 3.1.9 ως :

$$A(s)=\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\left[A(s)\right]_r^h + A_r(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\left(\left[A(s)\right]_r^h + \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} A_r(s)\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2s & 1+2s \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-2s-2}{s} & \frac{s^2+2s+1}{s} \\ \frac{-s-1}{s} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-s-1}{s} & 0 \\ \frac{-2s-2}{s} & \frac{s^2+2s+1}{s} \end{bmatrix} = U_r(s)D_r(s)B_r(s)$$

Επομένως , οι τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα P(s) ως προς το πολυώνυμο $s+1$ είναι οι $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$.

3.3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

Feedback ισοδυναμία , δείκτες ελεγξιμότητας

Ορισμός 3.3.1 [Zaballa , 1997]

Έστω $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ ένα ελέγξιμο ζεύγος και $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ non - singular πίνακας . Ο πίνακας $P(s)$ λέγεται **αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα** (**polynomial matrix representation**) **του (A,B)** αν υπάρχουν unimodular πίνακες $U(s)$, $V(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ και $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ τέτοιοι ώστε

$$U(s)\begin{bmatrix} sI_n - A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V(s) & Y(s) \\ O_{m,n} & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & O_{n-m,m} & O_{n-m,m} \\ O_{m,n-m} & P(s) & I_m \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Πρόταση 3.3.2 [Zaballa , 1997]

Έστω $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ ένα ελέγξιμο ζεύγος και $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ non - singular πίνακας.Τότε ο $P(s)$ είναι αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα του (A,B) αν και μόνο αν υπάρχει πίνακας $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ τέτοιος ώστε οι $P(s)$, $N(s)$ να είναι δεξιά πρώτοι και

$$\left(sI_n - A\right)^{-1} B = N(s)P(s)^{-1} \tag{3.11}$$

Απόδειξη :

Αν ισχύει η (3.11) και οι $P(s),N(s)$ είναι δεξιά πρώτοι , τότε [Rosenbrock , 1970] υπάρχουν πίνακες $U(s)$, $V(s)$, $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ και $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} U(s) & O_{n,n} \\ X(s) & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ I_n & O_{n,m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V(s) & Y(s) \\ O_{m,n} & I_m \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} I_{n-m} & O_{n-m,m} & O_{n-m,m} \\ O_{m,n-m} & P(s) & I_m \\ \hline O_{n,n-m} & N(s) & O_{n,m} \end{array}\right]$$

και τότε ο $P(s)$ είναι αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα του (A,B). Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο $P(s)$ είναι αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα του (A,B). Υπάρχει πάντα πίνακας $N(s)$ τέτοιος ώστε να ισχύει η (3.10) [Rosenbrock, 1970], όμως αυτό το αποτέλεσμα δεν εγγυάται ότι η κλασματική πολυωνυμική περιγραφή είναι δεξιά πρώτη. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό 3.3.1. Από την (3.10) έχουμε ότι

$$\left(sI_n - A\right)^{-1} B = \left(sI_n - A\right)^{-1} U(s)^{-1} \begin{bmatrix} O_{n-m,m} \\ I_m \end{bmatrix} - \left(sI_n - A\right)^{-1} \left(sI_n - A\right) Y(s) =$$

$$= V(s) \begin{bmatrix} O_{n-m,m} \\ P(s)^{-1} \end{bmatrix} - Y(s) = \left(V(s) \begin{bmatrix} O_{n-m,m} \\ I_m \end{bmatrix} - Y(s)P(s) \right) P(s)^{-1}$$

Ισχυριζόμαστε ότι η παράσταση $\left(V(s) \begin{bmatrix} O_{n-m,m} \\ I_m \end{bmatrix} - Y(s)P(s) \right) P(s)^{-1}$ είναι δεξιά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή. Γιατί υπάρχει πίνακας $Q(s)$ τέτοιος ώστε

$$\left.\begin{aligned} &P(s) = \overline{P}(s)Q(s) \\ &V(s) \begin{bmatrix} O_{n-m,m} \\ I_m \end{bmatrix} - Y(s)P(s) = L(s)Q(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow V(s) \begin{bmatrix} O_{n-m,m} \\ I_m \end{bmatrix} = \left(L(s) + Y(s)\overline{P}(s) \right) Q(s)$$

Ο πίνακας $V(s) \begin{bmatrix} O_{n-m,m} \\ I_m \end{bmatrix}$ είναι ο υποπίνακας του $V(s)$ που αποτελείται από τις τελευταίες m στήλες και οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $V(s)$ είναι ίσοι με 1 γιατί είναι unimodular. Τότε, από [Thompson, 1979], και οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $V(s) \begin{bmatrix} O_{n-m,m} \\ I_m \end{bmatrix}$ είναι ίσοι με 1. Επιπλέον, οι αναλλοίωτοι παράγοντες του πίνακα $Q(s)$ διαιρούν τους αναλλοίωτους παράγοντες του πίνακα $\left(L(s) + Y(s)\overline{P}(s) \right) Q(s)$. Τότε οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $Q(s)$ είναι ίσοι με 1, άρα ο $Q(s)$ είναι unimodular.

▲

Πρόταση 3.3.3 [Zaballa , 1997]

Έστω $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ non-singular πίνακας.Υποθέτουμε ότι $\deg\left(\det P(s)\right) > 0$.Τότε υπάρχει ελέγξιμο ζεύγος $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ του οποίου η αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα είναι ο $P(s)$.

Απόδειξη :

Υπάρχει unimodular πίνακας $V(s)$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $P_1(s) = P(s)V(s)$ να είναι column proper [Wolovich , 1974] . Τότε υπάρχει ελέγξιμο ζεύγος (A,B) τέτοιο ώστε $\left(sI_n - A\right)^{-1} B = P_1(s)^{-1}$ [Kailath , 1980] .

▲

Θεώρημα 3.3.4 [Zaballa , 1997]

Έστω $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ ελέγξιμα ζεύγη και $P_1(s), P_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ αναπαραστάσεις μέσω πολυωνυμικών πινάκων των (A_1,B_1) , (A_2,B_2) αντίστοιχα . Τότε

(i) υπάρχει non-singular πίνακας $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $\left(A_1, B_1\right) = \left(TA_2T^{-1}, TB_2\right)$ αν και μόνο αν υπάρχει unimodular πίνακας $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιος ώστε

$$P_1(s) = P_2(s)U(s) \tag{3.12}$$

(ii) τα ζεύγη (A_1,B_1) και (A_2,B_2) είναι feedback ισοδύναμα αν και μόνο αν υπάρχουν πίνακες $B(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m\times m}$ biproper και $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular , τέτοιοι ώστε

$$P_1(s) = B(s)P_2(s)U(s) \tag{3.13}$$

Απόδειξη :

(i) Αν (A_1,B_1) και (A_2,B_2) όμοια ζεύγη τότε , από την πρόταση 3.3.2 , υπάρχουν πίνακες $N_1(s), N_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ τέτοιοι ώστε $P_i(s), N_i(s), i = 1,2$ δεξιά πρώτοι και $N_1(s)P_1(s)^{-1} = N_2(s)P_2(s)^{-1}$. Τότε οι $P_1(s), P_2(s)$ είναι δεξιά ισοδύναμοι . Αντίστροφα , αν οι $P_1(s), P_2(s)$ είναι δεξιά ισοδύναμοι τότε οι $\left[sI_n - A_1 \quad B_1\right], \left[sI_n - A_2 \quad B_2\right]$ είναι ισοδύναμοι , άρα τα ζεύγη (A_1,B_1) και (A_2,B_2) είναι όμοια .

(ii) Αν $P_i(s)$ είναι οι αναπαραστάσεις μέσω πολυωνυμικών πινάκων των (A_i,B_i) υπάρχουν πίνακες $U_i(s)$, $V_i(s)$ unimodular και $Y_i(s)$ τέτοιοι ώστε να ισχύει η (3.10) , $i=1,2$. Θέτουμε $N_i(s)=V_i(s)\begin{bmatrix} O_{n-m,m} \\ I_m \end{bmatrix}-Y_i(s)P_i(s)$. Είδαμε στην πρόταση 3.3.2 ότι οι $N_i(s)P_i(s)^{-1}$ είναι δεξιά πρώτες κλασματικές πολυωνυμικές περιγραφές των $G_i(s)=\left(sI_n-A_i\right)^{-1}B_i$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν πίνακες $Q\in\mathbb{R}^{m\times m}$ αντιστρέψιμος και $F\in\mathbb{R}^{m\times n}$ τέτοιοι ώστε $\left(A_1,B_1\right)=\left(A_2+B_2F,B_2Q\right)$.

Θέτουμε $R(s)=\left(I_m-FG_2(s)\right)^{-1}Q$. Ο $T(s)$ είναι unimodular και ο $R(s)^{-1}P_2(s)$ πολυωνυμικός [Kucera , 1991] . Επιπλέον $G_1(s)=G_2(s)R(s)$. Έτσι

$$N_1(s)P_1(s)^{-1}=N_2(s)\left(R(s)^{-1}P_2(s)\right)^{-1}$$

Θα δείξουμε ότι οι $N_2(s)$, $R(s)^{-1}P_2(s)$ είναι δεξιά πρώτοι . Έστω ότι υπάρχει πίνακας $H(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ έτσι ώστε $R(s)^{-1}P_2(s)=\overline{P}_2(s)H(s)$ και $N_2(s)=\overline{N}_2(s)H(s)$. Έχουμε ότι

$$Q^{-1}\left(I_m-FN_2(s)P_2(s)^{-1}\right)P_2(s)=\overline{P}_2(s)H(s) \quad \Rightarrow$$
$$P_2(s)=Q\overline{P}_2(s)H(s)+FN_2(s)=\left(Q\overline{P}_2(s)+F\overline{N}_2(s)\right)H(s)$$

Αφού οι $P_2(s)$, $N_2(s)$ είναι δεξιά πρώτοι , ο $H(s)$ είναι unimodular . Άρα οι $N_1(s)P_1(s)^{-1}$, $N_2(s)\left(R(s)^{-1}P_2(s)\right)^{-1}$ είναι δύο δεξιά πρώτες κλασματικές πολυωνυμικές περιγραφές της $G_1(s)$, που σημαίνει ότι υπάρχει unimodular πίνακας $U(s)$ τέτοιος ώστε $P_1(s)=R(s)^{-1}P_2(s)U(s) \quad \Rightarrow \quad P_1(s)=B(s)P_2(s)U(s)$.

Αντίστροφα , υποθέτουμε ότι $P_1(s)=B(s)P_2(s)U(s)$ με $B(s)$ biproper και $U(s)$ unimodular . Έστω $N_2(s)$ πολυωνυμικός πίνακας τέτοιος ώστε $P_2(s),N_2(s)$ είναι

δεξιά πρώτοι και $G_2(s) = \left(sI_n - A_2\right)^{-1} B_2 = N_2(s)P_2(s)^{-1}$. Αφού ο $B(s)P_2(s)$ είναι πολυωνυμικός και ο $B(s)$ biproper έχουμε ότι $B(s)^{-1} = \left(I_m - FG_2(s)\right)^{-1} Q$ για κάποιους πίνακες Q , αντιστρέψιμο , και F [Kucera , 1991] . Τότε

$$\left(sI_n - \left(A_2 + B_2F\right)\right)^{-1} B_2Q = N_2(s)\left(B(s)P_2(s)\right)^{-1}$$

που είναι μία δεξιά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή της παράστασης $\left(sI_n - \left(A_2 + B_2F\right)\right)^{-1} B_2Q$. Θέτουμε $N_1(s) = N_2(s)U(s)$. Τότε

$$\left(sI_n - \left(A_2 + B_2F\right)\right)^{-1} B_2Q = N_1(s)P_1(s)^{-1}$$

όπου οι $N_1(s)$, $P_1(s)$ είναι δεξιά πρώτοι . Επομένως τα ζεύγη $\left(A_2 + B_2F, B_2Q\right)$ και $\left(A_1, B_1\right)$ έχουν την ίδια αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα . Από το (i) προκύπτει ότι τα δύο παραπάνω ζεύγη είναι όμοια .

▲

<u>Ορισμός 3.3.5</u> [Zaballa , 1997]

Έστω $P_1(s), P_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ non - singular. Θα λέμε ότι οι $P_1(s)$ και $P_2(s)$ είναι feedback ισοδύναμοι (feedback equivalent) αν υπάρχουν $B(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m\times m}$ biproper και $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular , τέτοιοι ώστε $P_1(s) = B(s)P_2(s)U(s)$, δηλαδή αν είναι αριστερά Wiener - Hopf ισοδύναμοι .

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω έχουμε την εξής πρόταση :

<u>Πρόταση 3.3.6</u> [Baragaña-Zaballa , 2002] , [Zaballa , 2001]

Έστω $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ ελέγξιμο ζεύγος και $\left(sI_n - A\right)^{-1} B = N(s)P(s)^{-1}$, όπου οι $P(s), N(s)$ είναι δεξιά πρώτοι . Τότε οι δείκτες ελεγξιμότητας του (A,B) είναι ίσοι με τους αριστερούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $P(s)$.

Παράδειγμα 3.3.7

Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Η συνάρτηση ctrb του MATLAB υπολογίζει τον πίνακα ελεγξιμότητας του (A,B) .

```
>> rank(ctrb(A,B))

ans =
     3
```

Δηλαδή ο πίνακας ελεγξιμότητας έχει πλήρη τάξη , που σημαίνει ότι το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο .

$$\left(sI_n - A\right)^{-1} B = \begin{bmatrix} \dfrac{s-2}{s^2-2s+4} & \dfrac{2s-3}{s^2-2s+4} \\ \dfrac{-s^2+6s-4}{(s-1)(s^2-2s+4)} & \dfrac{2(3s+2)}{(s-1)(s^2-2s+4)} \\ \dfrac{s+2}{s^2-2s+4} & \dfrac{s+5}{s^2-2s+4} \end{bmatrix}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις rdf και coprime του POLYX για να γράψουμε την παράσταση $\left(sI_n - A\right)^{-1} B$ ως $N(s)P(s)^{-1}$, όπου $P(s)$, $N(s)$ είναι δεξιά πρώτοι .

```
>> d=coprime(rdf((s*eye(3)-A)*B))

d.numerator =                                   ←  N(s)
    0.11    -0.46 + 0.21s
    0.72     0.32 + 0.0089s
   -0.3      0.58 + 0.098s
```

```
d.denominator =                                   ←  P(s)
    0.34 - 0.72s     0.56 + 0.3s - 0.0089s^2
   -0.38 + 0.42s     0.24 - 0.43s + 0.11s^2
```

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση iscolred του POLYX θα δούμε αν ο P(s) είναι column proper .

```
>> iscolred(den(d))

ans =
      1
```

Η συνάρτηση επέστρεψε την τιμή 1 , άρα ο P(s) είναι column proper . Έτσι , οι αριστεροί Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του P(s) είναι οι βαθμοί των στηλών του σε αύξουσα διάταξη , δηλαδή $k_1 = 1, k_2 = 2$. Επομένως , οι δείκτες ελεγξιμότητας του ελέγξιμου ζεύγους (A,B) είναι οι $k_1 = 1, k_2 = 2$.

Τοπικοί δείκτες ελεγξιμότητας

Λήμμα 3.3.8 [Amparan et al. , 2006]

Έστω $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1} \times \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ ελέγξιμο ζεύγος , $P_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα του (A_1,B_1) και $Q_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ non-singular πίνακας τέτοιος ώστε $\text{ΜΚΔ}(\det P_1(s), \det Q_2(s)) = 1$. Τότε υπάρχει ένα ελέγξιμο ζεύγος $(A_2, B_2) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2} \mathbb{R}^{n_2 \times m}$, $n_2 = \deg(\det Q_2(s))$ έτσι ώστε ο A_2 να έχει τους ίδιους μη τετριμμένους αναλλοίωτους παράγοντες με τον $Q_2(s)$ και ο $P(s) = P_1(s)Q_2(s)$ να είναι αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα του ελέγξιμου ζεύγους

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & \bigcirc \\ \bigcirc & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \ , \ n = n_1 + n_2$$

<u>Θεώρημα 3.3.9</u> [Amparan et al. , 2006]

Έστω $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1} \times \mathbb{R}^{n_1 \times m}, (A_2, B_2) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2} \times \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ ελέγξιμα ζεύγη τέτοια ώστε $\text{ΜΚΔ}\left(\det\left(sI_{n_1} - A_1\right), \det\left(sI_{n_2} - A_2\right)\right) = 1$. Έστω $P_1(s), P_2(s)$ αναπαραστάσεις μέσω πολυωνυμικών πινάκων των $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ αντίστοιχα και $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$. Ο πίνακας $P(s)$ είναι αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα του ελέγξιμου ζεύγους $\left(\begin{bmatrix} A_1 & \bigcirc \\ \bigcirc & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$, $n = n_1 + n_2$ αν και μόνο αν υπάρχουν πίνακες $Q_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$, με τους ίδιους μη τετριμμένους αναλλοίωτους παράγοντες με τον A_1, και $Q_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ με τους ίδιους μη τετριμμένους αναλλοίωτους παράγοντες με τον A_2, τέτοιοι ώστε $P(s) = P_1(s)Q_2(s) = P_2(s)Q_1(s)$.

<u>Πρόταση 3.3.10</u> [Amparan et al. , 2006]

Έστω $\pi(s) \in \mathbb{R}[s]$ κανονικό ανάγωγο πολυώνυμο , $(A,B) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ ελέγξιμο ζεύγος και $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ η αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα του (A,B). Τότε οι τοπικοί δείκτες ελεγξιμότητας του (A, B) ως προς το πολυώνυμο $\pi(s)$ είναι οι τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $P(s)$ ως προς το πολυώνυμο $\pi(s)$.

<u>Απόδειξη :</u>

Έστω $\det\left(sI_n - A\right) = \pi(s)^d \beta(s)$ με $\text{ΜΚΔ}\left(\pi(s), \beta(s)\right) = 1, \deg \pi(s)^d = n_1, \deg \beta(s) = n_2$. Από την πρόταση 2.2.8 , υπάρχουν ελέγξιμα ζεύγη $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1} \times \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ και $(A_2, B_2) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2} \times \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ τέτοια ώστε

(i) το ζεύγος (A,B) είναι όμοιο με το ζεύγος $\left(\begin{bmatrix} A_1 & \bigcirc \\ \bigcirc & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$

(ii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $sI_{n_1} - A_1$ είναι δυνάμεις του $\pi(s)$.

(iii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $sI_{n_2} - A_2$ είναι προς το $\pi(s)$.

Από τα (ii)- (iii) συμπεραίνουμε ότι $\text{ΜΚΔ}\left(\det\left(sI_{n_1}-A_1\right),\det\left(sI_{n_2}-A_2\right)\right)=1$. Έστω $P_1(s)$ αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα του (A_1,B_1). Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει πίνακας $Q_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με τους ίδιους μη τετριμμένους αναλλοίωτους παράγοντες με τον A_2, τέτοιος ώστε ο $P_1(s)Q_2(s)$ είναι αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα του ελέγξιμου ζεύγους $\left(\begin{bmatrix} A_1 & \bigcirc \\ \bigcirc & A_2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$.

Από το (i), υπάρχει unimodular πίνακας $U(s)$ τέτοιος ώστε $P(s)=P_1(s)Q_2(s)U(s)$. Από το (ii), οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $P_1(s)$ είναι δυνάμεις του $\pi(s)$. Από το (iii), οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $Q_2(s)U(s)$ είναι πρώτοι προς το $\pi(s)$. Έτσι, από τους ορισμούς των τοπικών δεικτών ελεγξιμότητας και των τοπικών Wiener-Hopf δεικτών παραγοντοποίησης, συμπεραίνουμε ότι οι τοπικοί δείκτες ελεγξιμότητας του (A,B) ως προς το πολυώνυμο $\pi(s)$ είναι οι τοπικοί Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $P(s)$ ως προς το πολυώνυμο $\pi(s)$.

▲

<u>Παράδειγμα 3.3.11</u>

Έστω $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\left(sI_2-A\right)^{-1}B=\frac{1}{s^2+2s-1}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ s+3 & s+1 \end{bmatrix}$$

Με την βοήθεια των συναρτήσεων rdf και coprime του POLYX, θα γράψουμε την $\left(sI_2-A\right)^{-1}B$ ως $N(s)P(s)^{-1}$, όπου $N(s),P(s)$ δεξιά πρώτοι:

```
>> rdf(inv(s*eye(2)-A)*B)

ans =
   2 + s    1        /   -1 + 2s + s^2    0
   3 + s    1 + s    /    0              -1 + 2s + s^2
```

```
>> coprime(ans)

ans =
    0       0.47     /     -0.47            0.47 + 0.47s
    0.47    0        /     0.94 + 0.47s    -1.4 - 0.47s
```

Η Smith κανονική μορφή του P(s) είναι η :

```
>> [s,u,v,ui,vi]=smith(den(ans))

s =
    1     0
    0    -1 + 2s + s^2

u =
    1        0
    2 + s    1
v =
   -2.1     2.1 + 2.1s
    0       2.1

ui =
    1        0
   -2 - s    1

vi =
   -0.47     0.47 + 0.47s
    0        0.47
```

Οι αναλλοίωτοι παράγοντες του P(s) είναι

$$\varepsilon_1(s) = 1\,,\ \varepsilon_2(s) = s^2 + 2s - 1 = (s + 1 - \sqrt{2})(s + 1 + \sqrt{2})$$

Αν $\pi(s) = s + 1 + \sqrt{2}$ τότε $\beta(s) = s + 1 - \sqrt{2}$. P(s) = A(s)B(s)

$$P(s)=\left(ui\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s+1+\sqrt{2}\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s+1-\sqrt{2}\end{bmatrix}vi\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -s-2 & s+2.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.47 & 0.47(s+1)\\ 0 & 0.47(s+1-\sqrt{2})\end{bmatrix}$$

Θα βρούμε τους Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα A(s) :

Ελέγχουμε αν ο A(s) είναι column proper με τη συνάρτηση iscolred του POLYX

```
>> iscolred([1 0; -s-2 s+2.4])

ans =
     0
```

Η συνάρτηση επέστρεψε την τιμή 0 , άρα ο A(s) δεν είναι column proper . Με την συνάρτηση colred του POLYX τον μετατρέπουμε σε column proper :

```
>> colred(A)

ans =
   1        1
  -2 - s    0.41
```

Οι αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα A(s) είναι οι βαθμοί των στηλών του παραπάνω πίνακα σε αύξουσα διάταξη , δηλαδή $k_1=0$, $k_2=1$.

Παρατηρούμε ότι ο A(s) είναι row proper , άρα οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησής του είναι οι $l_1=0$, $l_2=1$, δηλαδή οι βαθμοί των γραμμών του σε αύξουσα διάταξη .

Άρα οι τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα P(s) ως προς το πολυώνυμο $\pi(s)=s+1+\sqrt{2}$ είναι οι $\kappa_1=0$, $\kappa_2=1$.

Αν $\pi(s)=s+1-\sqrt{2}$ τότε $\beta(s)=s+1+\sqrt{2}$. P(s) = A(s)B(s)

$$P(s)=\left(ui\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s+1-\sqrt{2}\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s+1+\sqrt{2}\end{bmatrix}vi\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -s-2 & s-0.41\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.47 & 0.47(s+1)\\ 0 & 0.47(s+1+\sqrt{2})\end{bmatrix}$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα A(s) είναι οι $k_1 = 0$, $k_2 = 1$.

Άρα οι τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα P(s) ως προς το πολυώνυμο $\pi(s) = s + 1 - \sqrt{2}$ είναι οι $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$.

Output - injection ισοδυναμία , δείκτες παρατηρησιμότητας

Ορισμός 3.3.12

Έστω $(A,C) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{p\times n}$ παρατηρήσιμο ζεύγος και $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ non - singular πίνακας . Ο πίνακας P(s) λέγεται **αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα (polynomial matrix representation) του (A,C)** αν υπάρχουν unimodular πίνακες $U(s), V(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ και $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times n}$ τέτοιοι ώστε :

$$\begin{bmatrix} U(s) & O_{n,p} \\ X(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix} V(s) = \begin{bmatrix} I_{n-p} & O_{n-p,p} \\ O_{p,n-p} & P(s) \\ O_{p,n-p} & I_p \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Πρόταση 3.3.13

Έστω $(A,C) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{p\times n}$ ένα παρατηρήσιμο ζεύγος και $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ non - singular πίνακας . Τότε ο P(s) είναι αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα του (A,C) αν και μόνο αν υπάρχει πίνακας $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times n}$ τέτοιος ώστε οι P(s), N(s) να είναι αριστερά πρώτοι και

$$C\left(sI_n - A\right)^{-1} = P(s)^{-1} N(s) \tag{3.15}$$

Απόδειξη :

Αν ισχύει η (3.15) και οι P(s) , N(s) είναι αριστερά πρώτοι , τότε [Rosenbrock , 1970] υπάρχουν πίνακες $U(s), V(s), Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ και $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times n}$ τέτοιοι ώστε :

$$\begin{bmatrix} U(s) & O_{n,p} \\ X(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - A & I_n \\ C & O_{p,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) & Y(s) \\ O_{n,n} & I_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} I_{n-p} & O_{n-p,p} & O_{n-p,n} \\ O_{p,n-p} & P(s) & N(s) \\ \hline O_{p,n-p} & I_p & O_{p,n} \end{array}\right]$$

και τότε ο $P(s)$ είναι αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα του (A,C).

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο $P(s)$ είναι αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα του (A,C). Υπάρχει πάντα πίνακας $N(s)$ τέτοιος ώστε να ισχύει η (3.14) [Rosenbrock, 1970], όμως αυτό το αποτέλεσμα δεν εγγυάται ότι η κλασματική πολυωνυμική περιγραφή είναι αριστερά πρώτη. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό 3.3.8. Από την (3.14) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} C\left(sI_n - A\right)^{-1} &= \left[\bigcirc_{p,n-p} \quad I_p\right] V(s)^{-1}\left(sI_n - A\right)^{-1} - X(s)\left(sI_n - A\right)\left(sI_n - A\right)^{-1} = \\ &= \left[\bigcirc_{p,n-p} \quad P(s)^{-1}\right] U(s) - X(s) = P(s)^{-1}\left(\left[\bigcirc_{p,n-p} \quad I_p\right] U(s) - P(s)X(s)\right) \end{aligned}$$

Ισχυριζόμαστε ότι η παράσταση $P(s)^{-1}\left(\left[\bigcirc_{p,n-p} \quad I_p\right] U(s) - P(s)X(s)\right)$ είναι αριστερά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή. Γιατί υπάρχει πίνακας $Q(s)$, τέτοιος ώστε

$$\left.\begin{aligned} &P(s) = Q(s)\overline{P}(s) \\ &\left[\bigcirc_{p,n-p} \quad I_p\right] U(s) - P(s)X(s) = Q(s)L(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\bigcirc_{p,n-p} \quad I_p\right] U(s) = Q(s)\left(L(s) + \overline{P}(s)X(s)\right)$$

Ο πίνακας $\left[\bigcirc_{p,n-p} \quad I_p\right] U(s)$ είναι ο υποπίνακας του $U(s)$ που αποτελείται από τις τελευταίες p γραμμές και οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $U(s)$ είναι ίσοι με 1 γιατί είναι unimodular. Τότε, από [Thompson, 1979], και οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $\left[\bigcirc_{p,n-p} \quad I_p\right] U(s)$ είναι ίσοι με 1. Επιπλέον, οι αναλλοίωτοι παράγοντες του πίνακα $Q(s)$ διαιρούν τους αναλλοίωτους παράγοντες του πίνακα $Q(s)\left(L(s) + \overline{P}(s)X(s)\right)$. Τότε οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $Q(s)$ είναι ίσοι με 1, άρα ο $Q(s)$ είναι unimodular.

▲

<u>Πρόταση 3.3.14</u>

Έστω $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ non-singular πίνακας. Υποθέτουμε ότι $\deg\left(\det P(s)\right) > 0$. Τότε υπάρχει παρατηρήσιμο ζεύγος $(A,C) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{p\times n}$ του οποίου η αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα είναι ο $P(s)$.

Απόδειξη :

Υπάρχει unimodular πίνακας V(s) τέτοιος ώστε ο πίνακας $P_1(s) = V(s)P(s)$ να είναι row proper [Wolovich , 1974] .Τότε υπάρχει παρατηρήσιμο ζεύγος (A,C) τέτοιο ώστε $C\left(sI_n - A\right)^{-1} = P_1(s)^{-1}$ [Kailath , 1980] .

▲

Θεώρημα 3.3.15

Έστω $\left(A_1,C_1\right),\left(A_2,C_2\right) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{p\times n}$ παρατηρήσιμα ζεύγη και $P_1(s), P_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ αναπαραστάσεις μέσω πολυωνυμικών πινάκων των (A_1,C_1) , (A_2,C_2) αντίστοιχα . Τότε

(i) υπάρχει non-singular πίνακας $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $\left(A_1,C_1\right) = \left(TA_2T^{-1}, C_2T^{-1}\right)$ αν και μόνο αν υπάρχει unimodular πίνακας $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ τέτοιος ώστε

$$P_1(s) = U(s)P_2(s) \tag{3.16}$$

(ii) τα ζεύγη (A_1,C_1) και (A_2,C_2) είναι output - injection ισοδύναμα αν και μόνο αν υπάρχουν πίνακες $B(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times p}$ biproper και $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ unimodular , τέτοιοι ώστε

$$P_1(s) = U(s)P_2(s)B(s) \tag{3.17}$$

Απόδειξη :

(i) Αν (A_1,C_1) και (A_2,C_2) όμοια ζεύγη τότε , από την πρόταση 3.3.13 , υπάρχουν πίνακες $N_1(s),N_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times n}$ τέτοιοι ώστε $P_i(s),N_i(s), i = 1,2$ αριστερά πρώτοι και $P_1(s)^{-1}N_1(s) = P_2(s)^{-1}N_2(s)$. Τότε οι $P_1(s), P_2(s)$ είναι αριστερά ισοδύναμοι . Αντίστροφα , αν οι $P_1(s),P_2(s)$ είναι αριστερά ισοδύναμοι τότε οι $\begin{bmatrix} sI_n - A_1 \\ C_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} sI_n - A_2 \\ C_2 \end{bmatrix}$ είναι ισοδύναμοι , άρα τα ζεύγη (A_1,C_1) και (A_2,C_2) είναι όμοια .

(ii) Αν $P_i(s)$ είναι οι αναπαραστάσεις μέσω πολυωνυμικών πινάκων των (A_i,C_i) υπάρχουν πίνακες $U_i(s)$, $V_i(s)$ unimodular και $X_i(s)$ τέτοιοι ώστε να ισχύει η (3.14), $i=1,2$. Θέτουμε $N_i(s)=\left[\bigcirc_{p,n-p} \quad I_p\right]U_i(s)-P_i(s)X_i(s)$. Είδαμε στην πρόταση 3.3.13 ότι οι $P_i(s)^{-1}N_i(s)$ είναι αριστερά πρώτες κλασματικές πολυωνυμικές περιγραφές των $G_i(s)=C_i\left(sI_n-A_i\right)^{-1}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν πίνακες $\overline{Q}\in\mathbb{R}^{p\times p}$ αντιστρέψιμος, $\overline{F}\in\mathbb{R}^{n\times p}$ έτσι ώστε $\left(A_1,C_1\right)=\left(A_2+\overline{F}C_2,\overline{Q}C_2\right)$. Θέτουμε $\overline{R}(s)=\overline{Q}\left(I_p-G_2(s)\overline{F}\right)^{-1}$. Ο $\overline{R}(s)$ είναι unimodular και ο $P_2(s)\overline{R}(s)^{-1}$ πολυωνυμικός. Επιπλέον $G_1(s)=\overline{R}(s)G_2(s)$. Έτσι

$$P_1(s)^{-1}N_1(s)=\left(P_2(s)\overline{R}(s)^{-1}\right)^{-1}N_2(s)$$

Θα δείξουμε ότι οι $N_2(s),P_2(s)\overline{R}(s)^{-1}$ είναι αριστερά πρώτοι. Έστω ότι υπάρχει πίνακας $H(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ έτσι ώστε $P_2(s)\overline{R}(s)^{-1}=H(s)\overline{P}_2(s)$ και $N_2(s)=H(s)\overline{N}_2(s)$.

Έχουμε ότι

$$P_2(s)\left(I_p-P_2(s)^{-1}N_2(s)\overline{F}\right)Q^{-1}=H(s)\overline{P}_2(s) \quad \Rightarrow$$
$$P_2(s)=H(s)\overline{P}_2(s)Q+N_2(s)\overline{F}=H(s)\left(\overline{P}_2(s)Q+\overline{N}_2(s)\overline{F}\right)$$

Αφού οι $P_2(s)$, $N_2(s)$ είναι αριστερά πρώτοι, ο $H(s)$ είναι unimodular. Άρα οι $P_1(s)^{-1}N_1(s)$, $\left(P_2(s)\overline{R}(s)^{-1}\right)N_2(s)$ είναι δύο αριστερά πρώτες κλασματικές πολυωνυμικές περιγραφές της $G_1(s)$, που σημαίνει ότι υπάρχει unimodular πίνακας $U(s)$ τέτοιος ώστε $P_1(s)=U(s)P_2(s)\overline{R}(s)^{-1} \quad \Rightarrow \quad P_1(s)=U(s)P_2(s)B(s)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $P_1(s)=U(s)P_2(s)B(s)$ με $U(s)$ unimodular και $B(s)$ biproper. Έστω $N_2(s)$ πολυωνυμικός πίνακας τέτοιος ώστε $P_2(s)$, $N_2(s)$ είναι αριστερά πρώτοι και $G_2(s)=C_2\left(sI_n-A_2\right)^{-1}=P_2(s)^{-1}N_2(s)$. Αφού ο $P_2(s)B(s)$

είναι πολυωνυμικός και ο B(s) biproper έχουμε ότι $B(s)^{-1} = \overline{Q}\left(I_p - G_2(s)\overline{F}\right)^{-1}$ για κάποιους πίνακες $\overline{Q}$, αντιστρέψιμο , και $\overline{F}$. Τότε

$$\overline{Q}C_2\left(sI_n - \left(A_2 + \overline{F}C_2\right)\right)^{-1} = \left(P_2(s)B(s)\right)^{-1} N_2(s)$$

που είναι μία αριστερά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή της παράστασης $\overline{Q}C_2\left(sI_n - \left(A_2 + \overline{F}C_2\right)\right)^{-1}$. Θέτουμε $N_1(s) = U(s)N_2(s)$. Τότε

$$\overline{Q}C_2\left(sI_n - \left(A_2 + \overline{F}C_2\right)\right) = P_1(s)^{-1}N_1(s)$$

όπου οι $N_1(s), P_1(s)$ είναι αριστερά πρώτοι . Επομένως τα ζεύγη $\left(A_2 + \overline{F}C_2, \overline{Q}C_2\right)$ και $\left(A_1, C_1\right)$ έχουν την ίδια αναπαράσταση μέσω πολυωνυμικού πίνακα . Από το (i) προκύπτει ότι τα δύο παραπάνω ζεύγη είναι όμοια .

▲

<u>Ορισμός 3.3.16</u>

Έστω $P_1(s), P_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ non - singular πίνακες . Θα λέμε ότι οι πίνακες $P_1(s)$ και $P_2(s)$ είναι output - injection ισοδύναμοι (output - injection equivalent) αν υπάρχουν πίνακες $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ unimodular και $B(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times p}$ biproper , τέτοιοι ώστε $P_1(s) = U(s)P_2(s)B(s)$ δηλαδή αν είναι δεξιά Wiener - Hopf ισοδύναμοι .

Άμεσο επακόλουθο των παραπάνω είναι η επόμενη πρόταση .

<u>Πρόταση 3.3.17</u> [Fuhrmann-Helmke , 2001] , [Gohberg et al. , 1980]

Έστω $(A,C) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{p\times n}$ παρατηρήσιμο ζεύγος και $C\left(sI_n - A\right)^{-1} = P(s)^{-1}N(s)$ όπου οι $P(s)$, $N(s)$ είναι αριστερά πρώτοι . Τότε οι δείκτες παρατηρησιμότητας του (A,C) είναι ίσοι με τους δεξιούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $P(s)$.

Παράδειγμα 3.3.18

Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Η συνάρτηση obsv του MATLAB υπολογίζει τον πίνακα παρατηρησιμότητας του (A,C) .

```
>> rank(obsv(A,C))

ans =
     3
```

Δηλαδή ο πίνακας παρατηρησιμότητας έχει πλήρη τάξη , που σημαίνει ότι το ζεύγος (A, C) είναι παρατηρήσιμο .

$$C\left(sI_n - A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{(s+2)(s-3)}{(s-1)(s^2-2s+4)} & \dfrac{-1}{s-1} & \dfrac{(s-2)(s-3)}{(s-1)(s^2-2s+4)} \\ \dfrac{2(s^2-s+3)}{(s-1)(s^2-2s+4)} & \dfrac{1}{s-1} & \dfrac{-2}{(s-1)(s^2-2s+4)} \\ \dfrac{s^2+10s+7}{(s-1)(s^2-2s+4)} & \dfrac{3}{s-1} & \dfrac{2s^2+s-9}{(s-1)(s^2-2s+4)} \end{bmatrix}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις ldf και coprime του POLYX για να γράψουμε την παράσταση $C\left(sI_n - A\right)^{-1}$ ως $P(s)^{-1}N(s)$, όπου $P(s)$, $N(s)$ είναι αριστερά πρώτοι .

```
>> d=coprime(ldf(C*inv(s*eye(3)-A)))

d.denominator =                                          ← P(s)
    0.44 + 0.29s    -1.3 + 0.73s     0.59 - 0.15s
   -1.6 + 0.73s     -1.6 - 0.59s     0.44s
   -1.5 - 0.59s     -0.44 + 0.15s    -0.88 + 0.29s
```

```
d.numerator =                                   ←  N(s)
    1.6    0     0
    0      0     1.6
    0      1.6   0
```

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση isrowred του POLYX, θα δούμε αν ο P(s) είναι row proper.

```
>> isrowred(den(d))

ans =
     1
```

Η συνάρτηση επέστρεψε την τιμή 1, άρα ο P(s) είναι row proper. Έτσι, οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του P(s) είναι οι βαθμοί των γραμμών του σε αύξουσα διάταξη, δηλαδή $l_1 = 1, l_2 = 1, l_3 = 1$. Επομένως, οι δείκτες παρατηρησιμότητας του παρατηρήσιμου ζεύγους (A,C) είναι οι $l_1 = 1$, $l_2 = 1, l_3 = 1$.

3.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο τρίτο κεφάλαιο ορίσαμε την Wiener-Hopf παραγοντοποίηση και τους αντίστοιχους δείκτες παραγοντοποίησης. Είδαμε κάποιες ιδιότητες σχετικά με την μοναδικότητα και το πρόσημο των Wiener - Hopf δεικτών παραγοντοποίησης. Τέλος, εισάγαμε την έννοια των τοπικών Wiener - Hopf δεικτών παραγοντοποίησης. Αυτό το κεφάλαιο είναι η βάση για τα επόμενα κεφάλαια, όπου θα δούμε πώς υπολογίζουμε την Wiener - Hopf παραγοντοποίηση και τους αντίστοιχους δείκτες με την βοήθεια του MATLAB και θα μελετήσουμε την σχέση των Wiener - Hopf δεικτών παραγοντοποίησης με την πεπερασμένη και άπειρη δομή ρητού πίνακα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

4.1 ΑΡΙΣΤΕΡΟΙ WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 1

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$.

Βήμα 1

Μετατρέπουμε τον T(s) σε column proper πολλαπλασιάζοντάς τον με έναν $n \times n$ unimodular πίνακα $V(s)$. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας την συνάρτηση colred του POLYX .

$T(s)V(s) = \overline{T}(s)$

Βήμα 2

Οι ακέραιοι $k_1, \ldots, k_r$, $r = \min\{m, n\}$ σε αύξουσα διάταξη είναι οι αριστεροί Wiener -Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $T(s)$.

Βήμα 3

Αν $m = n$

Γράφουμε τον πίνακα $\overline{T}(s)$ ως :

$$\overline{T}(s) = \left[\overline{T}(s)\right]_c^h \operatorname{diag}\left[s^{k_m}, \ldots, s^{k_1}\right] + \overline{T}_c(s) = \left[\overline{T}(s)\right]_c^h \overline{D}(s) + \overline{T}_c(s)$$

Βήμα 4

Η αριστερή Wiener - Hopf παραγοντοποίηση είναι η $T(s) = B_l(s)D_l(s)U_l(s)$,

όπου $$B_l(s) = \left(\left[\overline{T}(s)\right]_c^h + \overline{T}_c(s)\mathrm{diag}\left[s^{-k_m},...,s^{-k_1}\right]\right)\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{m\times m},$$

$$U_l(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{n\times n} V(s)^{-1} \quad \text{και} \quad D_l(s) = \mathrm{diag}\left[s^{k_1},...,s^{k_m}\right]$$

Βήμα 5

αλλιώς αν $m < n$

Ο πίνακας $\overline{T}(s)$ που προκύπτει από το Βήμα 1 είναι της μορφής $\overline{T}(s) = \left[\tilde{T}(s) \quad O_{m,n-m}\right]$, όπου ο πίνακας $\tilde{T}(s)$ είναι column proper με βαθμούς στηλών σε φθίνουσα διάταξη και γράφεται ως:

$$\tilde{T}(s) = \left[\tilde{T}(s)\right]_c^h \mathrm{diag}\left[s^{k_m},...,s^{k_1}\right] + \tilde{T}_c(s) = \left[\tilde{T}(s)\right]_c^h \tilde{D}(s) + \tilde{T}_c(s)$$

Βήμα 6

Η αριστερή Wiener - Hopf παραγοντοποίηση είναι η

$T(s) = B_l(s)D_l(s)U_l(s)$, όπου

$$B_l(s) = \left(\left[\tilde{T}(s)\right]_c^h + \tilde{T}_c(s)\tilde{D}(s)^{-1}\right)\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{m\times m},$$

$$U_l(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{n\times n} V(s)^{-1} \quad \text{και} \quad D_l(s) = \left[\mathrm{diag}\left[s^{k_1},...,s^{k_m}\right] \quad O_{m,n-m}\right]$$

Βήμα 7

αλλιώς

$$\overline{T}(s) = \left[\overline{T}(s)\right]_c^h \operatorname{diag}\left[s^{k_n},...,s^{k_1}\right] + \overline{T}_c(s) = \left[\overline{T}(s)\right]_c^h \overline{D}(s) + \overline{T}_c(s)$$

Βήμα 8

Προσθέτουμε m-n στήλες στον πίνακα $\left[\overline{T}(s)\right]_c^h$, έτσι ώστε να γίνει ένας $m \times m$ non-singular unimodular πίνακας $\hat{T}$. Αυτό γίνεται με τη χρήση της συνάρτησης complete του POLYX.

Βήμα 9

Η αριστερή Wiener - Hopf παραγοντοποίηση είναι η $T(s) = B_l(s)D_l(s)U_l(s)$, όπου

$$B_l(s) = \left(\hat{T} + \overline{T}_c(s)\left[\overline{D}(s)^{-1} \quad \bigcirc_{n,m-n}\right]\right)\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{m\times m},$$

$$U_l(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{n\times n} V(s)^{-1} \quad \text{και} \quad D_l(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left[s^{k_1},...,s^{k_n}\right] \\ \bigcirc_{m-n,n} \end{bmatrix}$$

Βήμα 10

τέλος.

Παράδειγμα 4.1.1

Έστω ο πίνακας $T(s) = \begin{bmatrix} 3s^2 - s - 1 & s^2 - s & 1 \\ s^2 + 5s + 2 & s^3 + s^2 - 4s - 2 & s^2 + 5 \\ 0 & s & s^2 - 1 \end{bmatrix}$.

Βήμα 1

```
>> [d,r,u,ui]=colred([3*s^2-s-1 s^2-s 1; s^2+5*s+2 s^3+s^2-4*s-2 s^2+5; 0 s s^2-1])

d =

          -s + s^2        -1 - s + 3s^2              1          ←  T̄(s)
 -2 - 4s + s^2 + s^3       2 + 5s + s^2          5 + s^2
                   s                  0         -1 + s^2

r =                                      ←  αριθμός μη μηδενικών στηλών του T̄(s)
   3

u =
   0   1   0                             ←  V(s)
   1   0   0
   0   0   1

ui =
   0   1   0                             ←  V(s)^-1
   1   0   0
   0   0   1
```

Βήμα 2

Οι αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι οι βαθμοί των στηλών του πίνακα $\overline{T}(s)$ σε αύξουσα διάταξη , δηλαδή $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$.

Βήμα 3

$$\overline{T}(s) = \left[\overline{T}(s)\right]_c^h \operatorname{diag}\left[s^3, s^2, s^2\right] + \overline{T}_c(s) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^3 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^2 - s & -s-1 & 1 \\ s^2 - 4s - 2 & 5s+2 & 5 \\ s & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 4

Η αριστερή Wiener-Hopf παραγοντοποίηση είναι η $T(s) = B_l(s)D_l(s)U_l(s)$, όπου

$$B_l(s) = \left(\left[\overline{T}(s)\right]_c^h + \overline{T}_c(s)\mathrm{diag}\left[s^{-3}, s^{-2}, s^{-2}\right]\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{3s^2-s-1}{s^2} & \frac{s-1}{s^2} \\ \frac{s^2+5}{s^2} & \frac{s^2+5s+2}{s^2} & \frac{s^3+s^2-4s-2}{s^3} \\ \frac{s^2-1}{s^2} & 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

$\det B_l(s) = \dfrac{3s^7 + s^6 - 24s^5 + 13s^3 + 12s^2 - s - 2}{s^7}$ που είναι biproper ρητή συνάρτηση

άρα ο πίνακας $B_l(s)$ είναι biproper.

$D_l(s) = \mathrm{diag}\left[s^2, s^2, s^3\right]$ και $U_l(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (unimodular) .

4.2 ΔΕΞΙΟΙ WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$.

Βήμα 1

Μετατρέπουμε τον $T(s)$ σε row proper πολλαπλασιάζοντάς τον με ένα $m \times m$ unimodular πίνακα $V(s)$. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας την συνάρτηση rowred του POLYX .

$V(s)T(s) = \overline{T}(s)$

Βήμα 2

Οι ακέραιοι $l_1, \ldots, l_r$, $r = \min\{m, n\}$ σε αύξουσα διάταξη είναι οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $T(s)$.

Βήμα 3

Αν $m = n$

Γράφουμε τον πίνακα $\overline{T}(s)$ ως :

$$\overline{T}(s) = \mathrm{diag}\left[s^{l_m},...,s^{l_1}\right]\left[\overline{T}(s)\right]_r^h + \overline{T}_r(s) = \overline{D}(s)\left[\overline{T}(s)\right]_r^h + \overline{T}_r(s)$$

Βήμα 4

Η δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση είναι η $T(s) = U_r(s)D_r(s)B_r(s)$,

όπου $U_r(s) = V(s)^{-1}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{m\times m}$, $D_r(s) = \mathrm{diag}\left[s^{l_1},...,s^{l_m}\right]$ και

$$B_r(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{n\times n}\left(\left[\overline{T}(s)\right]_r^h + \overline{D}(s)^{-1}\overline{T}_r(s)\right)$$

Βήμα 5

αλλιώς αν $m > n$

Ο $\overline{T}(s)$ που προκύπτει από το Βήμα 1 είναι της μορφής $\overline{T}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{T}(s) \\ O_{m-n,n} \end{bmatrix}$

όπου ο πίνακας $\tilde{T}(s)$ είναι row proper με βαθμούς γραμμών σε φθίνουσα διάταξη και γράφεται ως :

$$\tilde{T}(s) = \mathrm{diag}\left[s^{l_n},...,s^{l_1}\right]\left[\tilde{T}(s)\right]_r^h + \tilde{T}_r(s) = \tilde{D}(s)\left[\tilde{T}(s)\right]_r^h + \tilde{T}_r(s)$$

Βήμα 6

Η δεξιά Wiener-Hopf παραγοντοποίηση είναι η $T(s) = U_r(s)D_r(s)B_r(s)$,

όπου $$U_r(s) = V(s)^{-1}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{m\times m}, \quad D_r(s) = \begin{bmatrix} \widetilde{D}(s) \\ \bigcirc_{m-n,n} \end{bmatrix}$$ και

$$B_r(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{n\times n}\left(\left[\widetilde{T}(s)\right]_r^h + \widetilde{D}(s)^{-1}\widetilde{T}(s)\right).$$

<u>Βήμα 7</u>

αλλιώς

$$\overline{T}(s) = \mathrm{diag}\left[s^{l_m},\ldots,s^{l_1}\right]\left[\overline{T}(s)\right]_r^h + \overline{T}_r(s) = \overline{D}(s)\left[\overline{T}(s)\right]_r^h + \overline{T}_r(s)$$

<u>Βήμα 8</u>

Προσθέτουμε n-m γραμμές στον πίνακα $\left[\overline{T}(s)\right]_r^h$, έτσι ώστε να γίνει ένας $n\times n$ non - singular unimodular πίνακας $\hat{T}$. Αυτό γίνεται με την χρήση της συνάρτησης complete του POLYX.

<u>Βήμα 9</u>

Η δεξιά Wiener-Hopf παραγοντοποίηση είναι η

$T(s) = U_r(s)D_r(s)B_r(s)$, όπου

$$U_r(s) = V(s)^{-1}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{m\times m}, \quad D_r(s) = \left[\mathrm{diag}\left[s^{l_1},\ldots,s^{l_m}\right] \quad \bigcirc_{m,n-m}\right],$$

$$B_r(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{n\times n}\left(\hat{T} + \begin{bmatrix} \overline{D}(s)^{-1} \\ \bigcirc_{n-m,m} \end{bmatrix}\overline{T}_r(s)\right).$$

<u>Βήμα 10</u>

τέλος .

Παράδειγμα 4.2.1

Έστω ο πίνακας $T(s) = \begin{bmatrix} 0 & s^2+2 & s^3-1 \\ 3 & s^4+s-8 & 7s^2+4s+1 \end{bmatrix}$

Βήμα 1

```
>> [d,rk,u,ui]=rowred([0 s^2+2 s^3-1 ; 3 s^4+s-8 7*s^2+4*s+1])

d =                                                    ← T̄(s)
    3   -8 + s + s^4    1 + 4s + 7s^2
    0    2 + s^2        -1 + s^3

rk =
    2

u =
    0   1                                              ← V(s)
    1   0

ui =
    0   1                                              ← V(s)^-1
    1   0
```

Βήμα 2

Οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα T(s) σε αύξουσα διάταξη είναι οι $l_1 = 3$, $l_2 = 4$.

Βήμα 7

$$d = \overline{T}(s) = \begin{bmatrix} s^4 & 0 \\ 0 & s^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & s-8 & 7s^2+4s+1 \\ 0 & s^2+2 & -1 \end{bmatrix} = \overline{D}(s)\left[\overline{T}(s)\right]_r^h + \overline{T}_r(s)$$

Βήμα 8

>> complete(Q) $\qquad Q = \left[\overline{T}(s)\right]_r^h$

ans =

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \leftarrow \hat{T}$$

Βήμα 9

Η δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση είναι η $T(s) = U_r(s)D_r(s)B_r(s)$, όπου

$$U_r(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_r(s) = \begin{bmatrix} s^3 & 0 & 0 \\ 0 & s^4 & 0 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$B_r(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\hat{T} + \begin{bmatrix} \overline{D}(s)^{-1} \\ O_{1\times 2} \end{bmatrix}\overline{T}_r(s)\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\hat{T} + \begin{bmatrix} s^{-4} & 0 \\ 0 & s^{-3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & s-8 & 7s^2+4s+1 \\ 0 & s^2+2 & -1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{s^2+2}{s^3} & \dfrac{s^3-1}{s^3} \\ \dfrac{3}{s^4} & \dfrac{s^4+s-8}{s^4} & \dfrac{7s^2+4s+1}{s^4} \end{bmatrix} \qquad \det B_r(s) = \frac{-s^7+7s^4+12s^3+15s^2+7s-6}{s^7}$$

αλγόριθμος 2

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$.

βήμα 1

Παίρνουμε τον ανάστροφο του $T(s)$. $T'(s) = T(s)^T$

βήμα 2

Εφαρμόζουμε τον ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ 1 για τον πίνακα $T'(s)$.

$T(s)^T = B_l(s)D_l(s)U_l(s)$

βήμα 3

Μία δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση του $T(s)$ είναι η

$$T(s) = U_r(s)D_r(s)B_r(s) = U_l(s)^T D_l(s)B_l(s)^T$$

Οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $T(s)$ είναι οι αριστεροί Wiener -Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $T'(s)$.

Παράδειγμα 4.2.2

Έστω ο πίνακας $T(s) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ s^2+2 & s^4+s-8 \\ s^3-1 & 7s^2+4s+1 \end{bmatrix}$

βήμα 1

$$T'(s) = T(s)^T = \begin{bmatrix} 0 & s^2+2 & s^3-1 \\ 3 & s^4+s-8 & 7s^2+4s+1 \end{bmatrix}$$

βήμα 2

Βήμα 1

```
>> [d,rk,u,ui]=colred([0 s^2+2 s^3-1 ; 3 s^4+s-8 7*s^2+4*s+1])

d =

         0          2.2500         0                    ← T̄(s)
    3.0000         -8.2500         0

rk =
     2
```

u =

Columns 1 through 2

1 0.5s - 1.5s^2 - s^3 - 0.33s^4 - 0.083s^5 + 0.17s^6

0 1 + 0.25s - 0.5s^2

0 -0.25 + 0.5s ← V(s)

Column 3

0.89 - 1.3s - 2.2s^2 - 1.8s^3 - s^4 + 0.15s^7

0.44 - 0.44s^3

0.89 + 0.44s^2

ui = ← $V(s)^{-1}$

1	-0.22 + 0.33s + 1.2s^2 + 0.33s^4	-0.89 + 1.3s + 2.3s^2 + 1.2s^3
0	0.89 + 0.44s^2	-0.44 + 0.44s^3
0	0.25 - 0.5 s	1 + 0.25s - 0.5s^2

<u>Βήμα 2</u>

Οι αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι οι βαθμοί των στηλών του πίνακα $\overline{T}(s)$ σε αύξουσα διάταξη, δηλαδή $k_1 = 0$, $k_2 = 0$.

<u>Βήμα 5</u>

$$\tilde{T}(s) = \left[\tilde{T}(s)\right]_c^h \tilde{D}(s) + \tilde{T}_c(s) = \begin{bmatrix} 0 & 2.25 \\ 3 & -8.25 \end{bmatrix} I_2$$

<u>Βήμα 6</u>

Η αριστερή Wiener - Hopf παραγοντοποίηση είναι η

$$T(s)^T = B_l(s) D_l(s) U_l(s) \quad , \text{ όπου } B_l(s) = \begin{bmatrix} 0 & 2.25 \\ 3 & -8.25 \end{bmatrix}$$

$$U_l(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0.33s^4 + 1.2s^2 + 0.33s - 0.22 & 1.2s^3 + 2.3s^2 + 1.3s - 0.89 \\ 0 & 0.44s^2 + 0.89 & 0.44s^3 - 0.44 \\ 0 & -0.5s + 0.25 & -0.5s^2 + 0.25s + 1 \end{bmatrix}, \det U_l(s) = 1$$

και $$D_l(s) = \begin{bmatrix} I_2 & O_{2\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

βήμα 3

Η δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση είναι η $T(s) = U_r(s)D_r(s)B_r(s)$, όπου

$$U_r(s) = U_l(s)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.33s^4 + 1.2s^2 + 0.33s - 0.22 & 0.44s^2 + 0.89 & -0.5s + 0.25 \\ 1.2s^3 + 2.3s^2 + 1.3s - 0.89 & 0.44s^3 - 0.44 & -0.5s^2 + 0.25s + 1 \end{bmatrix}$$

$$B_r(s) = B_l(s)^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2.25 & -8.25 \end{bmatrix} \text{ και } D_r(s) = D_l(s)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι οι $l_1 = 0, l_2 = 0$.

4.3 ΑΡΙΣΤΕΡΟΙ WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΡΗΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 3

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times n}$.

Βήμα 1

Γράφουμε τον πίνακα $T(s)$ ως $T(s) = \frac{1}{d(s)}N(s)$, όπου $d(s)$ ο ελάχιστος κοινός παρονομαστής των στοιχείων του $T(s)$ και $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$.

Βήμα 2

Γράφουμε το πολυώνυμο $d(s)$ ως $d(s) = s^d\delta(s)$, όπου $d = \deg(d(s))$ και $\delta(s)$ πολυώνυμο .

Βήμα 3

Εφαρμόζουμε τον ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ 1 για τον πίνακα $N(s)$

$d(s)T(s) = N(s) = \overline{B}_l(s)\overline{D}_l(s)\overline{U}_l(s)$.

Οι αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $N(s)$ είναι οι $\kappa_1,...,\kappa_p$, $\kappa_1 \le ... \le \kappa_p$, $p = \min\{m, n\}$.

Βήμα 4

$$B_l(s) = \frac{1}{\delta(s)}\overline{B}_l(s) \quad , \quad U_l(s) = \overline{U}_l(s) \quad , \quad D_l(s) = s^{-d}\overline{D}_l(s) \quad , \quad T(s) = B_l(s)D_l(s)U_l(s)$$

Οι αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα T(s) είναι οι $k_1 = \kappa_1 - d, \ldots, k_p = \kappa_p - d$, $k_1 \le \ldots \le k_p$.

Παράδειγμα 4.3

Έστω ο ρητός πίνακας $T(s) = \begin{bmatrix} \frac{8}{s+2} & 0 & s & \frac{s^3-4}{s+1} \\ \frac{s^2+1}{s+1} & \frac{3s}{(s+1)^2} & \frac{s-7}{(s+2)^2} & 2 \end{bmatrix}$

Βήμα 1 : $T(s) = \frac{1}{d(s)}N(s)$, όπου $d(s) = (s+1)^2(s+2)^2 = s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4$ και

$$N(s) = \begin{bmatrix} 8(s+1)^2(s+2) & 0 & s(s+1)^2(s+2)^2 & (s^3-4)(s+2)^2(s+1) \\ (s^2+1)(s+1)(s+2)^2 & 3s(s+2)^2 & (s-7)(s+1)^2 & 2(s+1)^2(s+2)^2 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2 : $d(s) = s^d\delta(s) = s^4\left(1 + \frac{6}{s} + \frac{13}{s^2} + \frac{12}{s^3} + \frac{4}{s^4}\right)$

Βήμα 3 : ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 1 για τον N(s)

Βήμα 1 :

```
>> [D,rk,u,ui]=colred(N)

D =                                          ← N̄(s)
    24 + 36s + 12s^2     0     0     0
    3.2 + 20s + 17s^2    10    0     0

rk =
    2
```

u = ← V(s)

Column 1

1 + 1.4s + 0.3s^2 + 0.11s^3 + 0.001s^4

-4.8s - 5.2s^2 - 0.34s^3 - 0.1s^4 - 0.038s^5 - 0.00035s^6

-0.46 + 1.1s - 1.9s^2 - 0.65s^3 + 0.099s^4 + 0.001s^5

-0.5 + 2.6s + 0.55s^2 - 0.1s^3 - 0.001s^4

Column 2

0.67 - 3.4s - 3.3s^2 - 1.2s^3 - 0.33s^4 - 0.045s^5 - 0.00039s^6

9.9s+16s^2 +12s^3 + 2.7s^4+0.34s^5+ 0.11s^6 + 0.015s^7 + 0.00013s^8

-0.31 - 1.9s + s^2 + 4.3s^3 + 1.9s^4 + 0.058s^5 - 0.039s^6 - 0.00039s^7

0.67 - 3.1s - 5.7s^2 - 1.9s^3 - 0.019s^4 + 0.039s^5 + 0.00039s^6

Column 3

-0.12 - s - 1.2s^2 - 0.52s^3 - 0.14s^4 - 0.027s^5 - 0.00024s^6

1 + 3.7s + 5.9s^2 + 4.5s^3 + 1.5s^4 + 0.14s^5 + 0.046s^6 + 0.0089s^7 + 8e-005s^8

-0.21-0.37s+0.43s^2+1.3s^3+ 0.81s^4 + 0.093s^5 - 0.023s^6- 0.00024s^7

-0.12 - 1.2s - 1.8s^2 - 0.9s^3 - 0.069s^4 + 0.024s^5 + 0.00024s^6

Column 4

0.46 - 0.97s - 1.1s^2 - 0.43s^3 - 0.12s^4 - 0.02s^5 - 0.00017s^6

1.6s+4.6s^2+4s^3+1.1s^4+0.12s^5 + 0.039s^6 + 0.0065s^7+ 5.8e-005s^8

0.79-0.54s-0.045s^2+1.2s^3+0.68s^4 + 0.052s^5 - 0.017s^6 - 0.00017s^7

0.46 - 0.54s - 1.7s^2 - 0.73s^3 - 0.035s^4 + 0.017s^5 + 0.00017s^6

ui = ← $V(s)^{-1}$

Column 1

0.67 + 0.67s

0.18 - 0.75s - 1.6s^2 - 0.26s^3 + 0.49s^4 + 0.098s^5

0.68s + 6.4s^2 - 0.73s^3 - 1.2s^4 - 0.16s^5

0.46 + 0.089s + 0.089s^2

```
  Column 2
0
1.2s + 1.2s^2 + 0.3s^3
1 - 4.2s - 3.1s^2 - 0.48s^3
0.27

  Column 3
0.17s + 0.25s^2 + 0.083s^3
-0.69 - 1.3s - 0.9s^2 - 0.71s^3 - 0.59s^4 - 0.14s^5
5.2s + 1.2s^2 + 2.3s^3 + 1.5s^4 + 0.23s^5
1 - 0.032s + 0.045s^2

  Column 4
-0.67 - 0.33s + 0.17s^3 + 0.083s^4
1 + 3.8s + 4.4s^2 + 1.7s^3 - 0.16s^4 - 0.45s^5 - 0.14s^6
-13s - 12s^2 - 4s^3 + 0.87s^4 + 1.3s^5 + 0.23s^6
1.2s - 0.078s^2 + 0.045s^3


>> det(ui)

ans =
        1.0000
```

Βήμα 2 :

Οι αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα N(s) είναι οι βαθμοί των γραμμών του $\overline{N}(s)$ σε αύξουσα διάταξη , δηλαδή $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 2$.

Βήμα 3 :

$$\overline{N}(s) = \left[\overline{N}(s)\right]_c^h \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \overline{N}_c(s) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 17 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 36s+24 & 0 \\ 20s+3.2 & 0 \end{bmatrix}$$

Βήμα 4 :

$$\overline{B}_l(s)=\left(\left[\overline{N}(s)\right]_c^h+\overline{N}_c(s)\begin{bmatrix} s^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{12(s^2+3s+2)}{s^2} \\ 10 & \dfrac{17s^2+20s+3.2}{s^2} \end{bmatrix},$$

$$\overline{U}_l(s)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\text{ui}\ ,\ \overline{D}_l(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ N(s)=\overline{B}_l(s)\overline{D}_l(s)\overline{U}_l(s)$$

<u>Βήμα 4</u> :

$$B_l(s)=\frac{1}{\delta(s)}\overline{B}_l(s)=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{12s^2}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{10s^4}{(s+1)^2(s+2)^2} & \dfrac{s^2(17s^2+20s+3.2)}{(s+1)^2(s+2)^2} \end{bmatrix}\ (\text{ bipropper })\ ,$$

$$U_l(s)=\overline{U}_l(s)\quad,\quad D_l(s)=s^{-4}\overline{D}_l(s)=\begin{bmatrix} s^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^{-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad,\quad T(s)=B_l(s)D_l(s)U_l(s)$$

Άρα οι αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $T(s)$ είναι οι $k_1=-4\,,k_2=-2$, $k_1\le k_2$.

4.4 ΔΕΞΙΟΙ WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΡΗΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 4

Έστω $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{m\times n}$.

<u>Βήμα 1</u>

Γράφουμε τον πίνακα $T(s)$ ως $T(s)=\dfrac{1}{d(s)}N(s)$, όπου $d(s)$ ο ελάχιστος κοινός παρονομαστής των στοιχείων του $T(s)$ και $N(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times n}$.

Βήμα 2

Γράφουμε το πολυώνυμο $d(s)$ ως $d(s) = s^d \delta(s)$, όπου $d = \deg(d(s))$ και $\delta(s)$ πολυώνυμο .

Βήμα 3

Εφαρμόζουμε τον ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ 2 για τον πίνακα $N(s)$

$d(s)T(s) = N(s) = \overline{U}_r(s)\overline{D}_r(s)\overline{B}_r(s)$

Οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $N(s)$ είναι οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_p$, $p = \min\{m, n\}$.

Βήμα 4

$U_r(s) = \overline{U}_r(s)$, $B_r(s) = \dfrac{1}{\delta(s)}\overline{B}_r(s)$, $D_r(s) = s^{-d}\overline{D}_r(s)$, $T(s) = U_r(s)D_r(s)B_r(s)$

Οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $N(s)$ είναι οι $l_1 = \lambda_1 - d, \ldots, l_p = \lambda_p - d$, $l_1 \le \ldots \le l_p$.

Παράδειγμα 4.4

Έστω ο ρητός πίνακας $T(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s(s+1)(s+2)} & 0 & \dfrac{s}{(s+1)^2} \\ \dfrac{3}{s(s+1)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+3)^2} & \dfrac{3s+7}{s(s+1)^2(s+3)} \\ 0 & \dfrac{2}{s(s+1)(s+2)} & \dfrac{4s-6}{s(s+1)^2(s+3)^2} \end{bmatrix}$.

Βήμα 1 : $T(s) = \dfrac{1}{d(s)}N(s)$, όπου

$d(s) = s(s+1)^2(s+2)(s+3)^2 = s^6 + 10s^5 + 38s^4 + 68s^3 + 57s^2 + 18s$ και

$$N(s) = \begin{bmatrix} (s+3)^3(s+1) & 0 & s^2(s+2)(s+3)^2 \\ 3(s+1)(s+2)(s+3) & s(s+1)^2(s+2) & (3s+7)(s+2)(s+3) \\ 0 & 2(s+1)(s+3)^2 & (4s-6)(s+2) \end{bmatrix}$$

<u>Βήμα 2</u> : $d(s) = s^d \delta(s) = s^6 \left(1 + \frac{10}{s} + \frac{38}{s^2} + \frac{68}{s^3} + \frac{57}{s^4} + \frac{18}{s^5}\right)$

<u>Βήμα 3</u> : ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2 για τον N(s)

Βήμα 1 :

```
>> [D,rk,u,ui]=rowred(N)

D =                                                    ← N̄(s)

    Columns 1 through 2

    27 + 54s + 36s^2 + 10s^3 + s^4        0

    18 + 33s + 18s^2 + 3s^3               -7s - 10s^2 - 3s^3

    0                                     18 + 30s + 14s^2 + 2s^3

    Column 3

    18s^2 + 21s^3 + 8s^4 + s^5

     42 + 59s + 21s^2 + s^3

    -12 + 2s + 4s^2

rk =

     3

u =                                                    ← V(s)

   1    0     0

   0    1   -0.5s

   0    0     1

ui =                                                   ← V(s)^-1

   1    0     0

   0    1    0.5s

   0    0     1
```

Βήμα 2 :

Οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα N(s) είναι οι βαθμοί των γραμμών του $\overline{N}(s)$ σε αύξουσα διάταξη , δηλαδή $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$.

Βήμα 3 :

$$\overline{N}(s) = \mathrm{diag}\left[s^5, s^3, s^3\right]\left[\overline{N}(s)\right]_r^h + \overline{N}_r(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} s^5 & 0 & 0 \\ 0 & s^3 & 0 \\ 0 & 0 & s^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^4+10s^3+36s^2+54s+27 & 0 & 8s^4+21s^3+18s^2 \\ 18s^2+33s+18 & -10s^2-7s & 21s^2+59s+42 \\ 0 & 14s^2+30s+18 & 4s^2+2s-12 \end{bmatrix}$$

Βήμα 4 :

$$N(s) = \overline{U}_r(s)\overline{D}_r(s)\overline{B}_r(s)$$

$$\overline{B}_r(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\left[\overline{N}(s)\right]_r^h + \mathrm{diag}\left[s^5, s^3, s^3\right]^{-1}\overline{N}_r(s)\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2(s+1)(s+3)^2}{s^3} & \dfrac{2(s+2)(2s-3)}{s^3} \\ \dfrac{3(s+1)(s+2)(s+3)}{s^3} & \dfrac{-(s+1)(3s+7)}{s^2} & \dfrac{(s+2)(s^2+19s+21)}{s^3} \\ \dfrac{(s+1)(s+3)^3}{s^5} & 0 & \dfrac{(s+2)(s+3)^2}{s^3} \end{bmatrix}$$

$$\overline{U}_r(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5s & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{D}_r(s) = \mathrm{diag}\left[s^3, s^3, s^5\right].$$

<u>Βήμα 4</u> :

$$B_r(s) = \frac{1}{\delta(s)}\overline{B}_r(s) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2s^2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{2s^2(2s-3)}{(s+1)^2(s+3)^2} \\ \dfrac{3s^2}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{-s^3(3s+7)}{(s+1)(s+2)(s+3)^2} & \dfrac{s^2(s^2+19s+21)}{(s+1)^2(s+3)^2} \\ \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & 0 & \dfrac{s^2}{(s+1)^2} \end{bmatrix},$$

$$U_r(s) = \overline{U}_r(s) \quad , \quad D_r(s) = s^{-6}\overline{D}_r(s) = \mathrm{diag}\left[s^{-3}, s^{-3}, s^{-1}\right] \quad , \quad T(s) = U_r(s)D_r(s)B_r(s) .$$

Άρα οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα T(s) είναι οι $l_1 = -3$, $l_2 = -3$, $l_3 = -1$, $l_1 \le l_2 \le l_3$, παρατηρούμε ότι είναι όλοι αρνητικοί κάτι που περιμέναμε, αφού ο πίνακας T(s) είναι αυστηρά proper.

4.5 ΤΟΠΙΚΟΙ WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 5

Έστω $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$.

Βήμα 1

Βρίσκουμε την Smith κανονική μορφή του πίνακα P(s) και παραγοντοποιούμε τους αναλλοίωτους παράγοντές του $\varepsilon_1(s),...,\varepsilon_m(s)$. $S^{\mathbb{C}}_{P(s)} = U(s)P(s)V(s)$

Βήμα 2

Υπολογίζουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των αναλλοίωτων παραγόντων του P(s). $c = \text{ΜΚΔ}\left(\varepsilon_1(s),...,\varepsilon_m(s)\right)$

Βήμα 3

αν $c = 1$

υπολογίζουμε τις, έστω r, ρίζες του πολυωνύμου $\varepsilon_m(s)$: $\lambda_1,...,\lambda_r$.

Για $i = 1,2,...,r$

Για $j = 1,2,...,m$

βρίσκουμε την πολλαπλότητα της ρίζας του αναλλοίωτου παράγοντα $\varepsilon_j(s)$

$\alpha_i(s) = \text{diag}\left[(s-\lambda_i)^{\rho_{i1}}, (s-\lambda_i)^{\rho_{i2}}, ..., (s-\lambda_i)^{\rho_{im}}\right]$, $\beta_i(s) = \alpha_i(s)^{-1} S^{\mathbb{C}}_{P(s)}$

Γράφουμε τον P(s) ως $P(s) = A_i(s)B_i(s) = \left(U(s)^{-1}\alpha_i(s)\right)\left(\beta_i(s)V(s)^{-1}\right)$.

Βήμα 4

βρίσκουμε τους Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $A_i(s)$.

Βήμα 5

Οι τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα P(s) ως προς το πολυώνυμο $\pi(s) = s - \lambda_i$ είναι οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $A_i(s)$.

Βήμα 6

αλλιώς

βρίσκουμε τις , έστω q , ρίζες του c .

Για $i = 1,2,..., q$

Για $j = 1,2,...,m$

βρίσκουμε την πολλαπλότητα της ρίζας του αναλλοίωτου παράγοντα $\varepsilon_j(s)$

$\alpha_i(s) = \mathrm{diag}\left[(s-\lambda_i)^{\rho_{i1}}, (s-\lambda_i)^{\rho_{i2}}, ..., (s-\lambda_i)^{\rho_{im}}\right]$, $\beta_i(s) = \alpha_i(s)^{-1} S^{\mathbb{C}}_{P(s)}$

Γράφουμε τον P(s) ως $P(s) = A_i(s)B_i(s) = \left(U(s)^{-1}\alpha_i(s)\right)\left(\beta_i(s)V(s)^{-1}\right)$.

Βήμα 7

βρίσκουμε τους Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $A_i(s)$.

Βήμα 8

Οι τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα P(s) ως προς το πολυώνυμο $\pi(s) = s - \lambda_i$ είναι οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $A_i(s)$.

Βήμα 9

τέλος .

Παράδειγμα 4.5

Έστω $P(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 2s \\ s & 1 \end{bmatrix}$.

Βήμα 1

```
>> [s,u,v,ui,vi]=smith([s+1 2*s; s 1])

s =                                          ← S^C_P(s)

    1     0
    0   -0.5 - 0.5s + s^2

u =                                          ← U(s)

    0    -1
    1    -2s
v =                                          ← V(s)

    0    -0.5
   -1     0.5s

ui =                                         ← U(s)^-1

   -2s     1
   -1      0

vi =                                         ← V(s)^-1

   -s    -1
   -2     0
```

Βήμα 2

$c = 1$, αφού ο ένας αναλλοίωτος παράγοντας είναι ίσος με 1 .

Βήμα 3

Οι ρίζες του αναλλοίωτου παράγοντα $\varepsilon_2(s)$ είναι $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -0.5$.

i =1

$$P(s) = A_1(s)B_1(s) = \left(\begin{bmatrix} -2s & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s+0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -s & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} -2s & s-1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -s & -1 \\ -2s-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Βήμα 4

```
>> iscolred([-2*s s-1 ; -1 0])

ans =
     0

>> colred([-2*s s-1 ; -1 0])

ans =
   -2s    -1
   -1     -0.5

>> isrowred([-2*s s-1 ; -1 0])

ans =
     1
```

Τόσο οι αριστεροί όσο και οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $A_1(s)$ είναι οι $\mu_{11} = 0$, $\mu_{12} = 1$, κάτι που περιμέναμε, αφού οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $A_1(s)$ είναι οι αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $A_1(s)^T$ και ο $A_1(s)$ είναι τετραγωνικός .

Βήμα 5

Οι τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του P(s) ως προς το πολυώνυμο $\pi(s) = s - 1$ είναι οι $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$.

i =2

$$P(s) = A_2(s)B_2(s) = \left(\begin{bmatrix} -2s & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s+0.5 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -s & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} -2s & s+0.5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -s & -1 \\ -2s+2 & 0 \end{bmatrix}$$

Βήμα 4

```
>> iscolred([-2*s 1; -1 0]*[1 0;0 s+0.5])

ans =
     0
>> colred([-2*s 1; -1 0]*[1 0;0 s+0.5])

ans =
   -2s    0.5
   -1    -0.5

>> isrowred([-2*s 1; -1 0]*[1 0;0 s+0.5])

ans =
     1
```

Οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $A_2(s)$ είναι οι $\mu_{21} = 0$, $\mu_{22} = 1$.

Βήμα 5

Οι τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του P(s) ως προς το πολυώνυμο $\pi(s) = s + 0.5$ είναι οι $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$.

4.6 ΚΩΔΙΚΑΣ ΣΕ MATLAB

4.6.1 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 1

Η συνάρτηση coldegree επιστρέφει τους πίνακες $[T(s)]_c^h$, $D_c(s)$, $T_c(s)$, όπου $D_c(s)$ διαγώνιος πίνακας, όταν ο T(s) γράφεται ως $T(s) = [T(s)]_c^h D_c(s) + T_c(s)$.

---

function [q,d,r]=coldegree(t)

```
% Decomposition of a polynomial mxn matrix according to column degrees.
%
% [q,d,r]=coldegree(t) accepts a polynomial matrix t as an input and returns
% q which is a leading column coefficients matrix,
% d which is a diagonal matrix d=diag[s^a(i)/i=1:n] ,
% where a is row vector of column degrees
% r which is a matrix whose columns are formed by the coefficients
% of the powers deg(t,'col')-1 in the corresponding column of t and so on.
%
% t is written as t=q*d+r

syms s
n=size(t);
k=deg(t,'col');
m=zeros(1,n(2))*s;
for i=1:n(2)
   m(i)=s^k(i);
end
d=diag(m,0);
[q,r]=rdiv(t,d);
```

Η συνάρτηση colred του POLYX επιστρέφει έναν πίνακα με βαθμούς στηλών σε φθίνουσα διάταξη . Η συνάρτηση exchange υπολογίζει τους unimodular τετραγωνικούς πίνακες , δεδομένης της διάστασης του πίνακα , που χρησιμεύουν στον υπολογισμό των πινάκων της Wiener - Hopf παραγοντο-ποίησης ώστε οι βαθμοί στηλών στον πίνακα $D_l(s)$ να είναι σε αύξουσα διάταξη .

```
-----------------------------------------------------
function h=exchange(v)
-----------------------------------------------------
% Given a positive number v
% this function returns a square
% matrix h of the form
%  [0 0 ... 0 1]
%  [0 0 ... 1 0]
%  [. .   ...  .  .]
%  [0 1 ... 0 0]
%  [1 0 ... 0 0]

h=[];
for i=1:v
   x=[zeros(1,v-i) 1 zeros(1,i-1)];
   h=[h;x];
end
```

Η συνάρτηση lWHf υπολογίζει μία αριστερή Wiener - Hopf παραγοντο-ποίηση και τους αντίστοιχους δείκτες ενός πολυωνυμικού πίνακα .

```
-----------------------------------------------------------------------------------------
function  [k,B,D,U]=lWHf(t)
-----------------------------------------------------------------------------------------
% Given a mxn polynomial matrix t ,
% this function computes the left Wiener-Hopf
% factorization T(s)=B(s)D(s)U(s), where
% B(s) is a biproper  matrix ,
% D(s) is a diagonal matrix and
% U(s) is a unimodular matrix ,
% and its corresponding indices k=[k1,k2,...,kv]
% v=min{m,n}.
```

```
n=size(t);
[tr,rk,u,ui]=colred(t);
h1=exchange(n(1));
h2=exchange(n(2));
k=deg(tr(:,1:min(n(1),n(2))),'col');
k=k*exchange(min(n(1),n(2)));
U=h2*ui;
if  n(1)==n(2)
   [q,d,r]=coldegree(tr);
   B=coprime((q+r*inv(d))*h1);
   D=h1*d*h2;
elseif  n(1)<n(2)
   [q,d,r]=coldegree(tr(:,1:n(1)));
   B=coprime((q+r*inv(d))*h1);
   D=[h1*d*h1 zeros(n(1),n(2)-n(1))];
else
   [q,d,r]=coldegree(tr);
   qc=complete(q);
   B=coprime((qc+r*[inv(d) zeros(n(2),n(1)-n(2))])*h1);
   D=[h2*d*h2 ; zeros(n(1)-n(2),n(2))];
end
display('t=B*D*U')
```

<u>Παράδειγμα 4.6.1</u>

```
>>[k,B,D,U]=lWHf([3*s^2-s-1 s^2-s 1; s^2+5*s+2 s^3+s^2-4*s-2 s^2+5; 0 s s^2-1])

ans =
       t=B*D*U

k =
    2     2     3
```

```
B =
    s            -s - s^2 + 3s^3     -s + s^2
    5s + s^3     2s + 5s^2 + s^3     -2 - 4s + s^2 + s^3
   -s + s^3      0                   s
   ------------------------------------------------------
                     s^3

D =
    s^2    0     0
    0      s^2   0
    0      0     s^3

U =
    0    0    1
    1    0    0
    0    1    0
```

<u>Εφαρμογή του ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ 1</u>

Στην παράγραφο 3.3 είδαμε ότι οι δείκτες ελεγξιμότητας ενός ελέγξιμου ζεύγους (A, B) είναι ίσοι με τους αριστερούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $P(s)$ από την σχέση $\left(sI_n - A\right)^{-1} B = N(s)P(s)^{-1}$ όπου οι πίνακες $P(s)$, $N(s)$ είναι δεξιά πρώτοι .

```
-----------------------------------------------------------------------
function c=ContrInd(A,B)
-----------------------------------------------------------------------
% Given a nxn matrix A and a nxm matrix B ,
% this function returns the controllability
% indices of the controllable pair (A,B)
% by computing the left Wiener-Hopf
% factorization indices of P(s) of the
% representation (s*I-A)^-1*B=N(s)*P(s)^-1
```

```
n=length(A);
if rank(ctrb(A,B))==n
   g=inv(s*eye(n)-A)*B
   d=coprime(rdf(g))
   c=lWHf(den(d));
else
   display('the pair (A,B) should be controllable!')
end
```

<u>Παράδειγμα 4.6.2</u>

```
>> A=[1 0 -1;2 1 2;3 0 1];
>> B=[1 2;-1 0;1 1];
>> c=ContrInd(A,B)
g =                                                    ← (sI_n − A)^-1 B
   2 - 3s + s^2     3 - 5s + 2s^2
   -4 + 6s - s^2     4 + 6s
   -2 + s + s^2     -5 + 4s + s^2
   ---------------------------------
       -4 + 6s - 3s^2 + s^3

d.numerator =                                          ← N(s)
    0.11    -0.46 + 0.21s
    0.72     0.32 + 0.0089s
   -0.3      0.58 + 0.098s

d.denominator =                                        ← P(s)
   0.34 - 0.72s     0.56 + 0.3s - 0.0089s^2
   -0.38 + 0.42s     0.24 - 0.43s + 0.11s^2

c =
    1     2                                ← δείκτες ελεγξιμότητας του (A,B)
```

4.6.2 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2

Η συνάρτηση rowdegree επιστρέφει τους πίνακες $\left[T(s)\right]_r^h$, $D_r(s)$, $T_r(s)$, όπου $D_r(s)$ διαγώνιος πίνακας, όταν ο $T(s)$ γράφεται ως $T(s) = D_r(s)\left[T(s)\right]_r^h + T_r(s)$.

```
-----------------------------------------------------------------------------------------------
function [D,Q,R]=rowdegree(t)
-----------------------------------------------------------------------------------------------
% Decomposition of a polynomial mxn matrix according to row degrees.
%
% [D,Q,R]=rowdegree(t) accepts a polynomial matrix t as an input and returns
% D which is a diagonal matrix d=diag[s^a(i)/i=1:m] ,
% where a is column vector of row degrees
% Q which is a leading row coefficients matrix,
% R which is a matrix whose rows are formed by the coefficients
% of the powers deg(t,'row')-1 in the corresponding row of t and so on.
%
% t is written as t=D*Q+R

syms s
n=size(t);
l=deg(t,'row');
m=zeros(n(1),1)*s;
for i=1:n(1)
   m(i)=s^l(i);
end
D=diag(m,0);
[Q,R]=ldiv(t,D);
```

Η συνάρτηση rowred του POLYX επιστρέφει έναν πίνακα με βαθμούς γραμμών σε φθίνουσα διάταξη . Η συνάρτηση exchange υπολογίζει τους unimodular τετραγωνικούς πίνακες , δεδομένης της διάστασης του πίνακα , που χρησιμεύουν στον υπολογισμό των πινάκων της Wiener - Hopf παραγοντο-ποίησης ώστε οι βαθμοί γραμμών στον πίνακα $D_r(s)$ να είναι σε αύξουσα διάταξη .

Η συνάρτηση rWHf υπολογίζει δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση και τους αντίστοιχους δείκτες ενός πολυωνυμικού πίνακα .

```
-----------------------------------------------------------------------------------------
function  [l,U,D,B]=rWHf(t)
-----------------------------------------------------------------------------------------
% Given a mxn polynomial matrix t ,
% this function computes the right Wiener-Hopf
% factorization T(s)=U(s)D(s)B(s), where
% U(s) is a unimodular matrix ,
% D(s) is a diagonal matrix and
% B(s) is a biproper  matrix ,
% and its corresponding indices l=[l1,l2,...,lv]
% v=min{m,n}.

n=size(t);
[tr,rk,u,ui]=rowred(t);
h1=exchange(n(1));
h2=exchange(n(2));
l=transpose(deg(tr(1:min(n(1),n(2)),:),'row'));
l=l*exchange(min(n(1),n(2)));
U=ui*h1;
```

```
if  n(1)==n(2)
   [d,q,r]=rowdegree(tr);
   D=h1*d*h2;
   B=coprime(h2*(q+inv(d)*r));
elseif  n(1)>n(2)
   [d,q,r]=rowdegree(tr(1:n(2),:));
   D=[h2*d*h2 ; zeros(n(1)-n(2),n(2))];
   B=coprime(h2*(q+inv(d)*r));
else
   [d,q,r]=rowdegree(tr);
   qc=complete(q);
   D=[h1*d*h1 zeros(n(1),n(2)-n(1))];
   B=coprime(h2*(qc+[inv(d) ; zeros(n(2)-n(1),n(1))]*r));
end
display('t=U*D*B')
```

<u>Παράδειγμα 4.6.3</u>

```
>> [l,U,D,B]=rWHf([0 s^2+2 s^3-1 ; 3 s^4+s-8 7*s^2+4*s+1])

ans =
      t=U*D*B


l =
    3     4


U =
    1     0
    0     1


D =
    s^3     0       0
    0       s^4     0
```

```
B =
   s^4      0                 0
   0        2s + s^3          -s + s^4
   3        -8 + s + s^4      1 + 4s + 7s^2
   -------------------------------------------
                 s^4
```

<u>αλγόριθμος 2</u>

Η συνάρτηση rWH υπολογίζει δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση και τους αντίστοιχους δείκτες ενός πολυωνυμικού πίνακα σύμφωνα με τον αλγόριθμο 2 .

```
-----------------------------------------------------------------
function [l,Ur,Dr,Br]=rWH(t)
-----------------------------------------------------------------
% Given a mxn polynomial matrix t ,
% this function computes the right Wiener-Hopf
% factorization T(s)=U(s)D(s)B(s), where
% U(s) is a unimodular matrix ,
% D(s) is a diagonal matrix and
% B(s) is a biproper  matrix ,
% and its corresponding indices l=[l1,l2,...,lv]
% v=min{m,n}.

a=transpose(t);
[k,B,D,U]=lWHf(a);
l=k;
Ur=transpose(U);
Dr=transpose(D);
Br=transpose(B);
```

Εφαρμογή του ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ 2

Στην παράγραφο 3.3 είδαμε ότι οι δείκτες παρατηρησιμότητας ενός παρατηρήσιμου ζεύγους (A, C) είναι ίσοι με τους δεξιούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του πίνακα $P(s)$ από την σχέση $C(sI_n - A)^{-1} = P(s)^{-1}N(s)$, όπου οι πίνακες $P(s)$, $N(s)$ είναι αριστερά πρώτοι.

```
-----------------------------------------------------------------
function o=ObservInd(A,C)
-----------------------------------------------------------------
% Given a nxn matrix A and a pxn matrix C ,
% this function returns the observability
% indices of the observable pair (A,C)
% by computing the right Wiener-Hopf
% factorization indices of P(s) of the
% representation C*(s*I-A)^-1=P(s)^-1*N(s)
n=length(A);
if rank(obsv(A,C))==n
   g=C*inv(s*eye(n)-A)
   d=coprime(ldf(g))
   o=rWHf(den(d));
else
   display('the pair (A,C) should be observable!')
end
```

Παράδειγμα 4.6.4

```
>> A=[1 0 -1;2 1 2;3 0 1];
>> C=[1 -1 1;2 1 0;1 3 2];
>> o=ObservInd(A,C)
```

g = ← $C(sI_n - A)^{-1}$

```
 -6 - s + s^2      -4 + 2s - s^2      6 - 5s + s^2
 6 - 2s + 2s^2     4 - 2s + s^2      -2
 7 + 10s + s^2     12 - 6s + 3s^2    -9 + s + 2s^2
 ---------------------------------------------------
            -4 + 6s - 3s^2 + s^3
```

d.denominator = ← P(s)

```
 0.44 + 0.29s    -1.3 + 0.73s     0.59 - 0.15s
 -1.6 + 0.73s    -1.6 - 0.59s     0.44s
 -1.5 - 0.59s    -0.44 + 0.15s    -0.88 + 0.29s
```

d.numerator = ← N(s)

```
 1.6    0     0
 0      0     1.6
 0      1.6   0
```

o =

```
 1    1    1
```

← δείκτες παρατηρησιμότητας του (A,C)

4.6.3 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 3

Η συνάρτηση lWHfR υπολογίζει μία αριστερή Wiener-Hopf παραγοντοποίηση και τους αντίστοιχους δείκτες ενός ρητού πίνακα .

```
-----------------------------------------------------------------
function  [k,B,D,U]=lWHfR(Nr,Dr)
-----------------------------------------------------------------
% Given the numerator Nr and the denominator Dr
% of a mxn rational matrix T
% this function computes the left Wiener-Hopf
% factorization T(s)=B(s)D(s)U(s), where
```

```
% B(s) is a biproper  matrix ,
% D(s) is a diagonal matrix and
% U(s) is a unimodular matrix ,
% and its corresponding indices k=[k1,k2,...,kv]
% v=min{m,n}.

n=size(Nr);
t=Nr./Dr
p=plcm(Dr);
f=plcm(p);
c=deg(f);
q=s^-c*f;
N=f*t;
[kp,Bp,Dp,Up]=lWHf(N);
k=kp-c*[ones(1,min(n(1),n(2)))];
B=coprime(Bp/q);
D=coprime(s^-c*Dp);
U=Up;
```

<u>Παράδειγμα 4.6.5</u>

```
>> Nr=[8 0 s s^3-4 ; s^2+1 3*s s-7 2];
>> Dr=[s+2 1 1 s+1 ; s+1 (s+1)^2 (s+2)^2 1];
>> [k,B,D,U]=lWHfR(Nr,Dr)

t =
[      8/(s+2),          0,              s,        (s^3-4)/(s+1)]
[ (s^2+1)/(s+1),   3*s/(s+1)^2, (s-7)/(s+2)^2,            2]

ans =
    t=B*D*U
```

```
k =
   -4    -2

B =
   0            24s^2 + 36s^3 + 12s^4
   10s^4     3.2s^2 + 20s^3 + 17s^4
   ----------------------------------------
     4 + 12s + 13s^2 + 6s^3 + s^4

D =
   1      0       0     0
   0     s^2      0     0
   --------------------
           s^4

U =
  Column 1
    0.46 + 0.089s + 0.089s^2
    0.68s + 6.4s^2 - 0.73s^3 - 1.2s^4 - 0.16s^5
    0.18 - 0.75s - 1.6s^2 - 0.26s^3 + 0.49s^4 + 0.098s^5
    0.67 + 0.67s

  Column 2
    0.27
    1 - 4.2s - 3.1s^2 - 0.48s^3
    1.2s + 1.2s^2 + 0.3s^3
    0

  Column 3
    1 - 0.032s + 0.045s^2
    5.2s + 1.2s^2 + 2.3s^3 + 1.5s^4 + 0.23s^5
   -0.69 - 1.3s - 0.9s^2 - 0.71s^3 - 0.59s^4 - 0.14s^5
    0.17s + 0.25s^2 + 0.083s^3
```

Column 4

1.2s - 0.078s^2 + 0.045s^3

-13s - 12s^2 - 4s^3 + 0.87s^4 + 1.3s^5 + 0.23s^6

1 + 3.8s + 4.4s^2 + 1.7s^3 - 0.16s^4 - 0.45s^5 - 0.14s^6

-0.67 - 0.33s + 0.17s^3 + 0.083s^4

4.6.4 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 4

Η συνάρτηση rWHfR υπολογίζει μία δεξιά Wiener - Hopf παραγοντοποίηση και τους αντίστοιχους δείκτες ενός ρητού πίνακα .

```
-----------------------------------------------------------------
function  [l,U,D,B]=rWHfR(Nr,Dr)
-----------------------------------------------------------------
% Given the numerator Nr and the denominator Dr
% of a mxn rational matrix T
% this function computes the right Wiener-Hopf
% factorization T(s)=U(s)D(s)B(s), where
% U(s) is a unimodular matrix ,
% D(s) is a diagonal matrix and
% B(s) is a biproper  matrix ,
% and its corresponding indices l=[l1,l2,...,lv]
% v=min{m,n}.

n=size(Nr);
t=Nr./Dr
p=plcm(Dr);
f=plcm(p);
c=deg(f);
q=s^-c*f;
N=f*t;
```

```
[lp,Up,Dp,Bp]=rWHf(N);
l=lp-c*[ones(1,min(n(1),n(2)))];
U=Up;
B=coprime(Bp/q);
D=coprime(s^-c*Dp);
```

<u>Παράδειγμα 4.6.6</u>

```
>> Nr=[s+3 0 s ; 3 1 3*s+7 ;0 2 4*s-6];

>> Dr=[s*(s+1)*(s+2) 1 (s+1)^2 ; s*(s+1)*(s+3) (s+3)^2 s*(s+1)^2*(s+3) ; 1
s*(s+1)*(s+2) s*(s+1)^2*(s+3)^2];

>> [l,U,D,B]=rWHfR(Nr,Dr)

t =
    [      (s+3)/s/(s+1)/(s+2),                    0,                    s/(s+1)^2]
    [          3/s/(s+1)/(s+3),            1/(s+3)^2,      (3*s+7)/s/(s+1)^2/(s+3)]
    [                        0,       2/s/(s+1)/(s+2),   (4*s-6)/s/(s+1)^2/(s+3)^2]

ans =
     t=U*D*B

l =
   -3    -3    -1

U =
    0        0     1
    0.5s     1     0
    1        0     0
```

```
D =

   1     0     0
   0     1     0
   0     0     s^2
  ---------------
        s^3

B.numerator =

  Columns 1 through 2
    0                                    18s^2 + 30s^3 + 14s^4 + 2s^5
    18s^2 + 33s^3 + 18s^4 + 3s^5         -7s^3 - 10s^4 - 3s^5
    27 + 54s + 36s^2 + 10s^3 + s^4       0

  Column 3
   -12s^2 + 2s^3 + 4s^4
    42s^2 + 59s^3 + 21s^4 + s^5
    18s^2 + 21s^3 + 8s^4 + s^5

B.denominator =
   18 + 57s + 68s^2 + 38s^3 + 10s^4 + s^5
```

4.6.5 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 5

Η συνάρτηση localWH υπολογίζει τους τοπικούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης ενός τετραγωνικού πολυωνυμικού πίνακα .

```
-----------------------------------------------------------------
function lk=localWH(P)
-----------------------------------------------------------------
% Given a square polynomial matrix P ,
% this function returns its local
% Wiener-Hopf factorization indices
```

```
% with respect to a monic irreducible
% polynomial . P is written as A*B


x=size(P);
if x(1)~=x(2)
   display('matrix should be square!')
end
[S,U,V,UI,VI]=smith(P);
S=sym(S);
g=pgcd(S);
c=pgcd(g);
d=s*zeros(1,x(2));
if c==1
   sn=sym2poly(S(x(1),x(2)));
   r=roots(sn);
   m=length(r);
   for i=1:m
      if isreal(r(i))==1
         for j=1:x(2)
            [v,n]=charact(S(j,j),r(i));
            d(j)=(s-r(i))^n;
         end
         a=diag(d,0);
         b=inv(a)*S;
         A=UI*a
         B=b*VI
         display('local Wiener-Hopf indices with respect to')
         s-r(i)
         lk=lWHf(A)
      end
   end
```

```
    for i=1:m-1
        if isreal(r(i))~=1
            if r(i)==conj(r(i+1))
                i=i+1;
            end
            for j=1:x(2)
                [v,n]=charact(S(j,j),r(i)) ;
                d(j)=((s-r(i))*(s-conj(r(i))))^n;
            end
            a=diag(d,0);
            b=inv(a)*S;
            A=UI*a
            B=b*VI
            display('local Wiener-Hopf indices with respect to')
            (s-r(i))*(s-conj(r(i)))
            lk=lWHf(A)
        end
    end
else
    w=roots(c);
    q=length(w);
    for i=1:q
        if isreal(w(i))==1
            for j=1:x(2)
                [v,n]=charact(S(j,j),w(i));
                d(j)=(s-w(i))^n;
            end
            a=diag(d,0);
            b=inv(a)*S;
            A=UI*a
            B=b*VI
            display('local Wiener-Hopf indices with respect to')
```

```
        s-w(i)
        lk=lWHf(A)
      end
    end
    for i=1:q-1
      if isreal(w(i))~=1
        if w(i)==conj(w(i+1))
          i=i+1;
        end
        for j=1:x(2)
          [v,n]=charact(S(j,j),w(i)) ;
          d(j)=((s-w(i))*(s-conj(w(i))))^n;
        end
        a=diag(d,0);
        b=inv(a)*S;
        A=UI*a
        B=b*VI
        display('local Wiener-Hopf indices with respect to')
        (s-w(i))*(s-conj(w(i)))
        lk=lWHf(A)
      end
    end
end
```

<u>Παράδειγμα 4.6.7</u>

```
>> P=[s-1 (s-1)^2*(s^2+1);(s-1)*(s+1) (s-1)^2*(s-3)];
>> lk=localWH(P)

A =
   -1 + s       0
   -1 + s^2     1 - 2s + s^2
```

```
B =
    1    -1 + s - s^2 + s^3
    0    -4 - s^2 - s^3

ans =
      local Wiener-Hopf indices with respect to

ans =
      -1 + s                                                    ←   π(s)

lk =
    1     2
```

Εφαρμογή του ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ 5

Η συνάρτηση localContInd υπολογίζει τους τοπικούς δείκτες ελεγξιμότητας ενός ελέγξιμου ζεύγους .

```
-----------------------------------------------------------------
function lc=localContInd(A,B)
-----------------------------------------------------------------
% Given a nxn matrix A and a nxm matrix B ,
% this function returns the local
% controllability indices of the
% controllable pair (A,B)
% by computing the local Wiener-Hopf
% factorization indices of P(s) of the
% representation (s*I-A)^-1*B=N(s)*P(s)^-1

y=length(A);
if rank(ctrb(A,B))==y
```

```
   g=inv(s*eye(y)-A)*B
   d=coprime(rdf(g))
   lc=localWH(den(d));
else
   display('the pair (A,B) should be controllable!')
end
```

<u>Παράδειγμα 4.6.8</u>

```
>> A=[1 2;1 -1];
>> B=[1 0;1 -1];
>> lc=localContInd(A,B)

g =
   3 + s    -2
   s        1 - s
   ---------------
     -3 + s^2

d =
    0.62     0        /    -0.62 + 0.62s    -1.2
    0        0.62     /     0.62s           -1.9 - 0.62s

A =
    1              0
    1.5 + 0.5s    -1.7 + s

B =
   -0.62 + 0.62s    -1.2
   -0.54 - 0.31s     0

ans =
     local Wiener-Hopf indices with respect to

ans =
   -1.7 + s                                          ←   π(s)
```

```
lk =
    0     1

A =
    1              0
    1.5 + 0.5s     1.7 + s

B =
   -0.62 + 0.62s    -1.2
    0.54 - 0.31s     0

ans =
      local Wiener-Hopf indices with respect to

ans =
     1.7 + s                                          ←   π(s)

lk =
    0     1

lc =
    0     1
```

4.7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Χρησιμοποιώντας το θεωρητικό υπόβαθρο του τρίτου κεφαλαίου , παρουσιάσαμε κάποιους αλγόριθμους που υπολογίζουν τους Wiener - Hopf δείκτες παραγοντο- ποίησης πολυωνυμικού και ρητού πίνακα , καθώς και τους τοπικούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης πολυωνυμικού τετραγωνικού πίνακα . Επιπλέον δώσαμε παραδείγματα εφαρμογής τους για την καλύτερη κατανόησή τους . Το τέταρτο κεφάλαιο έκλεισε με την υλοποίηση των αλγορίθμων σε MATLAB .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΚΑΙ SMITH - McMILLAN ΜΟΡΦΗ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο δεύτερο κεφάλαιο είδαμε το θεώρημα του Rosenbrock (2 . 2 . 6) . Σαν αποτέλεσμα έχουμε το επόμενο θεώρημα :

Θεώρημα 5.1.1 [Amparan et al. , 2004 (II)]
Έστω $k_1 \le ... \le k_m$ μη αρνητικοί ακέραιοι και $\psi_m(s)|...|\psi_1(s)$ κανονικά πολυώνυμα . Τότε υπάρχει non - singular πίνακας $D(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με αναλλοίωτους παράγοντες $\psi_m(s),...,\psi_1(s)$ και Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1,...,k_m$ αν και μόνο αν :

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{j} k_i \ge \sum_{i=1}^{j} \deg\left(\psi_{m-i+1}(s)\right) \quad , \quad j = 1,2,...,m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m} \deg\left(\psi_i(s)\right)\end{gathered} \tag{5.1}$$

Το θεώρημα αυτό συσχετίζει τους αναλλοίωτους παράγοντες (Smith κανονική μορφή) ενός non - singular πολυωνυμικού πίνακα με τους Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησής του . Στο κεφάλαιο αυτό θα το γενικεύσουμε μελετώντας τη σχέση μεταξύ της Smith - McMillan μορφής στο $\mathbb{C}$ και στο ∞ ενός non - singular ρητού πίνακα με τους Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησής του .

Παρατήρηση 5.1.2

Στο κεφάλαιο αυτό, όπου αναφέρουμε Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης θα εννοούμε τους αριστερούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης. Τα αποτελέσματα ισχύουν και για τους δεξιούς, αφού οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης ενός πίνακα είναι οι αριστεροί Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του ανάστροφού του.

Παράδειγμα 5.1.3

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας $D(s)=\begin{bmatrix} s+2 & s \\ 3 & s^2+1 \end{bmatrix}$.

Η Smith κανονική μορφή του D(s) είναι:

```
>> s=smith([s+2 s;3 s^2+1])

s =
    [   1   0                        ]
    [   0   2 - 2s + 2s^2 + s^3      ]
```

Άρα οι αναλλοίωτοι παράγοντες του D(s) είναι τα πολυώνυμα $\psi_2(s)=1$, $\psi_1(s)=s^3+2s^2-2s+2$ με βαθμούς $\deg\psi_2(s)=0$, $\deg\psi_1(s)=3$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση iscolred του POLYX για να δούμε αν ο D(s) είναι column proper:

```
>> iscolred(d)
ans =
      1
```

Η συνάρτηση επέστρεψε την τιμή 1 γιατί ο D(s) είναι column proper. Άρα οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι οι βαθμοί των στηλών του σε αύξουσα διάταξη, δηλαδή $k_1=1$, $k_2=2$. Παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$k_1=1\geq 0=\deg\psi_2(s)\ ,\ k_1+k_2=3=\deg\psi_2(s)+\deg\psi_1(s)$$

5.2 ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΔΟΜΗ ΡΗΤΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Έστω non - singular $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times m}$ και $d(s)$ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των στοιχείων του $T(s)$.Ο $T(s)$ γράφεται ως $T(s) = \frac{1}{d(s)} N(s)$, όπου $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$.

Λήμμα 5.2.1 [Amparan et al. , 2004 (II)]

Έστω $T(s)$, $d(s)$, $N(s)$ όπως ορίστηκαν παραπάνω. Έστω $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1,2,...,m$ ανάγωγες ρητές συναρτήσεις, όπου $\varepsilon_i(s), \psi_i(s)$, $i = 1,2,...,m$ κανονικά και ξένα μεταξύ τους πολυώνυμα τέτοια ώστε $\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s)$, $\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s)$, $i = 1,2,...,m-1$. Έστω $\sigma_i(s) = \frac{d(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1,2,...,m$.Τότε οι $\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)},...,\frac{\varepsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$ είναι οι αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις του $T(s)$ αν και μόνο αν οι $\varepsilon_1(s)\sigma_1(s),...,\varepsilon_m(s)\sigma_m(s)$ είναι οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $N(s)$.

Λήμμα 5.2.2 [Amparan et al. , 2004 (II)]

Έστω $T(s)$, $d(s)$, $N(s)$ όπως ορίστηκαν παραπάνω και d ο βαθμός του πολυωνύμου $d(s)$.Έστω $k_1 \le ... \le k_m$ ακέραιοι. Τότε οι $k_1,...,k_m$ είναι οι Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $T(s)$ αν και μόνο αν οι $k_1 + d,...,k_m + d$ είναι οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $N(s)$.

Με τη βοήθεια των δύο παραπάνω λημμάτων μπορούμε να δώσουμε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη non - singular ρητού πίνακα με συγκεκριμένους Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης και συγκεκριμένη πεπερασμένη δομή (αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις).

<u>Θεώρημα 5.2.3</u> [Amparan et al. , 2004 (II)]

Έστω $k_1 \le \ldots \le k_m$ ακέραιοι και $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ όπως ορίστηκαν στο λήμμα 5.2.2 . Τότε υπάρχει non - singular πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times m}$ με Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης τους $k_1, \ldots, k_m$ και αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις τις $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ αν και μόνο αν :

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{j} k_i \ge \sum_{i=1}^{j}\left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right)\right) \quad , \quad j = 1, \ldots, m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right)\right)\end{gathered} \tag{5.2}$$

<u>Απόδειξη :</u>

Από το λήμμα 5.2.1 έχουμε ότι αν $\sigma_i(s) = \frac{d(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, τότε οι αναλλοίωτοι παράγοντες του N(s) είναι οι $\varepsilon_1(s)\sigma_1(s) | \ldots | \varepsilon_m(s)\sigma_m(s)$ και από το λήμμα 5.2.2 ότι οι Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του N(s) είναι οι $k_1 + d, \ldots,$ $k_m + d$. Σύμφωνα με το θεώρημα 5.1.1 ισχύει

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{j}\left(k_i + d\right) \ge \sum_{i=1}^{j}\deg\left(\varepsilon_i(s)\sigma_i(s)\right) \quad , \quad j = 1, \ldots, m-1 \\ \sum_{i=1}^{m}\left(k_i + d\right) = \sum_{i=1}^{m}\deg\left(\varepsilon_i(s)\sigma_i(s)\right)\end{gathered}$$

Αλλά $\deg\left(\sigma_i(s)\right) = d - \deg\left(\psi_i(s)\right)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Έτσι

$$\left.\begin{gathered}\sum_{i=1}^{j}\left(k_i + d\right) \ge \sum_{i=1}^{j}\left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right) + d\right) \quad , \quad j = 1, \ldots, m-1 \\ \sum_{i=1}^{m}\left(k_i + d\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right) + d\right)\end{gathered}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{j} k_i \ge \sum_{i=1}^{j}\left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right)\right) \quad , \quad j = 1, \ldots, m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right)\right)\end{gathered}$$

Αντίστροφα , ισχύει

$$k_m \le \deg\left(\varepsilon_m(s)\right) - \deg\left(\psi_m(s)\right) \quad \Rightarrow \quad k_m + \deg\left(\psi_m(s)\right) \ge \deg\left(\varepsilon_m(s)\right) \ge 0$$

Επιπλέον , αφού $\psi_i(s) \mid \psi_1(s)$, $i = 1,2,...,m$ έχουμε ότι $\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}\psi_1(s) \mid ... \mid \frac{\varepsilon_m(s)}{\psi_m(s)}\psi_1(s)$.

Από την (5.1) προκύπτει ότι

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{j}\left(k_i + \deg\left(\psi_1(s)\right)\right) \ge \sum_{i=1}^{j}\left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right) + \deg\left(\psi_1(s)\right)\right) \quad , \quad j = 1,...,m-1 \\ \sum_{i=1}^{m}\left(k_i + \deg\left(\psi_1(s)\right)\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right) + \deg\left(\psi_1(s)\right)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{j}\left(k_i + \deg\left(\psi_1(s)\right)\right) \ge \sum_{i=1}^{j}\deg\left(\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}\psi_1(s)\right) \quad , \quad j = 1,...,m-1 \\ \sum_{i=1}^{m}\left(k_i + \deg\left(\psi_1(s)\right)\right) = \sum_{i=1}^{m}\deg\left(\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}\psi_1(s)\right) \end{array}$$

Άρα , σύμφωνα με το θεώρημα 5.1.1, υπάρχει πίνακας $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης τους $k_1 + \deg\left(\psi_1(s)\right), \ldots, k_m + \deg\left(\psi_1(s)\right)$ και αναλλοίωτους παράγοντες τους $\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}\psi_1(s) \mid ... \mid \frac{\varepsilon_m(s)}{\psi_m(s)}\psi_1(s)$. Από τα λήμματα 5.2.1 , 5.2.2 , ο $T(s) = \frac{1}{\psi_1(s)}N(s)$ είναι ο ζητούμενος πίνακας .

▲

<u>Παράδειγμα 5.2.4</u>

Έστω ο πίνακας $T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} & 0 & \frac{s}{(s+1)^2} \\ \frac{3}{s(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)^2} & \frac{3s+7}{s(s+1)^2(s+3)} \\ 0 & \frac{2}{s(s+1)(s+2)} & \frac{4s-6}{s(s+1)^2(s+3)^2} \end{bmatrix}$.

```
>> Nr=[s+3 0 s ; 3 1 3*s+7 ;0 2 4*s-6];
>> Dr=[s*(s+1)*(s+2) 1 (s+1)^2 ; s*(s+1)*(s+3) (s+3)^2 s*(s+1)^2*(s+3) ; 1 s*(s+1)*(s+2) s*(s+1)^2*(s+3)^2];
>> n=size(Nr);
>> t=Nr./Dr

t =
[      (s+3)/s/(s+1)/(s+2),                    0,                    s/(s+1)^2]
[            3/s/(s+1)/(s+3),            1/(s+3)^2,     (3*s+7)/s/(s+1)^2/(s+3)]
[                          0,      2/s/(s+1)/(s+2),  (4*s-6)/s/(s+1)^2/(s+3)^2]

>> p=plcm(Dr);
>> f=plcm(p);
>> N=f*t

N =

  Columns 1 through 2
    27 + 54s + 36s^2 + 10s^3 + s^4     0
    18 + 33s + 18s^2 + 3s^3          2s + 5s^2 + 4s^3 + s^4
    0                          18 + 30s + 14s^2 + 2s^3

  Column 3
    18s^2 + 21s^3 + 8s^4 + s^5
    42 + 53s + 22s^2 + 3s^3
   -12 + 2s + 4s^2

>> s=smith(N)

s =
  Columns 1 through 2
    1     0
    0     1 + s
    0     0
```

```
  Column 3
    0
    0
   -3.4e+003 - 1.3e+004s - 2.2e+004s^2 - 1.9e+004s^3 - 8e+003s^4 - 5.1e+002s^5 +
1.2e+003s^6 + 6.5e+002s^7 + 1.6e+002s^8 + 20s^9 + s^10

>> s/f

ans.numerator =

  Columns 1 through 2
    1     0
    0     1 + s
    0     0

  Column 3
    0
    0
   -3.4e+003 - 1.3e+004s - 2.2e+004s^2 - 1.9e+004s^3 - 8e+003s^4 - 5.1e+002s^5 +
1.2e+003s^6 + 6.5e+002s^7 + 1.6e+002s^8 + 20s^9 + s^10

ans.denominator =

  Column 1
    18s + 57s^2 + 68s^3 + 38s^4 + 10s^5 + s^6
    0
    0

  Column 2
    0
    18s + 57s^2 + 68s^3 + 38s^4 + 10s^5 + s^6
    0
```

```
Column 3
   0
   0
   18s + 57s^2 + 68s^3 + 38s^4 + 10s^5 + s^6
```

Άρα , οι αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις του ρητού πίνακα T(s) έχουν βαθμούς

$$\deg \varepsilon_1(s) - \deg \psi_1(s) = 0 - 6 = -6$$
$$\deg \varepsilon_2(s) - \deg \psi_2(s) = 1 - 6 = -5$$
$$\deg \varepsilon_3(s) - \deg \psi_3(s) = 10 - 6 = 4$$

Θα βρούμε τους αριστερούς Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του T(s) .

```
>> k=lWHfR(Nr,Dr)

t =

[     (s+3)/s/(s+1)/(s+2),                    0,                    s/(s+1)^2]
[          3/s/(s+1)/(s+3),            1/(s+3)^2,     (3*s+7)/s/(s+1)^2/(s+3)]
[                        0,     2/s/(s+1)/(s+2),   (4*s-6)/s/(s+1)^2/(s+3)^2]

ans =
     t=B*D*U

k =
   -3    -2    -2
```

Άρα , οι αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του T(s) είναι οι $k_1 = -3$, $k_2 = -2$, $k_3 = -2$.

Ισχύει

$$k_1 = -3 \geq -6 = \deg \varepsilon_1(s) - \deg \psi_1(s)$$
$$k_1 + k_2 = -5 \geq -11 = \deg \varepsilon_1(s) - \deg \psi_1(s) + \deg \varepsilon_2(s) - \deg \psi_2(s)$$
$$k_1 + k_2 + k_3 = -7 = \deg \varepsilon_1(s) - \deg \psi_1(s) + \deg \varepsilon_2(s) - \deg \psi_2(s) + \deg \varepsilon_3(s) - \deg \psi_3(s)$$

5.3 ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΑΠΕΙΡΗ ΔΟΜΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΥ - ΡΗΤΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Τα επόμενα λήμματα χρειάζονται για την απόδειξη παρόμοιας σχέσης με την (5.1), δηλαδή της σχέσης των Wiener - Hopf δεικτών παραγοντοποίησης με τους αναλλοίωτους παράγοντες στο άπειρο.

Λήμμα 5.3.1 [Amparan et al., 2004 (II)]

(α) Έστω $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ και $q = \deg(P(s))$. Τότε ο $s^q P(1/s)$ είναι πολυωνυμικός πίνακας.

(β) Έστω $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular πίνακας. Τότε $\det(U(1/s)) = c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ και ο πίνακας $U(1/s)$ είναι biproper.

(γ) Έστω $L(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m\times m}$ biproper και $m(s)$ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των στοιχείων του πίνακα $L(1/s)$. Τότε ο πίνακας $m(s)L(1/s)$ είναι πολυωνυμικός. Επιπλέον ισχύει $\text{ΜΚΔ}(m(s),s) = 1$ και $\text{ΜΚΔ}(\det(m(s)L(1/s)),s) = 1$.

(δ) Αν $P(s)$ είναι column proper πίνακας με βαθμούς στηλών $p_1,\ldots,p_m$ και $D(s) = \text{diag}\left[s^{p_1},\ldots,s^{p_m}\right]$, τότε ο πίνακας $P(1/s)D(1/s)^{-1}$ είναι πολυωνυμικός.

Λήμμα 5.3.2 [Amparan et al., 2004 (II)]

Έστω $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ένας non-singular πολυωνυμικός πίνακας με $q = \deg(P(s))$ και $k_1 \leq \ldots \leq k_m$ οι Wiener- Hopf δείκτες παραγοντοποίησής του. Τότε υπάρχουν μη αρνητικός ακέραιος d και πολυώνυμο $m(s)$ με $\text{ΜΚΔ}(m(s),s) = 1$ έτσι ώστε οι $d+q-k_m,\ldots,d+q-k_1$ να είναι οι τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης ως προς το πολυώνυμο s του $m(s)s^{d+q}P(1/s)^T \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$.

Απόδειξη :

Αφού οι $k_1,...,k_m$ είναι οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $P(s)$ υπάρχει unimodular πίνακας $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ και biproper πίνακας $L(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m\times m}$ έτσι ώστε :

$$P(s) = L(s)\mathrm{diag}\left[s^{k_m},...,s^{k_1}\right]U(s) \tag{5.3}$$

Έστω $m(s)$ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των στοιχείων του $L(1/s)$ και $d = \deg(U(s))$. Τότε , αντικαθιστώντας το s με το $1/s$ και πολλαπλασιάζοντας με $m(s)s^{d+q}$ στην (5.4) , έχουμε

$$m(s)s^{d+q}P(1/s) = m(s)L(1/s)\mathrm{diag}\left[s^{d+q+k_m},...,s^{d+q+k_1}\right]U(1/s) \Rightarrow$$
$$m(s)s^{d+q}P(1/s)^T = U(1/s)^T\,\mathrm{diag}\left[s^{d+q+k_m},...,s^{d+q+k_1}\right]m(s)L(1/s)^T$$

Αν $B(s) = m(s)L(1/s)^T$ και $A(s) = U(1/s)^T\,\mathrm{diag}\left[s^{d+q+k_m},...,s^{d+q+k_1}\right]$, από το λήμμα 5.3.1 έχουμε το ζητούμενο , αφού

(i) ο $m(s)s^{d+q}P(1/s)^T = A(s)B(s)$ και ο $A(s)$ είναι πολυωνυμικοί πίνακες

(ii) ο πίνακας $s^dU(1/s)^T$ είναι πολυωνυμικός και ισχύει $q - k_i \geq 0$, $i = 1,...,m$ [Wolovich , 1974]

(iii) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $A(s)$ είναι δυνάμεις του s

(iv) οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $B(s)$ είναι πρώτοι προς το s

(v) οι Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $A(s)$ είναι οι $d+q-k_m,...,$ $d+q-k_1$, αφού ο πίνακας $U(1/s)$ είναι biproper .

Άρα , από τον ορισμό 3.2.3 οι τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης ως προς το πολυώνυμο s του $m(s)s^{d+q}P(1/s)^T$ είναι οι $d+q-k_m,...,d+q-k_1$.

▲

Πριν περάσουμε στο επόμενο λήμμα σημειώνουμε ότι αν $s^{q_1},...,s^{q_m}$ είναι οι αναλλοίωτοι παράγοντες στο άπειρο του $P(s)$ τότε $q_1 = \deg(P(s))$. Άρα , σύμφωνα με το λήμμα 5.3.1 ο πίνακας $s^{q_1}P(s)$ είναι πολυωνυμικός .

<u>Λήμμα 5.3.3</u> [Amparan et al. , 2004 (II)]

Έστω $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ένας non - singular πολυωνυμικός πίνακας και $s^{q_1},...,s^{q_m}$ οι αναλλοίωτοι παράγοντές του στο άπειρο με $q_1 \geq ... \geq q_m$. Τότε για κάθε μη αρνητικό ακέραιο d και για κάθε πολυώνυμο m(s) πρώτο προς το s, τα πολυώνυμα $s^{d+q_1-q_1}|...|s^{d+q_1-q_m}$ είναι οι πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες του πολυωνυμικού πίνακα $m(s)s^{d+q_1}P(1/s)^T \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ σχετικά με το ανάγωγο πολυώνυμο s.

<u>Απόδειξη :</u>

Έστω $\psi_m(s)|...|\psi_1(s)$ οι πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες του $s^{q_1}P(1/s)$. Τότε υπάρχουν unimodular πίνακες $U(s), V(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε :

$$U(s)s^{q_1}P(1/s)V(s) = \mathrm{diag}\left[\psi_m(s),...,\psi_1(s)\right] \tag{5.4}$$

Αν $\psi_i(s) = s^{\alpha_i}\beta_i(s)$ με $\mathrm{MK\Delta}(\beta_i(s),s) = 1$, $i = 1,...,m$ τότε $0 \leq \alpha_m \leq ... \leq \alpha_1$. Αντικαθιστώντας το s με 1/s στην (5.4) έχουμε

$$U(1/s)\frac{1}{s^{q_1}}P(s)V(1/s) = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{s^{\alpha_m}}\beta_m(1/s),...,\frac{1}{s^{\alpha_1}}\beta_1(1/s)\right] \tag{5.5}$$

Επειδή $\mathrm{MK\Delta}(\beta_i(s),s) = 1$ το $\beta_i(1/s)$ είναι biproper ρητή συνάρτηση.

Έτσι , πολλαπλασιάζοντας από δεξιά την (5.5) με τον biproper πίνακα $B(s) = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{\beta_m(1/s)},...,\frac{1}{\beta_1(1/s)}\right]$ και θέτοντας $B_1(s) = U(1/s)$, $B_2(s) = V(1/s)B(s)$ έχουμε ότι $B_1(s)P(s)B_2(s) = \mathrm{diag}\left[s^{q_1-\alpha_m},...,s^{q_1-\alpha_1}\right]$, όπου οι $B_1(s)$ και $B_2(s)$ είναι biproper πίνακες και $q_1-\alpha_m \geq ... \geq q_1-\alpha_1$. Αυτό σημαίνει ότι τα $s^{q_1-\alpha_m},...,s^{q_1-\alpha_1}$ είναι οι αναλλοίωτοι παράγοντες στο άπειρο του P(s). Αλλά, από την υπόθεση, αυτοί είναι οι $s^{q_1},...,s^{q_m}$. Άρα $\alpha_i = q_1 - q_{m-i+1}$, $i = 1,...,m$.

Έστω d ένας μη αρνητικός ακέραιος και m(s) ένα πολυώνυμο πρώτο προς το s. Πολλαπλασιάζοντας την (5.4) με $m(s)s^d$ και παίρνοντας τον ανάστροφο θα έχουμε $V(s)^T\left(m(s)s^{d+q_l}P\left(1/s\right)^T\right)U(s)^T = \mathrm{diag}\left[s^{d+q_l-q_l}m(s)\beta_m(s),...,s^{d+q_l-q_m}m(s)\beta_l(s)\right]$ όπου $\text{ΜΚΔ}\left(m(s)\beta_i(s),s\right)=1$, $i=1,2,...,m$.

Άρα , τα $s^{d+q_l-q_l}m(s)\beta_m(s),...,s^{d+q_l-q_m}m(s)\beta_l(s)$ είναι οι αναλλοίωτοι παράγοντες του πίνακα $m(s)s^{d+q_l}P\left(1/s\right)^T$ κι έτσι τα $s^{d+q_l-q_l}|...|s^{d+q_l-q_m}$ είναι οι στοιχειώδεις διαιρέτες σχετικά με το ανάγωγο πολυώνυμο s.

▲

<u>Λήμμα 5.3.4</u> [Amparan et al. , 2004 (II)]

Έστω $k_1 \le ... \le k_m$, $t_1 \le ... \le t_m$ μη αρνητικοί ακέραιοι και $\pi(s) \in \mathbb{R}[s]$ κανονικό ανάγωγο πολυώνυμο. Τότε υπάρχει non-singular πίνακας $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με τοπικούς Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης ως προς το πολυώνυμο $\pi(s)$ τους $k_1,...,k_m$ και με πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες σχετικά με το s τα πολυώνυμα $\pi(s)^{t_1}|...|\pi(s)^{t_m}$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{j} k_i &\ge \sum_{i=1}^{j} t_i \deg\left(\pi(s)\right) \quad , \quad j=1,...,m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} k_i &= \sum_{i=1}^{m}\left(t_i \deg\left(\pi(s)\right)\right) \end{aligned} \tag{5.6}$$

<u>Απόδειξη :</u>

Θεωρούμε ότι υπάρχει non-singular πίνακας $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιος ώστε να έχει αναλλοίωτους παράγοντες τα πολυώνυμα $\psi_m(s)|...|\psi_1(s)$. Μπορούμε να γράψουμε $\psi_{m-i+1}(s) = \pi(s)^{t_i}\beta_i(s)$ με $\text{ΜΚΔ}\left(\beta_i(s),\pi(s)\right)$, $i=1,2,...,m$. Η Smith κανονική μορφή του P(s) είναι $\mathrm{diag}\left[\psi_m(s),...,\psi_1(s)\right]$ και υπάρχουν unimodular πίνακες $U(s),V(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε $P(s)=A(s)B(s)$, όπου

$$A(s) = U(s)\mathrm{diag}\left[\pi(s)^{t_1},...,\pi(s)^{t_m}\right] \ , \ B(s) = \mathrm{diag}\left[\beta_1(s),...,\beta_m(s)\right]V(s)$$

Από τον ορισμό 3.2.3 οι τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης ως προς το πολυώνυμο $\pi(s)$ του $P(s)$, δηλαδή οι $k_1,...,k_m$, είναι οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $A(s)$. Αφού οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $A(s)$ είναι τα $\pi(s)^{t_1}|...|\pi(s)^{t_m}$ η συνθήκη (5.6) προκύπτει από το θεώρημα 5.1.1. Αντίστροφα, σύμφωνα με το θεώρημα του Rosenbrock υπάρχει non - singular πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1,...,k_m$ και αναλλοίωτους παράγοντες $\pi(s)^{t_1}|...|\pi(s)^{t_m}$. Άρα αρκεί να πάρουμε $P(s) = A(s)$.

▲

<u>Θεώρημα 5.3.5</u> [Amparan et al., 2004 (II)]

Έστω $0 \le k_1 \le ... \le k_m$ και $q_m \le ... \le q_1$ ακέραιοι. Τότε υπάρχει non - singular πίνακας $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1,...,k_m$ και αναλλοίωτους παράγοντες στο άπειρο τα πολυώνυμα $s^{q_1},...,s^{q_m}$ αν και μόνο αν

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{j} k_i \ge \sum_{i=1}^{j} q_{m-i+1} \quad , \quad j = 1,...,m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m} q_i\end{gathered} \tag{5.7}$$

<u>Απόδειξη :</u>

Γνωρίζουμε ότι $q_1 = \deg(P(s))$. Σύμφωνα με το λήμμα 5.3.2, υπάρχουν πολυώνυμο $m(s)$ τέτοιο ώστε $\text{ΜΚΔ}(m(s),s) = 1$ και μη αρνητικός ακέραιος d τέτοιος ώστε οι $d+q_1-k_m,...,d+q_1-k_1$ να είναι οι τοπικοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $m(s)s^{d+q_1}P(1/s)^T$ ως προς το πολυώνυμο s. Από το λήμμα 5.3.3 έχουμε ότι $s^{d+q_1-q_1}|...|s^{d+q_1-q_m}$ είναι οι πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες του πίνακα $m(s)s^{d+q_1}P(1/s)^T$ σχετικά με το ανάγωγο πολυώνυμο s. Τότε εφαρμόζοντας το λήμμα 5.3.4 για τον πίνακα $m(s)s^{d+q_1}P(1/s)^T$ έχουμε ότι

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{j}\left(d+q_1-k_{m-i+1}\right)\geq\sum_{i=1}^{j}\left(d+q_1-q_i\right),\ j=1,...,m-1\\ \sum_{i=1}^{m}\left(d+q_1-k_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(d+q_1-q_i\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{j}k_i\geq\sum_{i=1}^{j}q_{m-i+1},\ j=1,...,m-1\\ \sum_{i=1}^{m}k_i=\sum_{i=1}^{m}q_i\end{array}$$

Αντίστροφα , αν ισχύει η (5.7) και έχοντας υπόψη ότι $q_1 \geq k_m \geq k_i$, $i=1,2,...,m$ βλέπουμε ότι ισχύει

$$\sum_{i=1}^{j}\left(q_1-k_{m-i+1}\right)\geq\sum_{i=1}^{j}\left(q_1-q_i\right)\quad,\quad j=1,...,m-1$$
$$\sum_{i=1}^{m}\left(q_1-k_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(q_1-q_i\right)$$

Από το θεώρημα του Rosenbrock υπάρχει non-singular πίνακας $A(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $q_1-k_m,...,q_1-k_1$ και αναλλοίωτους παράγοντες τα πολυώνυμα $s^{q_1-q_1}|...|s^{q_1-q_m}$. Από το γεγονός ότι οι Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης και οι αναλλοίωτοι παράγοντες δεν αλλάζουν αν πολλαπλασιάσουμε τον A(s) με unimodular πίνακες μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο A(s) είναι column proper με βαθμό i στήλης q_1-k_{m-i+1} , i = 1,2,...,m . Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$A(s)=L(s)\mathrm{diag}\left[s^{q_1-k_m},...,s^{q_1-k_1}\right] \tag{5.8}$$

όπου L(s) biproper πίνακας .

Επιπλέον , αφού $q_1-k_m\leq...\leq q_1-k_1$, συνεπάγεται ότι $\deg\left(A(s)\right)=q_1-k_1$.

Αν θέσουμε στην (5.8) όπου s το 1/s και την πολλαπλασιάσουμε με s^{q_1} θα έχουμε

$$s^{q_1}A\left(1/s\right)=L\left(1/s\right)\mathrm{diag}\left[s^{k_m},...,s^{k_1}\right]\ \Rightarrow\ s^{q_1}A\left(1/s\right)^T=\mathrm{diag}\left[s^{k_m},...,s^{k_1}\right]L\left(1/s\right)^T$$

Σύμφωνα με το λήμμα 5.3.1 , αν ο $D(s) = \mathrm{diag}\left[s^{q_1-k_m},...,s^{q_1-k_1}\right]$, τότε ο πίνακας $L(1/s) = A(1/s)D(1/s)^{-1}$ είναι πολυωνυμικός . Αλλά , αφού ο L(s) είναι biproper η ορίζουσα του πίνακα $L(1/s)$ είναι biproper ρητή συνάρτηση και πολυώνυμο ταυτόχρονα . Άρα $\det L(1/s) = c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ και ο $L(1/s)$ είναι unimodular . Έτσι οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $s^{q_1}A(1/s)^T$ είναι οι $k_1,...,k_m$.

Από την άλλη μεριά , αφού τα πολυώνυμα $s^{q_1-q_1}|...|s^{q_1-q_m}$ είναι οι αναλλοίωτοι παράγοντες του A(s) , υπάρχουν unimodular πίνακες $U(s), V(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε :

$$U(s)A(s)V(s) = \mathrm{diag}\left[s^{q_1-q_1},...,s^{q_1-q_m}\right]$$

Αν όπου s βάλουμε 1/s και πολλαπλασιάσουμε με το s^{q_1} θα έχουμε

$$U(1/s)s^{q_1}A(1/s)V(1/s) = \mathrm{diag}\left[s^{q_1},...,s^{q_m}\right] \Rightarrow$$
$$V(1/s)^T s^{q_1}A(1/s)^T U(1/s)^T = \mathrm{diag}\left[s^{q_1},...,s^{q_m}\right]$$

όπου οι $U(1/s)^T, V(1/s)^T$ είναι biproper πίνακες (λήμμα 5.3.1). Έτσι τα πολυώνυμα $s^{q_1},...,s^{q_m}$ είναι οι αναλλοίωτοι παράγοντες στο άπειρο του $s^{q_1}A(1/s)^T$. Άρα , αρκεί να γράψουμε $P(s) = s^{q_1}A(1/s)^T$.

▲

<u>Παράδειγμα 5.3.6</u>

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας $T(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 1 \\ s+1 & 0 \end{bmatrix}$.

Στο παράδειγμα 1.6.5 βρήκαμε ότι η Smith - McMillan μορφή του στο άπειρο είναι ο πίνακας $S^{\infty}_{T(s)} = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$. Άρα $q_1 = 2$, $q_2 = -1$

Θα βρούμε τους αριστερούς Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $T(s)$.

```
>> k=lWHf(t)

ans =
    t=B*D*U

k =
   0    1
```

Δηλαδή $k_1 = 0$, $k_2 = 1$.

Ισχύει $k_1 = 0 \geq -1 = q_2$, $k_1 + k_2 = 1 = q_1 + q_2$.

Το ίδιο ισχύει και για τους δεξιούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $T(s)$ που είναι ίσοι με τους αριστερούς.

<u>Λήμμα 5.3.7</u> [Amparan et al. , 2004 (II)]

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times m}$ και $q_m \leq \ldots \leq q_1$ ακέραιοι. Αν το πολυώνυμο $d(s)$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων του $T(s)$ και $d = \deg(d(s))$, τότε ισχύει $T(s) = \frac{1}{d(s)} N(s)$, όπου $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$. Τα πολυώνυμα $s^{q_1},\ldots,s^{q_m}$ είναι οι αναλλοίωτοι παράγοντες στο άπειρο του $T(s)$ αν και μόνο αν τα πολυώνυμα $s^{q_1+d},\ldots,s^{q_m+d}$ είναι οι αναλλοίωτοι παράγοντες στο άπειρο του $N(s)$.

<u>Θεώρημα 5.3.8</u> [Amparan et al. , 2004 (II)]

Έστω $k_1 \leq \ldots \leq k_m$ και $q_m \leq \ldots \leq q_1$ ακέραιοι. Τότε υπάρχει non - singular πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times m}$ με Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1,\ldots,k_m$ και αναλλοίωτους παράγοντες στο άπειρο τα πολυώνυμα $s^{q_1},\ldots,s^{q_m}$ αν και μόνο αν

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{j} k_i \geq \sum_{i=1}^{j} q_{m-i+1} \quad , \quad j = 1,\ldots,m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m} q_i \end{gathered} \tag{5.9}$$

Απόδειξη :

Από τα λήμματα 5.2.2 , 5.3.7 γνωρίζουμε ότι οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του N(s) είναι οι $k_1+d,...,k_m+d$ και οι αναλλοίωτοι παράγοντες στο άπειρο του N(s) είναι τα πολυώνυμα $s^{q_1+d},...,s^{q_m+d}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 5.3.5 στον πίνακα N(s) έχουμε ότι

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{j}(k_i+d)\geq\sum_{i=1}^{j}(q_{m-i+1}+d)\ ,\ j=1,...,m-1\\ \sum_{i=1}^{m}(k_i+d)=\sum_{i=1}^{m}(q_i+d)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{j}k_i\geq\sum_{i=1}^{j}q_{m-i+1}\ ,\ j=1,...,m-1\\ \sum_{i=1}^{m}k_i=\sum_{i=1}^{m}q_i\end{array}$$

Αντίστροφα , έστω d ακέραιος τέτοιος ώστε $d\geq|k_1|$. Τότε οι $k_1+d,...,k_m+d$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και οι $q_1+d,...,q_m+d$ είναι ακέραιοι .

Από την σχέση (5.9) έχουμε

$$\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{j}(k_i+d)\geq\sum_{i=1}^{j}(q_{m-i+1}+d)\quad,\quad j=1,...,m-1\\ \sum_{i=1}^{m}(k_i+d)=\sum_{i=1}^{m}(q_i+d)\end{array}.$$

Έτσι , από το θεώρημα 5.3.5 , υπάρχει πίνακας $N(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης τους $k_1+d,...,k_m+d$ και αναλλοίωτους παράγοντες στο άπειρο τα πολυώνυμα $s^{q_1+d},...,s^{q_m+d}$. Έστω $T(s)=\frac{1}{d(s)}N(s)$ όπου d(s) είναι πολυώνυμο βαθμού d . Εφαρμόζοντας τα λήμματα 5.2.2 , 5.3.7 έχουμε ότι ο T(s) είναι ο ζητούμενος πίνακας .

▲

Παράδειγμα 5.3.9

Έστω ο ρητός πίνακας $T(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{s} & \frac{3s}{s^2+1}\\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$.

Θα βρούμε την Smith - McMillan μορφή του στο άπειρο .

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με την biproper ρητή συνάρτηση $\frac{s}{s+1}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{3s}{s^2+1} \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3s^2}{(s+1)(s^2+1)} \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη με $\frac{-3s^2}{(s+1)(s^2+1)}$ και την προσθέτουμε στη δεύτερη :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3s^2}{(s+1)(s^2+1)} \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-3s^2}{(s+1)(s^2+1)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{s^3+s^2-2s-5}{(s+1)(s+2)(s^2+1)} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη στήλη με $\frac{(s+1)(s+2)(s^2+1)}{s(s^3+s^2-2s-5)}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{s^3+s^2-2s-5}{(s+1)(s+2)(s^2+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{(s+1)(s+2)(s^2+1)}{s(s^3+s^2-2s-5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη στήλη με $\frac{-1}{s}$ και την προσθέτουμε στην πρώτη : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{s} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = S^{\infty}_{T(s)}$. Δηλαδή $q_1 = 0$, $q_2 = -1$.

Θα βρούμε τους αριστερούς Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του T(s) :

```
>> Nr=[s+1 3*s ; 1 1];
>> Dr=[s s^2+1;s^2 s+2];
>> k=lWHfR(Nr,Dr)
```

```
t =
   [    (s+1)/s, 3*s/(s^2+1)]
   [      1/s^2,        1/(s+2)]

ans =
    t=B*D*U

k =
    -1    0
```

Δηλαδή $k_1 = -1$, $k_2 = 0$.

Ισχύει προφανώς η (5.9) , αφού $k_1 = q_2$, $k_2 = q_1$.

Συνέπεια των παραπάνω είναι η σχέση των Wiener - Hopf δεικτών παραγοντοποίησης με τους αναλλοίωτους παράγοντες στο άπειρο ενός proper ρητού πίνακα .

<u>Πρόταση 5.3.10</u> [Amparan et al. , 2004 (II)]

Έστω $k_1 \le \ldots \le k_m$ και $q_m \le \ldots \le q_1$ μη θετικοί ακέραιοι . Τότε υπάρχει non-singular πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}(s)_{pr}^{m\times m}$ με Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1,\ldots,k_m$ και αναλλοίωτους παράγοντες στο άπειρο τα πολυώνυμα $s^{q_1},\ldots,s^{q_m}$ αν και μόνο αν

$$\sum_{i=1}^{j} k_i \ge \sum_{i=1}^{j} q_{m-i+1} \quad , \quad j = 1,\ldots,m-1$$

$$\sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m} q_i$$

5.4 ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΠΕΙΡΗ ΔΟΜΗ ΡΗΤΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Θεώρημα 5.4.1 [Amparan et al. , 2004 (II)]

Έστω $k_1 \le ... \le k_m$, $q_m \le ... \le q_1$ ακέραιοι και $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1,2,...,m$ ανάγωγες ρητές συναρτήσεις , όπου $\varepsilon_i(s)$, $\psi_i(s)$, $i = 1,2,...,m$ κανονικά και ξένα μεταξύ τους πολυώνυμα τέτοια ώστε $\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s)$, $\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s)$, $i = 1,2,...,m-1$. Τότε υπάρχει non - singular πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times m}$ με Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης k_1 , ..., k_m , αναλλοίωτους παράγοντες στο άπειρο τα πολυώνυμα s^{q_1} ,..., s^{q_m} και αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις τα $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1,2,...,m$ αν και μόνο αν

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{j} k_i \ge \sum_{i=1}^{j} \left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right)\right) \quad , \quad j = 1,...,m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right)\right) \end{gathered} \tag{5.10}$$

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{j} k_i \ge \sum_{i=1}^{j} q_{m-i+1} \quad , \quad j = 1,...,m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m} q_i \end{gathered} \tag{5.11}$$

Απόδειξη :

Οι σχέσεις (5.10), (5.11) προκύπτουν από τα θεωρήματα 5.2.3 , 5.3.8 . Αντίστροφα , από το θεώρημα 5.2.3 , υπάρχει ρητός πίνακας $T_1(s)$ με Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης τους $k_1,...,k_m$ και αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις τα $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1,2,...,m$. Από το θεώρημα 5.3.8 , υπάρχει ρητός πίνακας

$T_2(s)$ με Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης τους $k_1,...,k_m$ και αναλλοίωτους παράγοντες στο άπειρο τα πολυώνυμα $s^{q_1},...,s^{q_m}$. Αφού οι $T_1(s)$, $T_2(s)$ έχουν τους ίδιους Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι Wiener - Hopf ισοδύναμοι. Επομένως, υπάρχουν biproper πίνακας $B(s) \in \mathbb{R}(s)_{pr}^{m\times m}$ και unimodular πίνακας $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε $T_1(s) = B(s)T_2(s)U(s)$.

Έτσι ο πίνακας $T(s) = B(s)T_2(s) = T_1(s)U(s)^{-1}$ έχει την ίδια άπειρη δομή με τον $T_2(s)$, την ίδια πεπερασμένη δομή με τον $T_1(s)$ και ίδιους Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης με τους $T_1(s), T_2(s)$. Άρα ο $T(s)$ είναι ο ζητούμενος πίνακας .

▲

<u>Παράδειγμα 5.4.2</u>

Έστω ο ρητός πίνακας $T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{3s}{s^2+1} \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$.

Στο παράδειγμα 5.3.9 βρήκαμε ότι $q_1 = 0, q_2 = -1$, $k_1 = -1, k_2 = 0$ και ότι ισχύει η (5.11). Θα βρούμε την Smith - McMillan μορφή του :

```
>> Nr=[s+1 3*s ; 1 1];
>> Dr=[s s^2+1;s^2 s+2];
>> n=size(Nr);
t=Nr./Dr

t =
    [    (s+1)/s,  3*s/(s^2+1)]
    [      1/s^2,        1/(s+2)]

p=plcm(Dr);
f=plcm(p);
N=f*t
```

```
N =
    2s + 3s^2 + 3s^3 + 3s^4 + s^5     6s^3 + 3s^4
    2 + s + 2s^2 + s^3                s^2 + s^4

>> s=smith(N)

s =
    1     0
    0    -10s^3 - 9s^4 - 10s^5 - 6s^6 + s^7 + 3s^8 + s^9

>> s/f

ans.numerator =
    1     0
    0    -10s^3 - 9s^4 - 10s^5 - 6s^6 + s^7 + 3s^8 + s^9

ans.denominator =
    2s^2 + s^3 + 2s^4 + s^5     0
    0                           2s^2 + s^3 + 2s^4 + s^5
```

Δηλαδή $\deg \varepsilon_1(s) - \deg \psi_1(s) = 0 - 5 = -5$, $\deg \varepsilon_2(s) - \deg \psi_2(s) = 9 - 5 = 4$.

Άρα ισχύει

$$k_1 = -1 \geq -5 = \deg \varepsilon_1(s) - \deg \psi_1(s)$$
$$k_1 + k_2 = -1 = \deg \varepsilon_1(s) - \deg \psi_1(s) + \deg \varepsilon_2(s) - \deg \psi_2(s)$$

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο συσχετίζοντας τους αριστερούς με τους δεξιούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης . Επίσης δίνεται μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε δύο n - άδες ακεραίων να είναι οι αριστεροί και οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης ενός ρητού πίνακα .

Είναι προφανές ότι όλοι οι πίνακες στα σύνολα

$$\{U(s)T(s) : U(s) \text{ unimodular}\} \quad , \quad \{T(s)U(s) : U(s) \text{ unimodular}\}$$

έχουν την ίδια πεπερασμένη δομή και όλοι οι πίνακες στα σύνολα

$$\{B(s)T(s) : B(s) \text{ biproper}\} \quad , \quad \{T(s)B(s) : B(s) \text{ biproper}\}$$

έχουν την ίδια άπειρη δομή .

<u>Θεώρημα 5.4.3</u> [Amparan et al. , 2004 (II)]

Έστω $k_1 \le \ldots \le k_m$, $l_1 \le \ldots \le l_m$ ακέραιοι και $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ανάγωγες ρητές συναρτήσεις , όπου $\varepsilon_i(s)$, $\psi_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ κανονικά και ξένα μεταξύ τους πολυώνυμα τέτοια ώστε $\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s)$, $\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Τότε υπάρχει non - singular πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times m}$ με αριστερούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1, \ldots, k_m$,δεξιούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $l_1, \ldots, l_m$ και αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις τα $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ αν και μόνο αν

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{j} k_i \ge \sum_{i=1}^{j} \left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right) \right) \quad , \quad j = 1, \ldots, m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right) \right) \end{gathered} \tag{5.12}$$

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{j} l_i \ge \sum_{i=1}^{j} \left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right) \right) \quad , \quad j = 1, \ldots, m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} l_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\deg\left(\varepsilon_i(s)\right) - \deg\left(\psi_i(s)\right) \right) \end{gathered} \tag{5.13}$$

<u>Απόδειξη :</u>

Η σχέση (5.12) προκύπτει από το θεώρημα 5.2.3 . Η σχέση (5.13) προκύπτει εφαρμόζοντας το θεώρημα 5.2.3 στον πίνακα $T(s)^T$, αφού ο $T(s)^T$ έχει αριστερούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $l_1, \ldots, l_m$ και αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις τα $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Αντίστροφα , σύμφωνα με το θεώρημα 5.2.3 , υπάρχει ρητός πίνακας $T_1(s)$ με αριστερούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1, ..., k_m$ και αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις τα $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1,...,m$. Επιπλέον , υπάρχει ρητός πίνακας $T_2(s)$ με αριστερούς Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $l_1,...,l_m$ και αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις τα $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1,2,...,m$. Αφού οι $T_1(s)$ και $T_2(s)^T$ έχουν την ίδια πεπερασμένη δομή , υπάρχουν unimodular πίνακες $U_1(s), U_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε $T_1(s) = U_1(s)T_2(s)^T U_2(s)$. Άρα ο ζητούμενος πίνακας είναι ο $T(s) = U_1(s)T_2(s)^T = T_1(s)U_2(s)^{-1}$.

▲

<u>Παράδειγμα 5.4.4</u>

Έστω ο πίνακας $T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} & 0 & \frac{s}{(s+1)^2} \\ \frac{3}{s(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)^2} & \frac{3s+7}{s(s+1)^2(s+3)} \\ 0 & \frac{2}{s(s+1)(s+2)} & \frac{4s-6}{s(s+1)^2(s+3)^2} \end{bmatrix}$.

Ισχύει η (5.12) από το παράδειγμα 5.2.4 .

Στο παράδειγμα 4.4 βρήκαμε ότι οι δεξιοί Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του T(s) είναι οι $l_1 = -3$, $l_2 = -3$, $l_3 = -1$. Άρα ισχύει

$$l_1 = -3 \geq -6 = \deg \varepsilon_1(s) - \deg \psi_1(s)$$
$$l_1 + l_2 = -6 \geq -11 = \deg \varepsilon_1(s) - \deg \psi_1(s) + \deg \varepsilon_2(s) - \deg \psi_2(s)$$
$$l_1 + l_2 + l_3 = -7 = \deg \varepsilon_1(s) - \deg \psi_1(s) + \deg \varepsilon_2(s) - \deg \psi_2(s) + \deg \varepsilon_3(s) - \deg \psi_3(s)$$

<u>Θεώρημα 5.4.5</u> [Amparan et al. , 2004 (II)]

Έστω $k_1 \le ... \le k_m, l_1 \le ... \le l_m$ και $q_m \le ... \le q_1$ ακέραιοι .Τότε υπάρχει non - singular πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times m}$ με αριστερούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1, ..., k_m$, δεξιούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $l_1,...,l_m$ και αναλλοίωτους παράγοντες στο άπειρο τα πολυώνυμα $s^{q_1},...,s^{q_m}$ αν και μόνο αν

$$\sum_{i=1}^{j} k_i \ge \sum_{i=1}^{j} q_{m-i+1} \quad , \quad j = 1,...,m-1$$
$$\sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m} q_i \tag{5.14}$$

$$\sum_{i=1}^{j} l_i \ge \sum_{i=1}^{j} q_{m-i+1} \quad , \quad j = 1,...,m-1$$
$$\sum_{i=1}^{m} l_i = \sum_{i=1}^{m} q_i \tag{5.15}$$

<u>Απόδειξη :</u>

Η σχέση (5.14) προκύπτει από το θεώρημα 5.3.8 . Η σχέση (5.15) προκύπτει εφαρμόζοντας το θεώρημα 5.3.8 στον πίνακα $T(s)^T$, αφού ο $T(s)^T$ έχει αριστερούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $l_1,...,l_m$ και αναλλοίωτους παράγοντες στο άπειρο τα πολυώνυμα $s^{q_1},...,s^{q_m}$

Αντίστροφα , σύμφωνα με το θεώρημα 5.3.8 , υπάρχει ρητός πίνακας $T_1(s)$ με αριστερούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1, ..., k_m$ και αναλλοίωτους παράγοντες στο άπειρο τα πολυώνυμα $s^{q_1},...,s^{q_m}$. Επιπλέον , υπάρχει ρητός πίνακας $T_2(s)$ με αριστερούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $l_1,...,l_m$ και αναλλοίωτους παράγοντες στο άπειρο τα πολυώνυμα $s^{q_1},...,s^{q_m}$. Αφού οι $T_1(s)$ και $T_2(s)^T$ έχουν την ίδια άπειρη δομή , υπάρχουν biproper πίνακες $B_1(s), B_2(s) \in \mathbb{R}(s)_{pr}^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε $T_1(s) = B_1(s)T_2(s)^T B_2(s)$. Άρα ο ζητούμενος πίνακας είναι ο $T(s) = B_1(s)T_2(s)^T = T_1(s)B_2(s)^{-1}$.

▲

Παράδειγμα 5.4.6

Έστω ο ρητός πίνακας $T(s)=\begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{3s}{s^2+1} \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$.

Στο παράδειγμα 5.3.9 βρήκαμε ότι $q_1=0$, $q_2=-1$, $k_1=-1$, $k_2=0$ και ότι ισχύει η (5.14). Θα βρούμε τους δεξιούς Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του T(s).

```
>> Nr=[s+1 3*s ; 1 1];
>> Dr=[s s^2+1;s^2 s+2];
>> l=rWHfR(Nr,Dr)

t =
   [    (s+1)/s, 3*s/(s^2+1)]
   [      1/s^2,       1/(s+2)]

ans =
    t=U*D*B

l =
    -1    0
```

Δηλαδή $l_1=-1$, $l_2=0$ και προφανώς ισχύει η (5.15).

Πρόταση 5.4.7 [Amparan et al., 2004 (II)]

Έστω $k_1 \le ... \le k_m$, $l_1 \le ... \le l_m$ ακέραιοι. Τότε υπάρχει non-singular πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m\times m}$ με αριστερούς Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1, ..., k_m$, δεξιούς Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $l_1,...,l_m$ αν και μόνο αν

$$\sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m} l_i \qquad (5.16)$$

Απόδειξη :

Η σχέση (5.16) είναι προφανής λόγω των σχέσεων (5.14) - (5.15) . Για να αποδείξουμε το αντίστροφο χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $q^+ = \max\{q, 0\}$ και επιλέγουμε ακέραιους $q_1 \geq \ldots \geq q_m$ ως εξής :

$$q_1 = \max\left\{\sum_{i=1}^{m} k_i^+ , \sum_{i=1}^{m} l_i^+\right\} \quad , \quad q_2 = \ldots = q_{m-1} = 0 \quad , \quad q_m = \sum_{i=1}^{m} k_i - q_1$$

Έτσι ισχύουν οι (5.14) - (5.15) .
Η ύπαρξη του πίνακα T(s) προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα .

▲

Παράδειγμα 5.4.8

Έστω ο πίνακας $T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} & 0 & \frac{s}{(s+1)^2} \\ \frac{3}{s(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)^2} & \frac{3s+7}{s(s+1)^2(s+3)} \\ 0 & \frac{2}{s(s+1)(s+2)} & \frac{4s-6}{s(s+1)^2(s+3)^2} \end{bmatrix}$.

Στο παράδειγμα 5.2.4 βρήκαμε ότι οι αριστεροί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης είναι οι $k_1 = -3$, $k_2 = -2$, $k_3 = -2$. Στο παράδειγμα 4.4 βρήκαμε ότι οι δεξιοί Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του T(s) είναι οι $l_1 = -3$, $l_2 = -3$, $l_3 = -1$. Άρα ισχύει $k_1 + k_2 + k_3 = -7 = l_1 + l_2 + l_3$.

5.5 ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ WIENER - HOPF ΔΕΙΚΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΔΟΜΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Σε προηγούμενη παράγραφο βρήκαμε συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να υπάρχει πολυωνυμικός πίνακας με καθορισμένους Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης και αναλλοίωτους παράγοντες. Δεν μένει παρά να βρούμε αντίστοιχες συνθήκες ώστε να υπάρχει πολυωνυμικός πίνακας με καθορισμένους Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης, τοπικούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης και αναλλοίωτους παράγοντες.

Λήμμα 5.5.1 [Amparan et al., 2006], [Baragaña - Zaballa, 2002]
Έστω $D(s) = \mathrm{diag}\left[s^{c_1},...,s^{c_m}\right]$, $c_1 \le ... \le c_m$. Έστω $\psi_m(s)|...|\psi_1(s)$ και $k_1 \le ... \le k_m$ μη μηδενικά κανονικά πολυώνυμα και μη αρνητικοί ακέραιοι αντίστοιχα. Αν υπάρχει πίνακας $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με αναλλοίωτους παράγοντες τα πολυώνυμα $\psi_m(s),...,\psi_1(s)$ και είναι τέτοιος ώστε ο πίνακας $D(s)X(s)$ να έχει Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1,...,k_m$, τότε

$$k_i \ge c_i \ , 1 \le i \le m \tag{5.17}$$

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{j}\left(k_i - c_i\right) \ge \sum_{i=1}^{j} \deg \psi_{m-i+1}(s) \quad , \quad j = 1,...,m-1 \\ \sum_{i=1}^{m}\left(k_i - c_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \deg \psi_i(s)\end{gathered} \tag{5.18}$$

Λήμμα 5.5.2 [Amparan et al., 2006]
Έστω $P(s),P_1(s),P_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ non-singular πίνακες τέτοιοι ώστε $P(s)=P_1(s)P_2(s)$. Έστω $k_1,...,k_m$, $c_1,...,c_m$ οι Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του $P(s)$ και του $P_1(s)$ αντίστοιχα και $\psi_m(s),...,\psi_1(s)$ οι αναλλοίωτοι παράγοντες του $P_2(s)$. Τότε ισχύουν οι (5.17) - (5.18).

Απόδειξη :

Αφού ο $P_1(s)$ έχει Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης τους $c_1,...,c_m$ υπάρχουν πίνακες $B(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m\times m}$ biproper και $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular τέτοιοι ώστε $B(s)P(s)U(s) = D(s) = \mathrm{diag}\left[s^{c_1},...,s^{c_m}\right]$.Έχουμε ότι

$$B(s)P(s) = B(s)P_1(s)P_2(s) = B(s)P_1(s)U(s)U(s)^{-1}P_2(s) = D(s)X(s)$$

όπου $X(s) = U(s)^{-1}P_2(s)$ με αναλλοίωτους παράγοντες $\psi_m(s),...,\psi_1(s)$, ενώ ο πίνακας $D(s)X(s)$ έχει Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1,...,k_m$.

▲

<u>Θεώρημα 5.5.3</u> [Amparan et al. , 2006]

Έστω $\pi(s) \in \mathbb{R}[s]$ κανονικό ανάγωγο πολυώνυμο . Έστω μη αρνητικοί ακέραιοι $k_1 \le ... \le k_m$, $c_1 \le ... \le c_m$ και κανονικά πολυώνυμα $\varepsilon_i(s) = \pi(s)^{d_i}\beta_i(s)$, $d_i \in \mathbb{Z}$ με $\mathrm{MK\Delta}\left(\pi(s),\beta_i(s)\right) = 1$ για $i = 1,...,m$ τέτοια ώστε $\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s), i = 1,...,m-1$. Αν υπάρχει πίνακας $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1,...,k_m$, αναλλοίωτους παράγοντες $\varepsilon_1(s),...,\varepsilon_m(s)$ και τοπικούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $c_1,...,c_m$ ως προς το πολυώνυμο $\pi(s)$, τότε ισχύουν οι εξής συνθήκες :

$$k_i \ge c_i \ , 1 \le i \le m \tag{5.19}$$

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{j}\left(k_i - c_i\right) \ge \sum_{i=1}^{j}\deg\beta_i(s) \quad , \quad j = 1,...,m-1 \\ \sum_{i=1}^{m}\left(k_i - c_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\deg\beta_i(s)\end{gathered} \tag{5.20}$$

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{j}c_i \ge \sum_{i=1}^{j}\deg\left(\pi(s)^{d_i}\right) \quad , \quad j = 1,...,m-1 \\ \sum_{i=1}^{m}c_i = \sum_{i=1}^{m}\deg\left(\pi(s)^{d_i}\right)\end{gathered} \tag{5.21}$$

Απόδειξη :

Αφού $c_1,...,c_m$ είναι οι τοπικοί Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του P(s) ως προς το πολυώνυμο $\pi(s)$, $P(s)=P_1(s)P_2(s)$, όπου ο $P_1(s)$ έχει Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης τους $c_1,...,c_m$ και αναλλοίωτους παράγοντες τα πολυώνυμα $\pi(s)^{d_1},...,\pi(s)^{d_m}$. Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα 5.1.1, ισχύει η συνθήκη (5.21). Οι συνθήκες (5.19)-(5.20) προκύπτουν από το λήμμα 5.5.2.

▲

Παράδειγμα 5.5.4

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας $P(s)=\begin{bmatrix} s^2+2s+1 & 2s^2+2s \\ s^4+2s^3+4s^2+6s+3 & s+1 \end{bmatrix}$.

Στο παράδειγμα 3.2.4 βρήκαμε ότι

$$\varepsilon_1(s)=\pi(s)^1\beta_1(s)=(s+1)1 \quad , \quad \varepsilon_2(s)=\pi(s)^2\beta_2(s)=(s+1)^2(s^3+3s-0.5)$$

δηλαδή $\deg\beta_1(s)=0$, $\deg\beta_2(s)=3$, $\deg\left(\pi(s)^{d_1}\right)=1$, $\deg\left(\pi(s)^{d_2}\right)=2$.

Επίσης υπολογίσαμε ότι οι τοπικοί Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του P(s) ως προς το πολυώνυμο $\pi(s)=s+1$ είναι οι $c_1=1$, $c_2=2$. Θα βρούμε τους Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης του P(s)

```
>> k=lWHf(t)

ans =
   t=B*D*U

k =
   2    4
```

Δηλαδή $k_1=2$, $k_2=4$. Ισχύουν τα εξής :

$$k_1=2\geq 1=c_1 \quad , \quad k_2=4\geq 2=c_2$$
$$k_1-c_1=1\geq 0=\deg\beta_1(s) \quad , \quad k_1-c_1+k_2-c_2=3=\deg\beta_1(s)+\deg\beta_2(s)$$
$$c_1=1\geq 1=\deg\left(\pi(s)^{d_1}\right) \quad , \quad c_1+c_2=3=\deg\left(\pi(s)^{d_1}\right)+\deg\left(\pi(s)^{d_2}\right)$$

<u>Θεώρημα 5.5.5</u> [Amparan et al. , 2006]

Έστω $\pi(s) \in \mathbb{R}[s]$ κανονικό ανάγωγο πολυώνυμο . Έστω μη αρνητικοί ακέραιοι $k_1 \le ... \le k_m$, $c_1 \le ... \le c_m$ και κανονικά . Τότε υπάρχει πίνακας $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $k_1,...,k_m$ και τοπικούς Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης $c_1,...,c_m$, αν και μόνο αν ισχύουν οι εξής συνθήκες :

$$k_i \ge c_i \ , 1 \le i \le m \tag{5.22}$$

$$\deg \pi(s) \,|\, \sum_{i=1}^{m} c_i \tag{5.23}$$

<u>Απόδειξη :</u>

Από το θεώρημα 5.5.3 ισχύει η συνθήκη (5.22) . Επίσης έχουμε ότι

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{j} c_i \ge \sum_{i=1}^{j} \deg\left(\pi(s)^{d_i}\right), \ j = 1,...,m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} c_i = \sum_{i=1}^{m} \deg\left(\pi(s)^{d_i}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{j} c_i \ge \sum_{i=1}^{j} \left(d_i \deg \pi(s)\right), \ j = 1,...,m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} c_i = \sum_{i=1}^{m} \left(d_i \deg \pi(s)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} c_i = \deg \pi(s) \sum_{i=1}^{m} d_i \ \Rightarrow \ \deg \pi(s) \,|\, \sum_{i=1}^{m} c_i$$

Αντίστροφα , από την σχέση (5.23) , υπάρχει θετικός ακέραιος w , τέτοιος ώστε $\sum_{i=1}^{m} c_i = w \deg \pi(s)$. Τότε $\sum_{i=1}^{j} c_i \ge 0$, $j = 1,...,m-1$, $\sum_{i=1}^{m} c_i = w \deg \pi(s)$. Από το θεώρημα 5.1.1 και το γεγονός ότι ένας non - singular πολυωνυμικός πίνακας μπορεί να μετατραπεί σε column proper αν πολλαπλασιαστεί από δεξιά με unimodular πίνακα , υπάρχει column proper πίνακας $P_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με βαθμούς στηλών $c_1,...,c_m$ και αναλλοίωτους παράγοντες $1,...,1,\pi(s)^w$. Έστω $\beta(s)$ κανονικό ανάγωγο πολυώνυμο πρώτο προς το $\pi(s)$ με βαθμό 1 . Θεωρούμε τον πίνακα

$$P_2(s) = \mathrm{diag}\left[\beta(s)^{k_1 - c_1},...,\beta(s)^{k_m - c_m}\right]$$

που , σύμφωνα με την (5.22) , είναι πολυωνυμικός . Ο column proper πίνακας $P(s) = P_1(s)P_2(s)$ με βαθμούς στηλών $k_1,...,k_m$ είναι ο ζητούμενος πίνακας .

▲

Παρατήρηση 5.5.6 [Amparan et al. , 2006]

Αν $\deg \pi(s) > 1$ η συνθήκη (5.23) δεν είναι ικανή . Θεωρούμε $\pi(s) = s^2 + 1$, $k_1 = 3$, $k_2 = 5$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 3$. Σε αυτή την περίπτωση είναι αδύνατο να βρούμε έναν πολυωνυμικό πίνακα $P_1(s)$ με Wiener - Hopf δείκτες παραγοντοποίησης 2,3 και αναλλοίωτους παράγοντες δυνάμεις του $\pi(s)$, γιατί πρέπει το $\kappa_1 + \kappa_2 = 5$ να είναι πολλαπλάσιο του $\deg \pi(s) = 2$.

5.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό ερευνήθηκε η σχέση των Wiener - Hopf δεικτών παραγοντοποίησης non - singular πολυωνυμικών πινάκων με την πεπερασμένη και άπειρη δομή τους . Τα αποτελέσματα γενικεύτηκαν για non-singular ρητούς πίνακες . Επιπλέον , μελετήθηκε η ύπαρξη πινάκων με διάφορα είδη αναλλοιώ-των (αριστεροί και δεξιοί Wiener-Hopf δείκτες παραγοντοποίησης , αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις , αναλλοίωτοι παράγοντες στο άπειρο) . Τέλος , αποδείχτηκε η ισότητα του αθροίσματος των αριστερών Wiener - Hopf δεικτών παραγοντο-ποίησης με το άθροισμα των δεξιών Wiener - Hopf δεικτών παραγοντοποίησης .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ADUKOV V.M.(2002) *Fractional and Wiener - Hopf factorizations* , Linear Algebra and its Applications, **340**,199-213 .

AMPARAN A.,MARCAIDA S. AND ZABALLA I.(2004),(I) *Assignment of infinite structure to an open-loop system* , Linear Algebra and its Applications , **379** , 249-266 .

AMPARAN A., MARCAIDA S. AND ZABALLA I. (2004) (II) *Wiener-Hopf factorization indices and infinite structure of rational matrices* , SIAM J. Control Optim., **42**,(**6**),2130-2144 .

AMPARAN A . , MARCAIDA S . AND ZABALLA I . (2006) *On the existence of linear systems with prescribed invariants for system similarity* , Linear Algebra and its Applications ,**413**,510-533 .

BARAGAÑA I . AND ZABALLA I . (1997) *Feedback invariants of supplementary pairs of matrices*, Automatica , **33**,(**2**),2119-2130 .

BARAGAÑA I . AND ZABALLA I . (2002) *Feedback invariants of restrictions and quotients : series connected systems* , Linear Algebra and its Applications , **351-352** ,69-89 .

ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗΣ Α.Ι.Γ. (2005) Σημειώσεις του μεταπτυχιακού μαθήματος β΄εξαμήνου «*Θεωρία Πολυμεταβλητών Συστημάτων*» .

BÖTTCHER A.,GRUDSKY S.M. AND SPITKOVSKY I.M.(2000)*Matrix functions with arbitrarily prescribed left and right partial indices*, Integral Equations Operator Theory , **36** ,71-91 .

BRUNOVSKY P.(1970) *A classification of linear controllable systems*, Kybernetica (Prague) , **3** ,(**6**),173-188 .

CLANCEY K . AND GOHBERG I .(1981) *Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators* , Birkhäuser Verlag , Basel, Boston , Stuttgart .

FUHRMANN P.A (2006) Lecture notes on "*Algebraic theory of linear systems*" .

FUHRMANN P.A AND HELMKE U. (2001) *On the parametrization of conditioned invariant subspaces and observer theory* , Linear Algebra and its Applications , **332-334** ,265-353 .

FUHRMANN P.A AND WILLEMS J.C. (1979) *Factorization indices at infinity for rational matrix functions* , Integral Equations Operator Theory , **2/3** , 287-301 .

GOHBERG I . ,KAASHOEK M .A . AND VAN SCHAGEN F . (1980) *Similarity of operator blocks and canonical forms I. General results , feedback equivalence and Kronecker indices*,Integral Equations Operator Theory , **3/3** , 350-396 .

GOHBERG I . AND ZUCKER Y . (1994) *Left and right factorizations of rational matrix functions* , Integral Equations Operator Theory ,**19**, 216-239 .

GREEN M. AND ANDERSON B.D.O.(1987) *State-space formulae for the factorization of all-pass matrix functions* ,Int. J. Control ,**45**,(**5**), 1575-1602 .

GROENEWALD G.J. , PETERSEN M.A. AND ZUCKER Y. (1997) *Left versus right canonical Wiener-Hopf factorization and realization* , Integral Equations Operator Theory , **28** , 466-491 .

KAILATH T. (1980) *Linear Systems* , Prentice-Hall , London .

ΚΑΡΑΜΠΕΤΑΚΗΣ Ν. (2005) Σημειώσεις του μεταπτυχιακού μαθήματος α΄εξαμήνου « *Ανάλυση και Σύνθεση Συστημάτων με την Βοήθεια Η/Υ* » .

KUCERA V. (1991) *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems* , Prentice-Hall , New York .

MARCAIDA S . AND ZABALLA I . (2004) *Invariant factors , Wiener-Hopf factorizations indices , and invariant factors at infinity of rational matrices* , Linear and Multilinear Algebra , **52** ,(**6**),427-439 .

ROCA A . AND ZABALLA I .(2004) *Feedback invariants via output injection* , Linear Algebra and its Applications , **385** ,407-442 .

ROSENBROCK H.H. (1970) *State-space and Multivariable Theory*, Nelson , New York .

VARDULAKIS A.I.G.(1980) *Right divisors of numerator polynomial matrices and (A,B)-invariant subspaces*,Int. J.Control ,**32**,(**5**),867-890.

VARDULAKIS A.I.G.(1991) *Linear Multivariable Control* , Jon Wiley and Sons , New York .

VARDULAKIS A.I.G.,LIMEBEER D.N.J. AND KARCANIAS N. (1982) *Structure and Smith-MacMillan form of a rational matrix at infinity*, Int. J. Control , **35**,(**4**),701-725 .

WOLOVICH W .A . (1974) *Linear Multivariable Systems* , Applied Mathematical Sciences , Vol. **11**, Springer-Verlag , New York .

ZABALLA I . (1987) *Matrices with prescribed rows and invariant factors* , Linear Algebra and its Applications, **87** , 113-146 .

ZABALLA I.(1989) *Interlacing and majorization in invariant factor assignment problems*,Linear Algebra and its Applications,**121**,409-421.

ZABALLA I.(1997) *Controllability and Hermite indices of matrix pairs* , Int. J. Control , **68**,(**1**),61-86 .

ZABALLA I. (2001) *Feedback invariants of restrictions-a polynomial approach* , Automatica , **37**,185-195 .

Για την συγγραφή της διπλωματικής εργασίας εκτός από τον κειμενογράφο Word χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω πακέτα λογισμικού :

- Mathtype 5.0
- MATLAB 6.5
- POLYX
- Adobe PDF maker 7.0