



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ
ΕΛΕΓΧΟΥ”

Βέλτιστος Έλεγχος Ιδιόμορφων Συστημάτων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χρυσούλα Γ. Κοκορότσκου

Επιβλέπων: Αντώνιος – Ιωάννης Βαρδουλάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2007



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ
ΕΛΕΓΧΟΥ”

Βέλτιστος Έλεγχος Ιδιόμορφων Συστημάτων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χρυσούλα Γ. Κοκορότσκου

Επιβλέπων: Αντώνιος – Ιωάννης Βαρδουλάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 20η Δεκεμβρίου 2007.

.....
Α.- Ι. Βαρδουλάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....
Ν. Καραμπετάκης
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....
Μ. Γουσίδου - Κουτίτα
Αναπλ. Καθηγήτρια Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2007

.....
Χρυσούλα Γ. Κοκορότσκου
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

Copyright © Χρυσούλα Γ. Κοκορότσκου, 2007.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα ιδιόμορφα ή γενικευμένα συστήματα (singular or generalized systems) ή συστήματα στο γενικευμένο χώρο κατάστασης τα συναντάμε σε συστήματα εφαρμοσμένης μηχανικής, όπως για παράδειγμα σε ηλεκτρικά κυκλώματα, σε δυναμικά συστήματα, στην αεροδιαστημική εφαρμοσμένη μηχανική, σε χημικές επεξεργασίες καθώς επίσης σε κοινωνικοοικονομικά συστήματα καθώς και σε πολλούς άλλους τομείς. Η μορφή τους τα καθιστά επίσης χρήσιμα στη μοντελοποίηση συστημάτων.

Η παρούσα εργασία διαπραγματεύεται τη μελέτη του βέλτιστου ελέγχου των συστημάτων αυτών.

Για την επίτευξη του σκοπού αυτού παραθέτουμε στο πρώτο κεφάλαιο μια εισαγωγή στη Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου καθώς και μια ιστορική αναδρομή στο Λογισμό Μεταβολών, τον κλάδο των μαθηματικών επέκταση του οποίου αποτελεί η Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου. Στην συνέχεια γίνεται αναφορά στις αναγκαίες και ικανές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να έχουμε βέλτιστη λύση και παρατίθεται η λύση του προβλήματος του Βέλτιστου Γραμμικού Τετραγωνικού Ρυθμιστή (Linear Quadratic Regulator – LQR) όσον αφορά τα συστήματα στο χώρο κατάστασης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται μια εισαγωγή στα ιδιόμορφα συστήματα και τις ιδιότητες τους που μας χρειάζονται για την επίλυση του προβλήματος του Βέλτιστου Ελέγχου.

Τέλος στο τρίτο κεφάλαιο κατά ανάλογο τρόπο όπως και με τα συστήματα στο χώρο κατάστασης, εφαρμόζοντας τη θεωρία του Λογισμού των Μεταβολών δίνονται οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να έχουμε Βέλτιστο Έλεγχο καθώς και η επίλυση του προβλήματος του Γραμμικού Τετραγωνικού Ρυθμιστή (LQR).

ΛΕΞΕΙΣ - ΚΛΕΙΔΙΑ

Ιδιόμορφα συστήματα, Βέλτιστος έλεγχος, Γραμμικός τετραγωνικός ρυθμιστής

ABSTRACT

Singular or generalised systems or systems in the generalised state space are found in engineering systems, as for example in electric circuits, in dynamic systems, in the aerospace engineering, in chemical processing also in socio-economic systems as well as in a lot of other sectors. Their form also makes them useful in modelling of systems.

The present work negotiates the study of Optimal Control of these systems.

For the achievement of this aim we mention in the first chapter an introduction in the Theory of Optimal Control as well as a historical retrospection in the Calculus of Variations, the sector of mathematics extension of which constitutes the Theory of Optimal Control. Then are mentioned the necessary and sufficient conditions that should be satisfied so that we have optimal solution and also the solution of problem of Optimal Linear Quadratic Regulator with regard to the systems in state space.

The second chapter of this work presents an introduction in the singular systems and their attributes that we need for the solution of problem of Optimal Control.

Finally in the third chapter at proportional way as with the systems in the state space, applying the theory of the Calculus of Variations are given the conditions that should be satisfied so that we have Optimal Control as well as the solution of problem of Linear Quadratic Regulator (LQR).

KEY – WORDS

Singular systems, Optimal control, Linear quadratic regulator

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ.Βαρδουλάκη Αντώνιο-Ιωάννη, του οποίου οι συμβουλές και υποδείξεις υπήρξαν πολύ χρήσιμες.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να εκφράσω την εκτίμησή μου και να ευχαριστήσω τον επίκουρο καθηγητή κ.Καραμπετάκη Νικόλαο για το πλούσιο υλικό που μου υπέδειξε, την οργανωτική επιμέλεια και τη συνολική επίβλεψή του που υπήρξαν καθοριστικές για τη συγγραφή της διπλωματικής μου εργασίας.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω στην αναπληρώτρια καθηγήτρια κα.Γουσίδου-Κουτίτα Μαρία για το χρόνο που αφιέρωσε στη μελέτη καθώς και την αξιολόγηση της εργασίας. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και ιδιαίτερα το σύζυγο μου για την αμέριστη συμπαράστασή τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

| | |
|---|-----|
| ΠΕΡΙΛΗΨΗ | 5 |
| ABSTRACT | 6 |
| ΠΡΟΛΟΓΟΣ | 7 |
| | |
| 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ..... | 11 |
| 1.1 Ιστορική αναδρομή του Λογισμού των Μεταβολών..... | 11 |
| 1.2 Εισαγωγή στη Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου..... | 21 |
| 1.3 Βέλτιστος Έλεγχος συνεχών συστημάτων | 26 |
| 1.3.1 Εφαρμογές του Λογισμού Μεταβολών στον Βέλτιστο Έλεγχο..... | 26 |
| 1.3.2 Το πρόβλημα του Βέλτιστου Γραμμικού Ρυθμιστή (LQR-Linear Quadratic Regulator Problem) | 41 |
| | |
| 2 ΙΔΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ | 50 |
| 2.1 Εισαγωγή | 50 |
| 2.2 Κανονικότητα ιδιόμορφων εξισώσεων..... | 55 |
| 2.3 Ισοδυναμία ιδιόμορφων συστημάτων | 61 |
| 2.3.1 Πρώτη ισοδύναμη μορφή (First Equivalent Form)..... | 63 |
| 2.3.2 Δεύτερη ισοδύναμη μορφή (Second Equivalent Form) | 66 |
| 2.3.3 Τρίτη ισοδύναμη μορφή (Third Equivalent Form) | 68 |
| 2.3.4 SVD ισοδύναμη μορφή | 70 |
| 2.4 Ελεγχιμότητα (Controllability) των ιδιόμορφων συστημάτων | 70 |
| 2.5 Παρατηρησιμότητα (Observability) των ιδιόμορφων συστημάτων..... | 75 |
| 2.6 Αρχή της Δυσκότητας | 77 |
| 2.7 Ανάδραση κατάστασης (State Feedback)..... | 78 |
| 2.8 Ευστάθεια (Stability) ιδιόμορφων συστημάτων..... | 79 |
| 2.9 Ελεγχιμότητα, παρατηρησιμότητα στο ∞ | 81 |
| | |
| 3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ..... | 87 |
| 3.1 Εισαγωγή | 87 |
| 3.2 Εφαρμογές του Λογισμού Μεταβολών στο Βέλτιστο Έλεγχο για ιδιόμορφα συστήματα | 88 |
| 3.3 Το πρόβλημα του Βέλτιστου Γραμμικού Ρυθμιστή (LQR-Linear Quadratic Regulator Problem) για ιδιόμορφα συστήματα | 98 |
| 3.3.1 Υπολογισμός του βέλτιστου κέρδους ανάδρασης και της βέλτιστης τιμής του δείκτη απόδοσης | 107 |
| 3.3.2 Διαφορικές εξισώσεις Riccati | 111 |
| 3.3.3 Το πρόβλημα του Βέλτιστου Γραμμικού Ρυθμιστή σε ιδιόμορφα συστήματα όταν $t_f = \infty$ | 124 |
| | |
| 4 ΕΠΙΛΟΓΟΣ | 135 |
| | |
| ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ | 137 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ | 138 |

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάπτυξη της μαθηματικής Θεωρίας του Βέλτιστου Ελέγχου άρχισε στις αρχές της δεκαετίας του '50 λόγω της ανάγκης να δοθούν απαντήσεις σε προβλήματα που εμφανίζονταν στους διάφορους κλάδους της εφαρμοσμένης μηχανικής (ηλεκτρολογία, μηχανολογία κλπ.). Αργότερα βέβαια εξαιτίας του γεγονότος ότι οποιοδήποτε φυσικό ή τεχνητό δυναμικό σύστημα που μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο μαθηματικών σχέσεων είναι δυνατό να αναλυθεί και να ελεγχθεί μέσω της Θεωρίας του Βέλτιστου Ελέγχου, βρήκε ευρεία εφαρμογή και σε άλλους τομείς της επιστήμης όπως για παράδειγμα στον κλάδο της φυσικής, της ιατρικής, των οικονομικών κλπ.

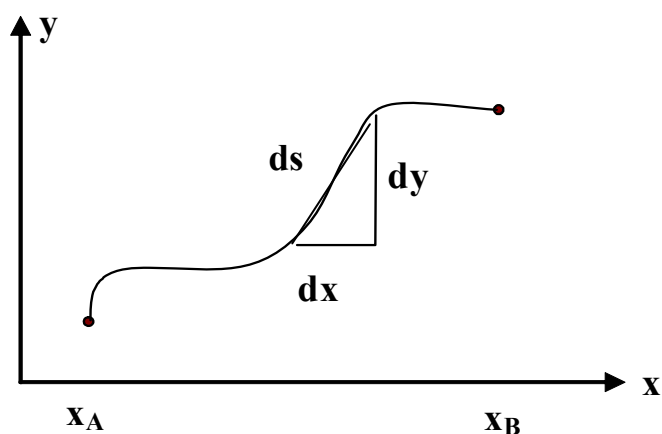
Παρά τη σύγχρονη προέλευσή της η *Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου* από μαθηματική άποψη είναι μια επέκταση ενός από τους παλαιότερους και σημαντικότερους κλάδους των Μαθηματικών του *Λογισμού των Μεταβολών*.

Για τον λόγο αυτό παρακάτω θα παραθέσουμε μια αναδρομή στο ιστορικό γέννησής του καθώς και μια εισαγωγή στη Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου.

1.1 Ιστορική αναδρομή του Λογισμού των Μεταβολών

Πολλά προβλήματα περιλαμβάνουν την εύρεση μίας ή περισσότερων αγνώστων συναρτήσεων, μίας ή περισσότερων μεταβλητών που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί την τιμή ενός συγκεκριμένου ολοκληρώματος. Το ολοκλήρωμα αυτό γενικά είναι μία συνάρτηση των αγνώστων συναρτήσεων και των παραγώγων τους και ονομάζεται **συναρτησιακό** ή **συναρτησιοειδές**. Οι μαθηματικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για να δώσουν λύση σε αυτόν τον τύπο προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι συλλογικά γνωστές ως **Λογισμός των Μεταβολών** (calculus of variations).

Προβλήματα βελτιστοποίησης ως επί τω πλείστον είχαν απασχολήσει τους αρχαίους Έλληνες. Το παλαιότερο από όλα είναι εκείνο της εύρεσης της πιο κοντινής απόστασης που ενώνει δύο σημεία και έχει αποδειχθεί ότι είναι το ευθύγραμμο τμήμα.



Εικόνα 1: Γραφική παράσταση

Έστω δύο τυχαία σημεία $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$. Το μήκος της τυχαίας καμπύλης που συνδέει το αρχικό σημείο A με το τελικό σημείο B δίνεται από το παρακάτω συναρτησιακό :

$$I(y(x)) = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_A^B \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (1.1-1)$$

Το ζήτημα που τίθεται λοιπόν είναι η εύρεση εκείνης της συνάρτησης που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $I(y(x))$. Ορίζουμε :

$$L(y(x), y'(x), x) = L(y'(x)) = \sqrt{1 + (y'(x))^2}. \quad (1.1-2)$$

Η εξίσωση Euler-Lagrange τότε δίνει:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y'} = \text{σταθ} \Rightarrow \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = C \quad (1.1-3)$$

για κάποια σταθερά C, οπότε $y'(x) = A$ όπου $A^2 = \frac{C^2}{1 - C^2}$ και άρα η συντομότερη «καμπύλη» είναι της μορφής $y(x) = Ax + B$ δηλαδή ευθεία.

Ας δούμε τώρα ένα άλλο πρόβλημα μεγιστοποίησης που συνδέεται με τον μύθο της Διδούς, της βασίλισσας της Καρχηδόνας, που ο Βιργίλιος (70-19π.χ) διασώζει στο επικό του ποίημα την *Αινειάδα* και που τοποθετείται περίπου στον 9^ο π.Χ. αιώνα. Σύμφωνα με τον μύθο αυτόν η πριγκίπισσα Διδώ της Φοινίκης μετά τον θάνατο του πατέρα της, Βασιλιά της Τύρου Βήλου, και όταν ο αδερφός της Πυγμαλίων, μετέπειτα βασιλιάς και τύραννος, δολοφόνησε τον άνδρα της Σιχαίο για να σφετεριστεί την περιουσία του, εγκατέλειψε την πατρίδα της δυσαρεστημένη μαζί με ένα πλήθος συμπατριωτών της πηγαίνοντας προς στα βορειοδυτικά παράλια της Αφρικής, στον κόλπο της σημερινής Τύνιδας. Εκεί ζήτησε άσυλο από τον τοπικό ηγεμόνα Ιάρβα και συγκεκριμένα του ζήτησε κάτι ελάχιστο, να αγοράσει ένα κομμάτι γης, όσο θα μπορούσε να «κυκλωθεί με την δωρά ενός ταύρου». Μετά από διαπραγματεύσεις ο Ιάρβας συμφώνησε και η Διδώ άδραξε την ευκαιρία.



Εικόνα 2: Διδώ η βασίλισσα της Καρχηδόνας

Τεμάχισε τη δωρά του ταύρου σε λεπτές λωρίδες, τις έδωσε την μια πίσω από την άλλη και κύκλωσε μια μεγάλη έκταση γης, όπου έχτισε ένα φρούριο και κοντά του την "Νέα Πόλη", στα φοινικικά *Karta hadascha*, από όπου προήλθε το όνομα Καρχηδόνα.

Το πρόβλημα αυτό που απορρέει από τον μύθο της Διδούς και είναι γνωστό σήμερα στα Μαθηματικά ως *ισοπεριμετρικό πρόβλημα* μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

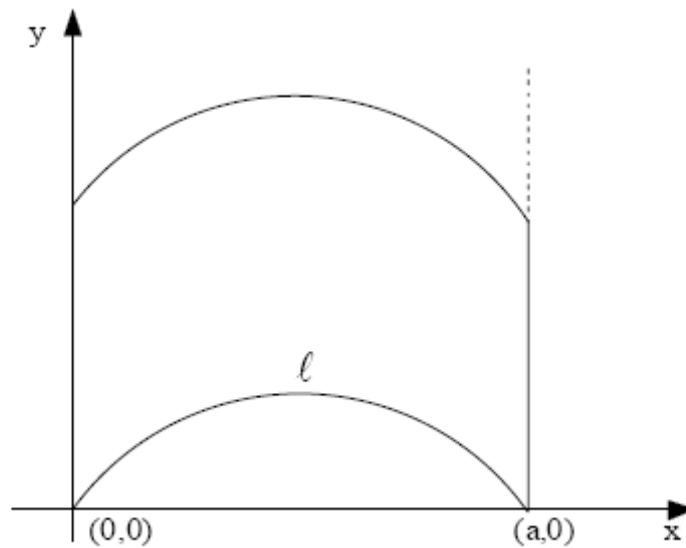
«Να βρεθεί εκείνη η κλειστή επίπεδη καμπύλη ενός δεδομένου μήκους ℓ , της περιμέτρου της η οποία να περικλείει το μέγιστο δυνατό εμβαδόν S ».

Εντούτοις σύμφωνα με τον Βιργίλιο η Διδώ χρησιμοποίησε και ένα ακόμη τέχνασμα. Ένωσε τα άκρα της κορδέλας από δέρμα ταύρου με ένα ευθύ τμήμα της μεσογειακής ακτής, έτσι η κορδέλα διέγραψε την περιφέρεια ενός ημικυκλίου. Κατ' αυτό τον τρόπο,

ακόμη μεγαλύτερη περιοχή γης εσωκλείστηκε, δεδομένου ότι το μήκος των ακτών προστέθηκε στο μήκος της κορδέλας.

Όποτε το πρόβλημα διατυπώνετε ως εξής:

«Μεταξύ όλων των τόξων με μήκος ℓ τα οποία περιέχονται στην ημιλωρίδα $0 \leq x \leq a$, $y \geq 0$ και έχουν καθορισμένα άκρα $(0,0)$ και $(a,0)$ να βρεθεί ένα τόξο το οποίο, μαζί με το τμήμα $y = 0$, $0 \leq x \leq a$ να περικλείει ένα χωρίο με το μέγιστο δυνατό εμβαδόν.»



Εικόνα 3 :Γραφική αναπαράσταση του προβλήματος της Διδούς

Το ζήτημα που τίθεται κατά συνέπεια στο παραπάνω πρόβλημα είναι η εύρεση του μέγιστου του παρακάτω συναρτησιακού :

$$I(y(x)) = \int_0^a y(x) dx \quad (1.1-4)$$

υπό τον περιορισμό:

$$L(y(x)) = \int_0^a \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \ell \quad (1.1-5)$$

Η λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος ήταν γνωστή στους αρχαίους Έλληνες.

« Η μικρότερη σε μήκος καμπύλη που περικλείει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι ο κύκλος ».Ο Θέων της Αλεξάνδρειας και έπειτα ο Πάππος (300 μχ) καθώς και ο Ζηνόδωρος (495-435 πχ) έδωσαν τη λύση. Ωστόσο μόλις τον 19^ο αιώνα δόθηκε λύση με σύγχρονες τεχνικές μεθόδους όπως ο Βέλτιστος Έλεγχος. Μια αυστηρή μαθηματική απόδειξη δόθηκε από τον Weierstrass στις διαλέξεις του στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου.

Άλλος ένας αρχαίος Έλληνας που ασχολήθηκε με προβλήματα βελτιστοποίησης ήταν ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς. Ήταν ένας από τους μεγάλους φυσικομαθηματικούς και μηχανικούς της αρχαιότητας με λαμπρή δράση και αξιόλογη βιβλιογραφία. Εκτιμάται ότι έζησε και έδρασε μεταξύ του 1^{ου} αι πχ και 1^{ου} αι μχ. Στο έργο του *Κατοπτρικά* έδειξε ότι ο δρόμος που ακολουθεί μια ακτίνα φωτός μεταξύ δύο σημείων μέσω της αντανάκλασής της σε έναν καθρέφτη είναι ο συντομότερος δυνατός από όλες τις δυνατές διαδρομές εάν και οι γωνίες της πρόσπτωσης και της ανάκλασης είναι ίσες. Ο Ήρωνας κατέληξε στην *αρχή του ελάχιστου δρόμου* μέσω της παρατήρησης ότι το φως διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα σε ομοιογενές μέσο και επομένως η έννοια του συντομότερου δρόμου ταυτίζεται με την έννοια του γρηγορότερου. Αργότερα όμως ο Fermat (1601-1665) διατύπωσε την *αρχή του ελάχιστου χρόνου* σύμφωνα με την οποία μια ακτίνα φωτός κινείται μεταξύ δύο σημείων, ανεξαρτήτως των υλικών μέσων που διαμεσολαβούν, στον ελάχιστο δυνατό χρόνο ο οποίος δεν είναι απαραίτητα και ο πιο σύντομος, όσον αφορά την απόσταση. Η αρχή του Fermat που αποτελεί επέκταση της αρχής του Ήρων και είναι σύμφωνη με το νόμο της διάθλασης (1621) του Snellius διαδραμάτισε σημαντικό ρόλο στην επίλυση του *βραχυστόχρονου προβλήματος* από τον Bernoulli.

Το πρόβλημα του Ήρων μπορεί να διατυπωθεί στα Μαθηματικά ως εξής :

«Δίνονται τα σημεία $A(0, y_a)$ και $B(x_b, y_b)$ στο επίπεδο ώστε να βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του τμήματος $y(x)=0, 0 \leq x \leq x_a$. Ζητείται σημείο $D(x_d, 0)$ καθώς και η ελάχιστη δυνατή διαδρομή ADB που να συνδέει τα σημεία A, B .»

Το ζητούμενο στο παραπάνω πρόβλημα είναι η εύρεση της συνάρτησης που ελαχιστοποιεί το παρακάτω συναρτησιακό:

$$I(y(x)) = \int_0^{x_b} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (1.1-6)$$

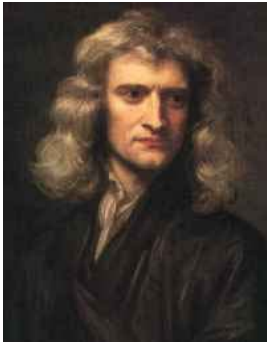
υπό τις προϋποθέσεις :

$$y(0) = y_a, y(x_d) = 0, y(x_b) = y_b \quad (1.1-7)$$

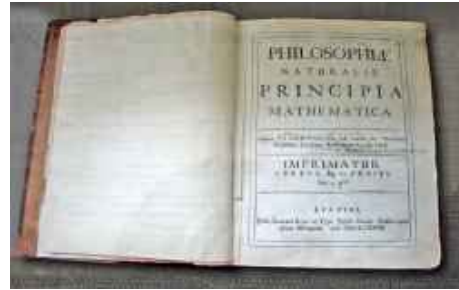
καθώς και την υπόθεση ότι η $y'(x)$ πιθανώς να μην είναι συνεχής για $x = x_d$.

Όπως έδειξε ο Ήρωνας η συντομότερη διαδρομή είναι τα ευθύγραμμα τμήματα AD και DB ενώ το σημείο D είναι τέτοιο ώστε η γωνία πρόσπτωσης να είναι ίση με την γωνία ανάκλασης.

Ο Herman H. Goldstine (1913-2004), βοηθός ερευνητής στο πλευρό του Gilbert A. Bliss, στο πανεπιστήμιο του Σικάγου, αναφέρει σε ένα σύγγραμμά του ότι ο *Λογισμός των Μεταβολών* ξεκίνησε όταν ο Pierre de Fermat (1601-1665) διατύπωσε την *αρχή του ελάχιστου χρόνου* (1662) που αναφέραμε παραπάνω. Ακολουθεί ο Galileo Galilei (1564-1642) ο οποίος έθεσε δύο προβλήματα το 1638 στο βιβλίο του *Discourse on two new sciences*, στα οποία ο ίδιος δεν μπόρεσε να δώσει σωστή λύση που όμως λύθηκαν αργότερα με τη βοήθεια του *Λογισμού των Μεταβολών*: α) το βραχυστόχρονο πρόβλημα (που θα διατυπώσουμε παρακάτω) και β) το πρόβλημα εύρεσης του σχήματος μιας αλυσίδας που κρέμεται από δύο σημεία υπό την επίδραση του βάρους της. Το λάθος του Galileo Galilei όσον αφορά το βραχυστόχρονο ήταν ότι θεώρησε ότι αυτή η καμπύλη ήταν τόξο ενός κύκλου. Αργότερα, το 1685 ο Isaac Newton (1642-1727) μελέτησε τον προσδιορισμό του σχήματος που πρέπει να έχει ένα σώμα ώστε να έχει την ελάχιστη αντίσταση κατά την κίνηση του με σταθερή ταχύτητα μέσα σε ένα υγρό. Τα συμπεράσματα της μελέτης του τα κατέγραψε στο αξιόλογο έργο του στην μηχανική, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Principia ή Principia Mathematica πιο σύντομα) και αποτέλεσαν τον σταθμό γέννησης του *Λογισμού των Μεταβολών*, μέθοδο επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης που δεν δημοσίευσε άμεσα παρά μόνο το 1694.



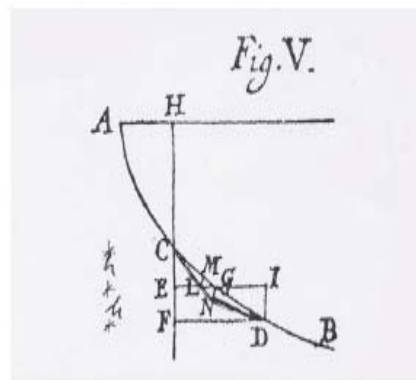
Εικόνα 4:Isaak Newton στα 46 στο Godfrey.
Ένα πορταίτο του Kneller το 1689



Εικόνα 5:Η Principia αντίγραφο του Newton με τις χειρόγραφες διορθώσεις του για τη δεύτερη έκδοση.

Ας δούμε όμως πιο είναι το βραχυστόχρονο πρόβλημα. Η διατύπωση του προβλήματος έχει ως εξής :

«Δίνονται δύο σημεία A και B σε ένα κάθετο επίπεδο. Ένα σωματίδιο M κινείται πάνω σε ένα σύρμα του οποίου οι άκρες είναι στερεωμένες στα σημεία A και B υπό την επίδραση της βαρύτητας χωρίς τριβές.. Ποιο είναι το σχήμα του σύρματος που ελαχιστοποιεί τον χρόνο κατάβασης;»



Εικόνα 6: Αρχικό σχέδιο της ιδέας του Jacob Bernoulli για την λύση του βραχυστόχρονου

Το πρόβλημα αυτό διατυπώθηκε τον Ιούνιο του 1696 στο τεύχος του περιοδικού *Acta Eruditorum* από τον Johann Bernoulli (1667-1748) καθηγητή των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Groningen - μια πανεπιστημιακή πόλη της Ολλανδίας. Ο Bernoulli γνωρίζοντας ο ίδιος την λύση, προκάλεσε τους συναδέλφους του να το λύσουν λέγοντας ότι η λύση του προβλήματος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και σε άλλους κλάδους της επιστήμης πέρα της Μηχανικής. Τόνισε προς αποφυγή γρήγορου και λάθους συμπεράσματος ότι δεν είναι η ευθεία γραμμή που ενώνει τα σημεία A, B που βέβαια είναι η πιο σύντομη απόσταση μεταξύ των σημείων αλλά όχι και η πιο σύντομη

χρονικά, αλλά είναι μια καμπύλη γνωστή στους γεωμέτρους. Το πρόβλημα αυτό ονομάστηκε από τον Bernoulli «βραχυστόχρονο πρόβλημα (*brachistochrone problem*)» από την λέξη «βράχυστος (*brachistos*)» που θα πει σύντομος και την λέξη «χρόνος (*chronos*)».

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε ότι η κινητική ενέργεια στην θέση B θα είναι ίση με την δυναμική ενέργεια στην θέση A και άρα

$$\frac{1}{2}mu(t)^2 = mgy(x) \Rightarrow u(t) = \sqrt{2gy(x)} = \frac{ds}{dt} \quad (1.1-8)$$

όπου $u(t)$ και m είναι η ταχύτητα και η μάζα του σώματος αντίστοιχα, ενώ $g=9.81\text{m/sec}^2$. Εάν T είναι ο χρόνος κατάβασης και s το μήκος της καμπύλης, τότε θα έχουμε :

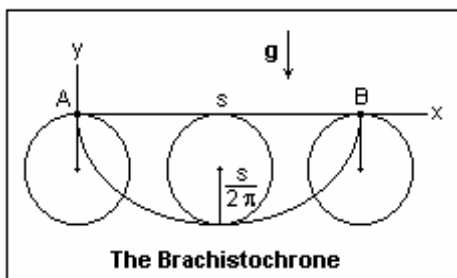
$$T = \int_0^T dt = \int_0^T \frac{dt}{ds} ds = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2gy(x)}} \sqrt{1+(y'(x))^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^T \frac{(1+(y'(x))^2)^{1/2}}{y(x)^{1/2}} dx \quad (1.1-9)$$

Συνεπώς η μαθηματική διατύπωση του παραπάνω προβλήματος έχει ως εξής :

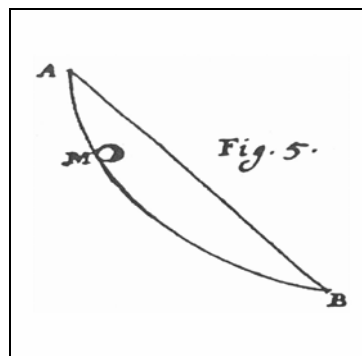
«Να βρεθεί η καμπύλη $y^*(x) \in C^1$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό :

$$T(y(x)) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^T \frac{(1+(y'(x))^2)^{1/2}}{y(x)^{1/2}} dx \text{.} \quad (1.1-10)$$

Όπως έχει αποδειχθεί από τότε η λύση του βραχυστόχρονου προβλήματος είναι η *κυκλοειδής καμπύλη*. Μετά από παρότρυνση του Leibniz ο Bernoulli έδωσε παράταση στην προθεσμία λύσης, οπότε λύση έδωσαν επίσης εξέχοντες μαθηματικοί της εποχής εκείνης, όπως ο Gottfried Leibniz (1646-1716) σε μια επιστολή του στον Bernoulli στις 16 Ιουνίου 1696, μια άλλη λύση δόθηκε από τον Jacob Bernoulli (1654-1705) μεγαλύτερο αδερφό του Johann, μια από τον Tschirnhaus, μια από τον L'Hopital και τέλος μια από τον Isaac Newton (1642-1727), η οποία δημοσιεύθηκε ανώνυμα χωρίς απόδειξη στο περιοδικό «Philosophical Transactions».



Εικόνα 7: Η κυκλοειδής καμπύλη



Εικόνα 8: Το βραχυστόχρονο πρόβλημα του Johan Bernoulli

Ο Leonard Euler (1707-1783), ο οποίος μίλησε στο πανεπιστήμιο της Basel σε ηλικία 11 ετών και ήταν μαθητής του Bernoulli, εμπνευσμένος από τον καθηγητή του, εργάστηκε στα ισοπεριμετρικά προβλήματα το 1732 και 1736 και το 1744 έδωσε το βιβλίο του «Η μέθοδος αναζήτησης επίπεδων καμπύλων που παρουσιάζουν κάποιες ιδιότητες του μέγιστου ή του ελάχιστου», όπου έδωσε μια γενική διαδικασία επίλυσης τέτοιων προβλημάτων που έγινε γνωστή ως εξίσωση Euler. Αργότερα όμως ο Jean Louis Lagrange (1736-1813), που διατηρούσε αλληλογραφία με τον Euler, του έδειξε πώς να εξαλείψει τη χρήση γεωμετρικών μεθόδων στις εργασίες του χρησιμοποιώντας μόνο ανάλυση κάνοντας χρήση συναρτήσεων σύγκρισης. Εφεύρε επίσης τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών, οι οποίοι στη σύγχρονη ονοματολογία είναι ευαίσθητες του δείκτη απόδοσης στις μεταβολές των καταστάσεων, βελτιώνοντας έτσι τη μέθοδο του Euler. Ο Euler υιοθέτησε τις μεθόδους του Lagrange, και ονόμασε το νέο αυτό ερευνητικό πεδίο με το όνομα που χρησιμοποιούμε σήμερα «Λογισμός των Μεταβολών» προς τιμή των μεθόδων μεταβολής που χρησιμοποίησε ο Lagrange. Η απαραίτητη αυτή συνθήκη για ακρότατο συναρτησιακού είναι γνωστή σήμερα ως εξίσωση Euler – Lagrange και αφορά τις πρώτες μεταβολές του συναρτησιακού.

Ο Adrien Marie Legendre (1752-1833) ήταν ο πρώτος που πραγματεύτηκε τη δεύτερη μεταβολή του συναρτησιακού δίνοντας έτσι το 1786 τις ικανές συνθήκες ώστε να έχει ένα συναρτησιακό ακρότατο μέγιστο ή ελάχιστο. Ωστόσο το 1836 ο Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) έδωσε μια πιο οξυδερκή ανάλυση αυτών των συνθηκών. Ο Jacobi έδειξε ότι οι μερικές παράγωγοι του κριτηρίου απόδοσης όσο αφορά κάθε παράμετρο μια οικογένειας καταστάσεων ικανοποιούν μια συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση, η οποία αργότερα ονομάστηκε συνθήκη Legendre-Jacobi. Σχεδόν την ίδια εποχή ο

William Rowan Hamilton (1805-1865) έκανε μια αξιοθαύμαστη εργασία στα μηχανικά συστήματα δείχνοντας ότι η κίνηση ενός σωματιδίου στον χώρο υπό την επίδραση διαφόρων εξωτερικών δυνάμεων θα μπορούσε να αντιπροσωπευθεί από μια μοναδική συνάρτηση η οποία ικανοποιεί δύο πρώτης τάξης μερικές διαφορικές παραγώγους. Το 1838 ο Jacobi άσκησε κριτική στη δουλειά του Hamilton δείχνοντας ότι είναι απαραίτητη μια μόνο διαφορική εξίσωση. Αυτή η διαφορική εξίσωση είναι γνωστή ως Hamilton-Jacobi εξίσωση και αποτέλεσε τη βάση του *δυναμικού προγραμματισμού* που αναπτύχθηκε 100 χρόνια αργότερα (το 1953) από τον Richard Ernest Bellman (1920-1984), επηρέασε επίσης τον βέλτιστο έλεγχο καθώς επίσης και τη μηχανική.

Η διάκριση μεταξύ ισχυρών και αδύνατων ακροτάτων εξετάστηκε από τον Karl Weierstrass (1815-1897) ο οποίος έδωσε την διάσημη Weierstrass συνθήκη και ικανές συνθήκες για ισχυρά και αδύνατα ακρότατα. Η συνθήκη του αυτή αποτέλεσε τον προκάτοχο της αρχής του μεγίστου του Bellman και του Pontryagin. Την ίδια περίοδο ο Alfred Clebsch (1833-1872) έδωσε μια αυστηρότερη ερμηνεία της συνθήκης του Legendre (Legendre – Clebsch) ότι δηλαδή ο πίνακας δεύτερων παραγώγων της Hamiltonian με σεβασμό στους ελέγχους πρέπει να είναι θετικά ορισμένος. Το 1868 ο Adolph Mayer αναθεώρησε την εργασία του Clebsch και έδωσε μερικά κομμάτια αποτελέσματα για γενικά προβλήματα του Λογισμού των Μεταβολών. Αργότερα ο Mayer περίγραψε με λεπτομέρειες τα έξι προβλήματα: το πρόβλημα του Lagrange το 1878, και το πρόβλημα του Mayer το 1895.

Το 1898 ο Adolf Kneser έδωσε μια νέα προσέγγιση στο Λογισμό των Μεταβολών χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Karl Gauss (1777-1855) από τη γεωδαισία. Μαζί με τον Oskar Bolza (1857-1942) έδωσαν επαρκείς αποδείξεις για αυτά τα προβλήματα. Το 1900 ο David Hilbert (1862-1943) παρουσίασε τη δεύτερη παράγωγο σαν ένα τετραγωνικό συναρτησιακό με ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις. Ο Bolza και ο Gilbert A. Bliss (1867-1951) στηριγμένοι στην εργασία του Weierstrass στο πανεπιστήμιο του Σικάγο έδωσαν στον Λογισμό των Μεταβολών την παρούσα αυστηρή μαθηματική δομή του. Το 1913 ο Bolza διατύπωσε το πρόβλημα του Bolza σαν μια γενίκευση των προβλημάτων Lagrange και Mayer. Ο Hestenes, ένας πρώην βοηθός του Bliss δήλωσε ότι η αρχή του μεγίστου στη θεωρία ελέγχου είναι ισοδύναμη με τις συνθήκες Euler – Lagrange και Weierstrass στην κλασική θεωρία. Ο Mc Shane (1904-1989) ακόμη ένας βοηθός του Bliss, παρουσίασε μια μέθοδο το 1939 η οποία αργότερα τροποποιήθηκε και επεκτάθηκε στη θεωρία βέλτιστου ελέγχου από τον Pontryagin και τη σχολή του.

Ο Placido Cicala ήταν από τους πρώτους που έγραψαν μια αξιόλογη μελέτη για τις δυνατές χρήσεις του Λογισμού των Μεταβολών στη εφαρμοσμένη μηχανική. Ο Derek Lawden ήταν μεταξύ των πρώτων που διαπίστωσαν τη χρησιμότητα του Λογισμού των Μεταβολών για τις βέλτιστες τροχιές διαστημικών σκαφών. Τέλος πολλοί άλλοι αξιόλογοι επιστήμονες όπως ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή (1873-1950), ο McShane (1904-1989) προσθέσανε στον Λογισμό των Μεταβολών νέες και σημαντικές θεωρίες. Επίσης έχει γραφεί ένας μεγάλος αριθμός βιβλίων.

Ο κλάδος αυτός των Μαθηματικών βρήκε εφαρμογή σε πολλούς τομείς όπως στην *Θεωρία Morse* (Marston Morse (1892-1977)), στην *Θεωρία Ελάχιστων Επιφανειών*, στην κβαντική μηχανική από τον Richard Feynman (1918-1988)), αλλά και στην *Βέλτιστη Θεωρία Ελέγχου*.

1.2 Εισαγωγή στη Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Ένα από τα βασικά προβλήματα του λογισμού μεταβολών είναι το εξής : *Έστω ένα καλά ορισμένο σύνολο συναρτήσεων A . Δίνεται ένα συναρτησιακό J και ζητούνται να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις του A που ελαχιστοποιούν (ή μεγιστοποιούν) το J .*

Έστω για παράδειγμα το διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και ας ορίσουμε με $C_{[a,b]}^1$ το σύνολο των συναρτήσεων που έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο στον χώρο των συναρτήσεων $y(x) : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω επίσης το συναρτησιακό:

$$J(y(x)) = \int_a^b f(x, y(x), \dot{y}(x)) dx \quad (1.2-1)$$

στόχος του Λογισμού των Μεταβολών είναι λοιπόν να βρεθεί η συνάρτηση $y(x)$ για την οποία το συναρτησιακό $J(y(x))$ παρουσιάζει ακρότατο μέγιστο (ή ελάχιστο). Φυσικά μπορούμε να έχουμε αντί για απλές συναρτήσεις από το \mathbb{R} στο \mathbb{R} , να έχουμε διανυσματικές συναρτήσεις μέσα στο ολοκλήρωμα ή συναρτήσεις με περισσότερες από μια μεταβλητές και κατά συνέπεια αντί για απλό ολοκλήρωμα να έχουμε πολλαπλά ολοκληρώματα.

Από την άλλη στόχος της *Θεωρίας του βέλτιστου ελέγχου* είναι να προσδιορίσει μια *διαδικασία ελέγχου*, δηλαδή εκείνα τα *σήματα εισόδου* που θα ελαχιστοποιήσουν ή θα

μεγιστοποιήσουν κάποια *κριτήρια απόδοσης* για ένα σύστημα το οποίο υπόκειται σε ορισμένους *φυσικούς περιορισμούς*.

Κατά συνέπεια τα προβλήματα του Λογισμού των Μεταβολών διαφέρουν κυρίως με τα προβλήματα του Βέλτιστου Ελέγχου στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις από τις οποίες εξαρτάται το συναρτησιακό (1.2-4), ικανοποιούν κάποιες επιπλέον συνθήκες είτε με την μορφή αλγεβρικών εξισώσεων, είτε με την μορφή διαφορικών εξισώσεων, είτε τέλος με την μορφή ανισοτικών σχέσεων.

Η σωστή διατύπωση του προβλήματος Βέλτιστου Ελέγχου προϋποθέτει:

1. Μαθηματική διατύπωση (πρότυπο) της υπό έλεγχο διαδικασίας.
2. Διατύπωση φυσικών περιορισμών.
3. Διατύπωση κριτηρίου απόδοσης.

Έχουμε λοιπόν για παράδειγμα μια *διαδικασία* (σύστημα) η οποία περιγράφεται, αν το σύστημα είναι συνεχές, από ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων της μορφής :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= c(x(t), u(t), t) \end{aligned} \quad (1.2-2)$$

όπου

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}, y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix} \quad (1.2-3)$$

είναι τα διανύσματα κατάστασης, εισόδου και εξόδου αντίστοιχα. Επίσης έχουμε ένα *δείκτη απόδοσης* ο οποίος συνήθως περιγράφεται από ένα συναρτησιακό της μορφής :

$$J(x(t), u(t)) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (1.2-4)$$

Στόχος της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου είναι να προσδιορίσει μια *επιτρεπτή είσοδο(έλεγχο)* $u^*(t)$, δηλαδή μια είσοδο $u^*(t)$ που να ικανοποιεί κάποιους φυσικούς περιορισμούς όπως για παράδειγμα να ανήκει σε έναν επιτρεπτό χώρο συναρτήσεων U , τέτοια ώστε να οδηγήσει το σύστημα που περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις

(1.2-2), σε μια επιτρεπτή τροχιά $x^*(t)$, δηλαδή μια τροχιά $x^*(t)$ που να ικανοποιεί κάποιους φυσικούς περιορισμούς όπως για παράδειγμα να ανήκει σε έναν επιτρεπτό χώρο συναρτήσεων X , η οποία θα ελαχιστοποιεί τον δείκτη απόδοσης της σχέσεως (1.2-3).

Η είσοδος $u^*(t)$ ονομάζεται *βέλτιστος έλεγχος* (*optimal control*), ενώ το διάνυσμα κατάστασης $x^*(t)$ ονομάζεται *βέλτιστη τροχιά* (*optimal trajectory*). Ο τελικός χρόνος t_f και η τελική θέση $x(t_f)$ μπορεί να είναι δεδομένα ή ελεύθερα

Τα συνεχή συστήματα ανάλογα με την εξίσωση κατάστασης της διαδικασίας διακρίνονται στις παρακάτω κατηγορίες:

i. *Μη γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα*

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

$$y(t) = c(x(t), u(t), t)$$

ii. *Μη γραμμικά χρονικά αμετάβλητα*

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t))$$

$$y(t) = c(x(t), u(t))$$

iii. *Γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

όπου $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ και $D(t)$ είναι πίνακες $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$ και $r \times m$ αντίστοιχα.

iv. *Γραμμικά χρονικά μη μεταβαλλόμενα*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

όπου A , B, C και D είναι σταθεροί πίνακες διαστάσεων $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$ και $r \times m$ αντίστοιχα.

Τέλος αντί για συνεχή συστήματα μπορούμε να έχουμε διακριτά συστήματα, όπως και αντί για συναρτήσεις μιας μεταβλητής να έχουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Αντί απλού ολοκληρώματος να έχουμε πολλαπλά ολοκληρώματα ή ακόμη είναι δυνατό το συναρτησιακό να μην περιέχει ολοκλήρωμα. Εμείς στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με συνεχή χρονικά γραμμικά μεταβαλλόμενα και μη χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα.

Τα προβλήματα του Βέλτιστου Ελέγχου κατατάσσονται σε κατηγορίες ανάλογα με το κριτήριο απόδοσης. Παρακάτω παραθέτουμε μερικές κατηγορίες προβλημάτων που

συναντούμε κυρίως στην Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου και τους αντίστοιχους δείκτες απόδοσης που χρησιμοποιούμε.

A. Ελάχιστου χρόνου (time optimal control problem)

Στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε την βέλτιστη είσοδο $u^*(t) \in U$ που θα μεταφέρει το σύστημα μας από μια αρχική κατάσταση $x(t_0)$ σε μια επιθυμητή τελική κατάσταση $x(t_f)$ στον ελάχιστο δυνατό χρόνο. Ο δείκτης απόδοσης στην περίπτωση αυτή είναι :

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (1.2-5)$$

B. Πρόβλημα Ελέγχου Τελικής Τιμής (terminal control problem)

Στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε την βέλτιστη είσοδο $u^*(t) \in U$ που θα ελαχιστοποιήσει την τελική τιμή του διανύσματος κατάστασης $x(t_f)$ από μια επιθυμητή τελική κατάσταση $r(t_f)$. Ο δείκτης απόδοσης στην περίπτωση αυτή είναι:

$$J = \sum_{i=1}^n [x_i(t_f) - r_i(t_f)]^2 = \|x(t_f) - r(t_f)\|^2$$

ή πιο γενικά

$$J = [x(t_f) - r(t_f)]^T H [x(t_f) - r(t_f)] \quad (1.2-6)$$

όπου H nxn συμμετρικός θετικά ημιορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα. Η πορεία ενός βαλλιστικού πυραύλου του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από το διάνυσμα $x(t)$ για να πετύχει τον στόχο του την χρονική στιγμή t_f , όταν οι συντεταγμένες του στόχου δίνονται από το διάνυσμα $r(t_f)$.

C. Πρόβλημα Παρακολούθησης (tracking problem)

Στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε την βέλτιστη είσοδο $u^*(t) \in U$ η οποία προσπαθεί να διατηρήσει το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ σε μια επιθυμητή τροχιά $r(t)$. Ο δείκτης απόδοσης στην περίπτωση αυτή είναι:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - r(t)]^T Q [x(t) - r(t)] dt = \int_{t_0}^{t_f} \|x(t) - r(t)\|_Q^2 dt \quad (1.2-7)$$

όπου Q συμμετρικά θετικά ορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα. Η πορεία ενός βαλλιστικού πυραύλου του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από το διάνυσμα $x(t)$ ο οποίος θέλει να αναχαιτίσει έναν στόχο του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από το διάνυσμα $r(t)$.

D. Πρόβλημα Ρυθμιστή (regulator problem)

Πρόκειται για ειδική περίπτωση του προβλήματος παρακολούθησης. Στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε την βέλτιστη είσοδο $u^*(t) \in U$ η οποία προσπαθεί να διατηρήσει το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ όσο το δυνατό πιο κοντά στο μηδενικό διάνυσμα. Ο δείκτης απόδοσης στην περίπτωση αυτή είναι:

$$J = \|x(t_f)\|_H^2 + \int_{t_0}^{t_f} \|x(t)\|_Q^2 dt \quad (1.2-8)$$

όπου Q συμμετρικά θετικά ορισμένος πίνακας, ενώ H είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας.

E. Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης της Συνολικής Ισχύος (minimum control effort problem)

Στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε την βέλτιστη είσοδο $u^*(t) \in U$ η οποία προσπαθεί να μεταφέρει το σύστημα μας από μια αρχική κατάσταση $x(t_0)$ σε μια επιθυμητή τελική κατάσταση $x(t_f)$ με την ελάχιστη δυνατή είσοδο. Ο δείκτης απόδοσης στην περίπτωση αυτή είναι:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [u(t)^T R u(t)] dt = \int_{t_0}^{t_f} \|u(t)\|_R^2 dt \quad (1.2- 9)$$

όπου R συμμετρικά θετικά ορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα. Η μεταφορά ενός μέσου (αυτοκίνητο, αεροπλάνο, δορυφόρος) από ένα σημείο σε ένα άλλο με τα ελάχιστα δυνατά καύσιμα.

Φυσικά μπορούμε να έχουμε συνδυασμό των παραπάνω προβλημάτων, όπως για παράδειγμα η αναζήτηση της βέλτιστης εισόδου $u^*(t) \in U$ η οποία προσπαθεί να

διατηρήσει το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ σε μια επιθυμητή τροχιά $r(t)$, με την ελάχιστη δυνατή είσοδο. Ο δείκτης απόδοσης στην περίπτωση αυτή είναι:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\|x(t) - r(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2 \right] dt$$

όπου Q, R συμμετρικά θετικά ορισμένοι πίνακες.

Παράδειγμα. Η πορεία ενός βαλλιστικού πυραύλου του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από το διάνυσμα $x(t)$ ο οποίος θέλει να αναχαιτίσει έναν στόχο του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από το διάνυσμα $r(t)$, ξοδεύοντας τα ελάχιστα δυνατά καύσιμα.

Η επίλυση των προβλημάτων του Βέλτιστου Ελέγχου μπορεί να γίνει με δύο κυρίως μεθόδους: με τη μέθοδο του *Λογισμού των Μεταβολών* η οποία καταλήγει σε έλεγχο ανοικτού βρόγχου και με την μέθοδο του *Δυναμικού Προγραμματισμού* η οποία καταλήγει σε έλεγχο κλειστού βρόγχου. Η μέθοδος του *Δυναμικού Προγραμματισμού* είναι προτιμότερη καθώς έχουμε να κάνουμε με κλειστό βρόγχο όμως οι συνθήκες για την εφαρμογή της δεν ικανοποιούνται πάντα.

1.3 Βέλτιστος Έλεγχος συνεχών συστημάτων

1.3.1 Εφαρμογές του Λογισμού Μεταβολών στον Βέλτιστο Έλεγχο

Ας θυμηθούμε αρχικά πιο είναι το γενικό πρόβλημα Βέλτιστου Ελέγχου.

Δεδομένου ενός συστήματος που περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= c(x(t), u(t), t) \end{aligned} \tag{1.3-1}$$

να προσδιοριστεί μια επιτρεπτή είσοδος (έλεγχος) $u^(t)$ τέτοια ώστε να αναγκάσει το σύστημα να οδηγηθεί σε μια επιτρεπτή τροχιά $x^*(t)$ η οποία θα ελαχιστοποιήσει τον παρακάτω δείκτη απόδοσης:*

$$J(x(t), u(t)) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (1.3-2)$$

Όπου $x(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα κατάστασης διάστασης $n \times 1$ και $u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι το διάνυσμα εισόδου διάστασης $m \times 1$. Υποθέτουμε ότι οι αρχικές συνθήκες t_0 και $x(t_0) = x_0$ δίνονται.

Αν οι τελικές συνθήκες, ο τελικός χρόνος t_f και η τελική κατάσταση $x(t_f)$ είναι άγνωστα τότε το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι γνωστό ως πρόβλημα Bolza (Bolza problem-1913).

Στην ειδική περίπτωση που οι τελικές συνθήκες t_f , $x(t_f)$ είναι δεδομένες τότε αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό:

$$J'(x(t), u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (1.3-3)$$

εφόσον η ποσότητα $h(x(t_f), t_f)$ θα είναι σταθερή και δεν θα επηρεάζει την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $J(x(t), u(t))$.

Ας επανέλθουμε όμως στο αρχικό μας πρόβλημα. Αν η συνάρτηση h είναι διαφορίσιμη τότε ισχύει :

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [h(x(t), t)] dt = h(x(t), t) \Big|_{t_0}^{t_f} = h(x(t_f), t_f) - h(x(t_0), t_0)$$

και άρα

$$\begin{aligned} h(x(t_f), t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [h(x(t), t)] dt + h(x(t_0), t_0) = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial h(x(t), t)}{\partial x} \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h(x(t), t)}{\partial t} \right\} dt + h(x(t_0), t_0) \end{aligned}$$

σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης στην h .

Οπότε το συναρτησιακό μας μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$J(x(t), u(t)) = h(x(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial h(x(t), t)}{\partial x} \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h(x(t), t)}{\partial t} + g(x(t), u(t), t) \right\} dt \quad (1.3-4)$$

Εφόσον όμως οι αρχικές συνθήκες t_0 και $x(t_0) = x_0$ είναι δεδομένες η ποσότητα $h(x(t_0), t_0)$ είναι σταθερή και άρα μπορεί να παραλειφθεί από τη βελτιστοποίηση. Αρκεί επομένως να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό

$$J(x(t), u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial h(x(t), t)}{\partial x} \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h(x(t), t)}{\partial t} + g(x(t), u(t), t) \right\} dt \quad (1.3-5)$$

Οι περιορισμοί των διαφορικών εξισώσεων $\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$ εισέρχονται μέσω των πολλαπλασιαστών Lagrange. Οπότε και ορίζουμε την συνάρτηση:

$$g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t) \triangleq g(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial h(x(t), t)}{\partial x} \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h(x(t), t)}{\partial t} + p^T(t) [a(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)] \quad (1.3-6)$$

Τότε θα έχουμε

$$J_a(x(t), u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \{ g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t) \} dt \quad (1.3-7)$$

Εφαρμόζοντας την θεωρία του Λογισμού των Μεταβολών η μεταβολή του J_a για βέλτιστο σύστημα είναι

$$\begin{aligned}
 \delta J_a(x^*(t), u^*(t)) &= 0 \\
 &= \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f + \\
 &\quad + \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{u}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \delta u_f + \\
 &\quad + \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{p}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \delta p_f + \\
 &\quad + \left[\begin{array}{l} g_a(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) - \\ - \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{x}^*(t_f) - \\ - \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{u}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{u}^*(t_f) - \\ - \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{p}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{p}^*(t_f) \end{array} \right] \delta t_f + \\
 &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g_a}{\partial x} \right]^T - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}} \right]^T \right\} \delta x(t) + \left\{ \left[\frac{\partial g_a}{\partial u} \right]^T - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{u}} \right]^T \right\} \delta u(t) + \\
 &\quad \left\{ \left[\frac{\partial g_a}{\partial p} \right]^T - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{p}} \right]^T \right\} \delta p(t) \right\} dt = 0
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η $g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t)$ είναι ανεξάρτητη από τις παραγώγους $\dot{u}(t), \dot{p}(t)$ οπότε η παραπάνω έκφραση της μεταβολής του J_a ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}
 \delta J_a(x^*(t), u^*(t)) &= 0 \Rightarrow \\
 &\left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f + \\
 &\quad + \left[\begin{array}{l} g_a(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) - \\ - \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{x}^*(t_f) \end{array} \right] \delta t_f + \\
 &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g_a}{\partial x} \right]^T - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}} \right]^T \right\} \delta x(t) + \left[\frac{\partial g_a}{\partial u} \right]^T \delta u(t) + \left[\frac{\partial g_a}{\partial p} \right]^T \delta p(t) \right\} dt = 0
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια συγκεντρώνουμε τους όρους που βρίσκονται μέσα στο ολοκλήρωμα και περιέχουν την συνάρτηση h .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t), t) \right]^T \dot{x}^*(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t), t) \right\} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t), t) \right]^T \dot{x}^*(t) \right\}$$

Η ισοδύναμα

$$\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x^*(t), t) \right] \dot{x}^*(t) + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}(x^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t), t) \right]$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης στον τελευταίο όρο έχουμε

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x^*(t), t) \right] \dot{x}^*(t) + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}(x^*(t), t) - \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x^*(t), t) \right] \dot{x}^*(t) - \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x}(x^*(t), t) = \\ = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}(x^*(t), t) - \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x}(x^*(t), t) \end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι η $h(x(t), t)$ και οι μερικές της παράγωγοι ορίζονται και είναι συνεχείς στο διάστημα (t_0, t_f) τότε ισχύει

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}(x^*(t), t) = \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x}(x^*(t), t)$$

και άρα οι όροι της $h(x(t), t)$ μέσα στο ολοκλήρωμα μηδενίζονται.

Συνεπώς μέσα στο ολοκλήρωμα θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{g}_a}{\partial x} \right]^T - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_a}{\partial \dot{x}} \right]^T \right\} \delta x(t) + \left[\frac{\partial \mathbf{g}_a}{\partial u} \right]^T \delta u(t) + \left[\frac{\partial \mathbf{g}_a}{\partial p} \right]^T \delta p(t) \right\} dt = \\ = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T + p^*(t)^T \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) - \frac{d}{dt} [-p^*(t)^T] \right\} \delta x(t) + \\ + \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T + p^*(t)^T \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right\} \delta u(t) + \end{aligned}$$

$$+\{a(x^*(t), u^*(t), t) - \dot{x}^*(t)\}^T \delta p(t) \} dt$$

Το ολοκλήρωμα αυτό θα πρέπει να μηδενίζεται σε ένα ακρότατο άσχετα από τις συνθήκες στα άκρα. Παρατηρούμε αρχικά ότι οι περιορισμοί $\dot{x}^*(t) = a(x^*(t), u^*(t), t)$ θα πρέπει να ικανοποιούνται από ένα ακρότατο έτσι ώστε ο συντελεστής του $\delta p(t)$ να είναι μηδέν. Στη συνέχεια επειδή οι πολλαπλασιαστές Lagrange είναι αυθαίρετοι επιλέγουμε το διάνυσμα $p(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε ο συντελεστής του $\delta x(t)$ να μηδενίζεται δηλαδή να έχουμε

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T + p^*(t)^T \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) - \frac{d}{dt}[-p^*(t)^T] &= 0 \Leftrightarrow \\ \dot{p}^*(t)^T &= - \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T - p^*(t)^T \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \Leftrightarrow \\ \dot{p}^*(t) &= - \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] - \left[\frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) \end{aligned}$$

Επιπλέον επειδή τα $\delta u(t)$ είναι ανεξάρτητα ο συντελεστής τους είναι μηδέν. Οπότε καταλήγουμε στην σχέση:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial g}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T + p^*(t)^T \frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) &= 0 \Leftrightarrow \\ \left[\frac{\partial g}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T + \left[\frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) &= 0 \end{aligned}$$

Άρα τελικά έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\dot{x}^*(t) = a(x^*(t), u^*(t), t)$$

$$\begin{aligned}
 \delta J_a(x^*(t), u^*(t)) = 0 &\Rightarrow \\
 \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f + \\
 + \left[g_a(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) - \right. \\
 \left. - \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{x}^*(t_f) \right] \delta t_f = 0 \\
 \dot{p}^*(t) = - \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] - \left[\frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) \\
 \left[\frac{\partial g}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right] + \left[\frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) = 0
 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^*(t) &= a(x^*(t), u^*(t), t) \\
 \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[g(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) + \right. \\
 \left. + p^*(t_f)^T [a(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f)] \right] \delta t_f &= 0 \\
 \dot{p}^*(t) &= - \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] - \left[\frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) \\
 \left[\frac{\partial g}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right] + \left[\frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) &= 0
 \end{aligned} \tag{1.3-8}$$

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση

$$H(x(t), u(t), p(t), t) \triangleq g(x(t), u(t), t) + p^T(t) a(x(t), u(t), t) \tag{1.3-9}$$

η οποία ονομάζεται *Χαμιλτονιανή* ή *συνάρτηση του Pontryagin*.

Τότε οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις μετατρέπονται στις

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)$$

$$\begin{aligned}\dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \quad \forall t \in [t_0, t_f]\end{aligned}$$

και

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0 \quad (1.3-10)$$

Περίπτωση 1: Ο τελικός χρόνος t_f και η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$ είναι γνωστά και κατά συνέπεια $\delta t_f = 0, \delta x_f = 0$

Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)\end{aligned} \quad (1.3-11)$$

Οι μεταβλητές $x^*(t)$ ονομάζονται *μεταβλητές του χώρου κατάστασης (state variables)* ενώ οι μεταβλητές $p^*(t)$ *συζευγμένες μεταβλητές του χώρου κατάστασης (costate variables)*. Η πρώτη εξίσωση ονομάζεται *εξίσωση του χώρου κατάστασης (state equation)*, η δεύτερη εξίσωση *συζευγμένη εξίσωση* και η τρίτη *εξίσωση σύζευξης (coupling equation) ή συνθήκη στατικότητας (stationary condition)*.

Περίπτωση 2: Ο τελικός χρόνος t_f και η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$ δεν είναι γνωστά

Περίπτωση 2.1: Ο τελικός χρόνος t_f να είναι συγκεκριμένος και ελεύθερη η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$.

Τότε

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \delta x_f = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) = 0$$

Συνεπώς οι αναγκαίες συνθήκες στην περίπτωση αυτή για να έχουμε ακρότατο είναι:

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) &= 0 \end{aligned} \tag{1.3-12}$$

Περίπτωση 2.2: Ο τελικός χρόνος t_f να είναι συγκεκριμένος και η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$ να βρίσκεται στην επιφάνεια $m(x(t))=0$.

Τότε πρέπει

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \delta x_f = 0$$

αλλά και

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} m(x^*(t_f)) \right]^T \delta x_f = 0$$

Άρα θα πρέπει να υπάρχει διάνυσμα v τέτοιο ώστε

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T = v^T \left[\frac{\partial}{\partial x} m(x^*(t_f)) \right]^T$$

και επιπλέον

$$m(x^*(t_f)) = 0$$

Συνεπώς οι αναγκαίες συνθήκες στην περίπτωση αυτή για να έχουμε ακρότατο είναι:

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right] &= v^T \left[\frac{\partial}{\partial x} m(x^*(t_f)) \right] \\ m(x^*(t_f)) &= 0 \end{aligned} \tag{1.3-13}$$

Περίπτωση 2.3: Ο τελικός χρόνος t_f και η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$ να είναι ελεύθερα και ανεξάρτητα.

Τότε θα πρέπει

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) &= 0 \\ H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) &= 0 \end{aligned} \tag{1.3-14}$$

Περίπτωση 2.4: Ο τελικός χρόνος t_f να είναι ελεύθερος και η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$ να ανήκει στην επιφάνεια $m(x(t))=0$.

Τότε θα έχουμε

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0$$

και

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} m(x^*(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f + \left[\frac{\partial}{\partial t} m(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0$$

Για να ισχύουν τα παραπάνω θα πρέπει να υπάρχει διάνυσμα v τέτοιο ώστε

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right] = v^T \left[\frac{\partial}{\partial x} m(x^*(t_f), t_f) \right]$$

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) = v^T \frac{\partial}{\partial t} m(x^*(t_f), t_f)$$

Συνεπώς οι αναγκαίες συνθήκες για να έχουμε ακρότατα στην περίπτωση αυτή είναι:

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right] &= v^T \left[\frac{\partial}{\partial x} m(x^*(t_f), t_f) \right] \\ H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) &= v^T \frac{\partial}{\partial t} m(x^*(t_f), t_f) \\ m(x^*(t_f), t_f) &= 0 \end{aligned}$$

(1.3-15)

Περίπτωση 2.5: Ο τελικός χρόνος t_f να είναι ελεύθερος και η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$ να ανήκει στην $\theta(t)$.

Τότε θα έχουμε

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0$$

αλλά και

$$\delta x_f = \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) \right] \delta t_f$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) \right] \delta t_f + \\ & + \left[H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0 \Leftrightarrow \\ & \left\{ H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) \right] \right\} \delta t_f = 0 \end{aligned}$$

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση για κάθε δt_f θα πρέπει

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) \right] = 0$$

και επιπλέον

$$x^*(t_f) = \theta(t_f)$$

Συνεπώς οι αναγκαίες συνθήκες για να έχουμε ακρότατα στην περίπτωση αυτή είναι:

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \end{aligned}$$

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) \right] = 0$$

$$x^*(t_f) = \theta(t_f)$$

(1.3-16)

Πέρα όμως από τις αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης ακροτάτου ας δούμε ποιες είναι οι ικανές συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να έχουμε ακρότατο ελάχιστο.

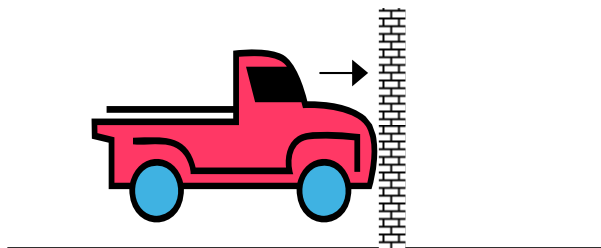
$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) > 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) & \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \end{bmatrix} \geq 0$$

(1.3-17)

Ας δούμε όμως ένα παράδειγμα το οποίο αναφέρεται στο βιβλίο του Ν.Κρικέλη (*Μοντελοποίηση & Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων*) :

Θεωρούμε ένα αυτοκίνητο και αναζητάμε τον βέλτιστο σχεδιασμό του προφυλακτήρα κατά τη σύγκρουση.



Ως είσοδο στο σύστημά μας θεωρούμε τη δύναμη από τον προφυλακτήρα.

Αν την χρονική στιγμή t , η θέση του κινητού είναι $y(t)$ τότε $\dot{y}(t)$ θα είναι η ταχύτητα του και $\ddot{y}(t)$ η επιτάχυνσή του.

Επομένως έχουμε:

Μοντέλο κατάστασης :

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \text{Εξισώσεις κατάστασης :} \quad \dot{x}_2(t) &= \frac{F(t)}{m} = u(t) \end{aligned}$$

Η ισοδύναμη το σύστημα μας είναι το εξής:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ο έλεγχος u είναι δύναμη ανά μοναδιαία μάζα έτσι ώστε να καλύπτει κάθε τύπο αυτοκινήτου.

Όταν ο προφυλακτήρας έρχεται σε επαφή με τον τοίχο θεωρούμε ότι είμαστε στον αρχικό χρόνο $t=0$. Έστω τότε ότι είναι $y(0) = 0$ και $\dot{y}(0) = K$ ή ισοδύναμη $x_1(0) = 0$ και $x_2(0) = K$.

Μετά από $t = 1$ sec θέλουμε ο προφυλακτήρας να φέρει την ταχύτητα του αυτοκινήτου

$$\text{στο μηδέν, δηλαδή:} \quad \begin{aligned} \dot{y}(1) &= 0 && \text{ή ισοδύναμη} && x_2(1) = 0 \\ y(1) &= \text{ελευθερο} && && x_1(1) = \text{ελευθερο} \end{aligned}$$

Για να αποφύγουμε τον τραυματισμό των επιβατών επιδιώκουμε να ελαχιστοποιήσουμε την επιτάχυνση \ddot{y} στην οποία υπόκεινται. Έτσι ορίζουμε ως κριτήριο απόδοσης το παρακάτω:

$$J(x(t), y(t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{y}^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$$

Ο παράγοντας $\frac{1}{2}$ δεν παίζει κανένα ρόλο απλά τον εισάγουμε για να διευκολυνθούμε στις παραγωγίσεις που θα εκτελεστούν παρακάτω.

Ορίζουμε την συνάρτηση Pontryagin :

$$H(x(t), u(t), p(t)) = \frac{1}{2} u^2(t) + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)$$

οπότε

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = 0 \Rightarrow u^*(t) + p_2^*(t) = 0 \Rightarrow u^*(t) = -p_2^*(t)$$

και άρα

$$H(x(t), u(t), p(t)) = \frac{1}{2}(-p_2(t))^2 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)(-p_2(t)) = -\frac{1}{2}p_2^2(t) + p_1(t)x_2(t)$$

Επίσης έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ p^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_1}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \Rightarrow \dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t) \\ \dot{x}_2^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_2}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \Rightarrow \dot{x}_2^*(t) = -p_2^*(t) \\ \dot{p}_1^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \Rightarrow \dot{p}_1^*(t) = 0 \\ \dot{p}_2^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \Rightarrow \dot{p}_2^*(t) = -p_1^*(t) \end{aligned} \right\}$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} p_1^*(t) &= c_1 \\ p_2^*(t) &= -c_1 t + c_2 \end{aligned}$$

και με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= c_1 \frac{t^3}{6} - c_2 \frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 \\ x_2^*(t) &= c_1 \frac{t^2}{2} - c_2 t + c_3 \end{aligned}$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$t = 0, x_1(0) = 0 \Leftrightarrow c_4 = 0$$

$$t = 0, x_2(0) = K \Leftrightarrow c_3 = K$$

$$t = 1, x_2(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{c_1}{2} - c_2 + K = 0$$

Και επειδή το $x_1(1)$ είναι ελεύθερο έχουμε:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p_1^*(t_f) = 0 \Leftrightarrow p_1^*(1) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Οπότε :

$$-c_2 + K = 0 \Leftrightarrow c_2 = K$$

Άρα $u^*(t) = -p_2^*(t) = -K$

Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για να ελαχιστοποιηθεί η επιτάχυνση πρέπει να αναπτυχθεί σταθερή δύναμη.

1.3.2 Το πρόβλημα του Βέλτιστου Γραμμικού Ρυθμιστή (LQR-Linear Quadratic Regulator Problem)

Το πρόβλημα του Γραμμικού Τετραγωνικού Ρυθμιστή (LQR) είναι ένα πολύ σημαντικό σύγχρονο πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου. Για τη μελέτη του προβλήματος αυτού θεωρούμε ότι το υπό μελέτη σύστημα είναι γραμμικό σύστημα συνεχούς χρόνου που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης.

Από φυσικής πλευράς το πρόβλημα του γραμμικού ρυθμιστή μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα με μηδενική διέγερση και με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες $x(t_0)$. Ζητείται να βρεθεί ένα βέλτιστο σήμα ελέγχου $u(t)$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα κατάστασης να επανέρθει στο σημείο ηρεμίας του, δηλαδή $x(t_f) = 0$ ελαχιστοποιώντας κάποιο κριτήριο απόδοσης. Τα προβλήματα αυτά τα

συναντάμε κυρίως σε περιπτώσεις όπου η κατάσταση ενός γραμμικού συστήματος πρέπει να ακολουθήσει συγκεκριμένη τροχιά με μικρή κατανάλωση ενέργειας.

Από μαθηματικής πλευράς η διατύπωση του προβλήματος έχει ως εξής : Δίνεται ένα γραμμικό, χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα που περιγράφεται στο χώρο των καταστάσεων από τις παρακάτω εξισώσεις κατάστασης:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) , \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.3-18)$$

Ζητείται να βρεθεί έλεγχος $u(t)$ που να ελαχιστοποιεί τον δείκτη απόδοσης

$$J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} x^T(t_f) H(t_f) x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt \quad (1.3-19)$$

όπου ο τελικός χρόνος t_f είναι δεδομένος, η κατάσταση $x(t_f)$ ελεύθερη και δεν υπάρχει φραγμός στον έλεγχο $u(t)$. Οι πίνακες $H(t)$, $Q(t)$ και $R(t)$ ονομάζονται πίνακες βάρους και επιλέγονται ώστε οι $H(t), Q(t)$ να είναι πραγματικοί συμμετρικοί, θετικά ημιορισμένοι ενώ ο $R(t)$ πραγματικός συμμετρικός, θετικά ορισμένος.

Ορίζουμε την Χαμιλτονιανή

$$H(x(t), u(t), p(t)) = \frac{1}{2} x^T(t) Q(t) x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R(t) u(t) + p^T(t) (A(t)x(t) + B(t)u(t)) \quad (1.3-20)$$

Οπότε οι αναγκαίες συνθήκες είναι:

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) \\ \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = -Q(t)x^*(t) - A^T(t)p^*(t) \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = R(t)u^*(t) + B^T(t)p^*(t) \Rightarrow \\ u^*(t) &= -R^{-1}(t)B^T(t)p^*(t) \end{aligned} \quad (1.3-21)$$

Επιπλέον επειδή t_f δεδομένο και η τελική κατάσταση $x(t_f)$ ελεύθερη έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) = 0 &\Rightarrow H(t_f)x^*(t_f) - p^*(t_f) = 0 \Rightarrow \\ p^*(t_f) &= H(t_f)x^*(t_f) \end{aligned} \quad (1.3-22)$$

Από τις σχέσεις (1.3-21) παίρνουμε $2n$ διαφορικές εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούνται:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{p}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ p^*(t) \end{bmatrix} \quad (1.3-23)$$

Το σύστημα αυτό είναι μη ομογενές και η λύση του σε οποιοδήποτε σημείο t_f έχει την μορφή:

$$\begin{bmatrix} x^*(t_f) \\ p^*(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t_f, t) & \phi_{12}(t_f, t) \\ \phi_{21}(t_f, t) & \phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ p^*(t) \end{bmatrix} \quad (1.3-24)$$

όπου $\phi(t_f, t) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t_f, t) & \phi_{12}(t_f, t) \\ \phi_{21}(t_f, t) & \phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix}$ ο πίνακας μετάβασης του συστήματος.

Αντικαθιστώντας την συνοριακή συνθήκη για το $p^*(t_f)$ από την (1.3-22) και την $x^*(t_f)$ μέσω της πρώτης στη δεύτερη των (1.3-24) έχουμε

$$\begin{aligned} p^*(t_f) &= \phi_{21}(t_f, t)x^*(t) + \phi_{22}(t_f, t)p^*(t) \Rightarrow \\ H(t_f)x^*(t_f) &= \phi_{21}(t_f, t)x^*(t) + \phi_{22}(t_f, t)p^*(t) \Rightarrow \\ H(t_f)(\phi_{11}(t_f, t)x^*(t) + \phi_{12}(t_f, t)p^*(t)) &= \phi_{21}(t_f, t)x^*(t) + \phi_{22}(t_f, t)p^*(t) \Rightarrow \\ (H(t_f)\phi_{12}(t_f, t) - \phi_{22}(t_f, t))p^*(t) &= (\phi_{21}(t_f, t) - H(t_f)\phi_{11}(t_f, t))x^*(t) \end{aligned} \quad (1.3-25)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας του $H(t_f)\phi_{12}(t_f, t) - \phi_{22}(t_f, t)$ για κάθε $t \in [t_0, t_f]$ (Kalman 1960) λύνουμε την (1.3-25) ως προς $p^*(t_f)$

$$p^*(t) = \underbrace{(H(t_f)\phi_{12}(t_f, t) - \phi_{22}(t_f, t))^{-1}(\phi_{21}(t_f, t) - H(t_f)\phi_{11}(t_f, t))}_{K(t)} x^*(t) \quad (1.3-26)$$

Κατά συνέπεια η (1.3-21) λόγω της (1.3-26) γίνεται:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -R^{-1}(t)B^T(t)p^*(t) \Rightarrow \\ u^*(t) &= -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x^*(t) \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $F(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$ τότε θα έχουμε

$$u^*(t) = F(t)x^*(t) \quad (1.3-27)$$

Ο πίνακας $F(t)$ καλείται *πίνακας ανάδρασης ή κέρδος Kalman (Kalman gain)*. Παρατηρούμε λοιπόν ότι βέλτιστος έλεγχος που ψάχνουμε εκφράζεται με μορφή ανάδρασης ή κλειστού βρόγχου και ότι ακόμη και για χρονικά αμετάβλητα συστήματα είναι χρονικά μεταβαλλόμενος.

Ας επανέλθουμε όμως στον υπολογισμό του $K(t)$. Παραγωγίζοντας την (1.3-27) έχουμε:

$$\begin{aligned} p^*(t) &= K(t)x^*(t) \Rightarrow \\ \dot{p}^*(t) &= \dot{K}(t)x^*(t) + K(t)\dot{x}^*(t) \end{aligned} \quad (1.3-28)$$

Αντικαθιστώντας τις παραγωγούς μέσω των διαφορικών εξισώσεων (1.3-23) και απαλείφοντας το $p^*(t)$ χρησιμοποιώντας την σχέση (1.3-28) έχουμε:

$$\begin{aligned} -Q(t)x^*(t) - A^T(t)p^*(t) &= \dot{K}(t)x^*(t) + K(t)(A(t)x^*(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p^*(t)) \\ -Q(t)x^*(t) - A^T(t)K(t)x^*(t) &= \dot{K}(t)x^*(t) + K(t)(A(t)x^*(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x^*(t)) \\ (-Q(t) - A^T(t)K(t))x^*(t) &= (\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t))x^*(t) \end{aligned}$$

$$-Q(t) - A^T(t)K(t) = \dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$$

$$\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + Q(t) + A^T(t)K(t) = 0 \quad (1.3-29)$$

Η παραπάνω εξίσωση καλείται *μητρική διαφορική εξίσωση Riccati*.

Άλλο τρόπος για να υπολογίσουμε τον πίνακα $K(t)$ όταν οι πίνακες $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ και $D(t)$ είναι σταθεροί είναι να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του πίνακα $(sI_n - N)$ όπου

$$N = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης του συστήματος, δηλαδή

$$e^{Nt} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} sI_n - A & BR^{-1}B^T \\ Q & sI_n + A^T \end{bmatrix} \right\}$$

Οπότε $\phi(t_f, t) = e^{N(t_f-t)}$ και

$$K(t) = (H(t_f)\phi_{12}(t_f, t) - \phi_{22}(t_f, t))^{-1}(\phi_{21}(t_f, t) - H(t_f)\phi_{11}(t_f, t))$$

Ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα :

Θεώρημα 1.3-1: Αν $H(t)$ είναι θετικά ορισμένος και $Q(t)$ είναι τουλάχιστον μη αρνητικά ορισμένος ή αντίστροφα και $R(t)$ είναι θετικά ορισμένος τότε ένα ελάχιστο J υπάρχει τότε και μόνο τότε όταν η λύση $K(t)$ της εξίσωσης Riccati (1.3-29) υπάρχει, είναι φραγμένη και είναι θετικά ορισμένη για κάθε $t < t_f$. Στην περίπτωση αυτή το ελάχιστο κόστος είναι:

$$J(x^*(t), u^*(t), t) = \frac{1}{2} x^*(t_0)^T K(t_0) x^*(t_0).$$

Θεώρημα 1.3-2: Όταν οι πίνακες $H(t), Q(t)$ και $R(t)$ είναι συμμετρικοί η λύση $K(t)$ της εξίσωσης Riccati (1.3.2-12) είναι επίσης ένας συμμετρικός πίνακας. Αυτό σημαίνει ότι ο $n \times n$ πίνακας $K(t)$ έχει $\frac{n(n+1)}{2}$ άγνωστα στοιχεία και επομένως αρκεί να λύσουμε $\frac{n(n+1)}{2}$ διαφορικές εξισώσεις.

Η εξίσωση Riccati λύνεται συνήθως με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή και σπανίως αναλυτικά. Επειδή δίνεται η τελική συνθήκη $K(t_f)$ λόγω του ότι $p(t_f) = H(t_f)x(t_f) = K(t_f)x(t_f)$ και άρα $K(t_f) = H(t_f)$ η λύση της διαφορικής εξίσωσης Riccati μπορεί να γίνει αριθμητικά με προς τα πίσω διαφορίση κάνοντας χρήση της σχέσης $\dot{K}(t_f) = \frac{K(t_f) - K(t_f - \Delta t)}{\Delta t}$.

Μια ιδιαίτερη περίπτωση προβλημάτων βέλτιστου ρυθμιστή είναι εκείνη κατά την οποία $t_f \rightarrow \infty$ και το σύστημα στο χώρο των καταστάσεων είναι χρονικά αμετάβλητο. Τότε το σύστημα θα έχει την μορφή:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.3-30)$$

Όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και το κριτήριο απόδοσης έχει την μορφή

$$J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt \quad (1.3-31)$$

Όπου $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Στην μελέτη της περίπτωσης αυτής χρειαζόμαστε τις έννοιες της σταθεροποιησιμότητας (stabilizability) και της ανιχνευσιμότητας (detectability) γιατί τότε το βέλτιστο κόστος θα είναι πεπερασμένο.

Ορισμός 1.3-1: Το σύστημα $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ονομάζεται σταθεροποιήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει πίνακας K έτσι ώστε ο πίνακας $(A + BK)$ να είναι ευσταθής δηλαδή τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του να είναι αρνητικά.

Με άλλα λόγια ένα σύστημα για να είναι σταθεροποιήσιμο θα πρέπει οι μη ελέγξιμοι πόλοι του ($s_i \in \mathbb{C} : \text{rank}[sI_n - A \quad B] < n$) να είναι ευσταθείς.

Ορισμός 1.3-2: Το σύστημα $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Dx(t)$ είναι *ανιχνεύσιμο* αν και μόνο αν το μη παρατηρήσιμο τμήμα του είναι ευσταθές δηλαδή αν οι μη παρατηρήσιμοι πόλοι του ($s_i \in \mathbb{C} : \text{rank} \begin{bmatrix} sI_n - A \\ -C \end{bmatrix} < n$) είναι ευσταθείς.

Ο πίνακας $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m = \text{rank}Q \leq n$ είναι τέτοιος ώστε $Q = C^T C$.

Με τη συνθήκη της ανιχνευσιμότητας εξασφαλίζουμε ότι όλες οι μη ευσταθείς καταστάσεις θα εμφανίζονται στο δείκτη απόδοσης. (Η παρατηρησιμότητα μας εξασφαλίζει ότι όλες οι καταστάσεις θα εμφανίζονται στο δείκτη απόδοσης).

Η σταθεροποιησιμότητα όμως του συστήματος δεν εξασφαλίζει από μόνη της ότι θα υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης Riccati και ότι το κλειστό σύστημα θα είναι ευσταθές, σε συνδυασμό όμως με την ανιχνευσιμότητα εγγυώνται ότι η λύση είναι μοναδική.

Σύμφωνα όμως με τον Kalman αν το σύστημα είναι *ελέγξιμο* δηλαδή $\text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$ τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και άρα $\dot{K}(t) = 0$.

Συνεπώς η εξίσωση Riccati μετατρέπεται στην αλγεβρική εξίσωση :

$$KA - KBR^{-1}B^TK + Q + A^TK = 0 \quad (1.3-32)$$

η οποία μπορεί να έχει μοναδική λύση, άπειρες λύσεις ή ακόμα και να είναι αδύνατη. Ο πίνακας K αποδεικνύεται ότι είναι μοναδικός, συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος. Η συνθήκη ελεγχιμότητας εξασφαλίζει ότι ο δείκτης απόδοσης θα είναι πεπερασμένος. Η απαίτηση είναι για τη γενική μορφή που μπορεί να έχουν οι πίνακες βάρους. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις ειδικών μορφών των Q και R για τις οποίες ενώ το σύστημα δεν είναι σταθεροποιήσιμο, ωστόσο ο δείκτης απόδοσης είναι πεπερασμένος και αυτό γιατί δεν εξαρτάται από τις ασταθείς καταστάσεις.

Στόχος του βέλτιστου ελέγχου είναι να ελαχιστοποιήσει τον δείκτη απόδοσης και άρα να επανατοποθετήσει τους μη ευσταθείς πόλους που εμφανίζονται λόγω

ανιχνευσιμότητας στο δείκτη απόδοσης, στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο και κατά συνέπεια να καταστήσει το κλειστό σύστημα ευσταθές.

Παράδειγμα: Ζητείται να βρεθεί βέλτιστος έλεγχος που να διατηρεί το σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) + u(t)\end{aligned}$$

κοντά στο $[0,0]$ με ελάχιστη κατανάλωση ενέργειας. Ο δείκτης απόδοσης που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^{15} \left[x_1^2(t) + \frac{1}{2} x_2^2(t) + \frac{1}{4} u^2(t) \right] dt$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0) = [-4 \quad 4]^T$

Έχουμε :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = \frac{1}{2}, H = 0$$

Έστω ότι ο πίνακας $K(t) = \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix}$ ικανοποιεί την εξίσωση Riccati:

$$\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + Q(t) + A^T(t)K(t) = 0$$

με τελικές συνθήκες :

$$\begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε ο βέλτιστος έλεγχος θα είναι :

$$\begin{aligned}u^*(t) &= -2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} x(t) \\ &= -2k_{21}(t)x_1(t) - 2k_{22}(t)x_2(t)\end{aligned}$$

2 ΙΔΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2.1 Εισαγωγή

Τα ιδιόμορφα ή γενικευμένα συστήματα (singular or generalized systems) τα συναντάμε σε συστήματα εφαρμοσμένης μηχανικής, όπως για παράδειγμα σε ηλεκτρικά κυκλώματα, σε δυναμικά συστήματα, στην αεροδιαστημική εφαρμοσμένη μηχανική, σε χημικές επεξεργασίες καθώς επίσης σε κοινωνικοοικονομικά συστήματα, σε βιολογικά συστήματα, στην ανάλυση δικτύων, στην ανάλυση χρονολογικών σειρών και σε πολλούς άλλους τομείς. Η μορφή τους τα καθιστά επίσης χρήσιμα στη μοντελοποίηση συστημάτων.

Η μελέτη τους ξεκίνησε στο τέλος της δεκαετίας του '70 αν και μια πρώτη αναφορά γίνεται το 1973 (Singh and Liu). Στην αρθρογραφία εκτός από ιδιόμορφα συστήματα τα συναντάμε και ως: generalized state space systems, descriptor variable systems, semi state systems, differential–algebraic systems, singular singularly perturbed systems, degenerate systems, constrained systems.

Τα ιδιόμορφα συστήματα περιγράφονται από τις αποκαλούμενες ιδιόμορφες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες προκίζουν τα συστήματα με πολλά ειδικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα που δεν συναντάμε στα κλασσικά συστήματα. Μεταξύ αυτών είναι όροι ώθησης και παράγωγοι εισόδου στην απόκριση των διανυσμάτων κατάστασης, μη κανονικότητα της συνάρτησης μεταφοράς, μη αιτιότητα μεταξύ της εισόδου και της κατάστασης (ή της εξόδου), σταθερές αρχικές συνθήκες κ.λπ., που κάνουν τη μελέτη των ιδιόμορφων συστημάτων πιο πολύπλοκη απ' ό τι των κλασσικών γραμμικών συστημάτων. Αν και πολλή προσπάθεια έχει καταβληθεί στην μελέτη των ειδικών ιδιοτήτων των ιδιόμορφων συστημάτων, οι μελέτες περιορίζονται συνήθως στη γενίκευση της κλασσικής θεωρίας συστημάτων. Γι' αυτό φυσικά η μελέτη τους αποτελεί έναν σημαντικό στόχο της θεωρίας ελέγχου. Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις στις μελέτες: η γεωμετρική και η αλγεβρική. Η τελευταία προσέγγιση είναι και η πιο επικρατέστερη.

Με βάση τα μοντέλα στο χώρο των καταστάσεων, η ανάλυση και σύνθεση συστημάτων είναι τα βασικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα της θεωρίας ελέγχου η οποία αναπτύχθηκε

όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο στο τέλος της δεκαετίας του '50 και στις αρχές της δεκαετίας του '60. Το μοντέλο ενός συστήματος στο χώρο των καταστάσεων λαμβάνεται κυρίως χρησιμοποιώντας την αποκαλούμενη state space μέθοδο μεταβλητών η οποία υπερτερεί γιατί όχι μόνο μας δίνει μια πλήρως νέα μέθοδο για την ανάλυση και σύνθεση συστημάτων αλλά μας προσφέρει τα εφόδια για την καλύτερη κατανόηση των συστημάτων.

Για να περιγράψουμε επομένως ένα σύστημα στο χώρο των καταστάσεων είναι απαραίτητο να επιλέξουμε κατάλληλες μεταβλητές όπως η ταχύτητα, η επιτάχυνση, το βάρος, η θερμοκρασία κ.λπ. Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις που συνδέουν τις μεταβλητές μεταξύ τους καθώς και του φυσικούς περιορισμούς παίρνουμε ένα σύνολο εξισώσεων. Συνήθως πρόκειται για διαφορικές ή αλγεβρικές εξισώσεις που αποτελούν το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος. Η γενική τους μορφή είναι η εξής :

$$\begin{aligned} f(\dot{x}(t), x(t), u(t), t) &= 0 \\ g(x(t), y(t), u(t), t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1-1)$$

όπου $x(t)$ είναι το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος, $u(t)$ η είσοδος (ή έλεγχος), $y(t)$ η έξοδος και f και g διανυσματικές συναρτήσεις των $\dot{x}(t), x(t), u(t), y(t)$ και t στις κατάλληλες διαστάσεις. Γενικά η f καλείται εξίσωση εισόδου και η g εξίσωση εξόδου.

Μια ειδική μορφή των εξισώσεων (2.1-1) που περιγράφουν ένα σύστημα στο χώρο των καταστάσεων είναι η παρακάτω :

$$\begin{aligned} E(t)\dot{x}(t) &= H(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= J(x(t), u(t), t) \end{aligned} \quad (2.1-2)$$

όπου H, J είναι διανυσματικές συναρτήσεις των $x(t), u(t)$ και t στις κατάλληλες διαστάσεις. Ο πίνακας $E(t)$ μπορεί να είναι και μη αντιστρέψιμος (singular). Αν H, J είναι γραμμικές συναρτήσεις των $x(t)$ και $u(t)$ και E ανεξάρτητο του t , μια πιο ειδική μορφή των (2.1-2) είναι το παρακάτω γραμμικά χρονικά αμετάβλητο σύστημα:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.1-3)$$

όπου $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ είναι σταθεροί πίνακες και $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^r$.

Ορισμός 2.1-1: Ιδιόμορφα συστήματα (*singular systems* ή *generalized state-space systems* ή *descriptor state-space systems*) ονομάζονται τα συστήματα για τα οποία ισχύει είτε $q \triangleq \text{rank}E < n$ είτε $\det E = 0$.

Παράδειγμα 2.1-1: Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από i υποσυστήματα διασυνδεδεμένα μεταξύ τους :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i a_i(t) \\ b_i(t) &= C_i x_i(t) + D_i a_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.1-4)$$

όπου $x_i(t), a_i(t)$, και $b_i(t)$ είναι η κατάσταση, ο έλεγχος εισόδου και η έξοδος αντίστοιχα του i υποσυστήματος.

Ορίζοντας

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}, \quad a(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_N(t) \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{bmatrix}, \\ A &= \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_N), \quad B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_N) \\ C &= \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_N), \quad D = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_N) \end{aligned}$$

το σύστημα (2.1-4) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Ba(t) \\ b(t) &= Cx(t) + Da(t) \end{aligned} \quad (2.1-5)$$

Υποθέτουμε ότι τα συστήματα συνδέονται μεταξύ τους γραμμικά:

$$\begin{aligned} a(t) &= L_{11}b(t) + L_{21}u(t) + R_{11}a(t) + R_{12}y(t) \\ y(t) &= L_{21}b(t) + L_{22}u(t) + R_{21}a(t) + R_{22}y(t) \end{aligned} \quad (2.1-6)$$

όπου $u(t)$ είναι η συνολική είσοδος του συστήματος, $y(t)$ η έξοδος του και L_{ij}, R_{ij} , $i, j = 1, 2$ σταθεροί πίνακες κατάλληλων διαστάσεων. Ο Singh και Liu (1973) και ο Petzold (1982) απέδειξαν ότι το σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.1-5) και (2.1-6) δεν είναι ισοδύναμο με ένα κανονικό σύστημα.

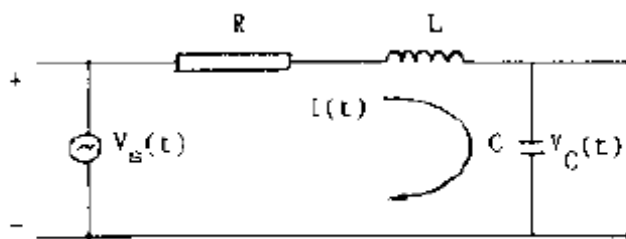
Από την άλλη αν επιλέξουμε τις μεταβλητές κατάστασης $[x^T(t) \ a^T(t) \ b^T(t) \ y^T(t)]^T$, οι εξισώσεις (2.1-5) και (2.1-6) μας δίνουν το σύστημα

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & -I & 0 \\ 0 & R_{11} - I & L_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{12} & L_{21} & R_{22} - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ a(t) \\ b(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{12} \\ L_{22} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 0 \ I] [x^T(t) \ a^T(t) \ b^T(t) \ y^T(t)]^T$$

το οποίο είναι στην μορφή (2.1-3).

Παράδειγμα 2.1-2: Θεωρούμε το ηλεκτρικό κύκλωμα του παρακάτω σχήματος



Σχήμα 2.1 1

Το μαθηματικό μοντέλο του κυκλώματος αυτού, το οποίο παίρνουμε εφαρμόζοντας το νόμο του Kirchhoff δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}(t) \\ \dot{V}_L(t) \\ \dot{V}_C(t) \\ \dot{V}_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/C & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I(t) \\ V_L(t) \\ V_C(t) \\ V_R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot V_s(t) \quad (2.1-7)$$

όπου η πηγή $V_s(t)$ είναι η ελεγχόμενη είσοδος, R η αντίσταση, L η αγωγιμότητα του πηνίου, C η χωρητικότητα του πυκνωτή και $V_R(t), V_L(t)$ και $V_C(t)$ οι αντίστοιχες τάσεις τους.

Παρατηρούμε ότι το σύστημα που περιγράφεται από τις παραπάνω εξισώσεις είναι της μορφής (2.1-3) όπου

$$E = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/C & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

με $\det E = 0$ δηλαδή ιδιόμορφο.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα χρονικά αμετάβλητο ιδιόμορφο σύστημα ($\det E = 0$) που περιγράφεται από n πρώτης τάξης γραμμικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής (2.1-3)

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

όπου x είναι ένα n - διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης, u ένα m - διάνυσμα εισόδου και y ένα r - διάνυσμα εξόδου.

Αν οι αρχικές συνθήκες $Ex(0)$ είναι γνωστές και η είσοδος $u(t)$ ορίζεται για $t \geq 0$ τότε με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace έχουμε:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sE - A)^{-1}[Ex(0) + BU(s)] \\ Y(s) &= CX(s) \end{aligned}$$

όπου X , U , Y δηλώνουν τους μετασχηματισμούς Laplace των x , u , y αντίστοιχα. Θεωρούμε την αντιστρεψιμότητα του $(sE-A)$ έτσι ώστε η μοναδική λύση του συστήματος να εξασφαλίζεται για όλα τα $Ex(0)$ και $U(s)$. Όταν έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι:

$$G(s) = C(sE - A)^{-1} B$$

Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- i. Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του συστήματος είναι προφανώς ελαττωμένος $q \triangleq \text{rank} E < n$.
- ii. Η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ δεν είναι strictly proper (δηλ. $G(s) \rightarrow 0$ όταν $s \rightarrow \infty$) αλλά μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ενός strictly proper κομμάτι και ενός πολυωνυμικού.
- iii. $\text{rank} |sE - A| \triangleq r \leq q < n$.

Ας δούμε όμως ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 2.1-3: Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \cdot [x_1(t) \quad x_2(t)]^T$$

- i. Η τάξη του συστήματος είναι: $q = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2$.
- ii. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι: $G(s) = -s$.
- iii. $\text{rank} \begin{vmatrix} -1 & s \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 < 1$.

2.2 Κανονικότητα ιδιόμορφων εξισώσεων

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση του ιδιόμορφου συστήματος (1.2-3) :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \quad (2.2-1)$$

όπου $B=I_n$, $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $u(t) \in \mathbb{R}^n$. Μας ενδιαφέρει η ύπαρξη, η μοναδικότητα και η λύση αυτής της εξίσωσης.

Λήμμα 2.2-1: (Gantmacher,1974). Για κάθε πίνακες $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, υπάρχουν πάντα δύο αντιστρέψιμοι πίνακες Q, P τέτοιοι ώστε :

$$\begin{aligned} \tilde{E} &\triangleq QEP = \text{diag}(0, L_1, L_2, \dots, L_p, L'_1, L'_2, \dots, L'_q, I, N) \\ \tilde{A} &\triangleq QAP = \text{diag}(0, J_1, J_2, \dots, J_p, J'_1, J'_2, \dots, J'_q, A_1, I) \end{aligned} \quad (2.2-2)$$

όπου

$$m_i \times n_i, A_1 \in \mathbb{R}^{h \times h}$$

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_i \times (m_i+1)}, i=1,2,\dots,p$$

$$L'_j = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad J'_j = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_j+1) \times n_j}, j=1,2,\dots,q$$

$$N = \text{diag}(N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_r}) \in \mathbb{R}^{g \times g},$$

$$N_{k_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}, i=1,2,\dots,r$$

$$m_0 + \sum_i m_i + \sum_j (n_j + 1) + \sum_i k_i + h = m$$

$$n_0 + \sum_j n_j + \sum_i (m_i + 1) + \sum_i k_i + h = n$$

$$\sum_i k_i = g.$$

Θεωρούμε τώρα τον μετασχηματισμό $x(t) = P\tilde{x}(t)$ και πολλαπλασιάζουμε από αριστερά την (2.2-1) με τον αντιστρέψιμο πίνακα Q , οπότε έχουμε:

$$\tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{u}(t), \quad \text{όπου } \tilde{u}(t) = Qu(t) \quad (2.2-3)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.2-2) η παραπάνω εξίσωση αναλύεται στις εξισώσεις:

$$0\dot{x}_{n_0}(t) = u_{m_0}(t)$$

$$L_i \dot{x}_{m_i}(t) = J_i x_{m_i}(t) + u_{m_i}(t), \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$L_j \dot{x}_{n_j}(t) = J_j x_{n_j}(t) + u_{n_j}(t), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (2.2-4)$$

$$N_{k_i} \dot{x}_{k_i}(t) = x_{k_i}(t) + u_{k_i}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\dot{x}_h(t) = A_1 x_h(t) + u_h(t)$$

όπου $x_k(t) \in \mathbb{R}^k, u_k(t) \in \mathbb{R}^k$ και

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x_{n_0}^T & x_{m_1}^T & \dots & x_{m_p}^T & x_{n_1}^T & \dots & x_{n_q}^T & x_{k_1}^T & \dots & x_{k_r}^T & x_h^T \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{u}(t) = \begin{bmatrix} u_{n_0}^T & u_{m_1}^T & \dots & u_{m_p}^T & u_{n_1}^T & \dots & u_{n_q}^T & u_{k_1}^T & \dots & u_{k_r}^T & u_h^T \end{bmatrix}^T$$

Κατά συνέπεια αντί να λύσουμε την εξίσωση (2.2-1) μπορούμε ισοδύναμα να λύσουμε τις εξισώσεις (2.2-4). Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης της (2.2-1) είναι η εξάλειψη των εξισώσεων (2.2-4) ή με άλλα λόγια

$$QEP = \text{diag}(I, N), \quad QAP = \text{diag}(A_1, I) \quad (2.2-5)$$

Ορισμός 2.2-1: Για δοθέντες πίνακες $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, το ζεύγος (E, A) καλείται *κανονικό* (*regular*) αν υπάρχει αριθμητική σταθερά $\alpha \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $|\alpha E + A| \neq 0$, ή το πολυώνυμο $|sE - A| \neq 0$ (δεν είναι ταυτοτικά μηδέν).

Λήμμα 2.2-2: (Dai, 1989) Το ζεύγος (E, A) είναι κανονικό αν και μόνο αν υπάρχουν δύο αντιστρέψιμοι πίνακες Q, P τέτοιοι ώστε

$$QEP = \text{diag}(I_{n_1}, N), \quad QAP = \text{diag}(A_1, I_{n_2}) \quad (2.2-6)$$

όπου $n_1 + n_2 = n$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ είναι μηδενοδύναμος.

Η (2.2-5) μας δηλώνει ότι αν η διαφορίσιμη εξίσωση (2.2-1) έχει μοναδική λύση για κάθε επαρκώς διαφορίσιμη συνάρτηση $u(t)$ τότε οι πίνακες πρέπει να είναι τετραγωνικοί. Ισοδύναμα το ζεύγος (E, A) είναι κανονικό σύμφωνα με το Λήμμα 2.2-2. Ως εκ τούτου για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του συστήματος (2.2-3) θα υποθέτουμε ότι οι πίνακες E και A είναι τετραγωνικοί κανονικοί πίνακες εκτός και αν αναφέρεται. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα (2.2-3) θα καλείται *κανονικό*.

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί ένα εύκολο κριτήριο για κανονικότητα.

Θεώρημα 2.2-1: (Yip και Sincovec, 1981). Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. Το σύστημα (2.2-3) είναι κανονικό,
2. Αν $X_0 = \text{Ker}A$, $X_i = \{x / Ax \in EX_{i-1}\}$ πρέπει $\text{Ker}E \cap X_i = 0$, $i=0,1,2,\dots$,
3. Αν $Y_0 = \text{Ker}A^T$, $Y_i = \{x / A^T x \in E^T Y_{i-1}\}$, $\text{Ker}E^T \cap Y_i = 0$, $i=0,1,2,\dots$,
4. Έστω

$$G(k) = \begin{bmatrix} E & & & & \\ A & E & & & \\ & A & \ddots & & \\ & & \ddots & E & \\ & & & & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1)nxnk}$$

Τότε $\text{rank}G(k) = nk, k=1,2,\dots,$

5. Έστω

$$F(k) = \begin{bmatrix} E & A & & & & \\ & E & A & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & A & \\ & & & & E & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nkn(k+1)}$$

Τότε $\text{rank}F(k) = nk, k=1,2,\dots$

Παράδειγμα 2.2-1: Έστω το παρακάτω ζεύγος πινάκων

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε $|sE - A| = -4(s-1)^2 \neq 0$. Επομένως το ζεύγος (E,A) είναι κανονικό.

Στην περίπτωση όμως που οι πίνακες E και A είναι υψηλής τάξης αυτή η μέθοδος δεν είναι εύχρηστη. Έτσι ο Luenberger (1978) πρότεινε ένα άλλο κριτήριο το οποίο και ονόμασε αλγόριθμο μετάθεσης (shuffle algorithm).

Θεωρούμε τον $n \times 2n$ πίνακα

$$[E \quad A] \tag{2.2-7}$$

Αν ο E είναι αντιστρέψιμος τότε το ζεύγος (E,A) είναι κανονικό και ο αλγόριθμος σταματά. Διαφορετικά αν ο E είναι μη αντιστρέψιμος παίρνοντας έναν μετασχηματισμό γραμμών μπορούμε να αλλάξουμε την (2.2-7) σε ένα block της μορφής

$$\begin{bmatrix} E_1 & A_1 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (2.2-8)$$

όπου ο πίνακας $E_1 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ έχει πλήρη τάξη γραμμών με $q = \text{rank} E$.

Στη συνέχεια μεταθέτουμε το δεύτερο block της (2.2-8) και έχουμε

$$\begin{bmatrix} E_1 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2-9)$$

Αν ο $[E_1/A_2]$ είναι αντιστρέψιμος τότε το ζεύγος (E, A) είναι κανονικό και ο αλγόριθμος σταματά. Διαφορετικά τον επαναλαμβάνουμε.

Έχει αποδειχθεί ότι ο αλγόριθμος θα καταλήγει στις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

α) ο πίνακας που αποτελείται από τις n αριστερά γραμμές να είναι αντιστρέψιμος υποδηλώνοντας ότι το ζεύγος (E, A) είναι κανονικό, ή

β) μία τουλάχιστον γραμμή από μηδενικά να εμφανίζεται στον πίνακα (2.2-9) το οποίο μας δηλώνει ότι το ζεύγος (E, A) δεν είναι κανονικό.

Παράδειγμα 2.2-2: Θεωρούμε το ζεύγος πινάκων (E, A) του παραδείγματος 2.2-1 όπου ο E είναι μη αντιστρέψιμος. Τότε

$$[E \quad A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Μετασχηματίζοντας τις γραμμές έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ο αριστερός 3x3 πίνακας είναι αντιστρέψιμος οπότε το ζεύγος (E,A) είναι κανονικό σύμφωνα με τα παραπάνω.

2.3 Ισοδυναμία ιδιόμορφων συστημάτων

Αρχικά ας θυμηθούμε τι ονομάζουμε σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 2.3-1: Έστω ένα σύνολο S .

Το υποσύνολο $\sim : S \times S$ καλείται *σχέση* στο σύνολο S .

Μια σχέση \sim ονομάζεται *σχέση ισοδυναμίας* αν και μόνο αν είναι:

- i. Ανακλαστική : Για κάθε $\alpha \in S$ είναι $\alpha \sim \alpha$.
- ii. Συμμετρική: Αν για κάθε $\alpha, \beta \in S$, $\alpha \sim \beta$ συνεπάγεται $\beta \sim \alpha$
- iii. Μεταβατική: Αν για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in S$, $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$ συνεπάγεται $\alpha \sim \gamma$.

Ας επανέλθουμε τώρα στις ιδιότητες των ιδιόμορφων συστημάτων.

Ορισμός 2.3-2: Έστω τα ιδιόμορφα συστήματα

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.3-1\alpha)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (2.3-1\beta)$$

και Q, P δύο ομαλοί αντιστρέψιμοι πίνακες τέτοιοι ώστε

$$x(t) = P\tilde{x}(t) \quad (2.3-2)$$

και

$$QEP = \tilde{E}, \quad QAP = \tilde{A}, \quad QB = \tilde{B}, \quad CP = \tilde{C} \quad (2.3-3)$$

Τα συστήματα (2.3-1α) και (2.3-1β) καλούνται *αυστηρά ισοδύναμα συστήματα* όπου η σχέση (2.3-2) είναι ο αντίστοιχος μετασχηματισμός συντεταγμένων.

Παράδειγμα 2.3-1: Έστω το ηλεκτρονικό κύκλωμα του παραδείγματος 2.1-2 και Q , P δύο τυχαίοι αντιστρέψιμοι πίνακες:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε σύμφωνα με τον μετασχηματισμό (2.3-2) θα έχουμε:

$$\tilde{x} = P^{-1}x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I(t) \\ V_L(t) \\ V_C(t) \\ V_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(t) \\ V_L(t) + V_R(t) \\ V_L(t) + V_C(t) + V_R(t) \\ V_R(t) \end{bmatrix} \quad (2.3-4)$$

το οποίο είναι το νέο διάνυσμα κατάστασης του συστήματος. Επιπλέον χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.3-3) παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ L & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ L & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1/C & 1 & 1 & -1 \\ 1/C - 2R & 0 & 0 & 2 \\ -R & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(t) \quad (2.3-5)$$

Επομένως τα ιδιόμορφα συστήματα που περιγράφονται από τις εξισώσεις (2.1-7) και (2.3-5) είναι *αυστηρά ισοδύναμα συστήματα*.

Παρακάτω θα δούμε μερικές ισοδύναμες μορφές ιδιόμορφου συστήματος.

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.3-4)$$

όπου $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ και οι πίνακες $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ είναι σταθεροί.

2.3.1 Πρώτη ισοδύναμη μορφή (First Equivalent Form)

Λήμμα 2.3-1:(Dai, 1989) Για κάθε ιδιόμορφο σύστημα (2.3-4) υπάρχουν δύο ομαλοί πίνακες Q και P και παίρνοντας μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}x(t), \quad x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$$

και

$$QEP = \text{diag}(I_{n_1}, N), \quad QAP = \text{diag}(A_1, I_{n_2}), \quad QB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CP = [C_1 \quad C_2]$$

όπου $n_1 + n_2 = n$ και ο $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ είναι μηδενοδύναμος με δείκτη μηδενοδυναμίας h ($N^{h-1} \neq 0$ και $N^h = 0$)

το σύστημα (2.3-4) είναι αυστηρά ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \\ y_1(t) &= C_1 x_1(t) \end{aligned} \quad (2.3-5\alpha)$$

$$\begin{aligned} N\dot{x}_2(t) &= x_2(t) + B_2 u(t) \\ y_2(t) &= C_2 x_2(t) \end{aligned} \quad (2.3-5\beta)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (2.3-5\gamma)$$

Η μορφή αυτή του ιδιόμορφου συστήματος είναι η *πρώτη ισοδύναμη μορφή*. Το σύστημα (2.3-5α) καλείται αργό υποσύστημα (slow subsystem) ενώ το (2.3-5β) γρήγορο υποσύστημα (fast subsystem). Επίσης είναι προφανές ότι οι πίνακες Q και P δεν είναι μοναδικοί.

Παράδειγμα 2.3-2: Θεωρούμε το ηλεκτρονικό σύστημα του παραδείγματος (2.1-2) με $L = C = R = 1$ και

$$y(t) = V_c(t) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} I(t) \\ V_L(t) \\ V_C(t) \\ V_R(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 1 \ 0]x(t)$$

Οπότε το σύστημα γίνεται

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_E \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_B \cdot V_s(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[0 \ 0 \ 1 \ 0]}_C x(t)$$

(2.3-6)

Έστω τώρα οι πίνακες

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

με μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$P^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}^2$$

Τότε θα έχουμε

$$QAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$QAP = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \text{diag}(A_1, I_{n_2})$$

$$QEP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$QEP = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \text{diag}(I_{n_1}, N)$$

$$QB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow QB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$CP = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow CP = [0 \ 1 \ | \ 0 \ 0]$$

Άρα το ισοδύναμο πρώτης μορφής σύστημα είναι

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(t) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(t) \\ y(t) &= [0 \quad 1] x_1(t) + [0 \quad 0] x_2(t)\end{aligned}$$

2.3.2 Δεύτερη ισοδύναμη μορφή (Second Equivalent Form)

Έστω το σύστημα (2.3-4) με $\text{rank}E=q$. Από τη θεωρία πινάκων γνωρίζουμε ότι υπάρχουν ομαλοί πίνακες Q_1, P_1 τέτοιοι ώστε

$$Q_1 E P_1 = \text{diag}(I_q, 0)$$

Με μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$P^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_1(t) \in \mathbb{R}^q, x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-q}$$

και

$$Q_1 A P_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad Q_1 B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C P_1 = [C_1 \quad C_2]$$

το σύστημα (2.3-4) είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) \\ 0 &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= C_1x_1(t) + C_2x_2(t)\end{aligned}$$

Αυτή είναι και η *δεύτερη ισοδύναμη μορφή* του (2.3-4). Λόγω του γεγονότος ότι οι πίνακες Q_1, P_1 δεν είναι μοναδικοί θα υπάρχουν πολλές ισοδύναμες μορφές. Η πρώτη εξίσωση είναι διαφορική και αποτελείται από δυναμικά υποσυστήματα ενώ η δεύτερη

είναι αλγεβρική και παριστάνει τη σύνδεση μεταξύ των υποσυστημάτων του συστήματος.

Παράδειγμα 2.3-3: Έστω το σύστημα (2.3-6) του παραδείγματος (2.3-2)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_E \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_B \cdot V_s(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]}_C x(t)$$

Θεωρούμε τους πίνακες

$$Q_1 = I_4, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

παίρνοντας μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$P^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}^2$$

Θα έχουμε

$$Q_1 A P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Q_1AP = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$Q_1B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$CP_1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$CP_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Άρα το ισοδύναμο σύστημα είναι το

$$\dot{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(t)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} V_s(t)$$

$$y(t) = [0 \ 1] x_1(t) + [0 \ 0] x_2(t)$$

2.3.3 Τρίτη ισοδύναμη μορφή (Third Equivalent Form)

Έστω ένας αριθμός α τέτοιος ώστε $|\alpha E + A| \neq 0$. Αν πάρουμε ως πίνακες μετασχηματισμού τους πίνακες

$$Q_2 = (\alpha E + A)^{-1}, \quad P_2 = I_n$$

τότε $Q_2 A = I_n - \alpha(\alpha E + A)^{-1} E$ οπότε το σύστημα (2.3-4) θα είναι αυστηρά ισοδύναμο με το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned}\hat{E}\dot{x}(t) &= (I - \alpha\hat{E})x(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

όπου $\hat{E} = Q_2 E$ και $\hat{B} = Q_2 B$

Παράδειγμα 2.3-4: Θεωρούμε πάλι το σύστημα του παραδείγματος 2.3-2
Είναι

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Στην συνέχεια αν επιλέξουμε $\alpha = 0$ θα έχουμε

$$Q_2 = A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = I_4$$

Επομένως παίρνουμε το παρακάτω ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned}\hat{E}\dot{x}(t) &= x(t) + \hat{B}V_s(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

όπου

$$\hat{E} = Q_2 E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = Q_2 B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

Αυτή είναι και η τρίτη ισοδύναμη μορφή του συστήματος μας.

2.3.4 SVD ισοδύναμη μορφή

Επειδή η μορφή αυτή προκύπτει από την πραγμάτωση μιας διάσπασης ιδιαζουσών τιμών του E (singular value decomposition- SVD) το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει καλείται SVD ισοδύναμο σύστημα.

Θεωρούμε το ιδιόμορφο σύστημα

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.3-7)$$

και δύο ορθογώνιους πίνακες U και V τέτοιους ώστε:

$$UEV = \begin{pmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad UAV = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad UB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad CV = (C_1 \quad C_2) \quad (2.3-8)$$

με

$$\Sigma^2 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q, 0, \dots, 0)$$

όπου σ_i για $i = 1, 2, \dots, q = \text{rank}E$ είναι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του E τοποθετημένες με οποιαδήποτε σειρά. Τότε το σύστημα μετατρέπεται στο παρακάτω SVD ισοδύναμο

$$\begin{aligned} UEV\dot{\tilde{x}}(t) &= UAV\tilde{x}(t) + UB u(t) \\ y(t) &= CV\tilde{x}(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.3-8)$$

με

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = V^T x(t).$$

Προφανώς η ισοδύναμη αυτή μορφή του (2.3-7) δεν είναι μοναδική αφού εξαρτάται από την επιλογή των U και V .

2.4 Ελεγχιμότητα (Controllability) των ιδιόμορφων συστημάτων

Έστω το ιδιόμορφο σύστημα

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.4-1)$$

όπου $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ και οι πίνακες $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ είναι σταθεροί.

Ορισμός 2.4-1: Το ιδιόμορφο σύστημα (2.4-1) καλείται *ελέγξιμο* αν για κάθε χρονική στιγμή $t_1 > 0$, αρχική συνθήκη $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $w \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει είσοδος ελέγχου $u(t)$ τέτοια ώστε $x(t_1) = w$.

Με άλλα λόγια ένα ιδιόμορφο σύστημα είναι ελέγξιμο όταν ξεκινώντας από μια αρχική κατάσταση x_0 και επιλέγοντας μια επιθυμητή τελική κατάσταση w μπορούμε να πάρουμε είσοδο $u(t)$ τέτοια ώστε το διάνυσμα κατάστασης την τυχαία χρονική στιγμή t_1 να είναι το w .

Θεωρούμε τώρα μια πρώτη ισοδύναμη μορφή του συστήματος (2.4-1)

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \quad (2.4-2\alpha)$$

$$y_1(t) = C_1 x_1(t)$$

$$N \dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2 u(t) \quad (2.4-2\beta)$$

$$y_2(t) = C_2 x_2(t)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (2.4-2\gamma)$$

Θεώρημα 2.4-1:(Dai, 1989)

(1). Το αργό υποσύστημα (2.4-2α) είναι ελέγξιμο αν-ν

$$\text{rank}[sE - A, B] = n \quad \forall s \in \mathbb{C}, s \text{ πεπερασμένο},$$

όπου \mathbb{C} το σύνολο των μιγαδικών.

(2). Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Το γρήγορο υποσύστημα (2.4-2β) είναι ελέγξιμο

2. $\text{rank}[B_2, NB_2, \dots, N^{h-1}B] = n_2$

3. $\text{rank}[N \quad B_2] = n_2$

4. $\text{rank}[E \quad B] = n$

5. Για κάθε αντιστρέψιμους πίνακες Q_1 και P_1 τέτοιους ώστε $E = Q_1 \text{diag}(I, 0) P_1$

ορίζουμε $Q_1 B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}$. Τότε $\text{rank} \tilde{B}_2 = n - \text{rank} E$.

(3). Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Το σύστημα (2.4-2) είναι ελέγξιμο
2. Το αργό και το γρήγορο υποσύστημα είναι ελέγξιμα
3. $\text{rank} [B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{n_1-1} B_1] = n_1$ και $\text{rank} [B_2, N B_2, \dots, N^{h-1} B_2] = n_2$

4. Ο πίνακας $D_1 = \begin{bmatrix} -A & & & & B & & & & \\ E & -A & & & B & & & & \\ & E & \ddots & & & B & & & \\ & & \ddots & -A & & & \ddots & & \\ & & & E & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & B \end{bmatrix}_{n^2 \times (n+m-1)n}$

ή ισοδύναμα $D_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -A & B \\ E & 0 \end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix} -A & B \\ E & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{bmatrix} -A & B \\ E & 0 \end{bmatrix} & \\ & & & & \end{bmatrix}_{n^2 \times (n+m-1)n}$

έχει πλήρη τάξη γραμμών n^2 .

Παράδειγμα 2.4-1: Θεωρούμε το ιδιόμορφο σύστημα (2.3-6) του παραδείγματος (2.3-2). Μια πρώτη ισοδύναμη μορφή του όπως είδαμε στο παράδειγμα (2.3-2) είναι το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} x_1(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_1} V_s(t) \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_N \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2} V_s(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_1} x_1(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_2} x_2(t) \end{aligned} \tag{2.4-3}$$

Έχουμε για το αργό υποσύστημα $\text{rank}[B_1, A_1 B_1] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$ ενώ για το γρήγορο υποσύστημα $\text{rank}[B_2, NB_2] = \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα 2.4-1 το αργό υποσύστημα είναι ελέγξιμο σε αντίθεση με το γρήγορο που δεν είναι. Κατά συνέπεια το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο οπότε δεν είναι ελέγξιμο και το ισοδύναμο του.

Ορισμός 2.4-2: Το ιδιόμορφο σύστημα (2.3-5) καλείται R-ελέγξιμο (controllable) αν για κάθε δεδομένη χρονική στιγμή $t_1 > 0$, $x_1(0) \in R$ και $w \in R$ υπάρχει είσοδος ελέγχου $u(t)$ τέτοια ώστε $x(t_1) = w$.

Θεώρημα 2.4-2:(Dai, 1989) Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (1). Το ιδιόμορφο σύστημα (2.3-5) είναι R-ελέγξιμο
- (2). Το αργό υποσύστημα (2.3-5α) είναι ελέγξιμο
- (3). $\text{rank}[sE - A, B] = n \quad \forall s \in \mathbb{C}, s$ πεπερασμένο
- (4). $\text{rank}[B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{n_1-1} B_1] = n_1$

$$(5). \text{ Έστω } D_2 = \begin{bmatrix} -A & & & & & & B \\ E & -A & & & & & B \\ & E & \ddots & & & & B \\ & & \ddots & -A & & & \ddots \\ & & & E & -A & & B \end{bmatrix}_{kn \times (n+m)k}$$

όπου $k \geq n_1$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, για παράδειγμα, $k = \text{rank} E$ ή $k = n$. Τότε ο πίνακας D_2 έχει πλήρη τάξη γραμμών kn .

Συσχετίζοντας τα δύο θεωρήματα που αναφέραμε παραπάνω παρατηρούμε ότι το σύστημα (2.3-5) αν είναι ελέγξιμο τότε είναι και R-ελέγξιμο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Παράδειγμα 2.4-2: Θεωρούμε πάλι το σύστημα (2.4-3). Επειδή όπως είδαμε στο παράδειγμα 2.4-1 το αργό υποσύστημα του είναι ελέγξιμο το σύστημα σύμφωνα με το θεώρημα 2.4-2 θα είναι R-ελέγξιμο, όχι όμως και ελέγξιμο.

Ορισμός 2.4-3: Το ιδιόμορφο σύστημα (2.3-5) καλείται I-ελέγξιμο ή κρουστικά ελέγξιμο (Impulse controllable) αν για κάθε αρχική συνθήκη $x_0, \tau \in \mathbb{R}$ και $w \in \mathbb{R}^{n_2}$ υπάρχει είσοδος ελέγχου $u(t)$ τέτοια ώστε $x_\tau(t) = I_\tau(w, \tau)$.

Θεώρημα 2.4-3:(Dai, 1989) Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (1). Το ιδιόμορφο σύστημα (2.3-5) είναι I-ελέγξιμο
- (2). Το γρήγορο υποσύστημα (2.3-5β) είναι I-ελέγξιμο
- (3). $\ker N + \text{Im} [B_2, NB_2, \dots, N^{h-1}B] = \mathbb{R}^{n_2}$
- (4). $\text{Im} N = \text{Im} [NB_2, N^2B_2, \dots, N^{h-1}B_2]$
- (5). $\text{Im} N + \text{Im} B_2 + \text{Ker} N = \mathbb{R}^{n_2}$
- (6). Έστω $\left(\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ 0 & N_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ το ελέγξιμο κομμάτι του (N, B_2) . Τότε ή ο N_{22}

εξαφανίζεται ή υπάρχει πίνακας M τέτοιος ώστε $\begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} \\ 0 \end{bmatrix} M$

- (7). $\text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B \end{bmatrix} = n + \text{rank} E$

Παρατηρούμε ανάλογα και εδώ συσχετίζοντας τα θεωρήματα 2.4-3 και 2.4-2 ότι αν ένα ιδιόμορφο σύστημα είναι ελέγξιμο τότε θα είναι και I-ελέγξιμο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Παράδειγμα 2.4-3: Όπως είδαμε στο παράδειγμα 2.4-1 το σύστημα (2.4-3) δεν είναι ελέγξιμο, όμως επειδή

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} QEP & 0 & 0 \\ QAP & QEP & QB \end{bmatrix} = \\ &= 2n_1 + \text{rank} \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ I & N & B_2 \end{bmatrix} = \\ &= 2 \cdot 2 + \text{rank} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = 4 + 2 = 6 = \\ &= n + \text{rank} E \end{aligned}$$

είναι I-ελέγξιμο.

2.5 Παρατηρησιμότητα (Observability) των ιδιόμορφων συστημάτων

Ορισμός 2.5-1: Το ιδιόμορφο σύστημα (2.4-2) καλείται *παρατηρήσιμο (observable)* αν η αρχική κατάσταση Ex_0 μπορεί να προσδιοριστεί κατά μοναδικό τρόπο αν γνωρίζουμε την είσοδο $u(t)$ και την έξοδο $y(t)$ όπου $0 \leq t < \infty$.

Θεώρημα 2.5-1:(Dai, 1989) Θεωρούμε το σύστημα (2.4-2).

(1). Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Το αργό υποσύστημα (2.4-2α) είναι παρατηρήσιμο αν-ν

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}, s \text{ πεπερασμένο.}$$

2. $\text{rank} [C_1 / C_1 A_1 / \dots / C_1 A_1^{n-1}] = n_1$

(2). Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Το γρήγορο υποσύστημα (2.4-2β) είναι παρατηρήσιμο

2. $\text{rank} [C_2 / C_2 N / \dots / C_2 N^{h-1}] = n_2$

3. $\ker [N / C_2] = \{0\}$

4. $\text{rank} [N / C_2] = n_2$

5. $\text{rank} [E / C] = n$

6. Για κάθε αντιστρέψιμους πίνακες Q_1, P_1 με

$$Q_1 E P_1 = \text{diag}(I_q, 0) \text{ και } C P_1 = [\tilde{C}_1, \tilde{C}_2] \text{ ο πίνακας } \tilde{C}_2 \text{ έχει πλήρη τάξη στηλών}$$

$$\text{rank} \tilde{C}_2 = n - \text{rank} E$$

(3). Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Το σύστημα (2.4-2) είναι παρατηρήσιμο

2. Το αργό και το γρήγορο υποσύστημά του είναι παρατηρήσιμα

3. $\text{rank} [sE - A / C] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}, s \text{ πεπερασμένο και } \text{rank} [E / C] = n$

4. $\text{rank} [C_1 / C_1 A_1 / \dots / C_1 A_1^{n-1}] = n_1$ και $\text{rank} [C_2 / C_2 N / \dots / C_2 N^{h-1}] = n_2$

Παράδειγμα 2.5-1: Θεωρούμε το σύστημα (2.4-3) του παραδείγματος 2.4-1.

Έχουμε $n_1 = n_2 = 2$ οπότε

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \end{bmatrix} = 2 = n_1 \quad \text{και} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 N \end{bmatrix} = 0 < 2 = n_2$$

Και άρα το ενώ το αργό υποσύστημα του είναι παρατηρήσιμο το γρήγορο δεν είναι και κατά συνέπεια το σύστημα σύμφωνα με το θεώρημα 2.5-1 δεν είναι παρατηρήσιμο.

Ορισμός 2.5-2: Το ιδιόμορφο σύστημα (2.4-2) καλείται R-παρατηρήσιμο (R-observable) αν οποιαδήποτε κατάσταση που ανήκει στο R μπορεί να προσδιοριστεί κατά μοναδικό τρόπο από την έξοδο $y(t)$ και την είσοδο $u(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$.

Θεώρημα 2.5-2:(Dai, 1989) Θεωρούμε το σύστημα (2.4-2). Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :

1. Το ιδιόμορφο σύστημα (2.4-2) είναι R-παρατηρήσιμο
2. Το αργό υποσύστημά του είναι παρατηρήσιμο
3. $\text{rank}[sE - A/C] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad s$ πεπερασμένο

Παράδειγμα 2.5-2: Το σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος είναι R-παρατηρήσιμο αφού το αργό υποσύστημά του είναι παρατηρήσιμο.

Ορισμός 2.5-3: Το ιδιόμορφο σύστημα (2.4-2) καλείται I-παρατηρήσιμο (I-observable) αν η κατάσταση $x_\tau(t)$ μπορεί να προσδιοριστεί κατά μοναδικό τρόπο από το $y_\tau(t)$ και $\Delta_\tau u(t)$ για κάθε $\tau \geq 0$.

Θεώρημα 2.5-3:(Dai, 1989) Θεωρούμε το σύστημα (2.4-2). Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :

1. Το ιδιόμορφο σύστημα (2.4-2) είναι I-παρατηρήσιμο
2. Το γρήγορο υποσύστημά του είναι παρατηρήσιμο
3. $\text{Ker} \left[C_2 / C_2 N / \dots / C_2 N^{h-1} \right] \cap \text{Im } N = \{0\}$

4. $N\text{Ker}[C_2 / C_2 N / \dots / C_2 N^{h-1}] = \text{ker } N$
5. $\text{ker } N \cap \text{ker } C_2 \cap \text{Im } N = \{0\}$
6. Έστω $\begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}, [C_{21} \quad 0]$ είναι το παρατηρήσιμο κομμάτι του (N, C_2) . Τότε
ή ο N_{22} δεν υπάρχει ή $N_{22} = 0$ και $\text{rank} N_{11} = \text{rank}[N_{11} / N_{21}]$
7. $\text{rank} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \text{rank} E$

Παράδειγμα 2.5-3: Εξ ορισμού το αργό υποσύστημα (2.4-2α) είναι πάντα I-παρατηρήσιμο.

2.6 Αρχή της Δυικότητας

Οι έννοιες της ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας είναι δυικές (dual).

Για παράδειγμα αν έχουμε ένα σύστημα (E, A, B, C) οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ελεγχιμότητα όπως είδαμε είναι

$$\text{rank}[B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{n_1-1} B_1] = n_1 \quad \text{και} \quad \text{rank}[B_2, N B_2, \dots, N^{h-1} B_2] = n_2$$

Αντιστρέφοντας τους πίνακες έχουμε τις ισοδύναμες εκφράσεις

$$\text{rank}[B_1^T / B_1^T A_1^T / \dots / B_1^T (A_1^T)^{n_1-1}] = n_1 \quad \text{και} \quad \text{rank}[B_2^T / B_2^T N^T / \dots / B_2^T (N^T)^{h-1}] = n_2$$

οι οποίες είναι οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για παρατηρησιμότητα του συστήματος (E^T, A^T, B^T, C^T) το οποίο και ονομάζεται *δυικό* του (E, A, B, C) .

Κατά συνέπεια το σύστημα (E, A, B, C) είναι ελέγξιμο αν-ν το σύστημα (E^T, A^T, B^T, C^T) είναι παρατηρήσιμο και αντίστροφα, το σύστημα (E, A, B, C) είναι παρατηρήσιμο αν-ν το σύστημα (E^T, A^T, B^T, C^T) είναι ελέγξιμο.

Έστω λοιπόν το ιδιόμορφο σύστημα

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.6-1)$$

και το δυικό του

$$\begin{aligned} E^T \dot{z}(t) &= A^T z(t) + B^T v(t) \\ y(t) &= C^T z(t) \end{aligned} \quad (2.6-2)$$

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.6-1(Αρχή της Δυικότητας): (Dai, 1989) Θεωρούμε το σύστημα (2.6-1)

1. Το σύστημα (2.6-1) είναι ελέγξιμο (παρατηρήσιμο) αν-ν το δυικό του σύστημα (2.6-2) παρατηρήσιμο (ελέγξιμο).
2. Το σύστημα (2.6-1) είναι R-ελέγξιμο (R-παρατηρήσιμο) αν-ν το δυικό του σύστημα (2.6-2) R-παρατηρήσιμο (R-ελέγξιμο).
3. Το σύστημα (2.6-1) είναι I-ελέγξιμο (I-παρατηρήσιμο) αν-ν το δυικό του σύστημα (2.6-2) I-παρατηρήσιμο (I-ελέγξιμο).

2.7 Ανάδραση κατάστασης (State Feedback)

Θεωρούμε το ιδιόμορφο σύστημα

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.7-1)$$

όπου $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ είναι σταθεροί πίνακες και $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ και $y(t) \in \mathbb{R}^r$ είναι το διάνυσμα κατάστασης, το διάνυσμα εισόδου και το διάνυσμα εξόδου αντίστοιχα.

Έστω ότι ο έλεγχος ανάδρασης u είναι της μορφής

$$u(t) = K_1 x(t) - K_2 \dot{x}(t) + v(t) \quad (2.7-2)$$

όπου ο πρώτος όρος είναι αναλογικός (proportional) και ο δεύτερος διαφορικός (derivative).

Τότε το κλειστό σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} (E + BK_2)\dot{x}(t) &= (A + BK_1)x(t) + Bv(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.7-3)$$

Και στην ιδιαίτερη περίπτωση που $K_2 = 0$ δηλαδή $u = K_1x + v$ έχουμε το παρακάτω ιδιόμορφο σύστημα

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A + BK_1)x(t) + Bv(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.7-4)$$

2.8 Ευστάθεια (Stability) ιδιόμορφων συστημάτων

Θεωρούμε το ιδιόμορφο σύστημα (2.7-1). Ονομάζουμε χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος αυτού το πολυώνυμο $|sE - A|$. Εκείνα τα πεπερασμένα s τα οποία μηδενίζουν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο δηλαδή είναι ρίζες της εξίσωσης $|sE - A| = 0$ καλούνται *πεπερασμένοι πόλοι (finite poles)* ή απλά *πόλοι* του συστήματος. Στα ιδιόμορφα συστήματα ο αριθμός των πεπερασμένων πόλων είναι πάντα μικρότερος του $n = \text{rank}E$. Το σύνολο των πεπερασμένων πόλων θα το συμβολίζουμε με $\sigma(E, A) = \{s / s \in \mathbb{C}, s \text{ πεπερασμένο}, |sE - A| = 0\}$. Εκτός βέβαια από τους πεπερασμένους πόλους στα ιδιόμορφα συστήματα συναντάμε και *πόλους στο άπειρο (infinite poles)*.

Παράδειγμα 2.8-1: Έστω το σύστημα (2.3-6)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_E \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_B \cdot V_s(t)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος αυτού είναι:

$$\begin{aligned}
 |sE - A| &= \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & s & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= s \begin{vmatrix} 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & s & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = s^2 + s + 1 = (s + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(s + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)
 \end{aligned}$$

Άρα $\sigma(E, A) = \{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$.

Ορισμός 2.8-1: Το ιδιόμορφο σύστημα (2.7-1) ονομάζεται *ευσταθές αν-ν* οι πόλοι αυτού βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο.

$$\sigma(E, A) \subset \mathbb{C}^- = \{s / s \in \mathbb{C}, R(s) < 0\}.$$

Άρα στο παραπάνω παράδειγμα το σύστημά μας είναι *ευσταθές*.

Ορισμός 2.8-2: Το ιδιόμορφο σύστημα (2.7-1) ονομάζεται *σταθεροποιήσιμο* (stabilizable) αν-ν υπάρχει ανάδραση κατάστασης $u(t) = K_1 x(t) + v(t)$ τέτοια ώστε το σύστημα κλειστού βρόγχου (2.7-4) που θα προκύψει να είναι *ευσταθές*.

Θεώρημα 2.8-1:(Dai, 1989) (Κριτήριο σταθεροποιησιμότητας). Το ιδιόμορφο σύστημα (2.7-1) είναι *σταθεροποιήσιμο αν-ν*

$$\text{rank}[sE - A, B] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}^+ = \{s / s \in \mathbb{C}, s \text{ πεπερασμένο}, R(s) \geq 0\}$$

Πρόταση 2.8-1:(Dai, 1989) Ένα σύστημα είναι *σταθεροποιήσιμο* αν το αργό του υποσύστημα είναι *σταθεροποιήσιμο*. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Πόρισμα 2.8-1:(Dai, 1989) Ένα σύστημα είναι *σταθεροποιήσιμο* αν είναι R-ελέγξιμο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Κατά συνέπεια η σταθεροποιησιμότητα χαρακτηρίζει την ελεγχιμότητα της ευστάθειας ενός συστήματος. Δυική της έννοια είναι η ανιχνευσιμότητα (detectability).

Ορισμός 2.8-3: Ένα σύστημα (E, A, B, C) καλείται ανιχνεύσιμο (detectable) αν το δυικό του (E^T, A^T, B^T, C^T) είναι σταθεροποιήσιμο.

Θεώρημα 2.8-2: (Dai, 1989) Ένα σύστημα είναι (E, A, B, C) είναι ανιχνεύσιμο αν-ν

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}^+$$

Πρόταση 2.8-2:(Dai, 1989) Ένα σύστημα είναι ανιχνεύσιμο αν το αργό υποσύστημά του είναι ανιχνεύσιμο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Πόρισμα 2.8-2:(Dai, 1989) Ένα σύστημα είναι ανιχνεύσιμο αν το αργό του υποσύστημα είναι R-παρατηρήσιμο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Αξίζει τέλος να παρατηρήσουμε ότι ενώ οι έννοιες ελεγχιμότητα, παρατηρησιμότητα αναφέρονται σε ολόκληρο το σύστημα, οι έννοιες R-ελεγχιμότητα, I-παρατηρησιμότητα, σταθεροποιησιμότητα και ανιχνευσιμότητα αναφέρονται στο αργό υποσύστημα του συστήματος.

2.9 Ελεγχιμότητα, παρατηρησιμότητα στο ∞

Στην παράγραφο αυτή θα μιλήσουμε αναλυτικά για την ελεγχιμότητα και την παρατηρησιμότητα στο άπειρο γιατί είναι δύο έννοιες που θα μας χρειαστούν παρακάτω στην μελέτη του προβλήματος του βέλτιστου γραμμικού τετραγωνικού ρυθμιστή.

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ Ex(0) &= Ex_0 \end{aligned} \tag{2.9-1}$$

Ορισμός 2.9-1: Οι ιδιοτιμές για $\lambda=0$ του $(E - \lambda A)$ καλούνται μη πεπερασμένες γενικευμένες ιδιοτιμές του $(sE - A)$.

Ο $(E - sA)$ είναι δυικός του $(sE - A)$.

$$E - sA = s\left(\frac{1}{s}E - A\right)$$

Ορισμός 2.9-2:1) Καλούμε 1^{00} βαθμού *μη πεπερασμένα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα* του $(sE - A)$ εκείνα τα ιδιοδιανύσματα που ικανοποιούν τη σχέση $Ev_i^1 = 0$.

Πρόκειται δηλαδή για ιδιοδιανύσματα του E - λA που αντιστοιχούν στο $\lambda=0$.

2) Καλούμε $k, (k \geq 2)$ βαθμού *μη πεπερασμένα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα* του $(sE - A)$ εκείνα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο i 1^{00} βαθμού μη πεπερασμένο γενικευμένο ιδιοδιανύσμα που ικανοποιεί τη σχέση $Ev_i^{k+1} = Av_i^k$.

Τα ιδιοδιανύσματα αυτά αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές με πολλαπλότητα μεγαλύτερη από ένα.

Ορισμός 2.9-3: 1) Τα 1^{00} βαθμού *μη πεπερασμένα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα* του $(sE - A)$ παράγουν το χώρο των μη δυναμικών λύσεων του (2.9-1) και οι αντίστοιχες *μη πεπερασμένες γενικευμένες ιδιοτιμές* καλούνται *μη δυναμικοί πόλοι* του συστήματος.

2) Τα 2^{00} βαθμού *μη πεπερασμένα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα* του $(sE - A)$ παράγουν το χώρο της κρουστικής λύσης του υποσυστήματος του (2.9-1) και οι αντίστοιχες *μη πεπερασμένες γενικευμένες ιδιοτιμές* του $(sE - A)$ καλούνται *δυναμικοί πόλοι στο ∞* ή *κρουστικοί πόλοι* του (2.9-1).

Οι *μη δυναμικοί πόλοι* είναι οι *μη πεπερασμένες γενικευμένες ιδιοτιμές* του $(sE - A)$ που σχετίζονται με διευθύνσεις του ιδιόμορφου διανύσματος $x(t)$ στις οποίες υπάρχει μια καθαρά αλγεβρική σχέση μεταξύ των ιδιόμορφων μεταβλητών, της εισόδου και της εξόδου. Οι *δυναμικοί πόλοι στο ∞* (μη αιτιατοί πόλοι) είναι οι *μη πεπερασμένες ιδιοτιμές* του $(sE - A)$ που σχετίζονται με διευθύνσεις στις οποίες το ιδιόμορφο διάνυσμα $x(t)$ μπορεί να παρουσιάσει κρουστική συμπεριφορά οφειλόμενη μόνο σε μια αρχική συνθήκη με είσοδο $u(t)$ ταυτοτικά μηδέν.

Θεωρούμε μια SVD ισοδύναμη μορφή του συστήματος (2.9-1)

$$\begin{aligned} UEV\dot{\tilde{x}}(t) &= UAV\tilde{x}(t) + UB u(t) \\ y(t) &= CV\tilde{x}(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.9-2)$$

όπου

$$UEV = \begin{pmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad UAV = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad UB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad CV = (C_1 \quad C_2)$$

Ορισμός 2.9-4: Ο πολυωνυμικός πίνακας πρώτου βαθμού $(sE - A)$ είναι κανονικός (*regular*) αν-ν ο πίνακας $\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ έχει πλήρη τάξη γραμμών ή ο πίνακας $\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}$ έχει πλήρη τάξη στηλών.

Λήμμα 2.9-1: (Mantas and Krikelis, 1989) Έστω ότι ο $(sE - A)$ είναι κανονικός. Τότε:

1. ο αριθμός των πεπερασμένων δυναμικών πόλων του είναι ίσος με d , όπου $d = \deg \{ \det(sE - A) \}$
2. ο αριθμός των δυναμικών του πόλων (πεπερασμένων και μη πεπερασμένων) είναι ίσος με q , όπου $q = \text{rank} E$
3. ο αριθμός των μη δυναμικών πόλων του είναι ίσος με $n - q$
4. ο $(sE - A)$ περιέχει μη πεπερασμένους δυναμικούς πόλους αν-ν ο αντίστροφος του $(sE - A)$ μπορεί να γραφεί ως

$$(sE - A)^{-1} = H(s) + Q(s)$$

όπου $H(s)$ είναι ένας αυστηρά ρητός πολυωνυμικός πίνακας και $Q(s)$ είναι ένας αυστηρά πολυωνυμικός πίνακας με

$$\deg \{ Q(s) \} = \{ \text{index} E \} - 1$$

Λήμμα 2.9-2: (Mantas and Krikelis, 1989) Ένας κανονικός πολυωνυμικός πίνακας πρώτου βαθμού $(sE - A)$ δεν παρουσιάζει μη αιτιατούς πόλους αν-ν:

1. ο πίνακας A_{22} είναι αντιστρέψιμος

2. $\deg\{\det(sE - A)\} = \text{rank}E$
3. ο αντίστροφος του $(sE - A)$ είναι ρητός πολυωνυμικός πίνακας χωρίς ένα αυστηρά πολυωνυμικό κομμάτι.

Λήμμα 2.9-3:(Bender and Laub, 1987) Αν ο A_{22} είναι αντιστρέψιμος έχουμε:

1. Ο πίνακας $(sE - A)$ είναι κανονικός
2. Το σύστημα (2.9-1) δεν έχει κρουστικούς πόλους.

Ορισμός 2.9-5: Το σύστημα (2.9-1) καλείται *ελέγξιμο στο ∞* αν όλοι οι κρουστικοί του πόλοι μπορούν να διεγερθούν από μηδενικές αρχικές συνθήκες υπό μια είσοδο $u(t)$ χωρίς ώθηση ή με άλλα λόγια η κρουστική λύση που έχουμε κάτω από μηδενικές αρχικές συνθήκες μπορεί να παραχθεί υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες από μια είσοδο $u(t)$.

Λήμμα 2.9-4:(Bender and Laub, 1987) Το σύστημα (2.9-1) είναι *ελέγξιμο στο ∞* αν-ν οι γραμμές του πίνακα $(A_{22} \ B_2)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Επιπλέον αν-ν το σύστημα (2.9-1) είναι *ελέγξιμο στο ∞* υπάρχει ανάδραση $u(t) = Kx(t)$ τέτοια ώστε όλοι οι δυναμικοί πόλοι του $[sE - (A + BK)]$ να είναι πεπερασμένοι.

Παρατηρήσεις : 1) Αν το σύστημα είναι *ελέγξιμο στο ∞* όλοι οι μη πεπερασμένοι δυναμικοί πόλοι μπορούν να γίνουν πεπερασμένοι αλλά και να τοποθετηθούν αυθαίρετα στο μιγαδικό επίπεδο.

2) Έστω $K = (K_1 \ K_2)$. Αν το (2.9-1) είναι *ελέγξιμο στο ∞* τότε ο $(A_{22} \ B_2)$ έχει πλήρη τάξη γραμμών και υπάρχει K_2 τέτοιος ώστε ο $(A_{22} + B_2K_2)$ να είναι αντιστρέψιμος. Τότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.9-3 αυτός ο έλεγχος ανάδρασης μετακινεί όλους του δυναμικούς πόλους στο ∞ σε πεπερασμένες θέσεις.

Για την έννοια της παρατηρησιμότητας χρειαζόμαστε το δυικό σύστημα του (2.9-1)

$$E^T \dot{x}(t) = A^T x(t) + C^T y(t)$$

Η ανάδραση κατάστασης αυτού του συστήματος είναι $y(t) = G^T x(t)$ οπότε το δυικό σύστημα γίνεται

$$E^T \dot{x}(t) = (A^T + C^T G^T) x(t)$$

Ορισμός 2.9-6: Το σύστημα (2.9-1) είναι παρατηρήσιμο στο ∞ αν υπάρχει μια μη κρουστική έξοδος $y(t)$ να τοποθετήσει το ιδιόμορφο διάνυσμα $x(t)$ του δυικού συστήματος στον ιδιόμορφο χώρο.

Λήμμα 2.9-5: (Bender and Laub, 1987) Το σύστημα (2.9-1) είναι παρατηρήσιμο στο ∞ αν-ν οι στήλες του C_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Για τα παρακάτω Λήμματα δεν χρειάζεται το σύστημα να είναι σε μια SVD ισοδύναμη μορφή.

Λήμμα 2.9-6:(Bender and Laub, 1987) Η ελεγχιμότητα και η σταθεροποιησιμότητα των πεπερασμένων πόλων του συστήματος (2.9-1) μπορούν να αποφανθούν από τον πολυωνυμικό πίνακα πρώτου βαθμού $\begin{bmatrix} (\lambda E - A) & B \end{bmatrix}$. Συγκεκριμένα:

1. μια πεπερασμένη ιδιοτιμή λ του $(\lambda E - A)$ είναι ένας μη ελέγξιμος πόλος του (2.9-1) αν-ν υπάρχει ένα σύνθετο διάνυσμα v που να ικανοποιεί την σχέση $v^T \begin{bmatrix} (\lambda E - A) & B \end{bmatrix} = 0$,
2. ένας πεπερασμένος μη ελέγξιμος πόλος λ του (2.9-1) είναι επίσης μη σταθεροποιήσιμος αν $\text{Re}(\lambda) \geq 0$

Λήμμα 2.9-7:(Bender and Laub, 1987) Η παρατηρησιμότητα και η ανιχνευσιμότητα των πεπερασμένων πόλων του συστήματος (2.9-1) μπορούν να αποφανθούν από τον πολυωνυμικό πίνακα πρώτου βαθμού $\begin{bmatrix} (\lambda E - A) \\ C \end{bmatrix}$. Συγκεκριμένα:

1. μια πεπερασμένη ιδιοτιμή λ του $(\lambda E - A)$ είναι ένας μη παρατηρήσιμος πόλος του (2.9-1) αν-ν υπάρχει ένα σύνθετο διάνυσμα v που να ικανοποιεί την σχέση
$$\begin{bmatrix} (\lambda E - A) \\ C \end{bmatrix} v = 0,$$
2. ένας πεπερασμένος μη παρατηρήσιμος πόλος λ του (2.9-1) είναι επίσης μη ανιχνεύσιμος αν $\text{Re}(\lambda) \geq 0$.

3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε τις εφαρμογές του Λογισμού μεταβολών στο βέλτιστο έλεγχο για ιδιόμορφα συστήματα και θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα του *Βέλτιστου Γραμμικού Ρυθμιστή (Linear-Quadratic-Regulator problem)* για ιδιόμορφα συστήματα.

Με τα ιδιόμορφα συστήματα έχουν ασχοληθεί αρκετοί ερευνητές και για το λόγο αυτό όπως θα δούμε παρακάτω υπάρχουν διαφορετικές προσεγγίσεις του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου για τα συστήματα αυτά. Το κοινό που έχουν οι τεχνικές αυτές είναι ότι τελικά καταλήγουν στην εφαρμογή της κλασικής θεωρίας που ισχύει για τα συστήματα στο χώρο των καταστάσεων.

Ο Pandolfi (1981) μετατρέπει το σύστημα σε επαυξημένο σύστημα στο χώρο κατάστασης χρησιμοποιώντας τον Drazin αντίστροφο πίνακα του E ορίζοντας επιπρόσθετες καταστάσεις $u^{(i)}(t)$ για $i \in \{0, 1, \dots, a-1\}$ με έναν νέο έλεγχο εισόδου $u^{(a)}(t)$. Ο Cobb (1983) χρησιμοποιεί την Weierstrass μορφή του (3.1-1) (δηλαδή την ανάλυση του συστήματος σε αργό και γρήγορο υποσύστημα) και μετά από πολύπλοκους μετασχηματισμούς καταλήγει σε ένα state-space σύστημα διάστασης q . Η τεχνική του όμως αυτή δεν είναι υπολογιστικά εύχρηστη γιατί απαιτείται η ιδιοδομή του $(sE - A)$ όπου $s = \infty$. Οι Larson, Luenberger και Stengel (1978) λύνουν το διακριτό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Luenberger. Ο Lewis (1985) χρησιμοποιεί το ιδιόμορφο *Hamiltonian* σύστημα

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ -Q & -A^T & 0 \\ 0 & B^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \\ u \end{bmatrix}$$

και προσδιορίζει πίνακες P_1 και P_2 τέτοιους ώστε

$$u(t) = P_1 \lambda(t) + P_2 x(t), \quad t \geq t_0$$

Ο βέλτιστος έλεγχος ανάδρασης αποδεικνύεται τότε ότι είναι ο $u(t) = -Kx(t)$ με

$$K = -(P_1 S(t)E + P_2)$$

όπου $S(t)$ είναι η λύση της γενικευμένης εξίσωσης Riccati

$$0 = E^T \dot{S}(t)E + E^T S(t)A + A^T S(t)E + Q + E^T S(t)B P_1 S(t)E + E^T S(t)B P_2.$$

3.2 Εφαρμογές του Λογισμού Μεταβολών στο Βέλτιστο Έλεγχο για ιδιόμορφα συστήματα

Θεωρούμε το ιδιόμορφο σύστημα που περιγράφεται από το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$E\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) \quad (3.2-1)$$

όπου $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα κατάστασης διάστασης $n \times 1$ και $u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι το διάνυσμα εισόδου διάστασης $m \times 1$. Υποθέτουμε ότι δίνονται οι αρχικές συνθήκες t_0 και $x(t_0) = x_0$. Με τη βοήθεια του Λογισμού των Μεταβολών θα διατυπώσουμε αναγκαίες συνθήκες ανάλογες με αυτές που αναφέρονται στην παράγραφο 1.3.1 για συστήματα στο χώρο των καταστάσεων, ώστε το συναρτησιακό

$$J(x(t), u(t)) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (3.2-2)$$

να έχει βέλτιστη τιμή.

Επειδή

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [h(x(t), t)] dt = h(x(t), t) \Big|_{t_0}^{t_f} = h(x(t_f), t_f) - h(x(t_0), t_0)$$

και εφαρμόζοντας αλυσιδωτή παραγωγή στην h το συναρτησιακό γίνεται

$$J(x(t), u(t)) = h(x(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial h(x(t), t)}{\partial x} \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h(x(t), t)}{\partial t} + g(x(t), u(t), t) \right\} dt \quad (3.2-3)$$

Όμως επειδή το $h(x(t_0), t_0)$ είναι σταθερή ποσότητα γιατί οι αρχικές συνθήκες t_0 και $x(t_0) = x_0$ είναι δεδομένες, αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε το παρακάτω συναρτησιακό

$$J(x(t), u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial h(x(t), t)}{\partial x} \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h(x(t), t)}{\partial t} + g(x(t), u(t), t) \right\} dt \quad (3.2-4)$$

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t) \triangleq g(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial h(x(t), t)}{\partial x} \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h(x(t), t)}{\partial t} + p^T(t) [a(x(t), u(t), t) - E\dot{x}(t)] \quad (3.2-5)$$

Τότε θα έχουμε

$$J_a(x(t), u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \{ g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t) \} dt \quad (3.2-6)$$

Εφαρμόζοντας την θεωρία του Λογισμού των Μεταβολών η μεταβολή του J_a για βέλτιστο σύστημα είναι

$$\begin{aligned} \delta J_a(x^*(t), u^*(t)) &= 0 \\ &= \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f + \\ &+ \left[\frac{\partial g_a}{\partial u}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \delta u_f + \\ &+ \left[\frac{\partial g_a}{\partial p}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \delta p_f + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{l} g_a(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) - \\ - \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{x}^*(t_f) - \\ + \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{u}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{u}^*(t_f) - \\ - \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{p}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{p}^*(t_f) \end{array} \right] \delta t_f + \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g_a}{\partial x} \right]^T - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}} \right]^T \right\} \delta x(t) + \left\{ \left[\frac{\partial g_a}{\partial u} \right]^T - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{u}} \right]^T \right\} \delta u(t) + \left\{ \left[\frac{\partial g_a}{\partial p} \right]^T - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{p}} \right]^T \right\} \delta p(t) \right\} dt = 0
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η $g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t)$ είναι ανεξάρτητη από τις παραγώγους $\dot{u}(t), \dot{p}(t)$ οπότε η παραπάνω έκφραση της μεταβολής του J_a ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}
 & \delta J_a(x^*(t), u^*(t)) = 0 \\
 & = \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f + \\
 & + \left[\begin{array}{l} g_a(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) - \\ - \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{x}^*(t_f) \end{array} \right] \delta t_f + \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g_a}{\partial x} \right]^T - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}} \right]^T \right\} \delta x(t) + \left[\frac{\partial g_a}{\partial u} \right]^T \delta u(t) + \left[\frac{\partial g_a}{\partial p} \right]^T \delta p(t) \right\} dt = 0
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια σύμφωνα με την μέθοδο ανάλυσης που είδαμε στην παράγραφο 1.3.1 το ολοκλήρωμα της μεταβολής $\delta J_a(x^*(t), u^*(t))$ γράφεται

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g_a}{\partial x} \right]^T - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}} \right]^T \right\} \delta x(t) + \left[\frac{\partial g_a}{\partial u} \right]^T \delta u(t) + \left[\frac{\partial g_a}{\partial p} \right]^T \delta p(t) \right\} dt = \\
 & = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T + p^*(t)^T \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) - \frac{d}{dt} [-p^*(t)^T E] \right\} \delta x(t) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T + p^*(t)^T \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right\} \delta u(t) + \\
 & + \left\{ a(x^*(t), u^*(t), t) - E\dot{x}^*(t) \right\}^T \delta p(t) \} dt
 \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό θα πρέπει να μηδενίζεται σε ένα ακρότατο άσχετα από τις συνθήκες στα άκρα. Παρατηρούμε αρχικά ότι οι περιορισμοί $E\dot{x}^*(t) = a(x^*(t), u^*(t), t)$ θα πρέπει να ικανοποιούνται από ένα ακρότατο έτσι ώστε ο συντελεστής του $\delta p(t)$ να είναι μηδέν. Στη συνέχεια επειδή οι πολλαπλασιαστές Lagrange είναι αυθαίρετοι επιλέγουμε το διάνυσμα $p(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε ο συντελεστής του $\delta x(t)$ να μηδενίζεται δηλαδή να έχουμε

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T + p^*(t)^T \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) - \frac{d}{dt}[-p^*(t)^T E] = 0 \Leftrightarrow \\
 & \dot{p}^*(t)^T E = - \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T - p^*(t)^T \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \Leftrightarrow \\
 & E^T \dot{p}^*(t) = - \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] - \left[\frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t)
 \end{aligned}$$

Επιπλέον επειδή τα $\delta u(t)$ είναι ανεξάρτητα ο συντελεστής τους είναι μηδέν. Οπότε καταλήγουμε στην σχέση:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T + p^*(t)^T \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(x^*(t), u^*(t), t) \right] + \left[\frac{\partial a}{\partial \mathbf{u}}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) = 0
 \end{aligned}$$

Άρα τελικά έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$E\dot{x}^*(t) = a(x^*(t), u^*(t), t)$$

$$\begin{aligned} \delta J_a(x^*(t), u^*(t)) = 0 \Rightarrow \\ \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f + \\ + \left[g_a(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) - \right. \\ \left. - \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{x}^*(t_f) \right] \delta t_f = 0 \\ E^T \dot{p}^*(t) = - \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] - \left[\frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) \\ \left[\frac{\partial g}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right] + \left[\frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) = 0 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} E\dot{x}^*(t) = a(x^*(t), u^*(t), t) \\ \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[g(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) + \right. \\ \left. + p^*(t_f)^T [a(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f)] \right] \delta t_f = 0 \\ E^T \dot{p}^*(t) = - \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] - \left[\frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) \\ \left[\frac{\partial g}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right] + \left[\frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) = 0 \end{aligned}$$

Ορίζουμε τώρα τη *Χαμιλτονιανή ή συνάρτηση του Pontryagin*

$$H(x(t), u(t), p(t), t) \triangleq g(x(t), u(t), t) + p^T(t)a(x(t), u(t), t)$$

Τότε οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις μετατρέπονται στις

$$\begin{aligned} E\dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ E^T \dot{p}^*(t) &= - \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

και

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0 \quad (3.2-7)$$

Περίπτωση 1: Ο τελικός χρόνος t_f και η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$ είναι γνωστά και κατά συνέπεια $\delta t_f=0, \delta x_f=0$

Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} E\dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ E^T \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \end{aligned} \quad (3.2-8)$$

Περίπτωση 2: Ο τελικός χρόνος t_f και η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$ δεν είναι γνωστά

Περίπτωση 2.1: Ο τελικός χρόνος t_f να είναι συγκεκριμένος και ελεύθερη η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$.

Τότε

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right]^T \delta x_f = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right]^T = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) = 0$$

Συνεπώς οι αναγκαίες συνθήκες στην περίπτωση αυτή για να έχουμε ακρότατο είναι:

$$\begin{aligned}
 E\dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\
 E^T \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\
 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\
 \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) &= 0
 \end{aligned}$$

(3.2-9)

Περίπτωση 2.2: Ο τελικός χρόνος t_f να είναι συγκεκριμένος και η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$ να βρίσκεται στην επιφάνεια $m(x(t))=0$.

Τότε πρέπει

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right]^T \delta x_f = 0$$

αλλά και

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} m(x^*(t_f)) \right]^T \delta x_f = 0$$

Άρα θα πρέπει να υπάρχει διάνυσμα v τέτοιο ώστε

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right] = v^T \left[\frac{\partial}{\partial x} m(x^*(t_f)) \right]$$

και επιπλέον

$$m(x^*(t_f)) = 0$$

Συνεπώς οι αναγκαίες συνθήκες στην περίπτωση αυτή για να έχουμε ακρότατο είναι:

$$\begin{aligned}
 E\dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\
 E^T \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\
 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\
 \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right] &= v^T \left[\frac{\partial}{\partial x} m(x^*(t_f)) \right] \\
 m(x^*(t_f)) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.2-10}$$

Περίπτωση 2.3: Ο τελικός χρόνος t_f και η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$ να είναι ελεύθερα και ανεξάρτητα.

Τότε θα πρέπει

$$\begin{aligned}
 E\dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\
 E^T \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\
 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\
 \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) &= 0 \\
 H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.2-11}$$

Περίπτωση 2.4: Ο τελικός χρόνος t_f να είναι ελεύθερος και η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$ να ανήκει στην επιφάνεια $m(x(t))=0$.

Τότε θα έχουμε

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0$$

και

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} m(x^*(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f + \left[\frac{\partial}{\partial t} m(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0$$

Για να ισχύουν τα παραπάνω θα πρέπει να υπάρχει διάνυσμα v τέτοιο ώστε

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right] = v^T \left[\frac{\partial}{\partial x} m(x^*(t_f), t_f) \right]$$

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) = v^T \frac{\partial}{\partial t} m(x^*(t_f), t_f)$$

Συνεπώς οι αναγκαίες συνθήκες για να έχουμε ακρότατα στην περίπτωση αυτή είναι:

$$E \dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)$$

$$E^T \dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right] = v^T \left[\frac{\partial}{\partial x} m(x^*(t_f), t_f) \right]$$

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) = v^T \frac{\partial}{\partial t} m(x^*(t_f), t_f)$$

(3.2-12)

Περίπτωση 2.5: Ο τελικός χρόνος t_f να είναι ελεύθερος και η τελική κατάσταση $x(t_f)=x_f$ να ανήκει στην $\theta(t)$.

Τότε θα έχουμε

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0$$

αλλά και

$$\delta x_f = \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) \right] \delta t_f$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right]^T \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) \right] \delta t_f + \\ & + \left[H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0 \Leftrightarrow \\ & \left\{ H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right]^T \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) \right] \right\} \delta t_f = 0 \end{aligned}$$

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση για κάθε δt_f θα πρέπει

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right]^T \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) \right] = 0$$

και επιπλέον

$$x^*(t_f) = \theta(t_f)$$

Συνεπώς οι αναγκαίες συνθήκες για να έχουμε ακρότατα στην περίπτωση αυτή είναι:

$$E\ddot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)$$

$$E^T \dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)$$

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - E^T p^*(t_f) \right]^T \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) \right] = 0$$

$$x^*(t_f) = \theta(t_f)$$

(3.2-13)

Επιπλέον οι ικανές συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να έχουμε ακρότατο ελάχιστο είναι:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) > 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) & \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \end{bmatrix} \geq 0$$

(3.2-14)

3.3 Το πρόβλημα του Βέλτιστου Γραμμικού Ρυθμιστή (LQR-Linear Quadratic Regulator Problem) για ιδιόμορφα συστήματα

Το πρόβλημα έχει ως εξής: Δεδομένου ενός ιδιόμορφου συστήματος

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{3.3-1}$$

με αρχική συνθήκη $Ex(0) = Ex_0$ ζητείται να βρεθεί έλεγχος εισόδου $u(t)$ που να ελαχιστοποιεί τον τετραγωνικό δείκτη απόδοσης

$$J(Ex_0, u, t_f) = \frac{1}{2} x^T(t_f) E^T P E x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[\begin{pmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right] dt \tag{3.3-2}$$

όπου οι πίνακες A, B, E, Q, R και S είναι σταθεροί, ο R είναι συμμετρικός θετικά ορισμένος, ο Q συμμετρικός θετικά ημιορισμένος, ο $\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός θετικά ημιορισμένος και ο E είναι τετραγωνικός με $rank E = q \leq n$ και $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m$ και $y(t) \in \mathbb{R}^r$. Υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι κανονικό δηλαδή $|sE - A| \neq 0$.

Θεωρούμε επίσης ένα SVD ισοδύναμο σύστημα. Έστω λοιπόν U και V δύο ορθογώνιοι πίνακες ($U^T = U^{-1}$ και $V^T = V^{-1}$) τότε για τους πίνακες A, B, C, Q, S και $E^T P E$ του συστήματος έχουμε:

$$\begin{aligned}
 UEV &= \begin{pmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad UAV = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad UB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad CV = (C_1 \quad C_2) \\
 V^T Q V &= \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^r & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad V^T S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \\
 (V^T E^T U^T)(UPU^T)(UEV) &= \begin{pmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma^2 P_{11} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.3-3}$$

και το ισοδύναμο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned}
 UEV\dot{\tilde{x}}(t) &= UAV\tilde{x}(t) + UB u(t) \\
 y(t) &= CV\tilde{x}(t) + Du(t)
 \end{aligned} \tag{3.3-4}$$

με

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = V^T x(t) \tag{3.3-5}$$

Ο έλεγχος ανάδρασης του αρχικού συστήματος συνδέεται με τον έλεγχο ανάδρασης του ισοδύναμου συστήματος με την σχέση

$$u(t) = Kx(t) = \tilde{K}\tilde{x}(t)$$

όπου $\tilde{K} = KV$.

Ας δούμε τώρα ένα Λήμμα το οποίο μας δίνει τις συνθήκες οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη του τετραγωνικού ολοκληρώματος.

Λήμμα 3.3-1:(Bender and Laub, 1987) 1) Έστω ότι στο (3.3-2) είναι $t_f < \infty$, τότε αν το σύστημα (3.3-1) είναι ελέγξιμο στο ∞ υπάρχει ελεύθερη απόκριση εισόδου $u(t)$ τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα (3.3-2) να υπάρχει και να είναι πεπερασμένο.

2) Έστω ότι στο (3.3-2) είναι $t_f = \infty$, τότε αν το σύστημα (3.3-1) είναι ελέγξιμο στο ∞ και οι πεπερασμένοι πόλοι του είναι σταθεροποιήσιμοι, υπάρχει ελεύθερη απόκριση εισόδου $u(t)$ τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα (3.1-2) να υπάρχει και να είναι πεπερασμένο.

Η (3.3-2) ισοδύναμα γράφεται

$$J(Ex_0, u, t_f) = \frac{1}{2} x^T(t_f) E^T P E x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} x^T(t) Q + u^T(t) S^T & x^T(t) S + u^T(t) R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$J(Ex_0, u, t_f) = \frac{1}{2} x^T(t_f) E^T P E x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[x^T(t) Q x(t) + u^T(t) S^T x(t) + x^T(t) S u(t) + u^T(t) R u(t) \right] dt$$

Ορίζουμε τη Χαμιλτονιανή

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} + p^T(t) (Ax(t) + Bu(t) - E\dot{x}(t)) \quad (3.3-6)$$

τότε οι αναγκαίες συνθήκες για βελτιστοποίηση του παραπάνω ολοκληρώματος είναι

$$E\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), u(t), p(t), t)$$

$$E^T \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), u(t), p(t), t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x(t), u(t), p(t), t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} x^T(t_f) E^T P E x(t_f) \right) - E^T p(t_f) = 0$$

(3.3-7)

Την τελευταία σχέση την παίρνουμε γιατί η τελική κατάσταση $x(t_f)$ είναι ελεύθερη.

Η ισοδύναμη

$$\begin{aligned}
 E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
 E^T \dot{p}(t) &= -Qx(t) - Su(t) - A^T p(t) \\
 S^T x(t) + Ru(t) + B^T p(t) &= 0 \\
 E^T p(t_f) &= E^T PEx(t_f)
 \end{aligned}
 \tag{3.3-8}$$

Όποτε έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ -Q & -A^T & -S \\ S^T & B^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \\ u(t) \end{bmatrix}
 \tag{3.3-9}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$Ex(0) = Ex_0 \quad \text{και} \quad E^T p(t_f) = E^T PEx(t_f)
 \tag{3.3-10}$$

Χρησιμοποιώντας την SVD ισοδυναμία δηλαδή αντικαθιστώντας του πίνακες των σχέσεων (3.3-3) στο σύστημα των εξισώσεων (3.3-9) έχουμε

$$\begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \Sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & B_2 \\ \hline -Q_{11} & -Q_{12} & -A_{11}^T & -A_{12}^T & -S_1 \\ -Q_{12}^T & -Q_{22} & -A_{21}^T & -A_{22}^T & -S_2 \\ \hline S_1^T & S_2^T & B_1^T & B_2^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}
 \tag{3.3-11}$$

Η ισοδύναμη

$$\begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & B_1 \\ -Q_{11} & -A_{11}^T & -A_{21}^T & -Q_{12} & -S_1 \\ A_{21} & 0 & 0 & A_{22} & B_2 \\ Q_{12}^T & A_{12}^T & A_{22}^T & Q_{22} & S_2 \\ S_1^T & B_1^T & B_2^T & S_2^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-12)$$

και οι συνοριακές συνθήκες (3.3-10) γίνονται τότε

$$\begin{aligned} E^T x(0) &= E x_0 \Rightarrow \\ V^T E^T U^T x(0) &= U E V x_0 \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Sigma^2 x_1(0) &= \Sigma^2 x_{1_0} \Rightarrow \\ x_1(0) &= x_{1_0} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} E^T p(t_f) &= E^T P E x(t_f) \Rightarrow \\ V^T E^T U^T p(t_f) &= (V^T E^T U^T)(U P U^T)(U E V)x(t_f) \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t_f) \\ p_2(t_f) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Sigma^2 P_{11} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Sigma^2 p_1(t_f) &= \Sigma^2 P_{11} \Sigma^2 x_1(t_f) \Rightarrow \\ p_1(t_f) &= P_{11} \Sigma^2 x_1(t_f) \end{aligned}$$

δηλαδή

$$x_1(0) = x_{1_0} \quad \text{και} \quad p_1(t_f) = P_{11} \Sigma^2 x_1(t_f) \quad (3.3-13)$$

Αν στο παραπάνω σύστημα (3.3-12) θεωρήσουμε το $x_1(t)$ ως το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος, το $p_1(t)$ ως το συζευγμένο διάνυσμα κατάστασης και τέλος ως

είσοδο του συστήματος το επαυξημένο διάνυσμα $\tilde{u}(t) = \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \tilde{B} \\ -Q_{11} & -A_{11}^T & -\tilde{S} \\ \tilde{S}^T & \tilde{B}^T & \tilde{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-14)$$

όπου

$$\begin{aligned} \tilde{B} &\triangleq [0 \quad A_{12} \quad B_1] \\ \tilde{S} &\triangleq [A_{21}^T \quad Q_{12} \quad S_1] \\ \tilde{R} &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & A_{22} & B_2 \\ A_{22}^T & Q_{22} & S_2 \\ B_2^T & S_2^T & R \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια από το σύστημα (3.3-14) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Sigma^2 \dot{x}_1(t) &= A_{11} x_1(t) + \tilde{B} \tilde{u}(t) \\ \Sigma^2 \dot{p}_1(t) &= -Q_{11} x_1(t) - A_{11}^T p_1(t) - \tilde{S} \tilde{u}(t) \\ 0 &= \tilde{S}^T x_1(t) + \tilde{B}^T p_1(t) + \tilde{R} \tilde{u}(t) \Rightarrow \tilde{R} \tilde{u}(t) = -(\tilde{S}^T x_1(t) + \tilde{B}^T p_1(t)) \end{aligned} \quad (3.3-15)$$

οπότε και θα πρέπει να εξετάσουμε την αντιστρεψιμότητα του \tilde{R} .

Λήμμα 3.3-2: (Bender and Laub, 1987) Ικανές συνθήκες για να είναι ο \tilde{R} αντιστρέψιμος είναι:

1. ο $[A_{22} \quad B_2]$ να έχει πλήρη τάξη γραμμών και
2. ο $\begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}$ να είναι αντιστρέψιμος.

Αν το σύστημα (3.3-1) είναι ελέγξιμο στο ∞ τότε ο $[A_{22} \quad B_2]$ έχει πλήρη τάξη γραμμών. Μπορούμε τότε να τοποθετήσουμε όλους τους δυναμικούς πόλους του συστήματος από το ∞ , στο μιγαδικό επίπεδο σε αυθαίρετα πεπερασμένες θέσεις, εφαρμόζοντας ανάδραση κατάστασης.

Αν ο $\begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και επειδή είναι θετικά ημιορισμένος θα είναι

θετικά ορισμένος. Η υπόθεση ότι ο $\begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος είναι ισοδύναμη με

το να έχει ο πίνακας $[C_2 \ D]$ πλήρη τάξη στηλών. Η παρατηρησιμότητα στο ∞ είναι αναγκαία αλλά όχι και ικανή συνθήκη ώστε να έχει ο $[C_2 \ D]$ πλήρη τάξη στηλών.

Ικανή συνθήκη είναι ότι πρέπει $r \geq n - q + m$ οπότε και απαιτούμε ο αριθμός των εξόδων $y(t)$ να είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλος όσο ο αριθμός των μη δυναμικών πόλων του (3.3-1) συν τον αριθμό των εισόδων.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε το παρακάτω Λήμμα :

Λήμμα 3.3-3(Bender and Laub, 1987) Ικανές συνθήκες για να είναι ο \tilde{R} αντιστρέψιμος είναι:

1. το σύστημα (3.3-1) να είναι ελέγξιμο στο ∞
2. ο $\begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix} > 0$

Κατά συνέπεια αφού εξασφαλίσουμε την αντιστρεψιμότητα του \tilde{R} ο βέλτιστος έλεγχος $\tilde{u}(t)$ θα είναι

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= -\tilde{R}^{-1}(\tilde{S}^T x_1(t) + \tilde{B}^T p_1(t)) \Rightarrow \\ \tilde{u}(t) &= -\tilde{R}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{S}^T & \tilde{B}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \tilde{u}(t) &= - \begin{bmatrix} 0 & A_{22} & B_2 \\ A_{22}^T & Q_{22} & S_2 \\ B_2^T & S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ Q_{12}^T & A_{12}^T \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.3-16}$$

Για να λύσουμε τώρα το σύστημα (3.3-15) ορίζουμε διάνυσμα κατάστασης του συστήματος το

$$\bar{x}_1(t) = \Sigma^2 x_1(t)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας και την (3.3-16) το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (3.3-15) γίνεται

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1(t) &= (A_{11} - \tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T)x_1(t) - \tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T p_1(t) \\ \Sigma^2 \dot{p}_1(t) &= -(Q_{11} - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T)x_1(t) - (A_{11}^T - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T)p_1(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1(t) &= (A_{11} - \tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T)\Sigma^{-2}\bar{x}_1(t) - \tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T p_1(t) \\ \Sigma^2 \dot{p}_1(t) &= -(Q_{11} - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T)\Sigma^{-2}\bar{x}_1(t) - (A_{11}^T - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T)p_1(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1(t) &= (A_{11} - \tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T)\Sigma^{-2}\bar{x}_1(t) - \tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T p_1(t) \\ \dot{p}_1(t) &= -\Sigma^{-2}(Q_{11} - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T)\Sigma^{-2}\bar{x}_1(t) - \Sigma^{-2}(A_{11}^T - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T)p_1(t) \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{p}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Sigma^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} - \tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T & -\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T \\ -(Q_{11} - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T) & -(A_{11}^T - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^{-2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-17)$$

Ανάλογα οι συνθήκες στα άκρα (3.3-13) γίνονται

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(0) \\ p_1(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1_0} \\ P_{11}\bar{x}_1(t_f) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \Sigma^2 x_{1_0} \\ P_{11}\Sigma^2 x_1(t_f) \end{bmatrix} \quad (3.3-18)$$

Όπως παρατηρούμε καταλήξαμε σε ένα σύστημα που έχει την μορφή συστήματος στον χώρο των καταστάσεων. Η λύση του θα έχει την μορφή

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(t, t_f) & \Omega_{12}(t, t_f) \\ \Omega_{21}(t, t_f) & \Omega_{22}(t, t_f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t_f) \\ p_1(t_f) \end{bmatrix} \quad \text{για καθε } t \leq t_f$$

(3.3-19)

όπου $\Omega_y(t, t_f)$ είναι $q \times q$ υποπίνακες του $\Omega(t, t_f)$.

Έχουμε

$$\bar{x}_1(t) = \Omega_{11}(t, t_f)\bar{x}_1(t_f) + \Omega_{12}(t, t_f)p_1(t_f) \quad \text{για κάθε } t \leq t_f \quad (3.3-20)$$

η οποία λόγω της τελικής συνθήκης $p_1(t_f) = P_{11}\bar{x}_1(t_f)$ γίνεται

$$\bar{x}_1(t) = [\Omega_{11}(t, t_f) + \Omega_{12}(t, t_f)P_{11}] \bar{x}_1(t_f) \quad \text{για κάθε } t \leq t_f \quad (3.3-21)$$

Επειδή το σύστημα (3.3-17) έχει λύση για κάθε αρχική συνθήκη \bar{x}_{1_0} , αν βάλουμε $t = 0$ στην (3.3-21) ο πίνακας $[\Omega_{11}(0, t_f) + \Omega_{12}(0, t_f)P_{11}]$ που συνδέει το $\bar{x}_1(0)$ με το $p_1(t_f)$ θα είναι αντιστρέψιμος. Γενικά ο $[\Omega_{11}(t, t_f) + \Omega_{12}(t, t_f)P_{11}]$ θα είναι αντιστρέψιμος για κάθε $t \leq t_f$. Οπότε έχουμε

$$\bar{x}_1(t_f) = [\Omega_{11}(0, t_f) + \Omega_{12}(0, t_f)P_{11}]^{-1} \Sigma^2 x_{1_0}$$

Και κατά συνέπεια

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(t, t_f) & \Omega_{12}(t, t_f) \\ \Omega_{21}(t, t_f) & \Omega_{22}(t, t_f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ P_{11} \end{bmatrix} [\Omega_{11}(0, t_f) + \Omega_{12}(0, t_f)P_{11}]^{-1} \Sigma^2 x_{1_0}$$

Άρα έχουμε μοναδική λύση.

Οπότε ισχύει το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 3.3-1:(Bender and Laub, 1987) Υποθέτουμε ότι είτε:

1. ο τελικός χρόνος $t_f < \infty$ και οι συνθήκες του Λήμματος 3.3-3 ικανοποιούνται, είτε
2. ο τελικός χρόνος $t_f = \infty$, οι συνθήκες του Λήμματος 3.3-3 ικανοποιούνται και οι πεπερασμένοι πόλοι του συστήματος (3.3-1) είναι σταθεροποιήσιμοι.

Τότε σε κάθε περίπτωση

1. υπάρχει μοναδική με ελεύθερη απόκριση λύση των αναγκαίων συνθηκών (3.3-7),
2. το τετραγωνικό ολοκλήρωμα κόστους (3.3-2) υπάρχει και είναι πεπερασμένο,
3. κάθε λύση του συστήματος (3.3-1) πρέπει να ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες (3.3-7) ώστε το ολοκλήρωμα (3.3-2) να ελαχιστοποιείται.

3.3.1 Υπολογισμός του βέλτιστου κέρδους ανάδρασης και της βέλτιστης τιμής του δείκτη απόδοσης

Για να πάρουμε τώρα την λύση $u(t)$ του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου η οποία θα είναι με την μορφή ανάδρασης της κατάστασης $x(t)$ πρέπει να έχουμε μια γραμμική σχέση μεταξύ του ελέγχου $u(t)$ και του διανύσματος κατάστασης $x(t)$ για κάθε αρχική συνθήκη x_{i_0} . Για το λόγο αυτό ορίζουμε τον $(2n + m) \times q$ πίνακα

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ P(t) \\ U(t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ U(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-22)$$

Τότε

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(t) \\ P(t) \\ U(t) \end{bmatrix} \bar{x}_1(t_f) \quad (3.3-23)$$

όπου

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma^{-2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-24)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(t, t_f) & \Omega_{12}(t, t_f) \\ \Omega_{21}(t, t_f) & \Omega_{22}(t, t_f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ P_{11} \end{bmatrix} \quad (3.3-25)$$

$$U(t) \triangleq \begin{bmatrix} P_2(t) \\ X_2(t) \\ U(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & A_{22} & B_2 \\ A_{22}^T & Q_{22} & S_2 \\ B_2^T & S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ Q_{12}^T & A_{12}^T \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-26)$$

και

$$\bar{x}_1(t_f) = \left[\Omega_{11}(0, t_f) + \Omega_{12}(0, t_f) P_{11} \right]^{-1} \Sigma^2 x_{1_0}$$

Έτσι ο βέλτιστος έλεγχος $U(t)$ θα είναι της μορφής

$$U(t) = K(t)X(t) \quad (3.3-27)$$

οπότε και θα πρέπει να υπολογίσουμε το κέρδος Kalman $K(t)$.

Η γενική λύση είναι

$$K(t) = U(t)X^\dagger + Y(t) \left[I - X(t)X^\dagger(t) \right] \quad (3.3-28)$$

όπου $Y(t)$ ένας $m \times n$ αυθαίρετος πίνακας και $X^\dagger(t)$ ο ψευδοαντίστροφος του $X(t)$.

Η ισοδύναμη χρησιμοποιώντας την τρίτη αναγκαία συνθήκη

$$S^T X(t) + B^T P(t) + RU(t) = 0$$

έχουμε

$$\begin{aligned} U(t) &= -R^{-1} [S^T X(t) + B^T P(t)] \\ &= \left\{ -R^{-1} [S^T + B^T P(t) X^\dagger(t)] + Y(t) [I - X(t) X^\dagger(t)] \right\} X(t) \end{aligned}$$

Οπότε η (3.3-28) γίνεται

$$K(t) = -R^{-1} [S^T + B^T P(t) X^\dagger(t)] + Y(t) [I - X(t) X^\dagger(t)] \quad (3.3-29)$$

Όπως τώρα στα συστήματα στο χώρο κατάστασης, μπορούμε να βρούμε μια γραμμική σχέση μεταξύ του $P_1(t)$ και του $X_1(t)$ δηλαδή να υπολογίσουμε έναν πίνακα $F(t)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} P_1(t) &= F(t) \bar{X}_1(t) \Rightarrow \\ F(t) &= P_1(t) \bar{X}_1^{-1}(t) \Rightarrow \\ F(t) &= P_1(t) X_1^{-1}(t) \Sigma^{-2} \end{aligned} \quad (3.3-30)$$

Από την (3.3-25) έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{X}_1(t) &= \Omega_{11}(t, t_f) + \Omega_{12}(t, t_f) P_{11} \\ P_1(t) &= \Omega_{21}(t, t_f) + \Omega_{22}(t, t_f) P_{11} \end{aligned} \quad (3.3-31)$$

οπότε με αντικατάσταση στην $F(t) = P_1(t) \bar{X}_1^{-1}(t)$ έχουμε

$$F(t) = \left[\Omega_{21}(t, t_f) + \Omega_{22}(t, t_f) P_{11} \right] \left[\Omega_{11}(t, t_f) + \Omega_{12}(t, t_f) P_{11} \right]^{-1} \quad (3.3-32)$$

Ο πίνακας αυτός αποτελεί λύση της Riccati διαφορικής εξίσωσης που όπως θα δούμε παρακάτω μπορούμε να την πάρουμε σε τέσσερις διαφορετικές μορφές. Γνωρίζοντας τον πίνακα $F(t)$ μπορούμε να υπολογίσουμε τη βέλτιστη τιμή του δείκτη απόδοσης.

Λήμμα 3.3-4:(Bender and Laub, 1987) Έστω ότι το σύστημα (3.3-1) είναι σε μια SVD ισοδύναμη μορφή και έστω ότι ο πίνακας $F(t)$ ικανοποιεί την (3.3-32). Τότε

1. Η βέλτιστη τιμή του δείκτη απόδοσης είναι

$$J = \frac{1}{2} \bar{x}_1^T F(0) \bar{x}_1 = \frac{1}{2} x_1^T \Sigma^2 F(0) \Sigma^2 x_1^T \quad (3.3-33)$$

2. Αν το $x(0) = X(0)\bar{x}_1(t_f)$ τότε

$$J = \frac{1}{2} x^T(0) E^T P(0) X^\dagger x(0) \quad (3.3-34)$$

Απόδειξη: 1. Η (3.3-33) προκύπτει από τα αποτελέσματα που ισχύουν για συστήματα στο χώρο κατάστασης (θεώρημα 1.3-1)

2. Είναι

$$\begin{aligned} x(0) &= X(0)\bar{x}_1(t_f) \Rightarrow \\ \bar{x}_1(t_f) &= X^\dagger(0)x(0) \end{aligned}$$

και

$$P_1(0)\bar{x}_1(t_f) = p_1(0)$$

τότε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x^T(0) E^T P(0) X^\dagger(0) x(0) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} x_1^T \Sigma^2 P_1(0) \bar{x}_1(t_f) = \frac{1}{2} x_1^T \Sigma^2 p_1 \end{aligned}$$

και επειδή $p_1(t) = P(t)\Sigma^2 x_1(t)$ για κάθε $t \leq t_f$

$$\frac{1}{2} x^T(0) E^T P(0) X^\dagger(0) x(0) = \frac{1}{2} x_1^T \Sigma^2 P(0) x_1 \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση: Σε αντίθεση με τα συστήματα στο χώρο κατάστασης ο πίνακας $F(t)$ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον άμεσο υπολογισμό του βέλτιστου ελέγχου $u(t)$. Όπως είδαμε στα ιδιόμορφα συστήματα απαιτείται ο πίνακας $P(t)X^\dagger(t)$ (3.3-29).

3.3.2 Διαφορικές εξισώσεις Riccati

Όπως είπαμε παραπάνω μπορούμε να πάρουμε τέσσερις διαφορικές εξισώσεις Riccati ανάλογες με την διαφορική εξίσωση Riccati που ισχύει στα συστήματα στο χώρο κατάστασης. Οι εξισώσεις αυτές έχουν μια κοινή λύση, τον πίνακα $F(t)$.

Είναι

$$p_1(t) = F(t)\Sigma^2 x_1(t) \quad (3.3-35)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dp_1(t)}{dt} &= \frac{dF(t)}{dt} \Sigma^2 x_1(t) + F(t)\Sigma^2 \frac{dx_1(t)}{dt} \Rightarrow \\ \dot{p}_1(t) &= \dot{F}(t)\Sigma^2 x_1(t) + F(t)\Sigma^2 \dot{x}_1(t) \end{aligned} \quad (3.3-36)$$

Από το σύστημα (3.3-12) παίρνουμε

$$\Sigma^2 \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) \quad (3.3-37)$$

$$\Sigma^2 \dot{p}_1(t) = -Q_{11}x_1(t) - A_{11}^T p_1(t) - A_{21}^T p_2(t) - Q_{12}x_2(t) - S_1u(t) \quad (3.3-38)$$

Αντικαθιστούμε στην (3.3-38) τις σχέσεις (3.3-35) και (3.3-36) ώστε να εξαλείψουμε το $p_1(t)$

$$\Sigma^2 \dot{F}(t)\Sigma^2 x_1(t) + \Sigma^2 F(t)\Sigma^2 \dot{x}_1(t) = -Q_{11}x_1(t) - A_{11}^T F(t)\Sigma^2 x_1(t) - A_{21}^T p_2(t) - Q_{12}x_2(t) - S_1u(t)$$

Αντικαθιστώντας την (3.3-37) στη σχέση που βρήκαμε έχουμε

$$\begin{aligned} \Sigma^2 \dot{F}(t)\Sigma^2 x_1(t) + \Sigma^2 F(t)[A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t)] = \\ -Q_{11}x_1(t) - A_{11}^T F(t)\Sigma^2 x_1(t) - A_{21}^T p_2(t) - Q_{12}x_2(t) - S_1u(t) \end{aligned}$$

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) + A_{21}^T p_2(t) \\ + (\Sigma^2 F(t) A_{12} + Q_{12}) x_2(t) + (\Sigma^2 F(t) B_1 + S_1) u(t)$$

ή ισοδύναμα

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) + [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} & S_1 \\ 0 & A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-39)$$

Πρώτη διαφορική εξίσωση Riccati

Αντικαθιστούμε στην (3.3-39) την σχέση (3.3-16)

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) \\ - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} & S_1 \\ 0 & A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_{22} & B_2 \\ A_{22}^T & Q_{22} & S_2 \\ B_2^T & S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ Q_{12}^T & A_{12}^T \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix}$$

και επειδή $p_1(t) = F(t) \Sigma^2 x_1(t)$ έχουμε

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) \\ - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} & S_1 \\ 0 & A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_{22} & B_2 \\ A_{22}^T & Q_{22} & S_2 \\ B_2^T & S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ Q_{12}^T & A_{12}^T \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ F(t) \Sigma^2 x_1(t) \end{bmatrix}$$

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) \\ - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} & S_1 \\ 0 & A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_{22} & B_2 \\ A_{22}^T & Q_{22} & S_2 \\ B_2^T & S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ Q_{12}^T & A_{12}^T \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} x_1(t)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
 -\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 &= \Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2 \\
 &- \left[I \quad \Sigma^2 F(t) \right] \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} & S_1 \\ 0 & A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_{22} & B_2 \\ A_{22}^T & Q_{22} & S_2 \\ B_2^T & S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ Q_{12}^T & A_{12}^T \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.3-40α}$$

ή αν θέσουμε

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0 & A_{22} & B_2 \\ A_{22}^T & Q_{22} & S_2 \\ B_2^T & S_2^T & R \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = [0 \quad A_{12} \quad B_1], \quad \tilde{S} = [A_{21}^T \quad Q_{12} \quad S_1]$$

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 = \Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2 - (\Sigma^2 F(t) \tilde{B} + \tilde{S}) \tilde{R}^{-1} (\tilde{S}^T + \tilde{B}^T F(t) \Sigma^2) \tag{3.3-40β}$$

Για να ορίζεται αυτή η εξίσωση Riccati θα πρέπει να εξασφαλίζεται ότι ο πίνακας

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0 & A_{22} & B_2 \\ A_{22}^T & Q_{22} & S_2 \\ B_2^T & S_2^T & R \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος. Παραπάνω είδαμε τις ικανές συνθήκες ώστε ο \tilde{R} να αντιστρέφεται.

Δεύτερη διαφορική εξίσωση Riccati

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις της (3.3-12) λύνουμε ως προς $\begin{bmatrix} x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$

Έχουμε λοιπόν

$$\left. \begin{aligned} Q_{12}^T x_1(t) + A_{12}^T p_1(t) + A_{22}^T p_2(t) + Q_{22} x_2(t) + S_2 u(t) &= 0 \\ S_1^T x_1(t) + B_1^T p_1(t) + B_2^T p_2(t) + S_2^T x_2(t) + R u(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{22} x_2(t) + S_2 u(t) &= -Q_{12}^T x_1(t) - A_{12}^T p_1(t) - A_{22}^T p_2(t) \\ S_2^T x_2(t) + R u(t) &= -S_1^T x_1(t) - B_1^T p_1(t) - B_2^T p_2(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T & A_{22}^T \\ S_1^T & B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}$$

Στο σημείο αυτό απαιτούμε ο πίνακας $\begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}$ να είναι αντιστρέψιμος ώστε να

μπορέσουμε να λύσουμε ως προς $\begin{bmatrix} x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$. Παραπάνω είδαμε ότι είναι αντιστρέψιμος αν

ο πίνακας $[C_2 \quad D]$ έχει πλήρη τάξη στηλών. Κατά συνέπεια έχουμε

$$\begin{bmatrix} x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T & A_{22}^T \\ S_1^T & B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}$$

(3.3-41)

Αντικαθιστούμε τώρα την (3.3-41) στην (3.3-39)

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) + \begin{bmatrix} I & \Sigma^2 F(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} & S_1 \\ 0 & A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) + A_{21}^T p_2(t) + \begin{bmatrix} I & \Sigma^2 F(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{12} & S_1 \\ A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) + A_{21}^T p_2(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} I & \Sigma^2 F(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{12} & S_1 \\ A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T & A_{22}^T \\ S_1^T & B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}$$

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) + A_{21}^T p_2(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} I & \Sigma^2 F(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{12} & S_1 \\ A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T & A_{22}^T \\ S_1^T & B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ F(t) \Sigma^2 x_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 -\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = & \left\{ \Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2 - \right. \\
 & \left. - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} Q_{12} & S_1 \\ A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} \right\} x_1(t) \\
 & + \left\{ A_{21}^T - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} Q_{12} & S_1 \\ A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22}^T \\ B_2^T \end{bmatrix} \right\} p_2(t)
 \end{aligned} \tag{3.3-42}$$

Η τρίτη σειρά από την (3.3-12) μας δίνει

$$A_{21} x_1(t) + \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0 \tag{3.3-43}$$

Αντικαθιστούμε τώρα στην (3.3-43) την (3.3-41) και έχουμε

$$\begin{aligned}
 A_{21} x_1(t) - \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T & A_{22}^T \\ S_1^T & B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} &= 0 \\
 A_{21} x_1(t) - \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T & A_{22}^T \\ S_1^T & B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ F(t) \Sigma^2 x_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} &= 0
 \end{aligned}$$

Λύνοντας ως $p_2(t)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 p_2(t) = & \left\{ \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22}^T \\ B_2^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
 & \cdot \left\{ A_{21} - \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} \right\} x_1(t)
 \end{aligned} \tag{3.3-44}$$

όπου ο πίνακας $\begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22}^T \\ B_2^T \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αν ο $\begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \end{bmatrix}$ έχει πλήρη τάξη γραμμών ή ισοδύναμα αν το σύστημα είναι ελέγξιμο στο ∞ . Σύμφωνα με

το Λήμμα στο παράρτημα, αυτό υποδηλώνει ότι ο \tilde{R} είναι αντιστρέψιμος αν ο

$$\begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix} \text{είναι αντιστρέψιμος.}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στην (3.3-42) έχουμε

$$\begin{aligned} -\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = & \left\{ \Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2 - \right. \\ & \left. - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} Q_{12} & S_1 \\ A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} \right\} x_1(t) \\ & + \left\{ A_{21}^T - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} Q_{12} & S_1 \\ A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22}^T \\ B_2^T \end{bmatrix} \right\} \\ & \cdot \left\{ [A_{22} \quad B_2] \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22}^T \\ B_2^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ & \cdot \left\{ A_{21} - [A_{22} \quad B_2] \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} \right\} x_1(t) \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα έχουμε την δεύτερη διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} -\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 = & \Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2 \\ & - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} Q_{12} & S_1 \\ A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} \\ & + \left\{ A_{21}^T - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} Q_{12} & S_1 \\ A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22}^T \\ B_2^T \end{bmatrix} \right\} \\ & \cdot \left\{ [A_{22} \quad B_2] \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22}^T \\ B_2^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ & \cdot \left\{ A_{21} - [A_{22} \quad B_2] \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Τρίτη διαφορική εξίσωση Riccati

Αρχικά θα λύσουμε την τρίτη και τέταρτη γραμμή της (3.3-12) ως προς $\begin{bmatrix} p_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) &= 0 \\ S_1^T x_1(t) + B_1^T p_1(t) + B_2^T p_2^T(t) + S_2^T x_2(t) + Ru(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0p_2(t) + B_2u(t) &= -A_{21}x_1(t) - A_{22}x_2(t) \\ B_2^T p_2(t) + Ru(t) &= -S_1^T x_1(t) - B_1^T p_1(t) - S_2^T x_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_{21} & 0 & A_{22} \\ S_1^T & B_1^T & S_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-45)$$

Αν ο πίνακας B_2 έχει πλήρη τάξη γραμμών τότε αφού και ο R είναι αντιστρέψιμος, αντιστρέψιμος θα είναι και ο $\begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}$.

Άρα

$$\begin{bmatrix} p_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 & A_{22} \\ S_1^T & B_1^T & S_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-46)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την (3.3-46) στην τέταρτη γραμμή της (3.3-12)

$$\begin{aligned} Q_{12}^T x_1(t) + A_{12}^T p_1(t) + A_{22}^T p_2(t) + Q_{22} x_2(t) + S_2 u(t) &= 0 \\ \begin{bmatrix} A_{22}^T & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} A_{22}^T & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 & A_{22} \\ S_1^T & B_1^T & S_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{22}^T & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 & A_{22} \\ S_1^T & B_1^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 0 \\
 & \left\{ Q_{22} - \begin{bmatrix} A_{22}^T & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22} \\ S_2^T \end{bmatrix} \right\} x_2(t) \\
 & + \left\{ \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{22}^T & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} = 0 \\
 & \left\{ Q_{22} - \begin{bmatrix} A_{22}^T & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22} \\ S_2^T \end{bmatrix} \right\} x_2(t) = \\
 & - \left\{ \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{22}^T & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.3-47}$$

Θέλουμε ο πίνακας $\left\{ Q_{22} - \begin{bmatrix} A_{22}^T & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22} \\ S_2^T \end{bmatrix} \right\}$ να είναι αντιστρέψιμος. Από

το Λήμμα στο παράρτημα έχουμε ότι ο \tilde{R} είναι αντιστρέψιμος αν ο $\begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος. Στην περίπτωση αυτή είναι απαραίτητο να μεταθέσουμε τις γραμμές και τις στήλες του \tilde{R} πριν εφαρμόσουμε το Λήμμα. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
 x_2(t) = & - \left\{ Q_{22} - \begin{bmatrix} A_{22}^T & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22} \\ S_2^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
 & \cdot \left\{ \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{22}^T & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.3-48}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.3-35) αντικαθιστούμε τις σχέσεις (3.3-46) και (3.3-48) στην (3.3-39):

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) + [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} & S_1 \\ 0 & A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) + [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & S_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} Q_{12} \\ A_{12} \end{bmatrix} x_2(t)$$

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & S_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 & A_{22} \\ S_1^T & B_1^T & S_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} Q_{12} \\ A_{12} \end{bmatrix} x_2(t)$$

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & S_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22} \\ S_2^T \end{bmatrix} x_2(t) - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & S_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} + [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} Q_{12} \\ A_{12} \end{bmatrix} x_2(t)$$

$$-\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) = (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & S_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} x_1(t) - \left\{ [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & S_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22} \\ S_2^T \end{bmatrix} - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} Q_{12} \\ A_{12} \end{bmatrix} \right\} x_2(t)$$

$$\begin{aligned}
 -\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) &= (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) \\
 &\quad - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & S_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} x_1(t) \\
 &\quad + \left\{ [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & S_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22} \\ S_2^T \end{bmatrix} - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} Q_{12} \\ A_{12} \end{bmatrix} \right\} \\
 &\quad \cdot \left\{ Q_{22} - [A_{22}^T \quad S_2] \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22} \\ S_2^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
 &\quad \cdot \left\{ [Q_{12}^T \quad A_{12}^T] - [A_{22}^T \quad S_2] \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} x_1(t)
 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
 -\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 &= \Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2 \\
 &\quad - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & S_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} \\
 &\quad - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \left\{ \begin{bmatrix} Q_{12} \\ A_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21}^T & S_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22} \\ S_2^T \end{bmatrix} \right\} \\
 &\quad \cdot \left\{ Q_{22} - [A_{22}^T \quad S_2] \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{22} \\ S_2^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
 &\quad \cdot \left\{ [Q_{12}^T \quad A_{12}^T] - [A_{22}^T \quad S_2] \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

που είναι η τρίτη διαφορική εξίσωση Riccati.

Τέταρτη διαφορική εξίσωση Riccati

Στην περίπτωση αυτή από την τρίτη ,τέταρτη και πέμπτη γραμμή της (3.3-12)

απαλείφουμε το $u(t)$ και λύνουμε ως προς $\begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

Η πέμπτη γραμμή της (3.3-12) μας δίνει

$$\begin{aligned}
 S_1^T x_1(t) + B_1^T p_1(t) + B_2^T p_2(t) + S_2^T x_2(t) + Ru(t) &= 0 \\
 u(t) = -R^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \\ S_2^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{3.3-49}$$

Η τέταρτη γραμμή της (3.3-12) μας δίνει

$$\begin{aligned}
 Q_{12}^T x_1(t) + A_{12}^T p_1(t) + A_{22}^T p_2(t) + Q_{22} x_2(t) + S_2 u(t) &= 0 \\
 \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T \\ Q_{22}^T & A_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{22}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + S_2 u(t) &= 0
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώ σε αυτήν την (3.3-49)

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T \\ Q_{22}^T & A_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{22}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\
 & - S_2 R^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \\ S_2^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \right\} = 0 \\
 & \left\{ \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T \\ Q_{22}^T & A_{22}^T \end{bmatrix} - S_2 R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \\ S_2^T & B_2^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} A_{22}^T & Q_{22} \end{bmatrix} - S_2 R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 0 \\
 & - \left\{ \begin{bmatrix} A_{22}^T & Q_{22} \end{bmatrix} - S_2 R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} Q_{12}^T & A_{12}^T \\ Q_{22}^T & A_{22}^T \end{bmatrix} - S_2 R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \\ S_2^T & B_2^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.3-50}$$

Η τρίτη γραμμή της (3.3-12) μας δίνει

$$A_{21} x_1(t) + A_{22} x_2(t) + B_2 u(t) = 0$$

Αντικαθιστώ σε αυτή την (3.3-49)

$$\begin{aligned}
 A_{21} x_1(t) + A_{22} x_2(t) - B_2 R^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \\ S_2^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \right\} &= 0 \\
 A_{21} x_1(t) + A_{22} x_2(t) - B_2 R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \\ S_2^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} - B_2 R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \end{bmatrix} - B_2 R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} 0 & A_{22} \end{bmatrix} - B_2 R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 0 \\ & - \left\{ \begin{bmatrix} 0 & A_{22} \end{bmatrix} - B_2 R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \end{bmatrix} - B_2 R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3-51)$$

Από τις (3.3-50) και (3.3-51) έχουμε

$$- \left\{ \begin{bmatrix} 0 & A_{22} \\ A_{22}^T & Q_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ S_2 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ Q_{12}^T & A_{12}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ S_2 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix}$$

Λύνουμε τώρα ως προς $\begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= - \left\{ \begin{bmatrix} 0 & A_{22} \\ A_{22}^T & Q_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ S_2 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ & \cdot \left\{ \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ Q_{12}^T & A_{12}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ S_2 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3-52)$$

όπου ο πίνακας $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & A_{22} \\ A_{22}^T & Q_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ S_2 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\}$ είναι αντιστρέψιμος σύμφωνα με

το Λήμμα του παραρτήματος γιατί ο \tilde{R} είναι αντιστρέψιμος, εφόσον ο R είναι αντιστρέψιμος.

Από την (3.3-39) έχουμε

$$\begin{aligned} -\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) &= (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) \\ &+ \begin{bmatrix} I & \Sigma^2 F(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} \\ 0 & A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} I & \Sigma^2 F(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ B_1 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε σε αυτήν τις σχέσεις (3.3-49) και (3.3-52)

$$\begin{aligned}
 -\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) &= (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) \\
 &+ [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} \\ 0 & A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\
 &- [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} S_1 \\ B_1 \end{bmatrix} R^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) &= (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) \\
 &+ [I \quad \Sigma^2 F(t)] \left\{ \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} \\ 0 & A_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_1 \\ B_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\
 &- [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} S_1 \\ B_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) &= (\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2) x_1(t) \\
 &- [I \quad \Sigma^2 F(t)] \left\{ \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} \\ 0 & A_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_1 \\ B_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\} \\
 &\cdot \left\{ \begin{bmatrix} 0 & A_{22} \\ A_{22}^T & Q_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ S_2 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
 &\cdot \left\{ \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ Q_{12}^T & A_{12}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ S_2 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} \\
 &- [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} S_1 \\ B_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 x_1(t) &= \left(\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2 \right) x_1(t) \\
 &\quad - \left[I \quad \Sigma^2 F(t) \right] \left\{ \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} \\ 0 & A_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_1 \\ B_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\} \\
 &\quad \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 0 & A_{22} \\ A_{22}^T & Q_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ S_2 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
 &\quad \cdot \left\{ \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ Q_{12}^T & A_{12}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ S_2 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} x_1(t) \\
 &\quad - \left[I \quad \Sigma^2 F(t) \right] \begin{bmatrix} S_1 \\ B_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} x_1(t)
 \end{aligned}$$

Η ισοδύναμη απαλείφοντας το $x_1(t)$ έχουμε την τέταρτη διαφορική εξίσωση Riccati

$$\begin{aligned}
 -\Sigma^2 \dot{F}(t) \Sigma^2 &= \left(\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2 \right) \\
 &\quad - \left[I \quad \Sigma^2 F(t) \right] \left\{ \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} \\ 0 & A_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_1 \\ B_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\} \\
 &\quad \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 0 & A_{22} \\ A_{22}^T & Q_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ S_2 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T & S_2^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
 &\quad \cdot \left\{ \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ Q_{12}^T & A_{12}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ S_2 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} \\
 &\quad - \left[I \quad \Sigma^2 F(t) \right] \begin{bmatrix} S_1 \\ B_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.3-53}$$

3.3.3 Το πρόβλημα του Βέλτιστου Γραμμικού Ρυθμιστή σε ιδιόμορφα συστήματα όταν $t_f = \infty$

Όπως είδαμε στα συστήματα στο χώρο κατάστασης, το πρόβλημα του βέλτιστου γραμμικού ρυθμιστή στην περίπτωση που $t_f = \infty$ σχετίζεται με τις έννοιες της σταθεροποιησιμότητας (stabilizability) και ανιχνευσιμότητας (detectability) ώστε το κριτήριο απόδοσης να είναι πεπερασμένο. Είδαμε μάλιστα ότι στην περίπτωση αυτή η μητρική εξίσωση Riccati είναι αλγεβρική γιατί $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = K$ οπότε $\dot{K}(t) = 0$ (Kalman).

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα αυτό σε συστήματα στο γενικευμένο χώρο κατάστασης. Για το σκοπό αυτό θα θεωρήσουμε τη πρώτη διαφορική εξίσωση Riccati (3.3-40) η οποία για $\dot{F}(t) = 0$ γίνεται

$$\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2 - [I \quad \Sigma^2 F(t)] \begin{bmatrix} A_{21}^T & Q_{12} & S_1 \\ 0 & A_{12} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_{22} & B_2 \\ A_{22}^T & Q_{22} & S_2 \\ B_2^T & S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ Q_{12}^T & A_{12}^T \\ S_1^T & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F(t) \Sigma^2 \end{bmatrix} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\Sigma^2 F(t) A_{11} + Q_{11} + A_{11}^T F(t) \Sigma^2 - (\Sigma^2 F(t) \tilde{B} + \tilde{S}) \tilde{R}^{-1} (\tilde{S}^T + \tilde{B}^T F(t) \Sigma^2) = 0 \quad (3.3-54)$$

Από τις αναγκαίες συνθήκες βελτιστοποίησης είχαμε καταλήξει επίσης στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{p}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Sigma^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} - \tilde{B} \tilde{R}^{-1} \tilde{S}^T & -\tilde{B} \tilde{R}^{-1} \tilde{B}^T \\ -(Q_{11} - \tilde{S} \tilde{R}^{-1} \tilde{S}^T) & -(A_{11}^T - \tilde{S} \tilde{R}^{-1} \tilde{B}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^{-2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ p_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-55\alpha)$$

με συνθήκες στα άκρα

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(0) \\ p_1(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1_0} \\ P_{11} \bar{x}_1(t_f) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \Sigma^2 x_{1_0} \\ P_{11} \Sigma^2 x_1(t_f) \end{bmatrix} \quad (3.3-55\beta)$$

Θεώρημα 3.3-2:(Bender and Laub, 1987) Θεωρούμε ότι το σύστημα (3.3-1) είναι σε μία SVD ισοδύναμη μορφή και ότι ισχύουν οι συνθήκες του Λήμματος 3.3-3.

Ορίζουμε επίσης ο πίνακας $[C_1 \quad C_2 \quad D]$ του συστήματος (3.3-1) να είναι

$$[C_1 \quad C_2 \quad D] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C}_2 & \tilde{D} \\ \tilde{C}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τέλος υποθέτουμε ότι όλοι οι πεπερασμένοι πόλοι του (3.3-1) είναι σταθεροποιήσιμοι και ανιχνεύσιμοι. Έπειτα θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα ιδιοτιμών :

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} \Lambda = \begin{bmatrix} (A_{11} - \tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T)\Sigma^{-2} & -\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T \\ -\Sigma^{-2}(Q_{11} - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T)\Sigma^{-2} & -\Sigma^{-2}(A_{11}^T - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-56\alpha)$$

ή ισοδύναμα αν θέσουμε $X_1(t) = \Sigma^{-2}\bar{X}_1(t) \Rightarrow \bar{X}_1(t) = \Sigma^2 X_1(t)$

$$\begin{bmatrix} \Sigma^2 X_1(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} \Lambda = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Sigma^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} - \tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T & -\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T \\ -(Q_{11} - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T) & -(A_{11}^T - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^{-2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^2 X_1(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & \Sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} \Lambda = \begin{bmatrix} A_{11} - \tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T & -\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T \\ -(Q_{11} - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T) & -(A_{11}^T - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-56\beta)$$

Θεωρούμε για λόγους ευκολίας ότι οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες. Τότε :

1. Αν η λ είναι μία ιδιοτιμή τότε και η $-\lambda$ είναι μία ιδιοτιμή. Δεν υπάρχουν ιδιοτιμές με πραγματικό μέρος μηδέν.
2. Οι ιδιοτιμές του κλειστού βέλτιστου συστήματος είναι ίσες με τις q ιδιοτιμές της (3.3-56) με αρνητικά πραγματικά μέρη, δηλαδή βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο.
3. Έστω ότι ο Λ είναι ένας $q \times q$ διαγώνιος πίνακας ο οποίος ικανοποιεί την (3.3-56) και του οποίου τα στοιχεία έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. Τότε η μοναδική θετικά ορισμένη (ημιορισμένη) συμμετρική λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati (3.3-54) είναι

$$\begin{aligned} F(t) &= P_1(t)\bar{X}_1^{-1}(t) \\ F(t) &= P_1(t)X_1^{-1}(t)\Sigma^{-2} \end{aligned}$$

Αν οι πεπερασμένοι πόλοι του (3.3-1) είναι τουλάχιστον σταθεροποιήσιμοι και ανιχνεύσιμοι τότε εξασφαλίζεται η ύπαρξη των \bar{X}_1^{-1} και X_1^{-1} .

4. Το βέλτιστο διάνυσμα κατάστασης του κλειστού βρόγχου για το σύστημα (3.3-1) με κριτήριο απόδοσης το (3.3-2) όταν ο χρόνος $t_f = \infty$ και $P = 0$ είναι

$$\bar{x}_1(t) = \bar{X}_1(t)e^{-\Lambda t}\bar{X}_1^{-1}(t)\bar{x}_1(0)$$

ή ισοδύναμα

$$x_1(t) = X_1(t)e^{-\Lambda t}X_1^{-1}(t)x_1(0)$$

Για την απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος χρειαζόμαστε αρχικά να αναφέρουμε τα παρακάτω Λήμματα.

Λήμμα 3.3-5:(Bender and Laub, 1987) Θεωρούμε τον πίνακα της (3.3-55α)

$$\begin{bmatrix} (A_{11} - \tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T)\Sigma^{-2} & -\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T \\ -\Sigma^{-2}(Q_{11} - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T)\Sigma^{-2} & -\Sigma^{-2}(A_{11}^T - \tilde{S}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T) \end{bmatrix} \quad (3.3-57)$$

και υποθέτουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες του Λήμματος 3.3-3. Τότε αν θέσουμε

$$\begin{aligned} \hat{A} &\triangleq (A_{11} - \tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{S}^T)\Sigma^{-2} \\ \hat{B} &\triangleq [A_{12} \quad B_1]G^T [I - GH^T N^T NHG^T] \\ &= [A_{12} \quad B_1]G^T [I - GH^T (GH^T)^\dagger] \\ \hat{R} &\triangleq I_{[m+(n-q)]} \\ \hat{C} &\triangleq \begin{bmatrix} -N & NHG^T G \begin{bmatrix} C_2^T \\ D^T \end{bmatrix} \\ 0 & \left(I - [C_2 \quad D]G^T G \begin{bmatrix} C_2^T \\ D^T \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{21} \\ C_1 \end{bmatrix} \Sigma^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^T N &\triangleq (HG^T GH^T)^{-1} \\ G^T G &\triangleq \begin{bmatrix} Q_{22} & S_2 \\ S_2^T & R \end{bmatrix}^{-1} \\ H &\triangleq [A_{22} \quad B_2] \end{aligned}$$

ο πίνακας γράφεται

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & -\hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{B} \\ -\hat{C}^T\hat{C} & -\hat{A}^T \end{bmatrix} \quad (3.3-58)$$

Λήμμα 3.3-6:(Bender and Laub, 1987) Θεωρούμε μια SVD ισοδύναμη μορφή του (3.3-1) και υποθέτουμε ότι οι συνθήκες του Λήμματος 3.3-3 ικανοποιούνται. Θεωρούμε επίσης τον πίνακα $[C_1 \quad C_2 \quad D]$ στην μορφή

$$[C_1 \quad C_2 \quad D] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C}_2 & \tilde{D} \\ \tilde{C}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τότε ,

1. Αν όλοι οι πόλοι του συστήματος (3.3-1) είναι σταθεροποιήσιμοι , το ζεύγος (\hat{A}, \hat{B}) είναι σταθεροποιήσιμο.
2. Αν όλοι οι πόλοι του συστήματος (3.3-1) είναι παρατηρήσιμοι (ανιχνεύσιμοι) , το ζεύγος (\hat{A}, \hat{C}) είναι παρατηρήσιμο (ανιχνεύσιμο).

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3-2: Λόγω του Λήμματος 3.3-5 ο πίνακας της (3.3-56α) μπορεί να γραφεί στην μορφή (3.3-58). Λόγω του Λήμματος (3.3-6) αν οι πεπερασμένοι πόλοι του (3.3-1) είναι όλοι σταθεροποιήσιμοι τότε το ζεύγος (\hat{A}, \hat{B}) είναι και αυτό σταθεροποιήσιμο. Επίσης αν οι πεπερασμένοι πόλοι του (3.3-1) είναι όλοι παρατηρήσιμοι (ανιχνεύσιμοι) τότε το ζεύγος (\hat{A}, \hat{C}) είναι παρατηρήσιμο

(ανιχνεύσιμο). Τέλος εφόσον ο πίνακας \hat{R} είναι μοναδιαίος είναι θετικά ορισμένος και η απόδειξη του Θεωρήματος είναι προφανής. ■

Για να υπολογίσουμε τώρα το βέλτιστο κέρδος είναι δυνατό να μην χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες (3.3-57) ή (3.3-58) αλλά να δουλέψουμε με τους αρχικούς πίνακες του συστήματος.

Πράγματι, αν οι στήλες του $\begin{bmatrix} X_1(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα του (3.3-56) τότε οι στήλες

του

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ P(t) \\ U(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ U(t) \end{bmatrix}$$

θα είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ P(t) \\ U(t) \end{bmatrix} \Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ -Q & -A^T & -S \\ S^T & B^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ P(t) \\ U(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-59)$$

Σε αντίθεση με την (3.3-56) που το σύστημα είναι σε μια SVD ισοδύναμη μορφή εδώ στην (3.3-59) δεν είναι απαραίτητο.

Οι διαστάσεις των πινάκων είναι $(2n+m) \times (2n+m)$. Εφόσον ο \tilde{R} θεωρείται αντιστρέψιμος υπάρχουν $m+2(n-q)$ μη πεπερασμένες ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε $m+2(n-q)$ μη δυναμικούς πόλους. Αν οι συνθήκες του Θεωρήματος 3.3-2 υφίσταται τότε οι άλλες $2q$ ιδιοτιμές θα είναι οι q σταθεροί δυναμικοί πόλοι και οι απεικονίσεις τους στο φανταστικό άξονα. Αν ο Λ είναι στη μορφή Jordan όπου τα διαγώνια στοιχεία

του είναι οι q σταθεροί δυναμικοί πόλοι τότε ο πίνακας $\begin{bmatrix} X(t) \\ P(t) \\ U(t) \end{bmatrix}$ παράγει τον αντίστοιχο

σταθερό ιδιοχώρο. Ο πίνακας αυτός έχει $(2n + m)$ γραμμές και q στήλες σε αντίθεση με τα συστήματα στο χώρο κατάστασης που έχουν n στήλες. Κατά συνέπεια ενώ δεν είναι απαραίτητο να πάρουμε μια SVD ισοδύναμη μορφή του συστήματος ωστόσο είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την τάξη του πίνακα E . Εφόσον οι μη πεπερασμένες ιδιοτιμές του (3.3-59) είναι $m + 2(n - q)$ και n , m είναι γνωστά μπορούμε να υπολογίσουμε το q .

Αν ο $K(t)$ είναι μια λύση της

$$U(t) = K(t)X(t) \quad (3.3-60)$$

τότε ο $K(t)$ είναι το κέρδος ανάδρασης του βέλτιστου ελέγχου και είναι ίσος με

$$K(t) = -R^{-1} [S^T + B^T P(t)X^\dagger(t)] + Y(t) [I - X(t)X^\dagger(t)] \quad (3.3-61)$$

όπου $Y(t)$ τυχαίος πίνακας.

Την εξίσωση αυτή την παίρνουμε από την τελευταία γραμμή της (3.3-59) κατά ανάλογο τρόπο όπως παίρνουμε την (3.3-29).

Έστω $K(t) = [K_1(t) \quad K_2(t)]$ μια λύση της (3.3-60) δηλαδή

$$U(t) = K(t)X(t) = [K_1(t) \quad K_2(t)] \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-62)$$

Από το 3 του Θεωρήματος 3.3-2 έχουμε ότι ο $X_1(t)$ είναι αντιστρέψιμος. Τότε επιλέγοντας τον $K_2(t)$ αυθαίρετα, ο $K_1(t)$ από την παραπάνω σχέση θα είναι

$$U(t) - K_2(t)X_2(t) = K_1(t)X_1(t) \quad (3.3-63)$$

Τώρα εφόσον το σύστημα (3.3-1) θεωρείται ότι είναι ελέγξιμο στο ∞ , ο πίνακας $[A_{22} \quad B_2]$ έχει πλήρη τάξη γραμμών και εφόσον ο $K_2(t)$ είναι αυθαίρετος μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε ο $[A_{22} + B_2 K_2]$ να είναι αντιστρέψιμος. Κατά συνέπεια ο

$[sE - (A + BK)]$ είναι κανονικός, οπότε όλοι οι δυναμικοί πόλοι του κλειστού συστήματος είναι πεπερασμένοι.

Η αντιστρεψιμότητα του $[A_{22} + B_2 K_2]$ είναι ικανή συνθήκη ώστε να εξασφαλίσουμε μια μοναδική μη κρουστική βέλτιστη λύση στο κλειστό σύστημα για κάθε αρχική συνθήκη Ex_0 .

Αν τώρα υπάρχει μια θετικά ορισμένη λύση $F(t)$ της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati (3.3-54) τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το βέλτιστο δείκτη απόδοσης όταν $t_f = \infty$.

Λήμμα 3.3-7:(Bender and Laub, 1987) Έστω ότι ισχύει το Θεώρημα 3.3-2 και όλοι οι πεπερασμένοι πόλοι του συστήματος (3.3-1) είναι σταθεροποιήσιμοι και ανιχνεύσιμοι.

Αν $t_f = \infty$ και $P = 0$ τότε:

1. Αν ο $F(t)$ είναι μοναδική λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati (3.3-54), ο βέλτιστος δείκτης απόδοσης του LQR προβλήματος θα είναι

$$J = \frac{1}{2} \bar{x}_{t_0}^T(t) F(t) \bar{x}_{t_0}(t) = \frac{1}{2} x_{t_0}^T(t) \Sigma^2 F(t) \Sigma^2 x_{t_0} \quad (3.3-64\alpha)$$

2. Ή αν $x(0) = X(0) \bar{x}_1(t_f)$

$$\frac{1}{2} x^T(0) E^T X^\dagger x(0) \quad (3.3-64\beta)$$

Παράδειγμα 3.3-1:(Bender and Laub, 1987) Δίνεται το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Να βρεθεί βέλτιστος έλεγχος που να ελαχιστοποιεί τον παρακάτω δείκτη απόδοσης

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt$$

Είναι

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

Το σύστημα είναι ήδη σε μια SVD ισοδύναμη μορφή. Τότε το πρόβλημα ιδιοτιμών (3.3-61) με αντικατάσταση των παραπάνω πινάκων γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ P(t) \\ U(t) \end{bmatrix} \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ P(t) \\ U(t) \end{bmatrix}$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} X(t) \\ P(t) \\ U(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην σταθερή ιδιοτιμή $\lambda = -\sqrt{2}$, τότε είναι

$$\begin{bmatrix} X_s \\ P_s \\ U_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Το κέρδος ανάδρασης K θα είναι λύση της εξίσωσης

$$U_s = KX_s$$

Δηλαδή θα έχουμε

$$\begin{aligned} K &= U_s X_s^\dagger + Y(I - X_s X_s^\dagger) \\ &= \frac{1}{3} [(-1) \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}] + [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και αν πάρουμε $y_1 = y_2 = 0$, αφού ο Y είναι αυθαίρετος τότε θα έχουμε τον K με το μικρότερο δυνατό μέτρο

$$K = U_s X_s^\dagger = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}$$

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε $\Sigma^2 = I$, $\bar{x}_1(t) = x_1(t)$ οπότε η εξίσωση Riccati (3.3-54) γίνεται

$$\begin{aligned} &0 \cdot F + F \cdot 0 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left\{ F \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &\cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Από την οποία παίρνουμε την μοναδική θετικά ορισμένη λύση

$$F = \sqrt{2} = P_{1s} X_{1s}^{-1}$$

Και η ελάχιστη τιμή του δείκτη απόδοσης είναι

$$J = \frac{1}{2} F x_1^2(0) = \frac{1}{2} \sqrt{2} x_{1_0}^2$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν το $x(0)$ είναι πολλαπλάσιο του $X_s = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} x^T(0) E^T P_s X_s^\dagger x(0) = \frac{1}{2} x_{1_0}^T \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} x_{1_0} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} x_{1_0}^2 \end{aligned}$$

4 ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάσαμε την λύση στο πρόβλημα του βέλτιστου γραμμικού τετραγωνικού ρυθμιστή για μη χρονικά μεταβαλλόμενα συνεχή συστήματα στο γενικευμένο χώρο κατάστασης. Εφαρμόζοντας τη Θεωρία του Λογισμού των Μεταβολών πήραμε τις αναγκαίες συνθήκες για βελτιστοποίηση, κατά ανάλογο τρόπο όπως και στα συστήματα στον χώρο κατάστασης εφαρμόζοντας τους απαραίτητους μετασχηματισμούς. Όπως είδαμε υπάρχουν διαφορετικές εξισώσεις Riccati που όμως όλες έχουν κοινή λύση την $F(t)$. Επιπλέον είδαμε ότι υπάρχουν ποικίλοι $m(n-q)$ πίνακες $K(t)$ οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση ανάδρασης $u(t) = K(t)x(t)$. Επιλέγοντας τον κατάλληλο πίνακα $K(t)$ στην μια περίπτωση που ο χρόνος $t_f = \infty$ εξασφαλίζουμε την κανονικότητα του κλειστού συστήματος και στην άλλη περίπτωση που $t_f < \infty$ εξασφαλίζουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του βέλτιστου συστήματος. Το ερώτημα που τίθεται είναι πως θα επιλέξουμε το καλύτερο κέρδος ανάδρασης $K(t)$.

Πρόταση:(Bender and Laub, 1987) Αν υποθέσουμε ότι οι συνθήκες του Λήμματος 3.3-3 ικανοποιούνται, τότε

1. στην περίπτωση που $t_f < \infty$ αν ο πίνακας $K(t)$ με το μικρότερο δυνατό μέτρο εφαρμοστεί ως κέρδος ανάδρασης στο σύστημα (3.3-1) τότε εξασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης του βέλτιστου κλειστού συστήματος. Ο δείκτης απόδοσης (3.3-2) είναι πεπερασμένος δηλαδή όλοι οι μη πεπερασμένοι δυναμικοί πόλοι μετακινούνται σε πεπερασμένες θέσεις στο μιγαδικό επίπεδο.
2. στην περίπτωση που $t_f = \infty$ αν ο πίνακας $K(t)$ με το μικρότερο δυνατό μέτρο εφαρμοστεί ως κέρδος ανάδρασης στο σύστημα (3.3-1) τότε ο $[sE - (A + BK)]$ είναι κανονικός και όλοι οι δυναμικοί πόλοι του κλειστού συστήματος είναι πεπερασμένοι.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Bryson Jr. Arthur E. (1996), “*Optimal Control – 1950 to 1985*”, IEEE Control Systems Vol. 16, No 3. pp 26-33
- Douglas J. Bender, Alan J. Laub (1987), “*The Linear – Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems*”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC–32 No 8 pp 672-688
- Douglas J. Bender, Alan J. Laub (1987), “*The Linear – Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems Discrete – time Case*”, Automatica Vol. 23 No 1, pp 71-85 Great Britain
- Dai L. (1989), “*Singular Control Systems*”, Lecture Notes in Control and Information Sciences Vol. 118 Springer - Verlag, Berlin – Heidelberg
- Jonckheere Edmond (1989), “*Variational Calculus for Descriptor Problems*”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, No. 5, pp 491-495
- Καραμπετάκης Ν., Σημειώσεις «*Από τον Λογισμό Μεταβολών στη Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου*» για το μεταπτυχιακό μάθημα: Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου (ΠΜΣ).
- Kir Donald E. (1970), “*Optimal Control Theory, An Introduction*”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey
- Lewis F. L. (1986), “*A Survey of Linear Singular systems*”, Circuits Systems Signal Process Vol.5, No 1, pp 3-36
- Mantas G. P., Krikelis N. J. (1989), “*Linear Quadratic Optimal Control for Discrete Descriptor Systems*”, Journal of Optimization Theory and Applications Vol. 61 No 2, pp 221-245
- Susmman Hector J., Willems Jan C. (1997), “*300 Years of Optimal Control: From The Brachystochrone to the Maximum Principle*”, IEEE Control Systems Magazine, Vol.17, pp 32-44
- Sargent R. W. H. (2000), “*Optimal Control*”, Journal of Computational and Applied Mathematics 124 pp361- 371
- Vergheze George C., Bernard C. Levy, Kailath Thomas (1981), “*A generalised State Space for Singular Systems*”, IEEE Transactions on Automatic Control Vol. AC–26 No 4, pp 811-831

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Διάσπαση ιδιζουσών τιμών (Singular value decomposition – SVD)

Ο μετασχηματισμός **SVD** είναι ένα μαθηματικό «εργαλείο» που βρίσκει πληθώρα εφαρμογών στον χώρο της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος. Στην ουσία αποτελεί την παραγοντοποίηση ενός πίνακα σε γινόμενο τριών πινάκων οι οποίοι μπορούν στην συνέχεια να χρησιμοποιηθούν για να μειωθεί ο θόρυβος του σήματος μας ή να αναπαρασταθεί μελλοντικά το σήμα μας από τις σημαντικότερες ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του. Συγκεκριμένα ο μετασχηματισμός SVD έχει ως εξής:

Οποιοσδήποτε πίνακας A διαστάσεων $m \times n$ με $m > n$ μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο τριών πινάκων δηλαδή

$$A = UDV^T$$

Όπου ισχύουν οι εξής ιδιότητες

$$U^T U = V^T V = I$$

Και ο πίνακας D είναι διαγώνιος με στοιχεία της κύριας διαγωνίου τις singular τιμές του πίνακα .

Ψευδοαντίστροφος πίνακας Moore-Penrose

Για έναν οποιονδήποτε πίνακα B διαστάσεων $m \times n$ ορίζουμε τον ψευδοαντίστροφο πίνακα Moore-Penrose και συμβολίζουμε B^\dagger διαστάσεων $n \times m$ τον πίνακα για τον οποίο ισχύουν οι εξής ιδιότητες :

$$BB^\dagger = B$$
$$B^\dagger BB^\dagger = B^\dagger$$

$$(BB^\dagger)^T = BB^T$$

$$(B^\dagger B)^T = B^\dagger B$$

Ο πίνακας Moore-Penrose ονομάζεται και γενικευμένος αντίστροφος και χρησιμοποιείται σε προβλήματα της μορφής

$$y = Bx$$

όπου για τον B ισχύει $n \gg m$. Σ' αυτήν την περίπτωση ο πίνακας Moore Penrose είναι

$$B^\dagger = (B^T B^{-1})B^T$$

η λύση που ικανοποιεί την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Σε περίπτωση που ο πίνακας B είναι τετραγωνικός και υπάρχει ο αντίστροφός του τότε ισχύει η σχέση:

$$B^{-1} = B^\dagger$$

Ένας αριθμητικά αποδοτικός τρόπος για να υπολογίσουμε τον ψευδοαντίστροφο πίνακα είναι να χρησιμοποιήσουμε Singular Value Decomposition στον πίνακα B δηλαδή

$$B = USV^T$$

και στην συνέχεια υπολογίζουμε τον ψευδοαντίστροφο από την παρακάτω σχέση:

$$B = VS^{-1}U^T$$

Ο αντίστροφος του S είναι εύκολο να υπολογιστεί μια και είναι διαγώνιος οπότε ο αντίστροφος θα είναι και αυτός διαγώνιος με στοιχεία της κύριας διαγωνίου $\frac{1}{s_i}$ όπου s_i τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα S .

Λήμμα: Αν υποθέσουμε ότι οι απαιτούμενοι αντίστροφοι υπάρχουν

$$1. \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det E = \det D \det F \quad \text{όπου} \quad E = D - CA^{-1}B \quad \text{και}$$

$$F = A - BD^{-1}C$$

$$2. \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} F^{-1} & -F^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CF^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CF^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$$