



ἌΝΘΡΩΠΟΙ Οἱ ἄλλοι ΔΑΪ ΜΟΝΟΙ ἢ ἘΛΟΓΟῦΝΤΙ ΤΟ  
Οἱ οὐκ ἔστιν ἄλλοι ἄλλοι  
Ἰ ἌΟΛΟΓΟῦΝΤΙ ΔΕ ἌΝΘΡΩΠΟΙ ἢ Ἄ Οἱ ἄλλοι  
“ἘΛΟΓΟῦΝΤΙ ΔΕ ἌΝΘΡΩΠΟΙ ἢ Ἄ Οἱ ἄλλοι & ἌΕΛΛΟΙ Οἱ”

Το πρόβλημα της Εύρωστης σταθεροποίησης  
Διακριτῶν Συστημάτων Μιας Εισόδου-Μιας Εξόδου  
σε Πεπερασμένο Χρόνο Αποκατάστασης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ἄρτεμις Κ. Κωσταρίγκα

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης  
Επ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2005



ἌΝΘΡΩΠΟΙ Οἱ ἄνθρωποι ΔΑΪ ΔΕΙΟΨΙ Η ΕΛΑΟΟΑΕΙ Ι ΗΕΣΟ  
ΟΙ ΣΙ ΑΙ ΑΕΣΙ ΑΟΕΥΙ  
Ι ΑΟΑΘΟΟ×ΕΑΕΙ ΘΝΙ ΑΝΑΙ Ι Α ΟΘΙ ΟΑΥΙ  
“Ε ΑΥΝΣΟΕΣ ΔΕΣΝΙ ΟΙ ΝΕΣ ΕΑΕΕ ΑΥΝΕΑ ΟΟΟΟΣΙ ΑΟΥΙ & ΑΕΑΑ×Ι Ο”

Το πρόβλημα της Εύρωστης σταθεροποίησης  
Διακριτών Συστημάτων Μιας Εισόδου-Μιας Εξόδου  
σε Πεπερασμένο Χρόνο Αποκατάστασης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Άρτεμις Κ. Κωσταρίγκα

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης  
Επ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 24<sup>η</sup> Ιουνίου 2005.

.....  
Α. Βαρδουλάκης  
Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....  
Ν. Καραμπετάκης  
Επ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....  
Μ. Γουσίδου-Κουτίτα  
Επ. Καθηγήτρια Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2005

.....  
Άρτεμις Κ. Κωσταρίγχα  
Πτυχιούχος Φυσικός Α.Π.Θ.

Copyright © Άρτεμις Κ. Κωσταρίγχα, 2005.  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

## Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια διαδικασία εύρωστου σχεδιασμού, διακριτών, γραμμικών-χρονικά ανεξάρτητων συστημάτων στα πλαίσια της θεωρίας της Σταθεροποίησης σε Πεπερασμένο Χρόνο Αποκατάστασης. Το πρόβλημα *Πεπερασμένου Χρόνου Αποκατάστασης* (Finite Settling Time -FST) εισήχθη από τους Karcaniias & Milonidis (1988) και αποτελεί μια γενίκευση του γνωστού προβλήματος χρονικά βέλτιστου ελέγχου (deadbeat). Έτσι, αντί να ζητούμε χρονικά βέλτιστη απόδοση, απαιτούμε το σύστημα κλειστού βρόγχου να καταλήξει σε μια νέα κατάσταση ισορροπίας μετά από πεπερασμένο χρόνο από την εφαρμογή ενός βηματικού σήματος εισόδου για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση.

Εκμεταλευόμενοι της συνδεσμολογίας μοναδιαίας ανάδρασης και του μαθηματικού υποβάθρου των δυναμοσειρών, παρέχουμε μια λύση του FST προβλήματος. Το συνολικό πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση μιας Διοφαντικής εξίσωσης πολυωνυμικών πινάκων. Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει την παραμετροποίηση της οικογένειας των FST σταθεροποιητικών ελεγκτών σε μια παραμετροποίηση τύπου Youla-Bongiorno-Kucera.

Έχοντας παραμετροποιήσει την οικογένεια των FST σταθεροποιητικών ελεγκτών, θεωρούμε επιπλέον κριτήρια απόδοσης, όπως την FST ανίχνευση, την  $l^1$ -,  $l^\infty$ - βελτιστοποίηση και την ευρωστία σε μεταβολές των παραμέτρων της ελεγχόμενης διεργασίας. Συγκεκριμένα, προτείνουμε έναν δείκτη ευρωστίας, ο οποίος βελτιστοποιείται κάτω από τον περιορισμό της εσωτερικής ευστάθειας. Η εργασία κλείνει με κάποια αριθμητικά παραδείγματα, τα οποία επαληθεύουν τα θεωρητικά αποτελέσματα.

## ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Πεπερασμένος Χρόνος Αποκατάστασης (Finite Settling Time - FST), σταθεροποίηση, ευρωστία.

## Abstract

A design procedure for linear time-invariant discrete-time systems with robustness is proposed in this thesis, in the framework of *Total Finite Settling Time Stabilization*. The *Finite Settling Time* problem was introduced by Karcanias and Milonidis (1988). It constitutes a generalization of the well know deadbeat (time-optimal) control problem in the way that instead of seeking time-optimum performance, it is required that all internal and external variables (signals) of the closed-loop system settle to a new steady state after a finite time from the application of a step change to any of its inputs and for every initial condition.

Using a unity feedback configuration and a mathematical framework based on sequences we give the solution of the FSTS problem. The whole problem is reduced to the solution of a polynomial matrix Diophantine equation. This approach enables the parametrization of the family of all FSTS controllers in a Youla-Bongiorno-Kucera type parametrization.

Having parametrized the family of all FSTS controllers we consider further performance criteria such as FSTS tracking,  $l^1$ -,  $l^\infty$ - optimization and robustness to plant parameter variations. In particular we propose a robustness index that is optimized under the constraint of internal stability. The bound of robustness improvement is also shown by calculating the limit value of the robustness index. Finally, numerical examples are given to illustrate the theoretical results.

## KEY WORDS

Finite Settling Time - FST, stabilization, robustness.

## Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Μαθηματική Εισαγωγή</b>	<b>7</b>
2.1	Ακολουθίες - Τυπικές Δυναμοσειρές . . . . .	7
2.2	Πολυώνυμα και πολυωνυμικά κλάσματα . . . . .	10
2.3	Ακολουθίες και τυπικά πολυώνυμα στην περίπτωση των διακριτών συστημάτων ελέγχου. . . . .	13
2.4	Πολυωνυμικοί πίνακες και Ρητοί διανυσματικοί χώροι . . . . .	18
2.4.1	Βασικοί ορισμοί . . . . .	18
2.4.2	Διαιρέτες πινάκων . . . . .	19
2.4.3	Matrix Fraction Descriptions . . . . .	19
2.5	Εξισώσεις πινάκων - Διοφαντική Εξίσωση . . . . .	20
2.5.1	Γραμμικές εξισώσεις $AX=B$ . . . . .	20
2.5.2	Γραμμικές Διοφαντικές Εξισώσεις . . . . .	20
2.6	Συμπεράσματα . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Συστήματα Διακριτού Χρόνου</b>	
	<b>Περιγραφή εισόδου-εξόδου (input-output)</b>	<b>23</b>
3.1	Γραμμικά συστήματα Διακριτού Χρόνου . . . . .	23
3.2	Γραμμικότητα και Χρονική Ανεξαρτησία . . . . .	24
3.3	Αιτιότητα και Ευστάθεια . . . . .	26
3.4	Lumped γραμμικά, χρονικά ανεξάρτητα συστήματα διακριτού χρόνου . . . . .	28
3.5	Γραμμικές εξισώσεις διαφορών . . . . .	30
3.6	Συμπεράσματα . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Συστήματα Κλειστού Βρόγχου</b>	<b>33</b>
4.1	Βρόγχος μοναδιαίας ανάδρασης . . . . .	33
4.2	Σταθεροποίηση του συστήματος μοναδιαίας ανάδρασης . . . . .	38
4.3	Συμπεράσματα . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Ολική Σταθεροποίηση Πεπερασμένου Χρόνου</b>	
	<b>Αποκατάσταση</b>	
	<b>(Total Finite Settling Time Stabilization)</b>	<b>41</b>
5.1	Ορισμός του FST προβλήματος - Παραμετροποίηση των FST ελεγκτών . . . . .	41
5.2	Αλγεβρικός υπολογισμός της οικογένειας $\mathcal{F}(p)$ . . . . .	46
5.3	FST Ανίχνευση . . . . .	48
5.4	Συμπεράσματα . . . . .	49

<b>6</b>	<b>Βέλτιστη &amp; Εύρωστη FSTS</b>	<b>50</b>
6.1	$l^1$ - και $l^\infty$ - Βέλτιστη FSTS . . . . .	50
6.1.1	Νόρμες των συστημάτων διακριτού χρόνου . . . . .	51
6.2	Μικρή εισαγωγή στον Γραμμικό Προγραμματισμό . . . . .	54
6.3	Ορισμοί και λύσεις του βέλτιστου FSTS προβλήματος . . . . .	56
6.4	Εύρωστη FSTS . . . . .	62
6.5	Συμπεράσματα . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Αλγόριθμοι-Παραδείγματα</b>	<b>66</b>
7.1	FST αλγόριθμος . . . . .	67
7.2	Υλοποίηση και αποτελέσματα στο MATLAB . . . . .	73
7.2.1	Παράδειγμα . . . . .	81
7.2.2	Επαλήθευση της Ευρωστίας του συστήματος . . . . .	83
7.3	Συμπεράσματα . . . . .	92
<b>A'</b>	<b>Παράρτημα</b>	<b>94</b>
A'.1	Προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν στην προσομοίωση . . . . .	94

# 1 Εισαγωγή

Από τις πρώτες εφαρμογές της θεωρίας των Διακριτών Συστημάτων έγινε αντιληπτή μια χαρακτηριστική ιδιότητα των γραμμικών-χρονικά ανεξάρτητων (linear-time invariant LTI) συστημάτων: η ικανότητα που έχουν να καταλήγουν σε σταθερή κατάσταση μετά από πεπερασμένο χρονικό διάστημα [1]. Το πρόβλημα αυτό, και συγκεκριμένα το πρόβλημα ελαχίστου χρόνου, είχε απασχολήσει τους επιστήμονες για αρκετά χρόνια. Στην περίπτωση διακριτού χρόνου, που μας ενδιαφέρει, χαρακτηρίστηκε σαν **deadbeat control**, και περιλάμβανε γραμμικά-χρονικά ανεξάρτητα συστήματα σταθερής ανάδρασης, τα οποία μπορούν να υλοποιηθούν με τέτοιο τρόπο που να οδηγούν τις καταστάσεις (ή τις εξόδους) στις αρχικές τιμές σε ελάχιστο χρόνο και για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση. Στη συνέχεια εμφανίστηκε μια μεγάλη ποικιλία τέτοιων (deadbeat) προβλημάτων, τα οποία διέφεραν ανάλογα με τον τύπο του προβλήματος και τον τρόπο προσέγγισης της κάθε περίπτωσης. Οι τρόποι προσέγγισης που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του deadbeat προβλήματος μπορούν να καταταχθούν στις δύο ακόλουθες κατηγορίες: την προσέγγιση χώρου κατάστασης —state-space— (στην οποία χρησιμοποιούμε τις μεταβλητές κατάστασης) και την αλγεβρική προσέγγιση (συνάρτησης μεταφοράς), η οποία έχει και το πλεονέκτημα της πλήρους παραμετροποίησης των λύσεων και με την οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια της εργασίας.

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια γενίκευση του deadbeat προβλήματος. Έτσι, αντί να ζητούμε απόδοση χρονικά βέλτιστη, απαιτούμε όλες οι εσωτερικές και εξωτερικές μεταβλητές του συστήματος κλειστού βρόγχου να καταλήγουν σε μια νέα σταθερή κατάσταση μετά από πεπερασμένο χρονικό διάστημα από την επίδραση ενός βηματικού σήματος σε οποιαδήποτε είσοδο του συστήματος και για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση. Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται *Ολικό Πρόβλημα Πεπερασμένου Χρόνου Αποκατάστασης (Total Finite Settling Time Problem)* και στη συνέχεια της εργασίας θα αναφερόμαστε σ' αυτό σαν FST (Finite Settling Time) ή FSTS (Finite Settling Time Stabilization). Η deadbeat απόκριση δεν είναι παρά μόνο ειδική περίπτωση του FSTS προβλήματος. Η αλγεβρική διατύπωση του FST προβλήματος παρέχει λύση σε μια ποικιλία προβλημάτων όπως το πρόβλημα ελαχίστου σχεδιασμού (minimum design problem), πρόβλημα ανίχνευσης και απόρριψης διαταραχών (tracking and/or disturbance rejection), πρόβλημα βελτιστοποίησης (optimization), ευρωστίας (robustness), κ.α.

Η εργασία χωρίζεται σε 7 κεφάλαια. Στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια σύντομη ανασκόπηση στα βασικά εργαλεία της αλγεβρικής προσέγγισης, στα



πλαίσια της θεωρίας διακριτών συστημάτων. Το 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο αποτελεί μια περίληψη των βασικών εννοιών και αποτελεσμάτων της θεωρίας γραμμικών-χρονικά ανεξάρτητων, διακριτών συστημάτων. Στο 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο εξετάζονται οι ιδιότητες της μοναδιαίας ανάδρασης, οι οποίες παρέχουν το ουσιαστικό υπόβαθρο για την ανάπτυξη των FSTS συνθηκών για τις διάφορες υλοποιήσεις συστημάτων που θεωρούνται στα επόμενα κεφάλαια. Το *Πρόβλημα Πεπερασμένου Χρόνου Αποκατάστασης (FST)* για διακριτά συστήματα μιας εισόδου-μιας εξόδου ορίζεται για πρώτη φορά στο 5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο. Η προσέγγιση που δίνεται είναι καθαρά αλγεβρική και βασίζεται στο μαθηματικό υπόβαθρο που εισήχθη στα Κεφάλαια 2, 3 και 4. Ο σκοπός του 6<sup>ου</sup> Κεφαλαίου είναι η θεώρηση προβλημάτων βελτιστοποίησης και ευρωστίας υπό την έννοια Πεπερασμένου Χρόνου Αποκατάστασης (FSTS), στα πλαίσια των συστημάτων μοναδιαίας ανάδρασης που περιγράψαμε ως τώρα. Η εργασία τελειώνει (7<sup>ο</sup> Κεφάλαιο) με κάποιες αριθμητικές εφαρμογές που αποδεικνύουν την ισχύ των θεωρητικών αποτελεσμάτων όλων των προηγούμενων κεφαλαίων.

Τα αποτελέσματα που δίνονται στο τελευταίο κεφάλαιο αυτής της εργασίας αποκομίστηκαν κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας στα πανεπιστήμια: City University, London και Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης υπό την επίβλεψη των καθηγητών E. Milonidis και N. Καραμπετάκη. Την περίοδο των σπουδών στο εξωτερικό χρηματοδότησε το Ι.Κ.Υ. με υποτροφία στα πλαίσια του προγράμματος SOCRATES-ERAMUS.

## 2 Μαθηματική Εισαγωγή

Η μελέτη των διακριτών συστημάτων στην παρούσα εργασία ακολουθεί μια περισσότερο αλγεβρική προσέγγιση. Αυτός είναι και ο λόγος που στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε εν συντομία τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που απαιτούνται γι' αυτήν την προσέγγιση.

Θα εστιάσουμε την προσοχή μας ιδιαίτερα σε τρεις έννοιες:

- την έννοια των δυναμοσειρών και των πολυωνυμικών συναρτήσεων
- την έννοια των πολυωνυμικών πινάκων
- την έννοια των Διοφαντικών εξισώσεων και τους τρόπους επίλυσής τους.

Η χρήση των ακολουθιών ή των τυπικών δυναμοσειρών (*formal power series*) σαν εργαλείο για τη μελέτη των διακριτών συστημάτων εισήχθη από τους Kalman και Kucera. Στην μελέτη αυτή τα πολυώνυμα (*formal polynomials*) ορίζονται σαν πεπερασμένες ακολουθίες και αντιμετωπίζονται περισσότερο σαν αλγεβρικά αντικείμενα στο  $\mathbb{R}$  παρά σαν πολυωνυμικές συναρτήσεις πάνω στο  $\mathbb{R}$ . Τελικά αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ των δύο πολυωνυμικών εκφράσεων, η οποία μετατρέπεται σε ισομορφισμό πάνω σε δακτύλιο όταν το πεδίο ορισμού είναι άπειρο π.χ. το  $\mathbb{R}$ .

### 2.1 Ακολουθίες - Τυπικές Δυναμοσειρές

Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε πεδίο  $\mathcal{F}$  και έστω  $\mathbb{Z}$  το σύνολο των ακεραίων (θετικών, αρνητικών ή μηδέν) και  $\mathbb{N}$  το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών.

**Ορισμός 2.1.1** Ορίζουμε με  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  το σύνολο όλων των απείρων ακολουθιών

$$f = \{f_{-n}, f_{-n+1}, \dots, f_{-1}; f_0, \dots, f_k, \dots\}, f_k \in \mathcal{F} \text{ και } n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Στον παραπάνω ορισμό, χωρίζουμε συμβατικά τα στοιχεία με αρνητικούς και θετικούς δείκτες με ένα ερωτηματικό. Διαφορετικά, μια ακολουθία  $f \in \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  αναπαρίσταται ως εξής:

$$f = \{f_n, f_{n+1}, \dots, f_k, \dots\} \quad f_k \in \mathcal{F} \text{ και } n \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

και παριστάνει μία απεικόνιση  $k \mapsto f_k$  από το σύνολο των ακεραίων στο σύνολο  $\mathcal{F}$ .

Μπορούμε στη συνέχεια να ορίσουμε τις 2 δυαδικές πράξεις  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{F}^{\mathbb{Z}} \mapsto \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μεταξύ των στοιχείων του  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  και την δυαδική πράξη  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^{\mathbb{Z}} \mapsto \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  του πολλαπλασιασμού μεταξύ των στοιχείων του  $\mathcal{F}$  και των στοιχείων του  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  ως εξής:

**α. δυαδική πρόσθεση (pointwise addition):** το δυαδικό άθροισμα 2 στοιχείων  $f, g \in \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  είναι ένα στοιχείο  $h \in \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  τ.ω.

$$h_n = (f + g)_n := f_n + g_n$$

**β. συνέλιξη (convolutive multiplication):** το γινόμενο 2 στοιχείων  $f, g \in \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  είναι ένα στοιχείο  $h \in \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  τ.ω.

$$h_n = (f * g)_n := \sum_{l+m=n} f_l g_m$$

**γ. πολλαπλασιασμός μεταξύ  $f \in \mathcal{F}$  και  $g \in \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$ :** το γινόμενο 2 στοιχείων  $f \in \mathcal{F}$  και  $g \in \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  είναι ένα στοιχείο  $h \in \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  τ.ω.

$$h_n = (fg)_n := fg_n$$

Είναι αρκετά απλό να αποδείξουμε ότι με τις πράξεις (α) και (β) που μόλις αναφέραμε το σύνολο  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  γίνεται πεδίο.

**Θεώρημα 2.1.2** [2] *Με τη χρήση των πράξεων της δυαδικής πρόσθεσης και της συνέλιξης, το  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  σχηματίζει ένα πεδίο. Το μηδενικό στοιχείο του  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  είναι η ακολουθία  $\{0; 0, 0, \dots\}$  και το μοναδιαίο στοιχείο είναι η ακολουθία  $\{0; 1, 0, 0, \dots\}$ .*

Το υποσύνολο όλων των ακολουθιών του  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  της μορφής  $w = \{0; a, 0, \dots\}$ ,  $a \in \mathcal{F}$  αποτελεί υποπεδίο του  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  ισόμορφο προς το  $\mathcal{F}$ . Έτσι, από δω και πέρα, δεν θα διαχωρίζουμε τις εκφράσεις  $a \in \mathcal{F}$  και  $\{0; a, 0, \dots\} \in \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$ . Τα στοιχεία του  $\mathcal{F}$ , θεωρούμενα σαν ακολουθίες, θα καλούνται σταθερές ακολουθίες ή απλά σταθερές.

**Ορισμός 2.1.3** *Θα ορίζουμε την ακολουθία  $\{0; 0, 1, 0, 0, \dots\}$  αόριστη ακολουθία (indeterminate) και θα την συμβολίζουμε με  $x$ .*

Εύκολα αποδεικνύεται ότι  $\{0; a, 0, \dots\} * \{0; 0, 1, 0, \dots\} = \{0; 0, a, 0, \dots\} = ax$ . Επίσης, για κάθε  $k \in \mathbb{Z}_+$  η (συνελλικτική) δύναμη  $x^k := x * x * \dots * x$  με  $k$  όρους, είναι η ακολουθία  $x^k : \mathbb{Z} \mapsto \mathcal{F}$  με  $(x^k)_i = \delta_{ik} \forall i \in \mathbb{Z}$  και  $\delta_{ik}$  το Δέλτα του Kronecker, όπως μπορεί να δειχτεί με επαγωγή στο  $k$ . Ο αντίστροφος του

$x$ , παριστάνεται ως  $x^{-1}$  και είναι η ακολουθία  $x^{-1} = \{1; 0, 0, \dots\}$  και  $x^{-k} := x^{-1} * x^{-1} * \dots * x^{-1}$  με  $k \in \mathbb{Z}_+$  όρους, είναι η ακολουθία με  $(x^{-k})_i = \delta_{i(-k)} \forall i \in \mathbb{Z}$ . Έτσι, ορίζοντας σαν  $x^0$  την μοναδιαία ακολουθία,  $x^k$  με  $k \in \mathbb{Z}$  είναι μια ακολουθία που έχει όλα τα στοιχεία της μηδέν εκτός του στοιχείου στην  $k$  θέση που είναι 1. Αντίστοιχα, το γινόμενο

$$\{0; a, 0, \dots\} * x^k = \begin{cases} \{0; \underbrace{0, 0, \dots, 0, a, 0, \dots}_{k+1}, \dots\}, & k \geq 0 \\ \{\underbrace{a, 0, \dots, 0, 0, \dots}_{-k}, \dots\}, & k < 0 \end{cases} = ax^k \quad (3)$$

είναι μια ακολουθία που έχει όλα τα στοιχεία της μηδέν εκτός από το στοιχείο στην  $k$  θέση, το οποίο έχει την τιμή  $a \in \mathcal{F}$ . Συνεπώς, κάθε ακολουθία  $f \in \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  μπορεί να γραφεί με τη μορφή τυπικών σειρών Mc-Laurent

$$f = f_n x^n + f_{n+1} x^{n+1} + f_{n+2} x^{n+2} + \dots, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

Στο εξής, το σύνολο  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  θα ορίζεται σαν  $\mathcal{F}\langle x \rangle$  και θα ονομάζεται πεδίο των τυπικών σειρών Laurent πάνω στο  $\mathcal{F}$ . Τα στοιχεία του  $\mathcal{F}\langle x \rangle$  ορίζονται με τη μορφή (4). Έτσι, ένα στοιχείο  $f \in \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  με  $x$  αόριστη ακολουθία, θα παριστάνεται σαν  $f(x)$ .

**Ορισμός 2.1.4** [18] Αν  $f = \sum f_k x^k$  είναι ένα μη μηδενικό στοιχείο του  $\mathcal{F}\langle x \rangle$ , τότε ο μικρότερος ακέραιος  $n$  για τον οποίο το  $x^n$  εμφανίζεται στην ακολουθία ονομάζεται τάξη του  $f$  και παριστάνεται σαν  $\tau(f)$ . Σαν σύμβαση ορίζουμε  $\tau(\{0\}) = \infty$ .

Με τη χρήση της έννοιας τάξη του  $f$  μπορούμε να ορίσουμε έναν σημαντικό υπό-δακτύλιο του  $\mathcal{F}\langle x \rangle$ , τον δακτύλιο των τυπικών δυναμοσειρών.

**Ορισμός 2.1.5** Το σύνολο όλων των ακολουθιών πάνω στο  $\mathcal{F}$  (με  $x$  αόριστη ακολουθία) με μη αρνητική τάξη, ονομάζεται σύνολο των τυπικών δυναμοσειρών πάνω στο  $\mathcal{F}$  και παριστάνεται με  $\mathcal{F}[[x]]$ . Συνεπώς, μια ακολουθία  $f \in \mathcal{F}[[x]]$  μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$f = f_n x^n + f_{n+1} x^{n+1} + f_{n+2} x^{n+2} + \dots, \quad n \in \mathbb{N}$$

Το παραπάνω σύνολο σε συνδυασμό τις πράξεις της δυαδικής πρόσθεσης και της συνέλιξης, σχηματίζει ένα δακτύλιο.

Ανάμεσα στο δακτύλιο των τυπικών δυναμοσειρών  $\mathcal{F}[[x]]$  και στο πεδίο των τυπικών σειρών Mc-Laurent  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  υπάρχει μια απλή σχέση:

**Θεώρημα 2.1.6** [2]  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  είναι το πεδίο των πηλίκων ή αλλιώς το πεδίο των κλασμάτων της περιοχής  $\mathcal{F}[[x]]$ .

**Παρατήρηση 2.1.7** Κάθε ακολουθία  $f \in \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  μπορεί να εκφραστεί σαν ένα πηλίκο

$$f = \frac{b(x)}{a(x)} = b(x) * a^{-1}(x), \quad a(x), b(x) \in \mathcal{F}[[x]] \quad \text{και} \quad a(x) \neq 0$$

όπου  $a^{-1}(x)$  είναι ο αντίστροφος στο  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  του  $a(x)$  και  $\tau(f) = \tau(b) - \tau(a)$ . Η αναπαράσταση του  $f$  δεν είναι μοναδική και το  $\mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$  είναι το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας αυτών των κλασμάτων. Ο αντιπρόσωπος κάθε κλάσης ισοδυναμίας είναι ένα κλάσμα με αριθμητή και παρανομαστή ακολουθίες που είναι πρώτες μεταξύ τους.

**Σημείωση.** Απο δω και στο εξής θα παραλείπουμε το σύμβολο  $*$  όταν αναφερόμαστε στην «συνέλιξη». Θα το χρησιμοποιούμε μόνο όταν δεν είναι ξεκάθαρο από το κείμενο ότι αναφερόμαστε σε αυτού του είδους το πολλαπλασιασμό. Στην πραγματικότητα στην αναπαράσταση των τυπικών σειρών, η συνέλιξη μετατρέπεται σε απλό πολλαπλασιασμό.

**Παράδειγμα 2.1.8** Έστω  $f = \{f_n, f_{n+1}, \dots\}$  και  $g = \{g_k, g_{k+1}, \dots\}$ ,  $f_i, g_i \in \mathcal{F}$ . Η συνέλιξη των δύο ακολουθιών δίνεται ως εξής:

$$f * g = \{f_n g_k, f_n g_{k+1} + f_{n+1} g_k, \dots\}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την αναπαράσταση των  $f, g$  με τη χρήση των τυπικών δυναμοσειρών:

$$f = f_n x^n + f_{n+1} x^{n+1} + \dots, \quad \text{και} \quad g = g_k x^k + g_{k+1} x^{k+1} + \dots$$

Ο απλός πολλαπλασιασμός των  $f$  και  $g$  δίνεται ως εξής:

$$fg = f_n g_k x^{n+k} + (f_n g_{k+1} + f_{n+1} g_k) x^{n+k+1} + \dots$$

το οποίο δεν είναι τίποτα άλλο από την αναπαράσταση της συνέλιξης  $f * g$  σαν τυπική δυναμοσειρά.

## 2.2 Πολυώνυμα και πολυωνυμικά κλάσματα

Στη συνέχεια θα ορίσουμε έναν σημαντικό υποδακτύλιο της περιοχής των τυπικών δυναμοσειρών  $\mathcal{F}[[x]]$ , τον δακτύλιο των τυπικών πολυωνύμων.

**Ορισμός 2.2.1** Το σύνολο όλων των πεπερασμένων τυπικών δυναμοσειρών  $\mathcal{F}[[x]]$  ονομάζεται σύνολο των τυπικών πολυωνύμων πάνω στο πεδίο  $\mathcal{F}$  (με  $x$  αόριστη ακολουθία) και παριστάνεται με  $\mathcal{F}[x]$ , π.χ.

$$\mathcal{F}[x] = \{f_0 + f_1x + \dots + f_nx^n \mid f_k \in \mathcal{F}\}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, τα πολυώνυμα είναι ακολουθίες μη-αρνητικής τάξης με πεπερασμένο αριθμό μη-μηδενικών στοιχείων. Επομένως θα πρέπει να αντιμετωπίζονται σαν αλγεβρικά αντικείμενα και όχι σαν απλές συναρτήσεις του  $x$ . Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι:

**Θεώρημα 2.2.2** [11] Το σύνολο των πολυωνύμων  $\mathcal{F}[x]$  απατρίζει μια υποπεριοχή του  $\mathcal{F}[[x]]$ . Οι μονάδες του  $\mathcal{F}[x]$  είναι τα σταθερά πολυώνυμα  $f(x) = f_0$ , τα οποία μπορούν να θεωρηθούν ισόμορφα με τα μη-μηδενικά στοιχεία του  $\mathcal{F}$ .

Μία έννοια παρόμοια με την τάξη μιας ακολουθίας είναι αυτή του βαθμού ενός πολυωνύμου.

**Ορισμός 2.2.3** [18] Δεδομένου ενός μη μηδενικού πολυωνύμου

$$f = f_0 + \dots + f_nx^n \in \mathcal{F}[x],$$

ονομάζουμε  $f_n$ ,  $f_n \neq 0$  τον κύριο συντελεστή του  $f$ . Ο ακέραιος  $n$  αναφέρεται σαν βαθμός του πολυωνύμου και παριστάνεται με τη μορφή  $\partial(f)$ . Από σύμβαση δεχόμαστε ότι ο βαθμός του μηδενικού πολυωνύμου είναι  $-\infty$ . Στην περίπτωση που  $f_n = 1$ , το πολυώνυμο καλείται μονήρες (monic).

**Ορισμός 2.2.4** [10] Έστω  $f = f_0 + f_1x + \dots + f_nx^n \in \mathcal{F}[x]$  και  $\mathcal{U}$  πεδίο που περικλύει το  $\mathcal{F}$ . Τότε, για κάθε  $u \in \mathcal{U}$  γράφουμε σαν  $f(u)$  το στοιχείο  $f_0 + f_1u + \dots + f_nu^n \in \mathcal{U}$  το οποίο αντιπροσωπεύει την τιμή του  $f$  στο  $u$ . Εάν  $f(u) = 0$ , τότε το  $u$  ονομάζεται μηδενικό ή ρίζα του  $f$ .

Εύκολα αποδεικνύεται ότι για δεδομένο  $u \in \mathcal{U}$  η απεικόνιση  $f \mapsto f(u)$  είναι ένας ομοιομορφισμός από το  $\mathcal{F}[x]$  στο  $\mathcal{U}$ .

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να κάνουμε μια πολύ σημαντική παρατήρηση. Είναι λάθος να συγχέουμε τις έννοιες των τυπικών πολυωνύμων και των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Όπως είπαμε προηγουμένως τα τυπικά πολυώνυμα είναι αλγεβρικά αντικείμενα και όχι πολυωνυμικές συναρτήσεις του  $x$ . Κάποιες σημαντικές ιδιότητες, ωστόσο, του δακτυλίου των τυπικών πολυωνύμων  $\mathcal{F}[x]$ , μπορούν να μας βοηθήσουν να επαληθεύσουμε κάποια ιδιαίτερη σχέση ανάμεσα σ' αυτές τις δύο έννοιες, η οποία θα παίζει σημαντικό ρόλο στην παρούσα

εργασία. Θα παραθέσουμε τα απαιτούμενα λήμματα και θεωρήματα, χωρίς ωστόσο να συμπεριλάβουμε τις αντίστοιχες αποδείξεις, καθώς ξεφεύγουν της ουσίας αυτής της εργασίας. Για εκτενή αναφορά μπορεί κάποιος να ανατρέξει σε συγγράμματα άλγεβρας, όπως τα [10], [11], κ.α.

**Λήμμα 2.2.5** [11] Έστω  $f \in \mathcal{F}[x]$  και  $a \in \mathcal{F}$ . Τότε, το  $a$  είναι ρίζα του  $f$  αν-ν το  $x - a$  διαιρεί το  $f$ .

**Θεώρημα 2.2.6** [11] Ένα πολυώνυμο  $f \in \mathcal{F}[x]$  βαθμού  $n \geq 0$  έχει το πολύ  $n$  διαφορετικές ρίζες στο  $\mathcal{F}$ .

Ας θεωρήσουμε τώρα τη σχέση μεταξύ των τυπικών πολυωνύμων και των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Έστω  $\mathcal{F}$  ένα πεδίο και  $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$  το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το  $\mathcal{F}$  στο  $\mathcal{F}$ . Τότε το  $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$  γίνεται δακτύλιος με τη χρήση των πράξεων:

$$\begin{aligned}(f + g)(u) &:= f(u) + g(u) \\ (-f)(u) &:= -f(u) \\ (fg)(u) &:= f(u)g(u)\end{aligned}$$

για  $f, g \in \mathcal{F}^{\mathcal{F}}$  και  $u \in \mathcal{F}$ .

**Ορισμός 2.2.7** Έστω  $f = f_0 + f_1x + \dots + f_nx^n \in \mathcal{F}[x]$ . Μπορούμε να συσχετίσουμε με το  $f$  μια συνάρτηση  $\phi(f) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  ως εξής

$$\phi(f)(u) = f_0 + f_1u + \dots + f_nu^n \quad (u \in \mathcal{F}) \quad (5)$$

Έτσι, το  $\phi$  αποτελεί μια απεικόνιση από το  $\mathcal{F}[x]$  στο  $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$ . Για την ακρίβεια, το  $\phi$  είναι ένας ομοιομορφισμός, όπως μπορεί εύκολα να αποδειχτεί με τη χρήση των δυαδικών πράξεων στο  $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$ . Έτσι, ονομάζουμε  $im\phi$  το δακτύλιο των πολυωνυμικών συναρτήσεων του  $\mathcal{F}$ , ενώ ο πυρήνας  $ker\phi$  αποτελείται από όλα τα στοιχεία του  $\mathcal{F}[x]$  τα οποία μηδενίζονται στο  $\mathcal{F}$ . Συνεπώς, δύο πολυώνυμα  $f, g \in \mathcal{F}[x]$  καθορίζουν την ίδια συνάρτηση στο  $\mathcal{F}$  αν-ν  $f - g \in ker\phi$  και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο δεν μπορούμε γενικά να ταυτίσουμε ένα τυπικό πολυώνυμο στο  $\mathcal{F}$  με μια πολυωνυμική συνάρτηση στο  $\mathcal{F}$ . Για να ισχύει η παραπάνω ταύτιση θα πρέπει το ακόλουθο κριτήριο να είναι αληθές: θα πρέπει η απεικόνιση  $map\phi$  να είναι 1-1.

**Θεώρημα 2.2.8** [11] Η απεικόνιση  $map\phi : \mathcal{F}[x] \rightarrow \mathcal{F}^{\mathcal{F}}$  είναι 1-1 αν-ν το  $\mathcal{F}$  είναι άπειρο πεδίο.

**Παρατήρηση 2.2.9** Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, οι έννοιες των τυπικών πολωνύμων και των πολωνυμικών συναρτήσεων συμπίπτουν όταν ορίζονται πάνω σε ένα άπειρο πεδίο. Έτσι, το

$$f = f_0 + f_1x + \dots + f_nx^n \quad f_n \in \mathcal{F}$$

μπορεί να αντιμετωπιστεί είτε σαν πεπερασμένη ακολουθία ή σαν πολωνυμική συνάρτηση, ενώ το  $x$  θα είναι αντίστοιχα μια αόριστη ακολουθία (*indeterminate*) ή μια μεταβλητή στο  $\mathcal{F}$ . Στην περίπτωση που θα θέλουμε να ξεχωρίζουμε τις δύο έννοιες θα συμβολίζουμε με πλάγια γράμματα  $x$  την αόριστη ακολουθία ενώ με κανονικά γράμματα  $\mathbf{x}$  την μεταβλητή.

Θα κλείσουμε αυτήν την παράγραφο αναφέροντας την έννοια των πολωνυμικών κλασμάτων.

**Ορισμός 2.2.10** Ονομάζουμε ρητά κλάσματα ή ρητές ακολουθίες ( $\mathcal{F}(x)$ ) πάνω στο  $\mathcal{F}$  (με  $x$  αόριστη ακολουθία), το πεδίο των κλασμάτων των τυπικών πολωνύμων.

**Παρατήρηση 2.2.11** Εφόσον το  $\mathcal{F}[x]$  είναι μια υποπεριοχή του  $\mathcal{F}[[x]]$ , το πεδίο των ρητών κλασμάτων είναι ισόμορφο με ένα υποπεδίο του πεδίου των τυπικών σειρών *Mc-Laurent*  $\mathcal{F}\langle x \rangle$  (Θεώρημα 2.1.6). Έτσι, το πεδίο των ρητών κλασμάτων αποτελεί ένα σύνολο ακολουθιών οι οποίες μπορούν να γραφτούν με τη μορφή (4) των τυπικών σειρών *Mc-Laurent*.

Σε αντιστοιχία με την Παρατήρηση 2.2.9 αναφέρουμε το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 2.2.12** Το πεδίο των ρητών κλασμάτων  $\mathcal{F}(x)$  μιας αόριστης ακολουθίας  $x$  πάνω στο  $\mathcal{F}$  είναι ισόμορφο με το πεδίο των ρητών συναρτήσεων  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  στο  $\mathcal{F}$  αν-ν το  $\mathcal{F}$  είναι ένα άπειρο πεδίο.

### 2.3 Ακολουθίες και τυπικά πολυώνυμα στην περίπτωση των διακριτών συστημάτων ελέγχου.

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε μια αναγωγή όσων είπαμε παραπάνω στην περίπτωση των διακριτών συστημάτων ελέγχου. Τα αποτελέσματα αυτής της αναγωγής θα χρησιμοποιήσουμε στο κυριότερο μέρος της παρούσας εργασίας.

Στην μελέτη των γραμμικών δυναμικών συστημάτων, διακριτού ή συνεχούς χρόνου, το πεδίο  $\mathcal{F}$  στο οποίο αναφερόμαστε δεν είναι άλλο από το πεδίο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ . Στην περίπτωση των διακριτών συστημάτων, η



αόριστη ακολουθία θα συμβολίζεται με  $d$ , ενώ το πεδίο των τυπικών σειρών Laurent πάνω στο  $\mathbb{R}$  με  $\mathbb{R}\langle d \rangle$ . Ένα στοιχείο  $f \in \mathbb{R}\langle d \rangle$  θα παριστάνεται ως εξής:

$$f = f_n d^n + f_{n+1} d^{n+1} + f_{n+2} d^{n+2} + \dots, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

Εφόσον το  $\mathbb{R}$  είναι ένα άπειρο πεδίο, η παραπάνω σειρά μπορεί να αντιμετωπιστεί είτε σαν ακολουθία στο  $\mathbb{R}$  ή σαν συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$ , τουλάχιστον για τη ρητή περίπτωση.

Εάν η σειρά (6) είναι τυπική τότε το  $f$  είναι μια ρητή ακολουθία και μπορεί άνετα να θεωρηθεί σαν η χροστική απόκριση ενός γραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου. Στην περίπτωση αυτή το  $d = \{0; 0, 1, 0, \dots\}$  είναι μια (αόριστη) ακολουθία, οι δυνάμεις της οποίας αντιπροσωπεύουν τις μονάδες του διακριτού χρόνου.

Διαφορετικά, η σειρά (6) μπορεί να θεωρηθεί σαν ρητή συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$  με μεταβλητή  $d$ . Στην περίπτωση αυτή, η σειρά Laurent αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου. Αν αντικαταστήσουμε το  $d$  με το  $z^{-1}$ , η σειρά (6) δεν είναι άλλο από τον μετασχηματισμό  $z$  μιας χροστικής απόκρισης  $f = \{f_n, f_{n+1}, \dots, f_k, \dots\}$ .

Στη συνέχεια δίνονται κάποιοι βασικοί ορισμοί και αποτελέσματα που σχετίζονται με ιδιότητες των συστημάτων διακριτού χρόνου.

**Ορισμός 2.3.1** [18] *Μια ακολουθία  $f \in \mathbb{R}\langle d \rangle$  ονομάζεται αναδρομική (recurrent), αν υπάρχουν μη-αρνητικοί ακέραιοι  $r, s$  και πραγματικοί  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  τ.ω.*

$$f_{j+r} + \lambda_1 f_{j+r-1} + \dots + \lambda_r f_j = 0, \quad j = n + s, n + s + 1, \dots \quad (7)$$

όπου  $n$  είναι η τάξη του  $f$ . Το σύνολο όλων των αναδρομικών ακολουθιών θα παριστάνεται με  $\mathbb{R}\{d\}$ .

**Θεώρημα 2.3.2** [18] *Το σύνολο  $\mathbb{R}\{d\}$  των αναδρομικών ακολουθιών είναι ισόμορφο με το πεδίο  $\mathbb{R}(d)$  των ρητών συναρτήσεων.*

**Παρατήρηση 2.3.3** *Η σπουδαιότητα των αναδρομικών ακολουθιών έγκειται στο γεγονός ότι μπορούν να εκφραστούν σαν πολυωνυμικά κλάσματα. Επειδή το  $\mathbb{R}\{d\}$  είναι ισόμορφο με το  $\mathbb{R}(d)$ , το  $\mathbb{R}\{d\}$  αποτελεί επίσης πεδίο. Μπορούμε, δηλαδή, να αναφερθούμε και στα δύο πεδία των αναδρομικών και των ρητών ακολουθιών με τον ίδιο συμβολισμό  $\mathbb{R}(d)$ .*

**Ορισμός 2.3.4** [18] Μια αναδρομική ακολουθία  $f$  ονομάζεται αιτιατή (*causal*) και παριστάνεται με  $\mathbb{R}^o(d)$ , αν έχει μη αρνητική τάξη. Εάν η  $f$  έχει θετική τάξη ονομάζεται αυστηρά αιτιατή (*strictly causal*).

Προφανώς, το  $\mathbb{R}^o(d)$  είναι ένα υποσύνολο των τυπικών δυναμοσειρών  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ή  $\mathbb{R}[[d]]$ . Μια αιτιατή ακολουθία  $f$  μπορεί να παρασταθεί ως εξής:

$$f = f_0 + f_1d + f_2d^2 + \dots \quad (8)$$

Εύκολα προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες του συνόλου  $\mathbb{R}^o(d)$ .

**Πρόταση 2.3.5** [18] Το σύνολο των αιτιατών ακολουθιών  $\mathbb{R}^o(d)$  είναι μια υποπεριοχή του  $\mathbb{R}[[d]]$  με την παρακάτω δομή:

α. Οι μονάδες του  $\mathbb{R}^o(d)$  είναι ακολουθίες τάξης 0, π.χ.

$$f = f_0 + f_1d + f_2d^2 + \dots, \quad f_0 \neq 0 \quad (9)$$

β. Οι πρώτοι (*primes*) του  $\mathbb{R}^o(d)$  είναι ακολουθίες τάξης 1, π.χ.

$$f = f_1d + f_2d^2 + \dots, \quad f_1 \neq 0 \quad (10)$$

**Ορισμός 2.3.6** [18] Μια αιτιατή ακολουθία  $f$  ονομάζεται ευσταθής αν συγκλίνει στο μηδέν, π.χ.

$$\forall k_0 \in \mathbb{N} \exists \varepsilon(k_0) \in \mathbb{R} : |f_k| < \varepsilon \quad \forall k \leq k_0$$

Το σύνολο των ευσταθών ακολουθιών θα παριστάνεται με  $\mathbb{R}^+(d)$ .

**Πρόταση 2.3.7** [18] Το σύνολο  $\mathbb{R}^+(d)$  των ευσταθών ακολουθιών είναι υποπεριοχή του  $\mathbb{R}^o(d)$ .

Στη συνέχεια θα δώσουμε έναν εναλλακτικό, θεωρητικό χαρακτηρισμό των ευσταθών ακολουθιών.

**Πρόταση 2.3.8** [17] Έστω  $f = \{f_0, f_1, \dots, f_k, \dots\} \in \mathbb{R}^o(d)$ . Τότε,  $f \in \mathbb{R}^+(d)$  αν-ν είναι απόλυτα συγκλίνουσα:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k| < \infty \quad (11)$$

Η αλγεβρική δομή του  $\mathbb{R}^+(d)$  είναι αρκετά πιο πολύπλοκη από αυτή του  $\mathbb{R}^0(d)$  και δεν θα εξεταστεί στην παρούσα εργασία. Είναι αρκετά εύκολο να παρατηρηθεί ότι το σύνολο  $\mathbb{R}[d]$  των πολυωνύμων είναι μια υποπεριοχή του συνόλου των ευσταθών ακολουθιών  $\mathbb{R}^+(d)$  και ότι ισχύει η παρακάτω ιδιότητα.

**Πόρισμα 2.3.9** Οι δακτύλιοι των ακολουθιών  $\mathbb{R}[d]$ ,  $\mathbb{R}^+(d)$ ,  $\mathbb{R}^0(d)$  και  $\mathbb{R}(d)$  ικανοποιούν την παρακάτω σχέση

$$\mathbb{R}[d] \subset \mathbb{R}^+(d) \subset \mathbb{R}^0(d) \subset \mathbb{R}(d).$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε κάποιες σημαντικές πολυωνυμικές κλάσεις.

**Ορισμός 2.3.10** [18] Έστω  $f \in \mathbb{R}[d]$ . Τότε

α. η  $f$  ονομάζεται αιτιατή αν είναι μονάδα του  $\mathbb{R}^0(d)$ .

β. η  $f$  ονομάζεται ευσταθής αν είναι μονάδα του  $\mathbb{R}^+(d)$ .

**Πρόταση 2.3.11** Ένα πολώνυμο  $f = f_0 + f_1d + \dots + f_nd^n \in \mathbb{R}[d]$  είναι αιτιατό αν-ν  $f_0 \neq 0$  ή  $f(0) \neq 0$ .

Στην ταξινόμηση των αναδρομικών ακολουθιών μέχρι στιγμής τα πολώνυμα χρησιμοποιήθηκαν σαν τυπικά πολώνυμα: έτσι, αιτιατές και ευσταθείς ρητές ακολουθίες και αιτιατά και ευσταθή πολώνυμα αντιμετωπίστηκαν σαν αλγεβρικά αντικείμενα με  $d$  αόριστη ακολουθία στο  $\mathbb{R}$ , και όχι σαν συναρτήσεις του  $d$ . Στη συνέχεια θα ορίσουμε τις αντίστοιχες ρητές συναρτήσεις και θα δώσουμε το χαρακτηρισμό των ευσταθών τυπικών πολυωνύμων.

**Ορισμός 2.3.12** Έστω  $f = b/a \in \mathbb{R}(d)$  το σύνολο των ρητών συναρτήσεων και  $a, b$  πολυωνυμικές συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$  με μεταβλητή  $d \in \mathbb{C}$ . Τότε:

α. το σύνολο των ρητών συναρτήσεων με παρανομαστή  $a$  μια πολυωνυμική συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί σε αιτιατό τυπικό πολώνυμο, ονομάζεται σύνολο των αιτιατών ρητών συναρτήσεων και παριστάνεται με  $\mathbb{R}^0(d)$ .

β. το σύνολο των ρητών συναρτήσεων με παρανομαστή  $a$  μια πολυωνυμική συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί σε ευσταθές τυπικό πολώνυμο, ονομάζεται σύνολο των ευσταθών ρητών συναρτήσεων και παριστάνεται με  $\mathbb{R}^+(d)$ .

Εφόσον το  $\mathbb{R}$  είναι ένα άπειρο πεδίο και τα σύνολα των τυπικών πολυωνύμων  $\mathbb{R}[d]$  και των ρητών ακολουθιών  $\mathbb{R}(d)$  είναι ισόμορφα με τα σύνολα των πολυωνυμικών συναρτήσεων  $\mathbb{R}[d]$  και των ρητών συναρτήσεων  $\mathbb{R}(d)$ , μπορούμε να διατυπώσουμε εύκολα το παρακάτω πόρισμα:

**Πόρισμα 2.3.13** Τα σύνολα των ακολουθιών  $\mathbb{R}[d]$ ,  $\mathbb{R}^+(d)$ ,  $\mathbb{R}^o(d)$  και  $\mathbb{R}(d)$  είναι ισόμορφα με τα σύνολα των αντίστοιχων ρητών συναρτήσεων ενώ ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathbb{R}[d] \subset \mathbb{R}^+(d) \subset \mathbb{R}^o(d) \subset \mathbb{R}(d).$$

Θα εξετάσουμε, τώρα, τα χαρακτηριστικά των ευσταθών πολυωνύμων.

**Πρόταση 2.3.14** Μια πολυωνυμική ακολουθία  $a \in \mathbb{R}[d]$  είναι ευσταθής αν-ν οι ρίζες της βρίσκονται εκτός του κλειστού μοναδιαίου δίσκου  $\mathbb{D}$ .

**Απόδειξη:** Επειδή κάθε ευσταθής πολυωνυμική ακολουθία είναι μια μονάδα του δακτυλίου των ευσταθών ρητών ακολουθιών, η  $a = a_0 + a_1d + \dots + a_nd^n$  είναι τέτοια που

$$\frac{1}{a_0 + a_1d + \dots + a_nd^n} = f_0 + f_1d + \dots + f_kd^k + \dots \in \mathbb{R}^+(d) \quad (12)$$

Σύμφωνα όμως με την Πρόταση 2.3.8:  $f \in \mathbb{R}^+(d)$  αν-ν  $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k| < \infty$ , δηλαδή αν είναι απόλυτα συγκλίνουσα. Επικαλούμενοι του ισομορφισμού μεταξύ ρητών ακολουθιών και ρητών συναρτήσεων και εφαρμόζοντας τον διγραμμικό μετασχηματισμό  $z^{-1} = d$ , η εξίσωση (12) γίνεται

$$\frac{z^n}{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n} = f_0 + f_1z^{-1} + \dots + f_kz^{-k} + \dots, \quad z \in \mathbb{C} \quad (13)$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης (13) είναι ο μετασχηματισμός- $z$  σε κλειστή μορφή, της ακολουθίας  $\{f_k\}$ , ο οποίος είναι απόλυτα συγκλίνσιμος αν-ν οι ρίζες του παρονομαστή  $\tilde{a}(z)$  κείτονται στο εσωτερικό του ανοιχτού μοναδιαίου δίσκου [13]. Λόγω του διγραμμικού μετασχηματισμού, η παραπάνω πρόταση είναι ισοδύναμη με την πρόταση ότι οι ρίζες του τυπικού πολυωνύμου  $a(d)$  θα πρέπει να κείτονται εκτός του κλειστού μοναδιαίου δίσκου  $\mathbb{D}$ .

□

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο θα δώσουμε έναν εναλλακτικό χαρακτηρισμό των δακτυλίων των αιτιατών και ευσταθών ρητών ακολουθιών, ο οποίος απαρτίζει τα καλούμενα κριτήρια περιοχής συχνότητας της αιτιότητας και ευστάθειας.

**Παρατήρηση 2.3.15** Σύμφωνα με τις Προτάσεις (2.3.11) και (2.3.14), οι δακτύλιοι των αιτακών και ευσταθών ρητών ακολουθιών μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

Οι αιτιατές ρητές ακολουθίες  $f(d)$  μπορούν να παρασταθούν σαν πρώτα πολυωνυμικά κλάσματα  $b(d)/a(d)$ , όπου το  $a(d)$  έχει μη μηδενικό σταθερό όρο  $a_0$  ή  $a(0) \neq 0$ , δηλαδή το  $a(d)$  δεν έχει ρίζες ή το  $f(d)$  δεν έχει πόλους στο μηδέν.

Οι ευσταθείς ρητές ακολουθίες  $f(d)$  μπορούν να παρασταθούν σαν πρώτα πολυωνυμικά κλάσματα  $b(d)/a(d)$ , όπου οι ρίζες του  $a(d)$  ή οι πόλοι του  $f(d)$  κείτονται στο εξωτερικό του κλειστού μοναδιαίου δίσκου  $\mathbb{D}[0, 1]$ .

## 2.4 Πολυωνυμικοί πίνακες και Ρητοί διανυσματικοί χώροι

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την περίπτωση ενός συστήματος διακριτού χρόνου μιας εισόδου-μιας εξόδου (SISO - Single Input Single Output), στην οποία δεν απαιτείται η χρήση πολυωνυμικών πινάκων. Ωστόσο, στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε περιληπτικά κάποιες βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν σε κάποια σημεία στη συνέχεια της εργασίας. Για λεπτομερέστερη περιγραφή κάποιος μπορεί να ανατρέξει σε βιβλία σαν το «Linear Multivariable Control: Algebraic analysis and synthesis methods» (Vardulakis A.I.G.) [27].

### 2.4.1 Βασικοί ορισμοί

Έστω  $\mathcal{R}$  είναι ένας δακτύλιος και το  $\mathcal{R}^{l \times m}$  παριστάνει τους  $l \times m$  πίνακες με στοιχεία από το  $\mathcal{R}$ . Τότε, αν ορίσουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με το γνωστό τρόπο, οι τετραγωνικοί πίνακες  $\mathcal{R}^{m \times m}$  σχηματίζουν έναν μη-μεταβατικό δακτύλιο. Οι μονάδες αυτού του δακτυλίου, δηλαδή οι πίνακες του  $\mathcal{R}^{m \times m}$  των οποίων οι αντίστροφοι ανήκουν στο  $\mathcal{R}^{m \times m}$ , ονομάζονται **unimodular** πίνακες. Τέτοιοι πίνακες παράγονται με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στο  $\mathcal{R}$  και χαρακτηρίζονται από το παρακάτω Λήμμα.

**Λήμμα 2.4.1** Ένας πίνακας  $U \in \mathcal{R}^{m \times m}$  είναι *unimodular* αν-ν  $\det U$  είναι μονάδα στο  $\mathcal{R}$ . Τον παριστάνουμε με  $U \in U(m, \mathcal{R})$  και τον ονομάζουμε  $\mathcal{R}$ -*unimodular*.

**Ορισμός 2.4.2** Έστω  $\mathcal{R}$  είναι μια *Principal Ideal Domain (PID)* και  $A, A' \in \mathcal{R}^{l \times m}$  τ.ω.

$$A = LA'R \quad (14)$$

όπου  $L \in U(l, \mathcal{R})$  και  $R \in U(m, \mathcal{R})$ . Τότε οι  $A, A'$  ονομάζονται  $\mathcal{R}$ -*ισοδύναμοι* και η σχέση ισοδυναμίας ορίζεται ως εξής:  $A E_{\mathcal{R}} A'$ . Αν  $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ , τότε οι πίνακες

ονομάζονται **αυστηρά ισοδύναμοι** και αν  $L = I_l$ , ή  $R = I_m$  ονομάζονται **δεξιά-, αριστερά- ισοδύναμοι** και οι σχέσεις ισοδυναμίας ορίζονται αντίστοιχα ως εξής:  $A E_{\mathcal{R}}^r A'$ ,  $A E_{\mathcal{R}}^l A'$ . Οι  $E_{\mathcal{R}}$ ,  $E_{\mathcal{R}}^r$ ,  $E_{\mathcal{R}}^l$  είναι σχέσεις ισοδυναμίας και οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας παριστάνονται με  $E_{\mathcal{R}}(A)$ ,  $E_{\mathcal{R}}^r(A)$ ,  $E_{\mathcal{R}}^l(A)$ .

Έστω  $P(d) \in \mathbb{R}^{l \times m}(d)$  όπου  $d \in \mathbb{C}_e := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Η τάξη (rank) του  $P(d)$  στο  $\mathbb{R}(d)$  παριστάνεται με  $\rho(P(d)) = r \leq \min\{l, m\}$  αναφέρεται σαν **κανονική τάξη (normal rank)**, ενώ η τάξη  $\rho_e(P(\lambda)) = r_\lambda$  στο  $\mathbb{C}_e$ , για κάποιο  $\lambda \in \mathbb{C}_e$ , ονομάζεται **τοπική τάξη (local rank)** στο  $d = \lambda$ . Αν  $r = \min\{l, m\}$ , τότε ο  $P(d)$  ονομάζεται **μη-εκφυλισμένος (nongenerate)**, αλλιώς π.χ. αν  $r < \min\{l, m\}$ , ονομάζεται **εκφυλισμένος (degenerate)**.

**Πρόταση 2.4.3** Αν  $P(d) \in \mathbb{R}^{l \times m}[d]$  και  $Q(d) \in \mathbb{R}^{m \times m}[d]$  με  $\rho(P(d)) = \rho(Q(d)) = m$ , τότε

$$\partial(P(d)Q(d)) = \partial(P(d)) + \partial(Q(d)) \quad (15)$$

#### 2.4.2 Διαίρετες πινάκων

Έστω  $P(d) \in \mathbb{R}^{l \times m}[d]$  και  $\rho(P(d)) = m$ . Ένας πίνακας  $R(d) \in \mathbb{R}^{m \times m}[d]$  τ.ω.

$$P(d) = P'(d)R(d)$$

ονομάζεται **δεξιός διαιρέτης (right matrix divisor -RMD-)** του  $P(d)$ . Αν  $\bar{R}(d)$  είναι οποιοσδήποτε άλλος δεξιός διαιρέτης και

$$R(d) = W(d)\bar{R}(d)$$

τότε ο  $R(d)$  ονομάζεται **μέγιστος δεξιός κοινός διαιρέτης (right greatest matrix divisor -RGMD-)** του  $P(d)$ . Αν  $\rho(P(d)) = l$ , ορίζονται αντίστοιχα οι έννοιες **αριστερός κοινός διαιρέτης** και **αριστερός μέγιστος κοινός διαιρέτης**.

#### 2.4.3 Matrix Fraction Descriptions

Υποθέτουμε ότι  $G(d) \in \mathbb{R}^{l \times m}(d)$  και  $\rho(G(d)) = \min\{l, m\}$ . Τότε, όπως είναι γνωστό, ο  $G(d)$  μπορεί πάντα να παραγοντοποιηθεί (με μη-μοναδικό τρόπο) ως εξής:

$$G(d) = \tilde{D}^{-1}(d)\tilde{N}(d) = N(d)D^{-1}(d) \quad (16)$$

όπου  $\tilde{N}(d)$ ,  $N(d)$ ,  $\tilde{D}(d)$ ,  $D(d)$  είναι πολυωνυμικοί πίνακες κατάλληλων διαστάσεων και  $\det \tilde{D}(d)$ ,  $\det D(d) \neq 0$ . Τα ζεύγη  $(\tilde{D}(d), \tilde{N}(d))$   $(N(d), D(d))$  ονομάζονται **αριστερή (δεξιά) matrix fraction description (MFD)** του ρητού πίνακα  $G(d)$ . Αν τα ζεύγη  $(\tilde{D}(d), \tilde{N}(d))$   $(N(d), D(d))$  είναι αντίστοιχα αριστερά, δεξιά πρώτα, τότε οι αντίστοιχες MFDs είναι **πρώτες (coprime)**.

## 2.5 Εξισώσεις πινάκων - Διοφαντική Εξίσωση

Με τη χρήση της αλγεβρικής προσέγγισης, πολλά από τα προβλήματα αυτομάτου ελέγχου ανάγονται στην επίλυση συγκεκριμένων γραμμικών εξισώσεων πολυωνύμων ή πολυωνυμικών πινάκων. Στην τελευταία αυτή παράγραφο της μαθηματικής μας εισαγωγής θα δώσουμε μια σύντομη αφορά στον τρόπο επίλυσης των παραπάνω εξισώσεων.

Έστω  $\mathcal{R}$  μια PID (Principal Ideal Domain) και  $\mathcal{R}^{l \times m}$  το σύνολο όλων των  $l \times m$  πινάκων στο  $\mathcal{R}$ . Μπορούμε να ξεχωρίσουμε 2 βασικές κατηγορίες εξισώσεων πινάκων πάνω στο  $\mathcal{R}$  : τις γραμμικές εξισώσεις της μορφής  $AX = B$ , και τις γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις ([18], [19], [14]).

### 2.5.1 Γραμμικές εξισώσεις $AX=B$

Έστω η εξίσωση πίνακα

$$AX = B \quad (17)$$

όπου  $A \in \mathcal{R}^{l \times m}$ ,  $B \in \mathcal{R}^{l \times k}$  είναι γνωστοί πίνακες και  $X \in \mathcal{R}^{m \times k}$  είναι ο άγνωστος πίνακας.

**Θεώρημα 2.5.1** [14] Η γραμμική εξίσωση (25) έχει λύση  $X$  στο  $\mathcal{R}$ , αν-ν ικανοποιείται οποιαδήποτε από τις παρακάτω συνθήκες:

α. Ο  $A$  είναι αριστερός διαιρέτης του  $B$  στο  $\mathcal{R}$

β.  $[A \ B] E_{\mathcal{R}}^r [A \ 0]$

Αν  $X_0$  είναι μια συγκεκριμένη λύση, τότε οποιαδήποτε άλλη λύση είναι της μορφής

$$X = X_0 + WY \quad (18)$$

όπου  $W$  είναι μια βάση του δεξιού μηδενικού χώρου (*right null space*) του  $A$  και  $Y$  είναι ένας τυχαίος  $\mathcal{R}$ -πίνακας με κατάλληλες διαστάσεις.

### 2.5.2 Γραμμικές Διοφαντικές Εξισώσεις

Διακρίνουμε δύο βασικές μορφές των γραμμικών Διοφαντικών Εξισώσεων:

**Μονομερής εξίσωση πίνακα (unilateral matrix equation):**

$$AX + BY = C \quad , \quad (XA + YB = C)$$

**Διμερής εξίσωση πίνακα (bilateral matrix equation):**

$$AX + YB = C \quad , \quad (XA + BY = C)$$

(α) **Μονομερείς Διοφαντικές Εξισώσεις Πινάκων:** Θεωρούμε την εξίσωση

$$AX + BY = C \quad (19)$$

$$XA + YB = C \quad (20)$$

όπου  $A \in \mathcal{R}^{l \times m}$ ,  $B \in \mathcal{R}^{l \times n}$  και  $C \in \mathcal{R}^{l \times k}$  δεδομένοι πίνακες με στοιχεία στο  $\mathcal{R}$ .

**Θεώρημα 2.5.2** [18] Η εξίσωση (19) (εξίσωση (20)) έχει ένα ζευγάρι λύσεων  $X, Y \in \mathcal{R}$  αν-ν ο μέγιστος αριστερός (δεξιός) κοινός διαιρέτης  $G \in \mathcal{R}$  των πινάκων  $A$  και  $B$  είναι αριστερός (δεξιός) διαιρέτης του  $C$  στο  $\mathcal{R}$ .

Εάν παραμετροποιήσουμε τη λύση της εξίσωσης (19) (ή (20)), η οικογένεια των λύσεων που προκύπτουν δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 2.5.3** [18] Έστω  $X_0, Y_0$  συγκεκριμένο ζεύγος λύσεων της εξίσωσης (19),  $r = \rho_{\mathcal{R}}([A \ B])$  και  $[-B_1^t \ A_1^t]^t$  μια βάση του δεξιού μηδενικού χώρου του  $[A \ B]$ . Τότε η γενική λύση της εξίσωσης (19) είναι

$$X = X_0 - B_1 T$$

$$Y = Y_0 + A_1 T \quad (21)$$

όπου  $T \in \mathcal{R}^{(m+n-r) \times k}$  είναι αυθαίρετος πίνακας στο  $\mathcal{R}$ .

**Παρατήρηση 2.5.4** Μπορεί να αποδειχθεί [18] ότι μια συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης (19) δίνεται από  $(X_0, Y_0) = (P_1 C_1, Q_1 C_1)$  όπου  $P_1, Q_1$  είναι ζεύγος λύσεων της Διοφαντικής εξίσωσης:

$$AP_1 + BQ_1 = G$$

με  $G$  έναν μέγιστο αριστερό κοινό διαιρέτη των  $A$  και  $B$  και  $C_1$  τέτοιο ώστε  $C = GC_1$ . Τότε

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & -B_1 \\ Q_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ T \end{bmatrix} \quad (22)$$

Με αντίστοιχο τρόπο γίνεται η παραμετροποίηση των λύσεων και στην περίπτωση της εξίσωσης (20).



(β) **Διμερείς Διοφαντικές Εξισώσεις Πινάκων:** Θεωρούμε την εξίσωση

$$AX + YB = C \quad (23)$$

όπου  $A \in \mathcal{R}^{l \times m}$ ,  $B \in \mathcal{R}^{n \times k}$  και  $C \in \mathcal{R}^{l \times k}$ .

**Θεώρημα 2.5.5** [18] Η εξίσωση (23) έχει λύση αν-ν οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

είναι ισοδύναμοι.

Η παραμετροποίηση των λύσεων της εξίσωσης (23) δεν είναι τόσο απλή όσο της εξίσωσης (19) και μπορεί να βρεθεί στις αναφορές [18] κ.α. Αντίστοιχα αποτελέσματα λαμβάνουμε για την δυϊκή εξίσωση  $XA + YB = C$ .

## 2.6 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε ένα μαθηματικό υπόβαθρο που απαιτείται στην μελέτη των συστημάτων διακριτού χρόνου. Ο βασικός σκοπός ήταν να εισάγουμε την έννοια των σειρών σαν τρόπο μελέτης των διακριτών συστημάτων. Έτσι, χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες του δακτύλιου των τυπικών δυναμοσειρών και τις ιδιότητες των σειρών που προκύπτουν από πολυωνυμικές συναρτήσεις και δείξαμε κάτω από ποιές συνθήκες οι δύο αυτές έννοιες συμπίπτουν, ή διαφορετικά κάτω από ποιες συνθήκες οι δύο δακτύλιοι είναι ισόμορφοι. Η αναγκαία προϋπόθεση για να συμβαίνει το παραπάνω είναι το πεδίο ορισμού των τυπικών δυναμοσειρών να είναι άπειρο.

Στην περίπτωση των διακριτών συστημάτων το πεδίο που χρησιμοποιείται είναι αυτό των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ , έτσι οι δακτύλιοι των τυπικών σειρών Laurent και των ρητών συναρτήσεων είναι ισόμορφοι. Αυτή τη σημαντική ιδιότητα θα εκμεταλευτούμε και στη μελέτη των επόμενων κεφαλαίων.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου δίνουμε μια μικρή ανασκόπηση στη θεωρία των πολυωνύμων και των ρητών πινάκων ενώ κλείνουμε με μια σύντομη αναφορά στα βασικά των εξισώσεων πινάκων, δίνοντας έμφαση στην επίλυση των Διοφαντικών εξισώσεων. Παρέχονται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων, όπως επίσης και η παραμετροποίηση των λύσεων όπου αυτό είναι δυνατόν.

### 3 Συστήματα Διακριτού Χρόνου Περιγραφή εισόδου-εξόδου (input-output)

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε περιληπτικά τις βασικές έννοιες και αποτελέσματα της θεωρίας των γραμμικών συστημάτων, τα οποία χρησιμοποιούμε για να διευθετήσουμε τις ανάγκες των συστημάτων Διακριτού Χρόνου. Τι είναι όμως τα σήματα και τα συστήματα Διακριτού Χρόνου.

Τα σήματα Διακριτού Χρόνου είναι σήματα που ορίζονται σε διακριτά χρονικά διαστήματα και επομένως μπορούν να αναπαρασταθούν σαν ακολουθίες (τις οποίες περιγράψαμε εκτενώς στο προηγούμενο κεφάλαιο). Τα συστήματα που επεξεργάζονται τέτοια σήματα διακριτού χρόνου ονομάζονται Συστήματα Διακριτού Χρόνου.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών των συστημάτων και θα εισάγουμε τις έννοιες της αιτιότητας και της ευστάθειας.

#### 3.1 Γραμμικά συστήματα Διακριτού Χρόνου

Τα Συστήματα Διακριτού Χρόνου ή απλώς Διακριτά Συστήματα είναι συστήματα τα οποία διεγείρονται στην είσοδό τους από ακολουθίες και παράγουν ακολουθίες σαν απόκριση στις εξόδους τους. Θα εξετάσουμε συστήματα τα οποία επεξεργάζονται ακολουθίες στο  $\mathbb{R}$  (με  $d$  αόριστη ακολουθία) και συγκεκριμένα αυτά των οποίων η συμπεριφορά ελέγχεται από αναδρομικές τυπικές σειρές Laurent.

Για τη μελέτη μας θα χρησιμοποιήσουμε το αλγεβρικό πλαίσιο εργασίας που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και θα εκμεταλλευτούμε εκτενώς το γεγονός ότι οι αναδρομικές τυπικές σειρές Laurent και οι ρητές συναρτήσεις είναι ισόμορφες λόγω της άπειρης φύσης του  $\mathbb{R}$ . Για μεγαλύτερη λεπτομέρεια μπορεί κάποιος να ανατρέξει στις αναφορές [13], [18], [27] κ.α. που παρέχονται στο τέλος της εργασίας. Ας ξεκινήσουμε με έναν τυπικό ορισμό των διακριτών συστημάτων.

**Ορισμός 3.1.1** Ένα σύστημα Διακριτού Χρόνου  $\mathcal{S}$  με  $m$  εισόδους και  $l$  εξόδους είναι ένα σύνολο  $\mathcal{S}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \mathcal{G})$  όπου  $\mathcal{T} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  είναι ο διακριτός χρόνος,  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \langle d \rangle$  ο χώρος των εισόδων,  $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^l \langle d \rangle$  είναι ο χώρος των εξόδων και  $\mathcal{G}$  είναι μια απεικόνιση από το  $\mathcal{U}$  στο  $\mathcal{Y}$ , δηλαδή  $\mathcal{G} : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{Y}$ .

Έτσι, από μαθηματικής άποψης, ένα διακριτό σύστημα είναι ένας μετασχηματισμός  $\mathcal{G}$ , ο οποίος απεικονίζει μοναδικά ένα πραγματικό διάνυσμα-ακολουθία

εισόδου  $\bar{u}$  σε ένα πραγματικό διάνυσμα-ακολουθία εξόδου  $\bar{y}$ , δηλαδή

$$\bar{y} = \mathcal{G}[\bar{u}] \quad (24)$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σύστημα Διακριτού Χρόνου

### 3.2 Γραμμικότητα και Χρονική Ανεξαρτησία

Ο ορισμός 3.1.1 καλύπτει ένα μεγάλο εύρος των συστημάτων διακριτού χρόνου. Επιβάλλοντας διάφορους περιορισμούς στην απεικόνιση  $\mathcal{G}$  αποκτούμε χρήσιμες υπο-κλάσεις των διακριτών συστημάτων. Μια τέτοια κλάση που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια είναι αυτή των **γραμμικών, χρονικά ανεξάρτητων συστημάτων διακριτού χρόνου**. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας θα ασχοληθούμε μόνο με συστήματα *μιας εισόδου-μιας εξόδου (SISO)* όπου  $\mathcal{U}, \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}\langle d \rangle$ . Προτού ξεκινήσουμε θα ορίσουμε μια βασική ακολουθία, την κρουστική ακολουθία (impulse sequence) και την αντίστοιχη απόκριση, την κρουστική απόκριση (impulse response).

**Ορισμός 3.2.1** Η μοναδιαία ακολουθία  $d^0 = \{0; 1, 0, 0, \dots\}$  ονομάζεται **κρουστική ακολουθία** ή απλά (μοναδιαίως) **παλμός** και παριστάνεται με  $\delta$ ,  $\delta = \{0; 1, 0, 0, \dots\}$ . Η απόκριση του συστήματος  $\mathcal{S}$  στον παλμό  $\delta$  ονομάζεται **κρουστική απόκριση** και παριστάνεται με  $g$ ,  $g := \mathcal{G}[\delta]$ .

**Παρατήρηση 3.2.2** Από τον ορισμό 3.2.1 διαπιστώνουμε ότι ο (μοναδιαίως) παλμός  $\delta$  είναι ένα σήμα μοναδιαίου πλάτους που εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή μηδέν και  $g$  είναι η απόκριση του συστήματος στη συγκεκριμένη είσοδο. Σύμφωνα με τον ορισμό της αόριστης ακολουθίας (ορισμός 2.1.3) και την εξίσωση (3), το  $\delta d^k = d^k$  μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας παλμός που εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή  $k$  στην είσοδο ενός διακριτού συστήματος. Η απόκριση στο  $d^k$  παριστάνεται με  $g^{(k)}$  και είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος  $\mathcal{S}$  σε έναν παλμό που εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή  $k$ .

Ένα **γραμμικό σύστημα** είναι αυτό για το οποίο ισχύει η αρχή της υπέρθεσης. Έτσι:

**Ορισμός 3.2.3** Ένα διακριτό σύστημα  $\mathcal{S}$  ονομάζεται **γραμμικό** αν  $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ , και  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , έχουμε

$$\mathcal{G}[a_1 u_1 + a_2 u_2] = a_1 \mathcal{G}[u_1] + a_2 \mathcal{G}[u_2] \quad (25)$$

Αν το σύστημα  $\mathcal{S}$  είναι αρκετά ομαλό τότε η εξίσωση (25) μπορεί να επεκταθεί για οποιοδήποτε αριθμό εισόδων  $u_1, u_2, \dots \in \mathbb{R}\langle d \rangle$  και οποιοδήποτε αριθμό σταθερών  $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ . Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση των τυπικών σειρών Laurent για την ακολουθία εισόδου έχουμε

$$y = \mathcal{G}[u] = \mathcal{G} \left[ \sum_{k=p}^{\infty} u_k d^k \right] \quad (26)$$

και για ένα γραμμικό σύστημα η εξίσωση (26) γίνεται

$$y = \sum_{k=p}^{\infty} u_k \mathcal{G}[d^k] = \sum_{k=p}^{\infty} u_k g^{(k)} \quad (27)$$

**Ορισμός 3.2.4** Ένα διακριτό σύστημα ονομάζεται **χρονικά ανεξάρτητο** αν

$$\forall u \in \mathcal{U}, \quad \mathcal{G}[d^k u] = d^k \mathcal{G}[u].$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.2.2, τον Ορισμό 3.2.4 και την εξίσωση (27), η έξοδος ενός γραμμικού, χρονικά ανεξάρτητου συστήματος διακριτού χρόνου (LTI: Linear, Time-Invariant) δίνεται από:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=p}^{\infty} u_k \mathcal{G}[d^k] = \sum_{k=p}^{\infty} u_k \mathcal{G}[d^k \delta] = \sum_{k=p}^{\infty} u_k d^k \mathcal{G}[\delta] = \\ &= \sum_{k=p}^{\infty} u_k d^k g = \sum_{k=p}^{\infty} u_k d^k \sum_{l=r}^{\infty} g_l d^l \end{aligned}$$

δηλαδή

$$y = g * u \quad \eta \quad y_j = \sum_{k+l=j} u_k g_l, \quad j \geq p+r \quad (28)$$

Έτσι, σε ένα LTI διακριτό σύστημα, ο τελεστής του συστήματος  $\mathcal{G}$  μπορεί να αντικατασταθεί από την κρουστική απόκριση  $g$  και την συνέλιξη.

**Ορισμός 3.2.5** Ένα γραμμικό, χρονικά ανεξάρτητο διακριτό σύστημα  $\mathcal{S}$  είναι το σύνολο  $\mathcal{S}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, G, *)$  όπου  $\mathcal{T} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  ο διακριτός χρόνος,  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \langle d \rangle$  ο χώρος των εισόδων,  $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^l \langle d \rangle$  ο χώρος των εξόδων και  $G \in \mathbb{R}_{lm} \langle d \rangle$  είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, ο πίνακας κρουστικής απόκρισης από το  $\mathcal{U}$  στο  $\mathcal{Y}$  τ.ω.  $\forall \bar{u} \in \mathcal{U} \exists \bar{y} \in \mathcal{Y} : \bar{y} = G * \bar{u}$ .

**Παρατήρηση 3.2.6** Από την εξίσωση (28) μπορούμε να καταλάβουμε ότι ένα γραμμικό, χρονικά ανεξάρτητο διακριτό σύστημα είναι ένα σύστημα με μνήμη. Αυτό σημαίνει ότι η έξοδος τη χρονική στιγμή  $k$  εξαρτάται από την είσοδο που εφαρμόζεται πριν ή/και μετά τη στιγμή  $k$ . Για την ακρίβεια αυτό ισχύει για κάθε διακριτό σύστημα που περιγράφεται από σχέση εισόδου-εξόδου της μορφής (24). Για το λόγο αυτό, μια έξοδος  $\bar{y}$  καθορίζεται μοναδικά για  $k \geq k_0$  αν η είσοδος δεν είναι γνωστή μόνο για  $k \geq k_0$  αλλά και για  $k < k_0$ . Αυτή είναι η περίπτωση με ορισμούς (3.1.1) και (3.2.5) όπου ο χώρος των εισόδων  $\mathcal{U}$  είναι υποχώρος του χώρου των απείρων ακολουθιών  $\mathbb{R}^l \langle d \rangle$  και κάθε  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  είναι καλά ορισμένο  $\forall k \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  εφόσον  $\bar{u}_k = 0 \forall k < \tau(\bar{u})$ . Επομένως, οι εξισώσεις (25) και (28) καθορίζουν με μοναδικό τρόπο την έξοδο του συστήματος βάσει της εισόδου του. Στην περίπτωση που το  $\bar{u}_k$  δεν είναι γνωστό για  $k < k_0$ , τότε το σύστημα θα πρέπει να θεωρηθεί ότι τη χρονική στιγμή  $k_0$  βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας και ότι η έξοδος του συστήματος διεγείρεται μόνο και με μοναδικό τρόπο από τη είσοδο που εφαρμόζεται από κεί και πέρα ή διαφορετικά οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να είναι γνωστές.

### 3.3 Αιτιότητα και Ευστάθεια

Όπως είδαμε προηγουμένως, η έξοδος ενός διακριτού συστήματος τη χρονική στιγμή  $k$  εξαρτάται από την είσοδο που εφαρμόζεται πριν ή/και μετά από τη χρονική στιγμή  $k$ . Βάσει της παραπάνω πρότασης προκύπτει μια πιο περιορισμένη κλάση των γραμμικών-χρονικά ανεξάρτητων συστημάτων με πρακτικό ενδιαφέρον, η κλάση των αιτιατών (causal) συστημάτων.

**Ορισμός 3.3.1** Ένα διακριτό σύστημα  $\mathcal{S}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, G)$  ονομάζεται **αιτιατό** αν η έξοδος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $k_0$  εξαρτάται από την είσοδο για  $k \leq k_0$ .

Λόγω της εξίσωσης (28), οι συνθήκες αιτιότητας για ένα γραμμικό-χρονικά ανεξάρτητο διακριτό σύστημα δίνονται από το παρακάτω γνωστό θεώρημα.

**Θεώρημα 3.3.2** Ένα γραμμικό - χρονικά ανεξάρτητο διακριτό σύστημα  $\mathcal{S}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, G, *)$  είναι **αιτιατό** αν-ν  $\tau(G) \geq 0$ .

Άλλη μια πολύ σημαντική κλάση των διακριτών συστημάτων είναι αυτή των **ευσταθών** (stable) συστημάτων.

**Ορισμός 3.3.3** Ένα διακριτό σύστημα  $\mathcal{S}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \mathcal{G})$  είναι **εξωτερικά ευσταθές** ή **bounded input bounded output (BIBO) stable** αν για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδος είναι φραγμένη.

Με το επόμενο θεώρημα παίρνουμε τις συνθήκες για ευστάθεια ενός γραμμικού - χρονικά ανεξάρτητου διακριτού συστήματος.

**Θεώρημα 3.3.4** Ένα γραμμικό - χρονικά ανεξάρτητο διακριτό σύστημα  $\mathcal{S}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, G, *)$ ,  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \langle d \rangle$ ,  $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^l \langle d \rangle$ , είναι **BIBO stable** αν-ν

$$\sum_{k=\tau_{ij}}^{\infty} |(g_{ij})_k| < \infty \quad i = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, m \quad (29)$$

όπου  $G = (g_{ij})$  και  $\tau_{ij} = \tau(g_{ij})$ .

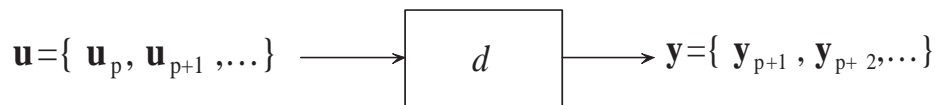
Θεωρούμε τώρα το διακριτό σύστημα  $\mathcal{S}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, d, *)$ , δηλαδή το σύστημα με χροστική απόκριση  $g = d$ . Τότε, για κάθε είσοδο

$$u = u_p d^p + u_{p+1} d^{p+1} + u_{p+2} d^{p+2} + \dots$$

τάξης  $\tau(u) = p$ , η έξοδος  $y = d * u$  είναι μια ακολουθία

$$y = u_p d^{p+1} + u_{p+1} d^{p+2} + u_{p+2} d^{p+3} + \dots$$

τάξης  $\tau(y) = p + 1$ . Επομένως, η είσοδος που εφαρμόζουμε τη χρονική στιγμή  $k$  δίνει έξοδο τη χρονική στιγμή  $k + 1$  (Σχήμα 2). Για το λόγο αυτό η αόριστη ακολουθία  $d$  θα ονομάζεται εναλλακτικά **ακολουθία καθυστέρησης (delay sequence)** ή **τελεστής καθυστέρησης (delay operator)** και η ακολουθία  $z = d^{-1} = \{1; 0, \dots\}$  θα ορίζεται σαν **ακολουθία προώθησης (advance sequence)** ή **τελεστής προώθησης (advance operator)**.



Σχήμα 2: Ο τελεστής καθυστέρησης (delay operator)

### 3.4 Lumped γραμμικά, χρονικά ανεξάρτητα συστήματα διακριτού χρόνου

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, τα γραμμικά - χρονικά ανεξάρτητα διακριτά συστήματα είναι αυτά των οποίων η συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από τον πίνακα κρουστικής απόκρισης (impulse response matrix)  $G$ . Σε ένα πολυμεταβλητό σύστημα με  $m$  εισόδους και  $l$  εξόδους ο  $G$  μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πίνακας ακολουθιών πάνω στο  $\mathbb{R}$ , δηλαδή  $G \in \mathbb{R}_{lm}(d)$ .

**Ορισμός 3.4.1** Ένα γραμμικό - χρονικά ανεξάρτητο διακριτό σύστημα  $\mathcal{S}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, G, *)$  με  $m$  εισόδους και  $l$  εξόδους, ονομάζεται **lumped** αν  $G \in \mathbb{R}_{lm}(d)$ .

Οι έννοιες των αιτιατών και ευσταθών πολυμεταβλητών διακριτών συστημάτων διατυπώνονται με ανάλογο τρόπο με τα συστήματα μιας εισόδου-μιας εξόδου (SISO). Κάποιος που ενδιαφέρεται μπορεί να ανατρέξει στις αναφορές που δίνονται στο τέλος της εργασίας, καθώς δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω με αυτά τα συστήματα.

**Σημείωση.** Από τώρα και πέρα θα αναφερόμαστε στα **lumped γραμμικά συστήματα** απλά σαν **γραμμικά συστήματα**, καθώς στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με αυτήν την κλάση των συστημάτων. Έτσι, με την έννοια γραμμικά συστήματα θα εννοούμε τα συστήματα που έχουν σαν πίνακα κρουστικής απόκρισης  $G$  έναν **πίνακα ρητών ακολουθιών**. Επιπλέον, θα παραλείψουμε το σύμβολο της συνέλιξης από τον ορισμό του συστήματος  $\mathcal{S}$ , το οποίο εξάλλου δεν είναι απαραίτητο όταν χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση των τυπικών σειρών Laurent.

Θα ορίσουμε στη συνέχεια τον πίνακα της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος.

**Ορισμός 3.4.2** Έστω  $G = \{G_r, G_{r+1}, \dots, G_k, \dots\}$ ,  $G_k \in \mathbb{R}^{l \times m}$  ο πίνακας κρουστικής απόκρισης ενός γραμμικού - χρονικά ανεξάρτητου διακριτού συστήματος  $\mathcal{S}$ . Ονομάζουμε **πίνακα συνάρτησης μεταφοράς**  $\tilde{G}(z)$  του  $\mathcal{S}$ , το μετασχηματισμό  $z$  του πίνακα  $G$ ,

$$\tilde{G}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} G_k z^{-k}, \quad G_k \in \mathbb{R}^{l \times m}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (30)$$

**Παρατήρηση 3.4.3** Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό  $z = d^{-1}$  τότε τον ορισμό του πίνακα κρουστικής απόκρισης  $G(d)$  και τον πίνακα συνάρτησης

μεταφοράς  $G(z)$  ενός συστήματος  $\mathcal{S}$ , έχουμε ότι

$$G(z^{-1}) = \tilde{G}(z)$$

Τόσο ο  $G(d)$  όσο και ο  $\tilde{G}(z)$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε σαν πίνακες ακολουθιών ή σαν ρητές συναρτήσεις. Με τον ίδιο τρόπο, το  $z$  μπορεί να θεωρηθεί είτε μιγαδική μεταβλητή με  $z = d^{-1} \in \mathbb{C}$  να αντιπροσωπεύει έναν διγραμμικό μετασχηματισμό, ή ακολουθία  $z = d^{-1} = \{1; 0, \dots, 0, \dots\}$  και να είναι άοριστη ακολουθία όπως το  $d$ , διαφορετικής όμως φύσης (τελεστής προώθησης)

Θα χρησιμοποιούμε την έκφραση **πίνακας κρουστικής απόκρισης** για το  $G(d)$  για να δώσουμε έμφαση στη φύση του σαν **ακολουθία** και την έκφραση **πίνακας συνάρτησης μεταφοράς** για το  $\tilde{G}(z)$  για να ξεχωρίσουμε τη **συναρτησιακή** φύση του  $\tilde{G}(z)$ . Σε κάποια σημεία που θα θέλουμε να τονίσουμε τη συναρτησιακή φύση τόσο του  $G(d)$  όσο και του  $\tilde{G}(z)$  θα χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις  **$d$ -συνάρτηση μεταφοράς** και  **$z$ -συνάρτηση μεταφοράς** αντίστοιχα.

Ας θεωρήσουμε τώρα πιο συγκεκριμένα την περίπτωση των SISO συστημάτων που μας ενδιαφέρει, με κρουστική απόκριση τη ρητή ακολουθία  $g(d)$ . Η  $g(d)$  μπορεί να εκφραστεί σαν τυπική ρητή σειρά Laurent πάνω στο  $\mathbb{R}$  και να παρασταθεί με τη μορφή πρώτου πολυωνυμικού κλάσματος,

$$g(d) = g_l d^l + g_{l+1} d^{l+1} + \dots = \frac{b_0 + b_1 d + \dots + b_m d^m}{a_0 + a_1 d + \dots + a_n d^n} = \frac{b(d)}{a(d)} \quad (31)$$

όπου  $a_n, b_m \neq 0$ . Επικαλούμενοι του ισομορφισμού μεταξύ ρητών κλασμάτων και ρητών συναρτήσεων, η  $g(d)$  μπορεί να αντιμετωπιστεί είτε σαν τυπική σειρά, με  $d$  άοριστη ακολουθία πάνω στο  $\mathbb{R}$ , ή σαν συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής  $d$ . Η σειρά (31) αντιπροσωπεύει τη συμπεριφορά ενός SISO συστήματος και στις 2 παραπάνω περιπτώσεις.

Αν η σειρά (31) είναι τυπική και αιτιατή τότε αντιπροσωπεύει μια αιτιατή ρητή ακολουθία  $\{g_l, g_{l+1}, \dots, g_k, \dots\}$ , η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν η κρουστική απόκριση ενός αιτιατού γραμμικού - χρονικά ανεξάρτητου διακριτού συστήματος. Αν η σειρά (31) αντιμετωπιστεί σαν αιτιατή ρητή συνάρτηση του  $d$ , τότε μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού αιτιατού διακριτού συστήματος. Αυτό γίνεται πιο ξεκάθαρο αν εφαρμόσουμε στη σειρά (31) το διγραμμικό μετασχηματισμό  $z^{-1} = d$ , δηλαδή

$$\tilde{g}(z) = g_l z^{-l} + g_{l+1} z^{-l-1} + \dots = z^{n-m} \frac{b_0 z^m + \dots + b_m}{a_0 z^n + \dots + a_n} = g(z^{-1}) \quad (32)$$



Προφανώς το  $\tilde{g}(z)$  είναι ο μετασχηματισμός  $z$  της αιτιατής κρουστικής απόκρισης  $\{g_k\}$  και κατά συνέπεια η συνάρτηση μεταφοράς του αιτιατού διακριτού συστήματος. Για την ακρίβεια, επειδή  $a_0 = a(0) \neq 0$  και  $a(d), b(d)$  είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι το  $\tilde{g}(z)$  είναι κανονική ρητή συνάρτηση του  $z$ .

Με παρόμοιο τρόπο, αν η σειρά (31) είναι τυπική και ευσταθής, αντιπροσωπεύει μια απόλυτα αθροίσιμη ακολουθία  $\{g_k\}$  η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν κρουστική απόκριση ενός BIBO ευσταθούς διακριτού συστήματος. Από την άλλη, αν η σειρά (31) είναι ευσταθής ρητή συνάρτηση της μεταβλητής  $d$ , τότε μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση μεταφοράς ενός BIBO ευσταθούς διακριτού συστήματος. Πράγματι, το  $\tilde{g}(z)$  αντιπροσωπεύει τον μετασχηματισμό  $z$  μιας απόλυτα αθροίσιμης κρουστικής απόκρισης  $\{g_k\}$  και μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση μεταφοράς ενός BIBO ευσταθούς συστήματος. Για την ακρίβεια, εφόσον οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή  $a(d)$  στην (31) κείτονται εκτός του κλειστού μοναδιαίου δίσκου  $\mathbb{D}[0, 1]$ , οι πόλοι του  $\tilde{g}(z)$  κείτονται στο εσωτερικό του κλειστού μοναδιαίου δίσκου  $\mathbb{D}[0, 1]$ , γεγονός το οποίο είναι ισοδύναμο με τη συνθήκη το  $\tilde{g}(z)$  να είναι η συνάρτηση μεταφοράς ενός αιτιατού BIBO ευσταθούς διακριτού συστήματος.

Τελικά, παίρνοντας υπόψη την καθυστέρηση που προκαλεί η αόριστη ακολουθία  $d$ , μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η συμπεριφορά εισόδου-εξόδου ενός γραμμικού - χρονικά ανεξάρτητου συστήματος μπορεί να περιγραφεί με μια εξίσωση διαφορών μεταξύ των ακολουθιών εισόδου και εξόδου του συστήματος.

### 3.5 Γραμμικές εξισώσεις διαφορών

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο της περιγραφής εισόδου-εξόδου των διακριτών συστημάτων κάνοντας μια τελευταία αναφορά στην αναπαράστασή τους σαν συστήματα γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές. Η αναπαράσταση αυτή είναι άμεση συνέπεια της περιγραφής της κρουστικής απόκρισης των διακριτών συστημάτων και έχει μόνο θεωρητική σημασία.

Θεωρούμε ένα αιτιατό γραμμικό - χρονικά ανεξάρτητο διακριτό σύστημα μιας εισόδου-μιας εξόδου (SISO),  $\mathcal{S}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, g(d))$  όπου  $g(d) = b(d)/a(d)$  με  $b(d), a(d)$  πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους και  $a(0) \neq 0$ . Τότε  $\forall u \in \mathcal{U} \exists y \in \mathcal{Y}$  τ.ω.

$$y(d) = \frac{b(d)}{a(d)}u(d) \quad \text{ή} \quad a(d)y(d) = b(d)u(d)$$

και αν  $\partial(a(d)) = n$  και  $\partial(b(d)) = m$ , έχουμε

$$(a_0 + a_1d + \dots + a_nd^n)y(d) = (b_0 + b_1d + \dots + b_md^m)u(d) \quad (33)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την καθυστέρηση που προκαλεί ο τελεστής  $d$ , η εξίσωση (33) γίνεται

$$a_0y_k + a_1y_{k-1} + \dots + a_ny_{k-n} = b_0u_k + b_1u_{k-1} + \dots + b_mu_{k-m} \quad \forall k \in \mathcal{T} \quad (34)$$

Ξεχωρίζουμε τις δύο ακόλουθες περιπτώσεις

1. Το  $\mathcal{S}$  είναι σε κατάσταση ηρεμίας για  $k = -\infty$  και μια ακολουθία  $u \in \mathbb{R}\langle d \rangle$  εφαρμόζεται σαν είσοδος από 'κεί και πέρα. Έτσι, η  $u$  είναι απολύτως γνωστή  $\forall k \in \mathcal{T}$ , και εφόσον το σύστημα  $\mathcal{S}$  είναι αιτιατό η έξοδος  $y$  περιγράφεται πλήρως από την εξίσωση διαφορών (34)  $\forall k \in \mathcal{T}$ .
2. Το  $\mathcal{S}$  είναι σε κατάσταση ηρεμίας για  $k = -\infty$ , αλλά η ακολουθία εισόδου δεν είναι γνωστή για  $k < k_0$ , π.χ.  $k_0 = 0$ . Στην περίπτωση αυτή μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η εξίσωση (34) περιγράφει την έξοδο  $y$  μοναδικά για  $k \geq r := \max\{m, n\} = \delta_M(\mathcal{S})$  όταν το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών για  $k = 0$ ,  $\bar{y}_{in} = [y_0, \dots, y_{r-1}]^t \in \mathbb{R}^r$  είναι γνωστό.

**Παράδειγμα 3.5.1** Θεωρούμε το αιτιατό γραμμικό - χρονικά ανεξάρτητο SISO σύστημα  $\mathcal{S}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, g)$  όπου

$$g(d) = \frac{y(d)}{u(d)} = \frac{b_0 + b_1d + b_2d^2}{a_0 + a_1d}, \quad a_0 \neq 0$$

Τότε οι  $u, y$  ικανοποιούν την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$a_0y_k = a_1y_{k-1} + b_0u_k + b_1u_{k-1} + b_2u_{k-2} \quad (35)$$

1. Θεωρούμε ότι το σύστημα  $\mathcal{S}$  βρίσκεται σε ηρεμία για  $k = -\infty$  και  $u \in \mathbb{R}\langle d \rangle$  τάξης  $\tau(u)$ . Τότε  $y \in \mathbb{R}\langle d \rangle$  με  $\tau(y) = \tau(u) + \tau(b) - \tau(a)$  και αν  $b_0 \neq 0 \Rightarrow \tau(b) = \tau(a) = 0$ , δηλαδή  $\tau(y) = \tau(u)$ . Επομένως

$$y_k = \begin{cases} 0, & \forall k \in \mathcal{T} : k < \tau(u) \\ a_0^{-1}(b_0u_k + b_1u_{k-1} + b_2u_{k-2} - a_1y_{k-1}), & \forall k \in \mathcal{T} : k \geq \tau(u) \end{cases}$$

2. Θεωρούμε ότι το  $\mathcal{S}$  βρίσκεται σε ηρεμία για  $k = -\infty$  και η είσοδος  $u$  δεν είναι γνωστή για  $k < 0$ , δηλαδή  $u \in \mathbb{R}[[d]]$ . Τότε  $\delta_M(\mathcal{S}) = \max\{\partial(a), \partial(b)\} = 2$ , και δεδομένου διανύσματος αρχικών συνθηκών

$\bar{y}_{in} = [y_0, y_1]^t$ , η έξοδος  $y_k$  μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση (35) για  $k \geq 2$ , δηλαδή

$$y_k = \begin{cases} \text{άγνωστο}, & \forall k \in \mathcal{T} : k < 0 \\ y_0, y_1, & \text{για } k = 1, 2 \\ a_0^{-1}(b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} - a_1 y_{k-1}), & \forall k \in \mathcal{T} : k \geq 2 \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας πολυωνυμικές MFD (Matrix Fraction Description) περιγραφές για τον πίνακα κρουστικής απόκρισης, μπορούμε εύκολα να γενικεύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα για την περίπτωση πολυμεταβλητών συστημάτων.

**Παρατήρηση 3.5.2** Ας σημειώσουμε ότι το διάνυσμα  $\bar{y} \in \mathcal{Y}$  μπορεί να περιγραφεί μοναδικά με τη χρήση του διανύσματος των αρχικών συνθηκών  $\bar{y}_{in}$ , το οποίο ερμηνεύεται σαν πληροφορία για το παρελθόν της συμπεριφοράς του συστήματος, και του διανύσματος της εισόδου  $\bar{u} \in \mathcal{U} \quad \forall k \in \mathcal{T} : k \geq 0$ .

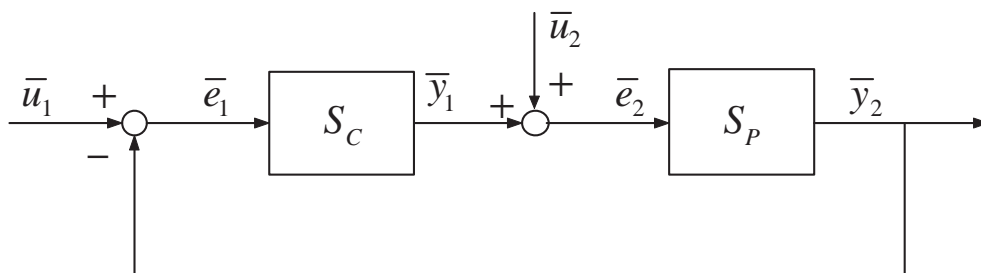
### 3.6 Συμπεράσματα

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού ήταν να συνοψίσει τις βασικές ιδέες της θεωρίας των γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου χρησιμοποιώντας το αλγεβρικό υπόβαθρο που εισήχθη στο προηγούμενο κεφάλαιο. Έτσι, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι οι τυπικές σειρές Laurent και οι ρητές συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$  είναι ισόμορφες (εφόσον το πεδίο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$  είναι άπειρο), δώσαμε τις  $d$ - και  $z$ - περιγραφές των διακριτών συστημάτων και μελετήσαμε την εξωτερική τους συμπεριφορά χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες συναρτήσεις μεταφοράς.

## 4 Συστήματα Κλειστού Βρόγχου

Στο κεφάλαιο αυτό θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στα συστήματα **κλειστού βρόγχου**. Βασικό χαρακτηριστικό αυτών των συστημάτων είναι ότι κατά τη διάρκεια λειτουργίας του συστήματος λαμβάνεται ένα δείγμα (μέτρηση) του σήματος εξόδου το οποίο συγκρίνεται συνεχώς με την επιθυμητή έξοδο έτσι ώστε να παράγεται ένα σήμα σφάλματος (*error signal*) που εφαρμόζεται στην μονάδα του ενεργοποιητή.

Το σύστημα **κλειστού βρόγχου** που φαίνεται στο Σχήμα 3 ονομάζεται **σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης**  $S_f$ . Κάτω από την επίδραση της μοναδιαίας ανάδρασης το  $S_P$  αντιπροσωπεύει ένα δεδομένο φυσικό LTI (γραμμικό-χρονικά ανεξάρτητο) διακριτό σύστημα και ονομάζεται **plant** ή **ελεγχόμενη διεργασία**, ενώ το  $S_C$  είναι ένα LTI διακριτό σύστημα που ονομάζεται **controller** (**compensator**) ή **ελεγκτής**. Τα προβλήματα που αφορούν τα παραπάνω συστήματα συνίστανται στη σχεδίαση ενός κατάλληλου ελεγκτή έτσι ώστε το σύστημα να αποκτήσει την επιθυμητή απόδοση.



Σχήμα 3: Βρόγχος μοναδιαίας ανάδρασης

Βασικός σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η μελέτη της ευστάθειας ενός τέτοιου συστήματος.

### 4.1 Βρόγχος μοναδιαίας ανάδρασης

Θεωρούμε το σύστημα μοναδιαίου βρόγχου του Σχήματος 3 και έστω οι πίνακες  $P \in \mathbb{R}^{l \times m}(d)$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times l}(d)$ , οι οποίοι αντιπροσωπεύουν τις  $d$ -συναρτήσεις μεταφοράς, δηλαδή είναι οι λεγόμενοι **πίνακες συναρτήσεων μεταφοράς**, της ελεγχόμενης διεργασίας και του ελεγκτή αντίστοιχα. Τα διανύσματα  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$  παριστάνουν τις εξωτερικά εφαρμοζόμενες εισόδους, τα  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  παριστάνουν

τα διανύσματα εισόδου στον ελεγκτή και την ελεγχόμενη διεργασία αντίστοιχα, και τα  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$  παριστάνουν τα διανύσματα εξόδου του ελεγκτή και της ελεγχόμενης διεργασίας αντίστοιχα. Όλα τα σήματα είναι διανυσματικές ακολουθίες με  $d$  αόριστη ακολουθία. Επίσης, με  $\mathcal{R}$  θα δηλώνουμε το  $\mathbb{R}[d]$ , ή οποιοδήποτε δακτύλιο του  $\mathbb{R}[d]$ , του οποίου το πεδίο των κλασμάτων είναι το  $\mathbb{R}(d)$ , και  $M(\mathcal{R})$  θα είναι το σύνολο όλων των πινάκων με στοιχεία από το  $\mathcal{R}$  και με κατάλληλες διαστάσεις.

Ένα τέτοιο σύστημα, αν και δεν είναι ιδανικό για πιο σύνθετες περιπτώσεις, είναι αρκετά ευπροσάρμοστο και μπορεί να διευθετήσει αρκετά προβλήματα αυτομάτου ελέγχου.

### Δομή και εξωτερική ευστάθεια του κλειστού βρόγχου

Το σύστημα κλειστού βρόγχου περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H_{e,y/u} \text{ από } \bar{u} \text{ στο } \begin{bmatrix} \bar{e} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

όπου

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{e} = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix}$$

ή, λόγω της γραμμικότητας, από τους δύο πίνακες συναρτήσεων μεταφοράς

$$H(P, C) : \bar{e} := H(P, C)\bar{u} \quad (36)$$

$$W(P, C) : \bar{y} := W(P, C)\bar{u} \quad (37)$$

Οι εξισώσεις του συστήματος μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\bar{e} = (I + FG)^{-1}\bar{u} \quad \text{και} \quad \bar{y} = G(I + FG)^{-1}\bar{u} \quad (38)$$

όπου

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad I + FG = \begin{bmatrix} I & P \\ -C & I \end{bmatrix} \quad (39)$$

Θα αναφερόμαστε στο σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης του Σχήματος 3 με το συμβολισμό  $\mathcal{S}_f$ , ή με το ζεύγος  $(P, C)$ . Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί (τύπος Schur) ότι

$$t(d) := \det(I + FG) = \det(I + PC) = \det(I + CP) \quad (40)$$

**Ορισμός 4.1.1** Το ζεύγος πινάκων  $(P, C)$  είναι **καλά σχηματισμένο** (*well-formed*), αν  $t(d)$  είναι ένα μη-μηδενικό στοιχείο του  $\mathbb{R}(d)$ , δηλαδή το  $t(d)$  δεν είναι μηδέν  $\forall d \in \mathbb{C}$ .

Είναι δυνατό να πάρουμε αρκετές διαφορετικές εκφράσεις για τους πίνακες  $H(P, C)$  και  $W(P, C)$  ([15], [28])

$$\begin{aligned} H(P, C) &= \begin{bmatrix} I & P \\ -C & I \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} I - P(I + CP)^{-1}C & -P(I + CP)^{-1} \\ (I + CP)^{-1}C & (I + CP)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (I + PC)^{-1} & -(I + PC)^{-1}P \\ C(I + PC)^{-1} & I - C(I + PC)^{-1}P \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} W(P, C) &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & P \\ -C & I \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} C - CP(I + CP)^{-1}C & -CP(I + CP)^{-1} \\ P(I + CP)^{-1}C & P(I + CP)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C(I + PC)^{-1} & -C(I + CP)^{-1}P \\ PC(I + PC)^{-1} & P - PC(I + PC)^{-1}P \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

**Παρατήρηση 4.1.2** Απο τις εξισώσεις (41) και (42) παρατηρούμε ότι η συνθήκη  $t(d) \neq 0$  (εξισώσεις 40) για καλό σχηματισμό (*well-formedness*), είναι ικανή και αναγκαία για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη των  $H(P, C)$  και  $W(P, C)$ .

Παρακάτω δίνεται μια σημαντική σχέση μεταξύ των  $H(P, C)$  και  $W(P, C)$ .

**Λήμμα 4.1.3** [28] Έστω το σύστημα ανάδρασης  $\mathcal{S}$  είναι καλά σχηματισμένο. Τότε

$$W(P, C) = F(H(P, C) - I) \quad (43)$$

και έτσι  $W(P, C) \in M(\mathbb{R})$  αν-ν  $H(P, C) \in M(\mathbb{R})$ .

**Παρατήρηση 4.1.4** Σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.3, ο πίνακας συνάρτησης μεταφοράς  $H(P, C)$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον έλεγχο της αιτιότητας και εξωτερικής ευστάθειας του συστήματος μοναδιαίας ανάδρασης του Σχήματος 3.

**Θεώρημα 4.1.5** Έστω το ζεύγος  $(P, C)$  είναι καλά σχηματισμένο. Τότε τα μη-μοναδιαία στοιχειώδη χαρακτηριστικά πολυώνυμα (ή πολυώνυμα πόλων) του  $H_{e,y/u}$ ,  $H(P, C)$  και  $W(P, C)$  είναι συσχετισμένα (*associates*).

Η απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος δεν θα μας απασχολήσει στην παρούσα φάση, αλλά δίνεται με λεπτομέρειες στη βιβλιογραφία.

**Παρατήρηση 4.1.6** Το Θεώρημα 4.1.5 είναι πολύ πιο σημαντικό από το Λήμμα 4.1.3. Σύμφωνα με το Θεώρημα, η δομή των πόλων του συστήματος ανάδρασης στο  $\mathbb{C}$  μπορεί να περιγραφεί με οποιαδήποτε από τις συναρτήσεις μεταφοράς:  $H_{e,y/u}$ ,  $H(P, C)$  ή  $W(P, C)$ . Για τις ανάγκες της εργασίας μας είναι πιο σύνηθες να χρησιμοποιούμε τον πίνακα συναρτήσεων μεταφοράς  $H(P, C)$ .

**Ορισμός 4.1.7** Το ζεύγος  $(P, C)$ , ή το κλειστό σύστημα  $S_f$  είναι εξωτερικά ευσταθές αν  $H(P, C) \in M(\mathbb{R}^+(d))$ .

Έστω τώρα ότι οι συναρτήσεις μεταφοράς της ελεγχόμενης διεργασίας και του ελεγχτή παριστάνονται σαν MFDs στο  $\mathbb{R}[d]$  ως εξής:

$$P = \tilde{D}_p^{-1} \tilde{N}_p = N_p D_p^{-1} \quad (44)$$

$$C = \tilde{D}_c^{-1} \tilde{N}_c = N_c D_c^{-1} \quad (45)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (44) και (45) στις εξισώσεις (41) και (42), οι πίνακες  $H(P, C)$  και  $W(P, C)$  γίνονται:

$$H(P, C) = \begin{bmatrix} \tilde{D}_p & \tilde{N}_p \\ -\tilde{N}_c & \tilde{D}_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{D}_p & 0 \\ 0 & \tilde{D}_c \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$= \begin{bmatrix} D_c & 0 \\ 0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_c & N_p \\ -N_c & D_p \end{bmatrix}^{-1} \quad (47)$$

$$= \begin{bmatrix} D_c \\ N_c \end{bmatrix} \tilde{\Delta}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{D}_p & -\tilde{N}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$= \begin{bmatrix} -N_p \\ D_p \end{bmatrix} \Delta^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{N}_c & \tilde{D}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$W(P, C) = \begin{bmatrix} N_c \\ -D_c \end{bmatrix} \tilde{\Delta}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{D}_p & -\tilde{N}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$= \begin{bmatrix} D_p \\ N_p \end{bmatrix} \Delta^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{N}_c & \tilde{D}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

όπου

$$\Delta := \tilde{N}_c N_p + \tilde{D}_c D_p \quad \text{και} \quad \tilde{\Delta} := \tilde{N}_p N_c + \tilde{D}_p D_c \quad (52)$$

Αν

$$Q := \begin{bmatrix} D_c & N_p \\ -N_c & D_p \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \tilde{Q} := \begin{bmatrix} \tilde{D}_c & \tilde{N}_p \\ -\tilde{N}_c & \tilde{D}_p \end{bmatrix} \quad (53)$$

έχουμε το ακόλουθο Πόρισμα.

**Πόρισμα 4.1.8** Θεωρούμε το σύστημα κλειστού βρόγχου  $\mathcal{S}_f$  με  $P, C \in M(\mathbb{R}(d))$  οι πίνακες συναρτήσεων μεταφοράς της ελεγχόμενης διεργασίας και του ελεγκτή αντίστοιχα και έστω  $(\tilde{D}_p, \tilde{N}_p)$ ,  $(N_p, D_p)$  αριστερά και δεξιά πρώτες MFDs του  $P$  στο  $\mathbb{R}[d]$  και  $(\tilde{D}_c, \tilde{N}_c)$ ,  $(N_c, D_c)$  αριστερά και δεξιά πρώτες MFDs του  $C$  στο  $\mathbb{R}[d]$ . Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Το σύστημα  $(P, C)$  είναι εξωτερικά ευσταθές
2. Ο  $\Delta := \tilde{N}_c N_p + \tilde{D}_c D_p$  είναι σταθερός πολυωνυμικός πίνακας
3. Ο  $\tilde{\Delta} := \tilde{N}_p N_c + \tilde{D}_p D_c$  είναι σταθερός πολυωνυμικός πίνακας
4. Ο  $Q := \begin{bmatrix} D_c & N_p \\ -N_c & D_p \end{bmatrix}$  είναι σταθερός πολυωνυμικός πίνακας
5. Ο  $\tilde{Q} := \begin{bmatrix} \tilde{D}_p & \tilde{N}_p \\ -\tilde{N}_c & \tilde{D}_c \end{bmatrix}$  είναι σταθερός πολυωνυμικός πίνακας

### Αιτιότητα και καλή τοποθέτηση (well-posedness)

Όπως αναφέραμε προηγουμένως ένα σύστημα κλειστού βρόγχου είναι καλά σχηματισμένο αν  $\det(I + FG) = \det(I + PC) = \det(I + CP) \neq 0$  σαν ρητή συνάρτηση. Αυτό επιτρέπει την ύπαρξη ποικίλων συναρτήσεων μεταφοράς του κλειστού συστήματος. Αυτό που τις ξεχωρίζει είναι η αιτιότητά τους.

**Ορισμός 4.1.9** Ένα σύνθετο σύστημα ονομάζεται **καλά τοποθετημένο (well-posed)** αν οι συναρτήσεις μεταφοράς όλων των υποσυστημάτων του είναι αιτιατές και η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόγχου από οποιοδήποτε σημείο που επιλέγεται σαν είσοδος σε οποιοδήποτε άλλο σημείο είναι καλά ορισμένη (well defined) και αιτιατή.

Εφόσον η αιτιότητα είναι ειδική περίπτωση της ευστάθειας, σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.3, η αιτιότητα του κλειστού συστήματος  $\mathcal{S}_f$  μπορεί να περιγραφεί σύμφωνα με την αιτιότητα του  $H(P, C)$ .



**Θεώρημα 4.1.10** Θεωρούμε το σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης του Σχήματος 3 και έστω  $P, C \in M(\mathbb{R}^0(d))$  είναι αιτιατές συναρτήσεις μεταφοράς της ελεγχόμενης διεργασίας και του ελεγκτή αντίστοιχα. Το κλειστό σύστημα είναι καλά τοποθετημένο αν-ν

$$\det(I + P(0)C(0)) = \det(I + C(0)P(0)) \neq 0 \quad (54)$$

**Παρατήρηση 4.1.11** Αν η ελεγχόμενη διεργασία είναι αυστηρά αιτιατή, τότε  $P(0) = 0$  και η σχέση (54) ισχύει για κάθε  $C$ . Επομένως, το σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης είναι καλά τοποθετημένο για κάθε αιτιατό ελεγκτή  $C$ , αν η ελεγχόμενη διεργασία  $P$  είναι αυστηρά αιτιατή.

## 4.2 Σταθεροποίηση του συστήματος μοναδιαίας ανάδρασης

Η ουσία των συστημάτων κλειστού βρόγχου είναι ο σχεδιασμός ενός ελεγκτή τέτοιου ώστε το συνολικό σύστημα να έχει την επιθυμητή απόδοση. Η ελάχιστη απαιτούμενη απόδοση είναι προφανώς η ευστάθεια. Σύμφωνα με το Πρόβλημα 4.1.8 το πρόβλημα σταθεροποίησης έχει ως εξής:

**Γενική Ευστάθεια:** Σχεδιάζουμε έναν ελεγκτή τέτοιο ώστε  $H(P, C) \in M(\mathbb{R}^+(d))$  δηλαδή  $\Delta$  είναι σταθερός πολυωνυμικός πίνακας. Στην περίπτωση μιας εισόδου-μιας εξόδου θα πρέπει  $H(p, c) \in \mathbb{R}^+(d)$  δηλαδή  $\Delta$  θα πρέπει να είναι σταθερό πολυώνυμο.

**Ορισμός 4.2.1** Θεωρούμε το σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης  $S_f$ . Οποιοσδήποτε ελεγκτής ικανοποιεί το πρόβλημα γενικής ευστάθειας ονομάζεται **σταθεροποιητικός ελεγκτής** (*stabilizing controller*).

Αποδεικνύεται ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει λύση, η οποία δίνεται απο το παρακάτω Θεώρημα.

**Θεώρημα 4.2.2** [18], [28] Θεωρούμε το σύστημα κλειστού βρόγχου του Σχήματος 3. Έστω  $P \in \mathbb{R}^{l \times m}(d)$  είναι η συνάρτηση μεταφοράς της ελεγχόμενης διεργασίας και  $(\tilde{D}_p, \tilde{N}_p)$ ,  $(N_p, D_p)$  είναι αριστερά και δεξιά πρώτες πολυωνυμικές (MFD) περιγραφές του  $P$ , οι οποίες ικανοποιούν την ταυτότητα Bezout

$$\begin{bmatrix} -\tilde{X}(d) & \tilde{Y}(d) \\ \tilde{D}_p(d) & \tilde{N}_p(d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_p(d) & Y(d) \\ D_p(d) & X(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (55)$$

και  $\tilde{\Delta}$ ,  $\Delta$  γνωστοί σταθεροί πολυωνυμικοί πίνακες κατάλληλων διαστάσεων. Τότε η οικογένεια των ελεγκτών

$$C = \tilde{D}_c^{-1} \tilde{N}_c = N_c D_c^{-1}$$

ικανοποιεί την αντίστοιχη από τις ακόλουθες Διοφαντικές εξισώσεις

$$\Delta := \tilde{N}_c N_p + \tilde{D}_c D_p \quad \text{ή} \quad \tilde{\Delta} := \tilde{N}_p N_c + \tilde{D}_p D_c \quad (56)$$

και παραμετροποιείται με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} N_c \\ D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & D_p \\ Y & -N_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Delta} \\ R \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$[\tilde{D}_c \quad \tilde{N}_c] = [\Delta \quad S] \begin{bmatrix} \tilde{Y} & \tilde{X} \\ -\tilde{N}_p & \tilde{D}_p \end{bmatrix} \quad (58)$$

όπου  $\tilde{\Delta}, \Delta \in M(\mathbb{R}[d])$  είναι σταθεροί πολυωνυμικοί πίνακες και  $R, S$  είναι αυθαίρετοι πολυωνυμικοί πίνακες με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1.  $(\Delta, S)$  είναι αριστερά πρώτοι και  $(R, \tilde{\Delta})$  είναι δεξιά πρώτοι για να εξασφαλίσουμε το ότι τα ζεύγη  $(\tilde{D}_c, \tilde{N}_c), (N_c, D_c)$  είναι πρώτα αντίστοιχα.
2.  $\det(\Delta(0)\tilde{Y}(0) - S(0)\tilde{N}_p(0)) \sim \det(Y(0)\tilde{\Delta}(0) - N_p(0)R(0)) \neq 0$  για να εξασφαλίσουμε την αιτιότητα του ελεγκτή.

**Παρατήρηση 4.2.3** Το Θεώρημα 4.2.2 μας δίνει την παραμετροποίηση όλων των ελεγκτών που σταθεροποιούν μια δεδομένη ελεγχόμενη διεργασία στο σύστημα κλειστού βρόγχου του Σχήματος 3. Η παραμετροποίηση αυτή συνδέεται με τις ελεύθερες παραμέτρους  $R$  ή  $S$ . Ο λόγος για τον οποίο το κλειστό σύστημα  $S_f$  ονομάζεται επίσης κλειστό σύστημα μιας παραμέτρου είναι ότι για την παραμετροποίηση της οικογένειας όλων των σταθεροποιητικών ελεγκτών απαιτείται μόνο μια από τις δύο παραμέτρους ( $R$  ή  $S$ ). Η παραμετροποίηση αυτή είναι γνωστή ως **Youla-Bongiorno** παραμετροποίηση και βασίζεται στις έρευνες των Youla, Bongiorno και Lu [32] και Youla, Bongiorno και Jabr [31]. Στην περίπτωση των διακριτών συστημάτων είχε προηγηθεί η δουλειά του Kuc̆era [20], [21]. Στη συνέχεια της εργασίας θα ονομάζουμε αυτήν την παραμετροποίηση Youla – Bongiorno – Kuc̆era παραμετροποίηση και θα την συμβολίζουμε με  $YBK$ .

**Πρόταση 4.2.4** Έστω το ζεύγος  $(P, C)$ . Τότε κάθε αιτιατός σταθεροποιητικός ελεγκτής  $C$  εξασφαλίζει καλή τοποθέτηση.

**Πόρισμα 4.2.5** Θεωρούμε το ζεύγος  $(P, C)$ , με αυστηρά αιτιατή ελεγχόμενη διεργασία. Τότε οποιοσδήποτε σταθεροποιητικός ελεγκτής  $C$  είναι αιτιατός και το ζεύγος  $(P, C)$  είναι καλά τοποθετημένο για κάθε  $C$ .

### 4.3 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφηκαν τα βασικά χαρακτηριστικά ενός συστήματος μοναδιαίας ανάδρασης. Δόθηκε μια σύντομη μελέτη της ευστάθειας και σταθεροποίησης τέτοιων συστημάτων και δείχτηκε με ποιό τρόπο η ρητή αναπαράσταση οδηγεί στην Youla-Bongiorno-Kucera παραμετροποίηση της οικογένειας των σταθεροποιητικών ελεγκτών (stabilizing controllers).

## 5 Ολική Σταθεροποίηση Πεπερασμένου Χρόνου Αποκατάστασης (Total Finite Settling Time Stabilization)

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να εισάγουμε την έννοια της *Ολικής Σταθεροποίησης Πεπερασμένου Χρόνου Αποκατάστασης (Total Finite Settling Time Stabilization)* για γραμμικά-χρονικά ανεξάρτητα συστήματα στην περίπτωση μιας εισόδου-μιας εξόδου (SISO). Το πρόβλημα Πεπερασμένου Χρόνου Αποκατάστασης (Finite Settling Time Problem - FST) είναι ειδική περίπτωση του *deadbeat* προβλήματος (ελαχίστου χρόνου) που συναντούμε στα διακριτά συστήματα στην περίπτωση Βέλτιστου Ελέγχου όταν ζητούμε ανίχνευση της εισόδου στον ελάχιστο δυνατό χρόνο [1]. Το πρόβλημα *σταθεροποίησης πεπερασμένου χρόνου αποκατάστασης* εισήχθη από τους Καρκανιά και Μιλονίδη (1988) [16]. Αφορά ένα κλειστό σύστημα όπου όλες οι εσωτερικές και εξωτερικές μεταβλητές (σήματα) απαιτείται να καταλήγουν σε μια νέα σταθερή κατάσταση μετά από πεπερασμένο χρονικό διάστημα από την εφαρμογή μιας βηματικής συνάρτησης σε οποιαδήποτε από τις εισόδους και για οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες. Στη συνέχεια της εργασίας θα αναφερόμαστε σ' αυτό για συντομία σαν FST (Finite Settling Time) πρόβλημα ή FSTS (Finite Settling Time Stabilization) πρόβλημα.

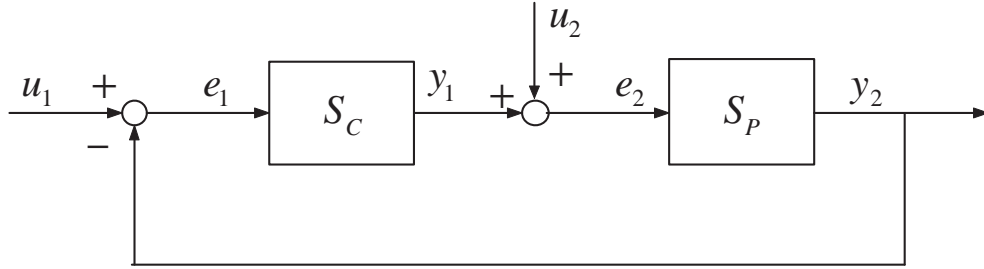
Για τη μελέτη μας θα χρησιμοποιήσουμε το μαθηματικό υπόβαθρο που παρουσιάσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων των κεφαλαίων αυτών, το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση μιας πολυωνυμικής Διοφαντικής εξίσωσης, η οποία δεν εγγυάται μόνο εσωτερική ευστάθεια, αλλά και εσωτερική FST. Για τον υπολογισμό της κλάσης όλων των FST και των αιτιατών FST ελεγκτών θα χρησιμοποιήσουμε την παραμετροποίηση *Youla – Bongiorno – Kucěra*.

### 5.1 Ορισμός του FST προβλήματος - Παραμετροποίηση των FST ελεγκτών

Θεωρούμε το σύστημα κλειστού βρόγχου του Σχήματος 4 όπου  $u_1, u_2$  είναι εξωτερικά εφαρμοζόμενες εισοδοί. Έστω επίσης  $p, c \in \mathbb{R}(d)$  είναι οι συναρτήσεις μεταφοράς της ελεγχόμενης διεργασίας και του ελεγκτή αντίστοιχα. Το πρόβλημα Πεπερασμένου Χρόνου Αποκατάστασης (FST) διατυπώνεται ως εξής:

**Ορισμός 5.1.1** Το σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης του Σχήματος 4 παρουσιάζει *απόκριση πεπερασμένου χρόνου αποκατάστασης*, αν για μια βηματική

μεταβολή σε οποιαδήποτε από τις εισόδους του  $u_1, u_2$  και για οποιαδήποτε αρχικές συνθήκες, όλα τα σήματα  $e_1, e_2$  ή  $y_1, y_2$  σταθεροποιούνται σε μια νέα σταθερή κατάσταση σε πεπερασμένο χρόνο. Οι τιμές του χρόνου αποκατάστασης και της σταθερής κατάστασης είναι ελεύθερες.



Σχήμα 4: Βρόγχος μοναδιαίας ανάδρασης (SISO περίπτωση)

Δίνουμε στη συνέχεια το χαρακτηρισμό των συστημάτων που παρουσιάζουν FST απόκριση.

**Λήμμα 5.1.2** Ένα αιτιατό διακριτό σύστημα που χαρακτηρίζεται από μια κρουστική απόκριση  $g(d)$  παρουσιάζει FST απόκριση αν-ν η  $g(d)$  είναι πολυώνυμο στο  $d$ , δηλαδή αν η  $g(d)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας.

**Απόδειξη:** Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.1, θεωρούμε την FST απόκριση για μια βηματική είσοδο. Για να επιτρέψουμε αρχικές συνθήκες υποθέτουμε ότι η είσοδος  $u$  είναι γραμμικός συνδυασμός δύο σημάτων  $u^-$  και  $u^+$ ,

$$u = u^- + u^+ \quad (59)$$

όπου

$$u_k^- = \begin{cases} \text{οποιαδήποτε τιμή για } -k_0 \leq k \leq -1 \\ 0, \text{ οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (60)$$

$$u_k^+ = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (61)$$

"  $\Rightarrow$  " Υποθέτουμε ότι  $g(d) \in \mathbb{R}[d]$ , δηλαδή

$$g = \{0; g_0, \dots, g_m, 0, \dots, 0, \dots\} \quad (62)$$

Τότε, η απόκριση του  $\mathcal{S}(g(d))$  στην είσοδο  $u^-$  είναι

$$y_k^- = \sum_{n=0}^{\infty} g_n u_{k-n}^- = \sum_{n=0}^m g_n u_{k-n}^-, \quad k \geq 0 \quad (63)$$

Αν  $k > m - 1 \Rightarrow k - m > -1$ , από τη σχέση (60) συνεπάγεται ότι  $u_{k-n}^- = 0$ , για  $n = 0, \dots, m$ . Έτσι

$$y_k^- = 0, \quad \text{για } k \geq 0 \quad (64)$$

Επιπλέον, η απόκριση του  $\mathcal{S}(g(d))$  στην είσοδο  $u^+$  είναι

$$y_k^+ = \sum_{n=0}^{\infty} g_n u_{k-n}^+ = \sum_{n=0}^k g_n u_{k-n}^+ = \sum_{n=0}^k g_n \quad (65)$$

και για  $k \geq m$ ,  $g_k = 0$ , έτσι η εξίσωση (65) δίνει

$$y_k^+ = \sum_{n=0}^m g_n, \quad k \geq m \quad (66)$$

Έτσι, λόγω της γραμμικότητας, η απόκριση του συστήματος στην είσοδο  $u = u^- + u^+$  είναι  $y = y^- + y^+$  και χρησιμοποιώντας τις (64), (66)

$$y_k = \sum_{n=0}^m g_n, \quad k \geq m \quad (67)$$

δηλαδή η έξοδος  $y$  σταθεροποιείται στην τιμή  $\sum_{n=0}^m g_n$  μετά από πεπερασμένο χρόνο  $k_f = m$ .

"  $\Leftarrow$  " Υποθέτουμε ότι η έξοδος  $y$  σταθεροποιείται σε μια νέα σταθερή κατάσταση μετά από πεπερασμένο χρονικό διάστημα  $k_f = m$  από την εφαρμογή μιας βηματικής εισόδου και για οποιοδήποτε αρχικές συνθήκες, δηλαδή

$$y_k = y_{k+1}, \quad \forall k \geq m \quad (68)$$

Αυτό ισχύει για οποιαδήποτε είσοδο της μορφής (59) και συνεπώς για  $u = u^+$ . Στην περίπτωση αυτή από την (65) συνεπάγεται ότι

$$y_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} g_n = \sum_{n=0}^k g_n + g_{k+1} = y_k + g_{k+1} \quad (69)$$

και λόγω της (68),  $g_{k+1} = 0 \quad \forall k \geq m$ . Έτσι, το  $\mathcal{S}(g(d))$  είναι ένα σύστημα με χροστική απόκριση μήκους  $m + 1$  ( $g_k \neq 0$  για  $0 \leq k \leq m$ ).

□

**Παρατήρηση 5.1.3** Τα συστήματα που χαρακτηρίζονται από κρουστική απόκριση πεπερασμένης διάρκειας είναι γνωστά σαν συστήματα **Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης ή ΠΚΑ (Finite Impulse Response or FIR)**. Τα ΠΚΑ συστήματα παρουσιάζουν απόκριση πεπερασμένου χρόνου αποκατάστασης σε σχεδόν κάθε αναδρομική είσοδο και όχι μόνο στις βηματικές εισόδους. Πράγματι, θεωρούμε μια οποιαδήποτε είσοδο  $u(d)$  και την εκφράζουμε με τη μορφή

$$u(d) = \frac{b(d)}{a(d)}, \quad a(d), b(d) \in \mathbb{R}[d] \quad \text{και είναι πρώτοι}$$

Τότε,  $y(d) = g(d) \frac{b(d)}{a(d)}$ ,  $g(d) \in \mathbb{R}[d]$  και έτσι η έξοδος  $y(d)$  είναι της ίδιας μορφής με την είσοδο  $u(d)$  αν τα μηδενικά του  $g(d)$  δεν απαλείφουν τους πόλους του  $u(d)$  (δηλαδή τα μηδενικά του  $a(d)$ ). Είναι περιττό να τονίσουμε ότι ένα ΠΚΑ σύστημα παρουσιάζει έξοδο πεπερασμένης διάρκειας αν σ' αυτό εφαρμόσουμε οποιαδήποτε είσοδο πεπερασμένης διάρκειας. Τέτοια συστήματα ονομάζονται από τον Kucera συστήματα **Πεπερασμένης Εισόδου-Πεπερασμένης Εξόδου (Finite Input Finite Output - FIF0)**. Η ονομασία αυτή είναι ένας ισοδύναμος τρόπος για να τονίσουμε την ΠΚΑ φύση αυτών των συστημάτων.

Θεωρούμε τώρα το σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης του Σχήματος 4 και έστω  $\frac{n_p}{d_p}$ ,  $\frac{n_c}{d_c}$  πρώτα πολυωνυμικά κλάσματα των συναρτήσεων μεταφοράς  $p$ ,  $c$  της ελεγχόμενης διεργασίας και του ελεγκτή αντίστοιχα. Εάν ορίσουμε σαν  $H(p, c)$  τη συνάρτηση μεταφοράς από το  $\bar{u} = [u_1 \ u_2]^T$  στο  $\bar{e} = [e_1 \ e_2]^T$  και σαν  $W(p, c)$  τη συνάρτηση μεταφοράς από το  $\bar{u}$  στο  $\bar{y} = [y_1 \ y_2]^T$  όπως στην παράγραφο 4.1, τότε θυμίζουμε ότι ο παρανομαστής  $\Delta$  της σχέσης (52) είναι ίσος με:

$$\delta(p, c) := n_c d_c + d_p d_c \in \mathbb{R}[d] \quad (70)$$

ενώ οι συναρτήσεις μεταφοράς εκφράζονται με τις παρακάτω σχέσεις:

$$H(p, c) = \begin{bmatrix} -n_p \\ d_p \end{bmatrix} \delta^{-1}(p, c) \begin{bmatrix} n_c & d_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$= \frac{1}{\delta(p, c)} \begin{bmatrix} d_p d_c & -n_p d_c \\ d_p n_c & d_p d_c \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$W(p, c) = \begin{bmatrix} d_p \\ n_p \end{bmatrix} \delta^{-1}(p, c) \begin{bmatrix} n_c & d_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$= \frac{1}{\delta(p, c)} \begin{bmatrix} d_p n_c & -n_p n_c \\ n_p n_c & n_p d_c \end{bmatrix} \quad (74)$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.3 και το Λήμμα 5.1.2 το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι αυταπόδεικτο.

**Λήμμα 5.1.4** Το σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης του Σχήματος 4 παρουσιάζει FST απόκριση αν-ν  $H(p, c) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}[d]$ .

Στο σημείο αυτό είμαστε έτοιμοι να δώσουμε τη λύση του FST προβλήματος μαζί με την παραμετροποίηση των FST ελεγχτών.

**Θεώρημα 5.1.5** Θεωρούμε το σύστημα κλειστού βρόγχου του Σχήματος 4 και έστω  $p = \frac{n_p}{d_p}$ ,  $c = \frac{n_c}{d_c}$  οι συναρτήσεις μεταφοράς της ελεγχόμενης διεργασίας και του ελεγκτή αντίστοιχα. Τότε, το FST πρόβλημα έχει λύση αν-ν

$$\delta(p, c) := n_p n_c + d_p d_c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (75)$$

Επιπλέον, η οικογένεια όλων των αιτιατών FST ελεγκτών δίνεται από

$$\mathcal{F}(p) = \{(n_c, d_c) : n_c = x + t d_p, \quad d_c = y - t n_p,$$

$$t \in \mathbb{R}[d] \text{ και } y(0) - t(0)n_p(0) \neq 0 \text{ αν } n_p(0) \neq 0\} \quad (76)$$

όπου  $x, y$  είναι ένα συγκεκριμένο ζεύγος λύσεων της γραμμικής Διοφαντικής εξίσωσης

$$n_p n_c + d_p d_c = 1 \quad (77)$$

**Απόδειξη:** Σύμφωνα με το Λήμμα 5.1.4, ο  $H(p, c)$  πρέπει να είναι πολυωνυμικός πίνακας για να έχουμε FST απόκριση. Εφόσον  $(n_p, d_p)$ ,  $(n_c, d_c)$  είναι πρώτοι, η σχέση (71) είναι bico-prime κλάσμα του  $H(p, c)$  και  $H(p, c) \in M(\mathbb{R}[d])$  αν-ν  $\delta(p, c)$  είναι πραγματική σταθερά. Χωρίς να περιορίσουμε τη γενικότητα της περίπτωσης μπορούμε να πούμε ότι  $\delta(p, c) = 1$ . Τα υπόλοιπα προκύπτουν από το Θεώρημα 4.2.2 και το Πρόρισμα 4.2.5.

□

Απο το Θεώρημα 5.1.5 είναι εύκολο να πάρουμε το παρακάτω Πρόρισμα.

**Πόρισμα 5.1.6** Ένας FST ελεγκτής είναι αιτιατός

1.  $\forall t(d) \in \mathbb{R}[d] \text{ αν } n_p(0) = 0$
2.  $\forall t(d) \in \mathbb{R}[d] : t(0) \neq \frac{y(0)}{n_p(0)} \text{ αν } n_p(0) \neq 0$



**Πόρισμα 5.1.7** Έστω τα  $n_p, d_p, n_c, d_c$  ικανοποιούν το Θεώρημα 5.1.5. Τότε

$$H(p, c) = \begin{bmatrix} d_p d_c & -n_p d_c \\ d_p n_c & d_p d_c \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$W(p, c) = \begin{bmatrix} d_p n_c & -n_p n_c \\ n_p n_c & n_p d_c \end{bmatrix} \quad (79)$$

**Παρατήρηση 5.1.8** Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.5, ο έλεγχος *FST* τοποθετεί τους πόλους του  $H(p, c)$  στο άπειρο, δηλαδή εκτός του κλειστού μοναδιαίου δίσκου  $\mathbb{D}[0, 1]$  και συνεπώς σταθεροποιεί εξωτερικά το κλειστό σύστημα  $\mathcal{S}_f$ .

Σύμφωνα με τη φύση του προβλήματος οι ελεγκτές που ορίζονται από το *FST* πρόβλημα μπορούν να ονομαστούν **Ολικό Σταθεροποιητικοί Ελεγκτές Πεπερασμένου Χρόνου Αποκατάστασης (Total Finite Settling Time Stabilizing controllers)** ή απλώς σαν **FSTS** ελεγκτές.

## 5.2 Αλγεβρικός υπολογισμός της οικογένειας $\mathcal{F}(p)$

Από το Θεώρημα 5.1.5 είναι προφανές ότι ο υπολογισμός της οικογένειας  $\mathcal{F}(p)$  απαιτεί μόνο τον υπολογισμό μιας συγκεκριμένης λύσης  $(x, y)$  της Διοφαντικής εξίσωσης (77). Ένας τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι να φέρουμε τον πίνακα  $[n_p \ d_p]$  στη Smith-μορφή  $[1 \ 0]$ , [27]. Ένας άλλος τρόπος, ο οποίος θα αναφερθεί στην παράγραφο αυτή, είναι η χρήση πινάκων Toeplitz [3]. Η προσέγγιση αυτή μας επιτρέπει να ανάγουμε το *FST* πρόβλημα σε ένα πρόβλημα γραμμικής άλγεβρας στο  $\mathbb{R}$ . Έστω

$$p = \frac{b_0 + b_1 d + \dots + b_m d^m}{1 + a_1 d + \dots + a_n d^n} = \frac{n_p(d)}{d_p(d)} \quad (80)$$

είναι η συνάρτηση μεταφοράς μιας αιτιατής ελεγχόμενης διεργασίας και

$$c = \frac{c_0 + c_1 d + \dots + c_\mu d^\mu}{f_0 + f_1 d + \dots + f_\nu d^\nu} = \frac{n_c(d)}{d_c(d)} \quad (81)$$

είναι η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή σε ένα σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης, με  $(n_p, d_p)$  και  $(n_c, d_c) \in \mathbb{R}[d]$ -πρώτα ζεύγη αντίστοιχα.

Για να έχουμε *FSTS* το ζεύγος  $n_c, d_c$  θα πρέπει να είναι λύση της Διοφαντικής εξίσωσης (77), το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\partial(n_p n_c) = \partial(d_p d_c) \quad \therefore \quad \partial(n_p) + \partial(n_c) = \partial(d_p) + \partial(d_c)$$

ή

$$m + \mu = n + \nu \quad (82)$$

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες Toeplitz για τον πολυωνυμικό πολλαπλασιασμό, η εξίσωση (77) γίνεται

$$\begin{bmatrix} b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & b_0 \\ b_m & & & \vdots \\ 0 & b_m & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 1 \\ a_n & & & \vdots \\ 0 & a_n & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

ή

$$\begin{aligned} T_\mu(n_p) \cdot \bar{c}_\mu + T_\nu(d_p) \cdot \bar{f}_\nu &= \bar{e}_1 \Rightarrow \\ T_{\mu,\nu}(n_p, d_p) \begin{bmatrix} \bar{c}_\mu \\ \bar{f}_\nu \end{bmatrix} &= \bar{e}_1 \end{aligned} \quad (84)$$

όπου

$$T_{\mu,\nu}(n_p, d_p) = [ T_\mu(n_p) \quad T_\nu(d_p) ]$$

Έτσι, η λύση του προβλήματος FST ανάγεται στη λύση της εξίσωσης (84).

**Πρόταση 5.2.1** Υπάρχει πάντα ένας μοναδικός FST ελεγκτής  $\hat{c} = \hat{n}_c / \hat{d}_c$  όπου τα  $\hat{n}_c, \hat{d}_c$  έχουν βαθμούς  $\partial(\hat{n}_c) = n - 1, \partial(\hat{d}_c) = m - 1$  και τα διανύσματα παραμέτρων  $\hat{c}_{n-1}, \hat{f}_{m-1}$  των  $\hat{n}_c, \hat{d}_c$  αντίστοιχα, δίνονται από:

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_{n-1} \\ \hat{f}_{m-1} \end{bmatrix} = \{T_{n-1,m-1}(n_p, d_p)\}^{-1} \bar{e}_1 \quad (85)$$

Ο ελεγκτής  $\hat{c} = \hat{n}_c / \hat{d}_c$  θα ονομάζεται **πρώτος (prime) FST** ελεγκτής.

**Απόδειξη:**  $T_{n-1,m-1}(n_p, d_p) \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$  και αρκεί να δείξουμε ότι έχει πλήρη τάξη (full rank). Πράγματι, ο ανάστροφος του  $T_{n-1,m-1}$  είναι ο πίνακας

$$S(n_p, d_p) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & & & & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & \dots & \dots & \dots & b_m \\ 1 & a_1 & \dots & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & a_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι γνωστός σαν απαλείφουσα του πίνακα Sylvester των πρώτων πολυωνύμων  $n_p(d), d_p(d)$  και συνεπώς έχει πλήρη τάξη [3]. Έτσι,  $T_{n-1, m-1}(n_p, d_p) = S^T(n_p, d_p)$  είναι πίνακας πλήρους τάξης.

Τώρα, είναι πιθανό τα τελευταία στοιχεία  $c_{n-1}, f_{m-1}$  των διανυσμάτων  $\hat{c}_{n-1}, \hat{f}_{m-1}$  της εξίσωσης (85) να είναι μηδέν (ταυτόχρονα λόγω της (82)). Αυτό μπορεί να ισχύει για περισσότερα ζεύγη  $(c_{n-i}, f_{m-i})$  στο διάνυσμα λύσεων  $[\hat{c}_{n-1}^T \hat{f}_{m-1}^T]^T$ . Το πρώτο μη-μηδενικό ζεύγος  $c_{n-i}, f_{m-i}$  θα απαρτίζει τους κύριους (leading) συντελεστές των  $\hat{n}_c(d), \hat{d}_c(d)$  και έτσι

$$\partial(\hat{n}_c) \leq n - i, \quad \partial(\hat{d}_c) \leq m - i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Προφανώς οι ελάχιστοι βαθμοί θα είναι  $\partial(\hat{n}_c) = n - 1$  και  $\partial(\hat{d}_c) = m - 1$ .

□

**Παρατήρηση 5.2.2** Ο «πρώτος» (prime) FST ελεγκτής μπορεί να μην είναι αιτιατός και έτσι μπορεί να μην ανήκει στην οικογένεια  $\mathcal{F}(p)$ . Ωστόσο, μπορεί πάντα να χρησιμοποιηθεί για παραμετροποίηση των αιτιατών FST ελεγκτών. Αν η ελεγχόμενη διεργασία έχει μια χρονική καθυστέρηση, όλες οι λύσεις της εξίσωσης (77) είναι αιτιατές, όπως επίσης και ο «πρώτος» FST ελεγκτής.

### 5.3 FST Ανίχνευση

Ένα σημαντικό πρόβλημα στη θεωρία αυτομάτου ελέγχου είναι αυτό της ανίχνευσης (tracking), στο οποίο η έξοδος ενός συστήματος πρέπει να ανιχνεύει μια συγκεκριμένη ομάδα εισόδων. Στην περίπτωση του FSTS προβλήματος απαιτείται η έξοδος  $y_2$  (Σχήμα 4) να ακολουθεί την είσοδο  $u_1$  σε πεπερασμένο χρόνο. Η λύση αυτού του προβλήματος δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 5.3.1 (FST Tracking)** Θεωρούμε το σύστημα κλειστού βρόχου του Σχήματος 4. Έστω  $p = n_p/d_p$  είναι η συνάρτηση μεταφοράς της ελεγχόμενης διεργασίας και  $c = n_c/d_c$  είναι η συνάρτηση μεταφοράς οποιαδήποτε FST ελεγκτή, όπου όλα τα κλάσματα είναι πρώτα πολυωνυμικά κλάσματα. Υποθέτουμε επίσης ότι η είσοδος  $u_1 = n_r/d_r$  ανήκει σε μια συγκεκριμένη κλάση σημάτων. Τότε, η έξοδος  $y_2$  ακολουθεί την είσοδο  $u_1$  σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, αν-ν  $d_r | d_p d_c$ .

**Απόδειξη:** Για οποιονδήποτε FST ελεγκτή, η συνάρτηση μεταφοράς από το  $u_1$  στο  $e_1$  είναι  $H_{11}(p, c) = d_p d_c$  (βλέπε (78)). Αν  $u_1 = n_r/d_r$ , το σήμα σφάλματος  $e_1$  γίνεται

$$e_1(d) = H_{11}(p, c)u_1(d) = \frac{d_p d_c n_r}{d_r}$$

Για ανίχνευση σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, η ακολουθία σφάλματος  $e(d)$  θα πρέπει να μηδενίζεται μετά από πεπερασμένο χρόνο, δηλαδή θα πρέπει  $e(d) \in \mathbb{R}[d]$ . Αυτό είναι δυνατό αν-ν  $d_r | d_p d_c$ .

□

## 5.4 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αναφερθήκαμε στο πρόβλημα **Πεπερασμένου Χρόνου Αποκατάστασης (FST)** για συστήματα μιας εισόδου-μιας εξόδου (SISO). Η προσέγγιση που δόθηκε είναι καθαρά αλγεβρική και μας οδήγησε σε μια Youla-Bongiorno-Kucera παραμετροποίηση της οικογένειας όλων των FST-S ελεγκτών, δίνοντας τις αναγκαίες συνθήκες για αιτιότητα. Όλοι οι FSTs ελεγκτές προέκυψαν σαν λύση μιας πολυωνυμικής Διοφαντικής εξίσωσης, η οποία απλουστεύει τη διαδικασία επίλυσης καθώς με τη χρήση πινάκων Toeplitz η λύση παρέχεται από ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Δίνεται, τέλος, μια περιγραφή του προβλήματος ανίχνευσης στην FST περίπτωση.

## 6 Βέλτιστη & Εύρωστη FSTS

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε κάποιες επιπλέον απαιτήσεις απόδοσης της οικογένειας  $\mathcal{F}(P)$  των FSTS ελεγκτών μιας ελεγχόμενης διεργασίας  $P$ , εκτός της ανίχνευσης. Για την ακρίβεια, χρησιμοποιώντας την παραμετροποίηση του  $\mathcal{F}(P)$  που εξασφαλίσαμε στο Κεφάλαιο 5, θα δείξουμε με ποιό τρόπο μπορούν να κατασκευαστούν βέλτιστοι ή εύρωστοι FSTS ελεγκτές στα πλαίσια συστήματος μοναδιαίας ανάδρασης (μιας παραμέτρου) [23],[24].

Πιο συγκεκριμένα:

1. θα εξετάσουμε τις  $l^1$ -,  $l^\infty$ - **βελτιστοποιήσεις** όπου ανάμεσα σε όλους τους FSTS ελεγκτές θα επιλέξουμε αυτούς που έχουν την ελάχιστη  $l^1$ - ή  $l^\infty$ - νόρμα ενός συγκεκριμένου διανύσματος σφάλματος.
2. θα σχεδιάσουμε τους **εύρωστους** FSTS ελεγκτές για ελεγχόμενες διεργασίες με συγκεκριμένη αβεβαιότητα.

Τα παραπάνω προβλήματα έχουν κοινή συνιστώσα τη γραμμικότητά τους και το γεγονός ότι μπορούν να αναχθούν στην επίλυση αντιστοίχων πεπερασμένων γραμμικών προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού (linear programming), όπως θα δούμε στη συνέχεια.

### 6.1 $l^1$ - και $l^\infty$ - Βέλτιστη FSTS

Με την εμφάνιση της παραμετροποίησης YBK και της θεωρίας ελέγχου  $H^\infty$ , το πρόβλημα βελτιστοποίησης στη μορφή της min-max ελαχιστοποίησης άρχισε να προσελκύει το ενδιαφέρον των επιστημόνων. Η  $l^1$  προσέγγιση που εισήχθη από τον Vidyasagar [29] και συνεχίστηκε από τους Dahleh και Pearson [4]-[7], συμπλήρωσε την  $H^\infty$ - βελτιστοποίηση σε προβλήματα που δεν μπορούσαν να αντιμετωπιστούν από την θεωρία  $H^\infty$ .

Σκοπός και των δύο μεθόδων είναι η ελαχιστοποίηση του μέγιστου πλάτους του σφάλματος του συστήματος όταν οι εισοδοί είναι σήματα με φραγμένη αλλά αυθαίρετη νόρμα. Γενικά, η συνάρτηση μεταφοράς του σφάλματος μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\hat{\Phi} = \hat{H} - \hat{U}\hat{Q}\hat{V}$$

όπου  $\hat{H}$ ,  $\hat{U}$ ,  $\hat{V}$  είναι γνωστοί σταθεροί πολυωνυμικοί πίνακες και  $\hat{Q}$  είναι ένας αυθαίρετος σταθερός ρητός πίνακας. Ο σκοπός του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι να ελαχιστοποιήσουμε την κατάλληλη νόρμα του  $\hat{\Phi}$  ως προς το  $\hat{Q}$ . Πιο συγκεκριμένα, η  $H^\infty$ -θεωρία αφορά σήματα πεπερασμένης ενέργειας, δηλαδή

με φραγμένη  $l^2$ -νόρμα, και ελαχιστοποιεί την  $H^\infty$ -νόρμα  $\|\hat{\Phi}\|_\infty$  του  $\hat{\Phi}$ , ενώ η  $l^1$ -θεωρία αφορά σήματα με φραγμένο μέγεθος, δηλαδή με πεπερασμένη  $l^\infty$ -νόρμα, και ελαχιστοποιεί την  $l^1$ -νόρμα  $\|\hat{\Phi}\|_1$  του  $\hat{\Phi}$  [7]. Συνεπώς, η  $H^\infty$ -βελτιστοποίηση είναι μια αποτελεσματική προσέγγιση στο πεδίο της συχνότητας όπου αναπαρίσταται επαρκώς η ενέργεια του σήματος, ενώ η  $l^1$ -βελτιστοποίηση είναι μια προσέγγιση στο πεδίο της συχνότητας, η οποία αφορά συνεχή σήματα, τα οποία δεν ικανοποιούν τη συνθήκη φραγμένης ενέργειας της  $H^\infty$ -θεωρίας [7].

Σε πολλές περιπτώσεις του βέλτιστου ελέγχου, το ενδιαφέρον συγκεντρώνεται στην ελαχιστοποίηση του πλάτους του σφάλματος για συγκεκριμένα σήματα όπως βηματικές συναρτήσεις (step), συναρτήσεις κλίσης (ramp), ημιτονοειδείς συναρτήσεις κ.α. Οι Dahleh και Pearson [8] ασχολήθηκαν με ένα τέτοιο πρόβλημα, ελαχιστοποιώντας το πλάτος της εξόδου που προκαλούνταν από μια συγκεκριμένη είσοδο στην περίπτωση ενός SISO διακριτού συστήματος.

Στην περίπτωση της FSTS, η έξοδος του συστήματος απαιτείται να είναι της ίδιας μορφής με την είσοδο μετά από πεπερασμένο χρόνο παρ'όλο που το σφάλμα του συστήματος δεν είναι απαραίτητα μηδέν. Έτσι, ελαχιστοποιώντας την  $l^1$ - ή την  $l^\infty$ - νόρμα του σφάλματος του συστήματος λόγω μιας συγκεκριμένης εισόδου και για συγκεκριμένο χρόνο αποκατάστασης, μπορούμε να έχουμε έναν FSTS ελεγχτή σχετικής ανίχνευσης, με την έννοια του να πετύχουμε ελάχιστο σφάλμα σε πεπερασμένο χρόνο. Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα βελτιστοποίησης ανάγεται σε ένα πεπερασμένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Πρωτού ξεκινήσουμε θα δώσουμε μια μικρή θεωρητική εισαγωγή στις διάφορες νόρμες των διακριτών συστημάτων, όπως επίσης και μια μικρή εισαγωγή στις μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού.

### 6.1.1 Νόρμες των συστημάτων διακριτού χρόνου

Στην παράγραφο αυτή θα κάνουμε μια μικρή μαθηματική εισαγωγή στις διάφορες νόρμες που παρουσιάζονται στα προβλήματα της FST-βελτιστοποίησης και FST-ευρωστίας, τα οποία θα μελετήσουμε σε επόμενες παραγράφους. Μια πιο λεπτομερής αναφορά στις ιδιότητες της νόρμας δίνονται σε βιβλία όπως τα [9] και [30]. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση και την ορολογία των Dahleh και Pearson [7].

Θεωρούμε το σύνολο των τυπικών δυναμοσειρών  $\mathbb{R}[[d]]$  πάνω στο πεδίο των

πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ . Τότε,

$$\forall f = \{f_i\} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i d^i \in \mathbb{R}[[d]] \quad (86)$$

οι εκφράσεις

$$\|f\|_p := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |f_i|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (87)$$

$$\|f\|_{\infty} := \sup_i |f_i| \quad (88)$$

ορίζουν μια νόρμα γνωστή και ως  $p$ -νόρμα του  $f$ . Ο χώρος όλων των ακολουθιών  $f$  για τις οποίες ορίζεται η νόρμα  $\|f\|_p$  (δηλαδή  $\|f\|_p < \infty$ ) συμβολίζεται με  $l^p$ .

Οποιαδήποτε ακολουθία  $f \in \mathbb{R}[[d]]$  μπορεί να παραστήσει την κρουστική απόκριση ενός γραμμικού, χρονικά ανεξάρτητου συστήματος. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.4 ένα σύστημα είναι BIBO-ευσταθές αν-ν η  $f$  είναι μια  $l^1$  ακολουθία. Υπενθυμίζουμε ότι η σειρά (86) είναι τυπική και το  $d$  είναι αόριστη ακολουθία και όχι μεταβλητή. Εάν η  $f$  είναι μια  $l^1$  ακολουθία, η σειρά (86) είναι αθροίσιμη για κάποιο  $d \in \mathbb{C}$  και η  $f$  μπορεί επιπλέον να παραστήσει μια συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής  $d$ . Για να ξεχωρίσουμε τις δύο εκφράσεις θα παριστάνουμε τη συνάρτηση που αντιστοιχεί στην ακολουθία  $f$  με  $\hat{f}(d)$ , ή απλά με  $\hat{f}$ . Χρησιμοποιώντας όρους της θεωρίας συστημάτων, η  $f = \{f_i\}$  είναι η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού, χρονικά ανεξάρτητου συστήματος, ενώ η  $\hat{f}(d)$ , η οποία δεν είναι άλλο από τον μετασχηματισμό  $z$  του  $\{f_i\}$  με  $d = z^{-1}$ , είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

Ας συμβολίσουμε με  $A$  τον χώρο όλων των πινάκων με στοιχεία BIBO - ευσταθείς συναρτήσεις. Έτσι, για κάθε  $\hat{G} \in A$ ,  $G = \{g_{ij}\}$   $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  είναι ο πίνακας κρουστικής απόκρισης με  $g_{ij} \in l^1$  ή  $G \in l_{mn}^1$ . Αν  $l_n^{\infty}$  είναι ο χώρος όλων των φραγμένων διανυσματικών ακολουθιών  $\bar{f}$  με νόρμα

$$\|\bar{f}\|_{\infty} := \max_j \|f^j\|_{\infty}, \quad \bar{f} = (f^1, \dots, f^n)^t \quad (89)$$

μπορούμε να θεωρήσουμε το  $A$  σαν χώρο όλων των φραγμένων γραμμικών, χρονικά ανεξάρτητων τελεστών στο  $l_n^{\infty}$ , δηλαδή  $\forall \hat{G} \in A$ ,  $\hat{f} \in l_n^{\infty}$ , τότε

$$\hat{G} : l_n^{\infty} \rightarrow l_m^{\infty}$$

$$\hat{G}\bar{f} = G * \bar{f}$$

Η επαγόμενη νόρμα (induced norm) στο  $A$  δίνεται από τον τύπο

$$\|\hat{G}\|_A := \sup_{\|\bar{f}\|_\infty \neq 0} \frac{\|\hat{G}\bar{f}\|_\infty}{\|\bar{f}\|_\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n \|g_{ij}\|_1 := \|G\|_1 \quad (90)$$

Έτσι, η σχέση των  $A$  και  $l_{mn}^\infty$  προσδιορίζεται με την παραπάνω νόρμα. Γενικεύοντας τα παραπάνω:

**Ορισμός 6.1.1** [9] Ένας τελεστής  $\hat{G}$  ονομάζεται  **$l^p$ -ευσταθής**,  $1 \leq p \leq \infty$ , αν-ν το  $\hat{G}$  είναι μια απεικόνιση από το  $l^p$  στο  $l^p$  και το κέρδος ή απολαβή (**gain**) του τελεστή ορίζεται σαν

$$g_p(\hat{G}) := \sup_{\|\bar{f}\|_p \neq 0} \frac{\|\hat{G}\bar{f}\|_p}{\|\bar{f}\|_p} < \infty \quad (91)$$

**Παρατήρηση 6.1.2** Για συστήματα που είναι γραμμικά και χρονικά ανεξάρτητα, το κέρδος του  $\hat{G}$  είναι η επαγόμενη νόρμα του  $\hat{G}$  σαν ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής στο  $l^p$ . Στην περίπτωση ενός *lumped* γραμμικού, χρονικά ανεξάρτητου συστήματος, το  $A$  είναι ο χώρος των ρητών πινάκων με πόλους εκτός του κλειστού μοναδιαίου δίσκου και  $l_{mn}^1$  είναι το σύνολο  $\mathbb{R}_{mn}^+(d)$  των πινάκων ακολουθιών με εισόδους ευσταθείς ακολουθίες. Στην περίπτωση αυτή, σύμφωνα με την ανάλυση του Κεφαλαίου 2, οι δύο χώροι είναι ισόμορφοι. Έτσι, τα  $\hat{G}(d)$  και  $G$  παριστάνουν τις ίδιες αλγεβρικές οντότητες και δεν διαχωρίζονται μεταξύ τους. Από τον ορισμό του κέρδους του τελεστή έχουμε

$$g_\infty(\hat{G}) = \|\hat{G}\|_A \quad (92)$$

$$g_2(\hat{G}) = \|\hat{G}\|_\infty \quad (93)$$

Θα κλείσουμε την παράγραφο με το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 6.1.3** [30] Δεδομένου ενός γραμμικού, χρονικά ανεξάρτητου συστήματος που περιγράφεται από συνάρτηση μεταφοράς  $\hat{G}$ , οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. το  $\hat{G}$  είναι  $l^\infty$ -ευσταθές
2. το  $\hat{G}$  είναι  $l^1$ -ευσταθές
3. το  $\hat{G}$  είναι  $l^p$ -ευσταθές  $\forall p \in [1, \infty]$
4. το  $\hat{G} \in A$

Επιπλέον, η  $l^\infty$  επαγόμενη νόρμα στο  $\hat{G}$  φράσει από πάνω όλες τις υπόλοιπες  $l^p$ -επαγόμενες νόρμες ή ισοδύναμα

$$g_p(\hat{G}) \leq g_\infty(\hat{G}) = \|\hat{G}\|_A \quad (94)$$



## 6.2 Μικρή εισαγωγή στον Γραμμικό Προγραμματισμό

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, τόσο η βέλτιστη όσο και η εύρωστη FSTS ανάγονται στην επίλυση ενός πεπερασμένου προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε τα βασικά της βελτιστοποίησης πεπερασμένου γραμμικού προγραμματισμού.

Ένα **γραμμικό πρόγραμμα (linear program, LP)** είναι ένα πρόγραμμα βελτιστοποίησης με γραμμική αντικειμενική συνάρτηση και γραμμικούς περιορισμούς. Στην περίπτωση που ο αριθμός των μεταβλητών και ο αριθμός των περιορισμών είναι πεπερασμένοι, το γραμμικό πρόγραμμα ονομάζεται **πεπερασμένο γραμμικό πρόγραμμα (finite linear program)**. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με τέτοιου είδους προβλήματα και θα αναφερόμαστε σ' αυτά απλά με τον όρο γραμμικά προγράμματα. Ας δώσουμε τώρα τον ορισμό ενός γραμμικού προγράμματος.

Έστω  $A$  μια γραμμική απεικόνιση από τον γραμμικό διανυσματικό χώρο  $X$  στο γραμμικό διανυσματικό χώρο  $Z$ ,  $b$  ένα στοιχείο του  $Z$  και  $c^*$  ένα γραμμικό συναρτησιακό στο  $X$ . Το γραμμικό πρόγραμμα ΓΠ (linear program, LP) είναι

$$\begin{aligned} \text{ΓΠ: ελαχιστοποίησε} & \quad \langle x, c^* \rangle \\ \text{με συνθήκη} & \quad Ax = b, \\ & \quad x \in X, x \geq 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Στην περίπτωση πραγματικών γραμμικών διανυσματικών χώρων το ΓΠ (LP) (95) γίνεται:

$$\begin{aligned} \text{ΓΠ: ελαχιστοποίησε} & \quad \bar{c}^T \bar{x} \\ \text{με συνθήκη} & \quad A\bar{x} = \bar{b}, \\ & \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{x} \geq 0. \end{aligned} \quad (96)$$

όπου τα  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$  και ο  $m \times n$  πίνακας  $A$  είναι γνωστά. Ο περιορισμός  $\bar{x} \geq 0$  σημαίνει ότι  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Το ΓΠ που περιγράφεται από τις εξισώσεις (96) θα αναφέρεται σαν **standar form LP**.

**Παρατήρηση 6.2.1** Το ΓΠ (96) είναι ένα πρόγραμμα με περιορισμούς ισότητας. Στην περίπτωση περιορισμών ανισότητας μπορούμε να μετασχηματίσουμε τους περιορισμούς σε ισότητες προσθέτοντας *surplus* ή/και *slack μεταβλητές*. Έτσι, ο περιορισμός  $A\bar{x} \geq \bar{b}$  γίνεται  $A\bar{x} - \bar{z} = \bar{b}$ ,  $\bar{z} \geq 0$ , όπου  $\bar{z}$  είναι μια *surplus* μεταβλητή, και ο περιορισμός  $A\bar{x} \leq \bar{b}$  γίνεται  $A\bar{x} + \bar{z} = \bar{b}$ ,  $\bar{z} \geq 0$  όπου  $\bar{z}$  είναι μια *slack* μεταβλητή.

**Ορισμός 6.2.2** Για οποιοδήποτε γραμμικό πρόγραμμα ΓΠ, ονομάζουμε την λύση  $\bar{x}$  **εφικτή (feasible)** αν ικανοποιεί τους περιορισμούς του ΓΠ, συμπεριλαμβανομένων των περιορισμών θετικότητας  $x \geq 0$ . Το σύνολο όλων των εφικτών λύσεων του ΓΠ (LP) συμβολίζεται με  $F(LP)$ , ή απλά με  $F$ , δηλαδή

$$F(LP) = \{\bar{x} : A\bar{x} = \bar{b}, \bar{x} \geq 0\}$$

Ένα πρόγραμμα για το οποίο υπάρχει τουλάχιστον μία εφικτή λύση η οποία ελαχιστοποιεί τη χαρακτηριστική συνάρτηση ονομάζεται **συνεπές (consistent)** και η εφικτή λύση που ελαχιστοποιεί τη χαρακτηριστική συνάρτηση ονομάζεται **βέλτιστη (optimal)**.

**Ορισμός 6.2.3** Μια λύση  $\bar{x}$  των περιορισμών  $A\bar{x} = \bar{b}$  του ΓΠ ονομάζεται **βασική (basic)** αν ο αριθμός των μη-μηδενικών συνιστωσών του  $\bar{x}$  δεν είναι μεγαλύτερος από την τάξη του  $A$ . Η λύση  $\bar{x}$  ονομάζεται **μη εκφυλισμένη (non-degenerate)** αν αυτός ο αριθμός είναι ίσος με την τάξη του  $A$ , και **εκφυλισμένη (degenerate)** διαφορετικά.

**Ορισμός 6.2.4** Μια βασική λύση του ΓΠ, η οποία είναι εφικτή ονομάζεται **βασική εφικτή λύση (basic feasible solution)**.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το θεμελιώδες θεώρημα του γραμμικού προγραμματισμού.

**Θεώρημα 6.2.5 [22] (Θεμελιώδες Θεώρημα του Γραμμικού Προγραμματισμού):** Δεδομένου ενός γραμμικού προγράμματος ΓΠ σε στάνταρ μορφή, όποτε το ΓΠ έχει μια βέλτιστη λύση, αυτή βρίσκεται ανάμεσα στις βασικές εφικτές λύσεις του.

Θα κλείσουμε την παράγραφο με την περίπτωση των ελεύθερων μεταβλητών και την αντιμετώπιση των απολύτων τιμών στα πλαίσια ενός ΓΠ.

**Παρατήρηση 6.2.6** Εάν ένας ή περισσότεροι άγνωστοι ενός στάνταρ ΓΠ δεν έχει περιορισμό στο πρόσημο, τότε το πρόβλημα μπορεί να μετατραπεί στη στάνταρ μορφή με τον τρόπο που θα δείξουμε στη συνέχεια. Υποθέτουμε ότι ο περιορισμός  $x_1 \geq 0$  δεν υπάρχει. Μπορούμε τότε να γράψουμε

$$x_1 = x_1^+ - x_1^-, \quad x_1^+, x_1^- \geq 0 \quad (97)$$

Αν αντικαταστήσουμε την τιμή  $x_1^+ - x_1^-$  για το  $x_1$  στην εξίσωση (96), η γραμμικότητα του προβλήματος διατηρείται και όλες οι μεταβλητές ικανοποιούν τους περιορισμούς θετικότητας  $\bar{x} \geq 0$ . Το πρόβλημα θα εκφράζεται σε όρους

των  $n + 1$  μεταβλητών  $x_1^+, x_1^-, x_2, \dots, x_n$ . Λόγω της (97) υπάρχει προφανώς ένας πλεονασμός λύσεων. Ωστόσο αυτό δεν εμποδίζει την εύρεση λύση με τη χρήση της μεθόδου *Simplex*. Πράγματι, σύμφωνα με τον ορισμό των βασικών μεταβλητών και το Θεώρημα 6.2.5, μπορούμε πάντα να αποκλείουμε μια από τις μεταβλητές  $x_1^+$  ή  $x_1^-$  από τη βασική λύση όταν η άλλη εμφανίζεται μέσα στη λύση αυτή. Έτσι, τουλάχιστον μια από τις  $x_1^+, x_1^-$  μπορεί να είναι πάντα μηδέν και μπορούμε να γράψουμε την απόλυτη τιμή του  $x_1$  σαν

$$|x_1| = x_1^+ + x_1^- \quad (98)$$

Τα παραπάνω χρήσιμα σχόλια θα χρησιμοποιηθούν σε μεγάλο βαθμό στις επόμενες ενότητες.

### 6.3 Ορισμοί και λύσεις του βέλτιστου FSTS προβλήματος

Η όλη προσέγγιση του FSTS περιλαμβάνει το σχεδιασμό ενός κλειστού συστήματος μοναδιαίας ανάδρασης, το οποίο εγγυάται συμπεριφορά πεπερασμένου χρόνου αποκατάστασης του συστήματος για βηματικές εισόδους, χωρίς απαραίτητα να τις ανιχνεύει ή να είναι χρονικά βέλτιστο. Στο παρόν κεφάλαιο αντί να αναζητούμε τέλεια ανίχνευση, θα επιλέξουμε τον FSTS ελεγκτή ο οποίος ελαχιστοποιεί την  $l^1$ -νόρμα του σφάλματος σταθερής κατάστασης, ή την  $l^\infty$ -νόρμα ενός συγκεκριμένου διανύσματος σφάλματος. Αποτέλεσμα των παραπάνω μπορεί να είναι βέβαια και η τέλεια ανίχνευση. Θα θεωρήσουμε την περίπτωση βηματικών εισόδων, ωστόσο οποιαδήποτε φραγμένη είσοδος μπορεί να αντιμετωπιστεί αντίστοιχα.

Θεωρούμε το διακριτό γραμμικό σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης του Σχήματος 5, όπου  $P = N_p D_p^{-1} = \tilde{D}_p^{-1} \tilde{N}_p \in \mathbb{R}^{l \times m}(d)$ ,  $C = N_c D_c^{-1} = \tilde{D}_c^{-1} \tilde{N}_c \in \mathbb{R}^{m \times l}(d)$  και  $(N_p, D_p), (\tilde{D}_p, \tilde{N}_p), (N_c, D_c), (\tilde{D}_c, \tilde{N}_c)$  είναι ζεύγη πρώτων πολυωνυμικών πινάκων.

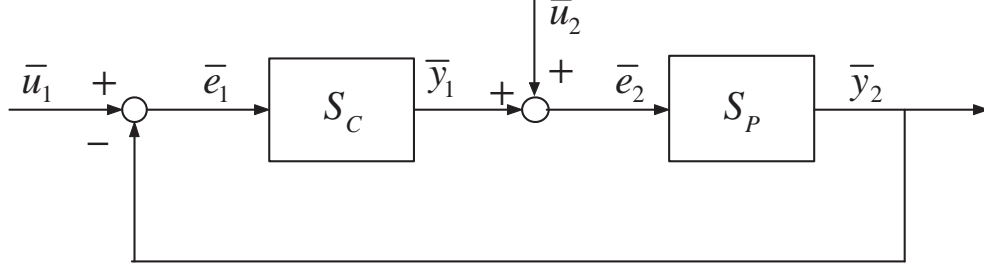
Αν το σύστημα είναι FST σταθεροποιημένο, τότε η συνάρτηση μεταφοράς του σφάλματος από το  $\bar{u}_1$  στο  $\bar{e}_1$  είναι

$$H_{11}(P, C) = D_c \tilde{D}_p \quad (99)$$

Υποθέτουμε ότι οι βαθμοί των πολυωνυμικών πινάκων είναι  $\partial_s(\tilde{D}_p) = \nu$  και  $\partial_s(D_c) = n$ . Τότε οι  $\tilde{D}_p$  και  $D_c$  γράφονται ως εξής:

$$\tilde{D}_p = \tilde{D}_{p0} + \tilde{D}_{p1}d + \dots + \tilde{D}_{p\nu}d^\nu \quad (100)$$

$$D_c = D_{c0} + D_{c1}d + \dots + D_{cn}d^n \quad (101)$$



Σχήμα 5: Βρόγχος μοναδιαίας ανάδρασης (MIMO περίπτωση)

Το σφάλμα  $\bar{e}_1$  λόγω μιας βηματικής εισόδου  $\bar{u}_1$  της μορφής

$$\bar{u}_1 = \{0; \bar{u}_c, \bar{u}_c, \dots\} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{u}_c d^i, \quad \bar{u}_c \in \mathbb{R}^l \quad (102)$$

μπορεί να υπολογιστεί ως εξής. Αρχικά υπολογίζουμε το διάνυσμα

$$\bar{u}_p = \tilde{D}_p \bar{u}_1 \quad (103)$$

Αυτό δίνει

$$\bar{u}_p = \bar{u}_{p0} + \bar{u}_{p1}d + \dots + \bar{u}_{p\nu}(d^\nu + d^{\nu+1} + \dots) \quad (104)$$

όπου

$$\bar{u}_{pk} = \sum_{i=0}^k \tilde{D}_{pi} \bar{u}_c, \quad k = 0, \dots, \nu \quad (105)$$

Τότε, σύμφωνα με τις σχέσεις (99) και (103)

$$\bar{e}_1 = D_c \bar{u}_p \quad \text{ή} \quad \bar{e}_{1k} = \sum_{i+j=k} D_{ci} \bar{u}_{pj} \quad (106)$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \bar{e}_{10} &= D_{c0} \bar{u}_{p0} \\ \bar{e}_{11} &= D_{c0} \bar{u}_{p1} + D_{c1} \bar{u}_{p0} \\ &\vdots \\ \bar{e}_{1k} &= (D_{c0} + D_{c1} + \dots + D_{cn}) \bar{u}_{p\nu}, \quad k \geq n + \nu \end{aligned} \quad (107)$$

Επομένως το  $\bar{e}_1$  φτάνει στην τιμή σταθερής κατάστασης (steady state value) το πολύ σε  $n + \nu$  βήματα. Για την υπόλοιπη ανάλυση θα ορίσουμε τα ακόλουθα διανύσματα σφάλματος

$$\bar{E}_1 := \left[ \bar{e}_{10}^T \quad \bar{e}_{11}^T \quad \dots \quad \bar{e}_{1(n+\nu)}^T \right]^T \quad (108)$$





όπου  $\hat{A}_{21}$  είναι γνωστός πραγματικός πίνακας και το  $\bar{z}$  δίνεται από τη σχέση (113).

Μπορούμε, τώρα, να δώσουμε τη λύση στα δύο προβλήματα βελτιστοποίησης που προαναφέραμε [23].

**Θεώρημα 6.3.1 ( $l^1$ -Βέλτιστη FSTS):** Έστω  $P = \tilde{D}_p^{-1}\tilde{N}_p \in \mathbb{R}^{l \times m}(d)$  είναι μια αριστερή  $\mathbb{R}[d]$ -πρώτη MFD της συνάρτησης μεταφοράς της ελεγχόμενης διεργασίας και  $C = N_c D_c^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times l}(d)$  μια δεξιά  $\mathbb{R}[d]$ -πρώτη MFD οποιουδήποτε FSTS ελεγκτή. Θεωρούμε επίσης ότι  $L_p = \begin{bmatrix} \tilde{N}_p & \tilde{D}_p \end{bmatrix}$  είναι ο αριστερός δομικός πίνακας της ελεγχόμενης διεργασίας και  $R_c = \begin{bmatrix} N_c^T & D_c^T \end{bmatrix}^T$  είναι ο δεξιός δομικός πίνακας του ελεγκτή με  $\partial_s(L_p) = \nu$  και  $\partial_s(R_c) = k$ . Τότε, υπάρχει πάντα ένας FSTS ελεγκτής τ.ω.  $\|\bar{e}_{1,ss}\| = \text{ελάχιστο}$ , αν  $k \geq k_{min}$  όπου  $k_{min}$  είναι ο βαθμός οποιασδήποτε ελαχιστοβάθμιας ως προς τις στήλες λύσης της Διοφαντικής εξίσωσης  $\tilde{N}_p X + \tilde{D}_p Y = I_l$ .

**Απόδειξη:** Για κάθε  $k \geq k_{min}$ , οι εξισώσεις (112) μας δίνουν τη λύση του FSTS προβλήματος. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (112) και (115) μαζί με την ελαχιστοποίηση της  $l^1$ -νόρμας του  $\bar{e}_{1,ss}$  καταλήγουμε στο ακόλουθο πρόβλημα.

$$\begin{array}{l} \text{ελαχιστοποίησησε} \quad \|\bar{e}_{1,ss}\|_1 \\ \text{με συνθήκη} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & 0 & -I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{y} \\ \bar{e}_{1,ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{0} \end{bmatrix} \\ := A \quad \quad \quad := \bar{x} \quad \quad \quad := \bar{b} \end{array} \quad (117)$$

Εφόσον το  $\bar{x}$  δεν είναι αναγκαία θετικό, η (117) ανάγεται στο παρακάτω γραμμικό πρόβλημα (βλέπε παρατήρηση 6.2.6).

$$\begin{array}{l} \text{ελαχιστοποίησησε} \quad \sum_{i=1}^l (e_{1,ssi}^+ + e_{1,ssi}^-) \\ \text{με συνθήκη} \end{array} \quad \begin{array}{c} [ A \quad -A ] \begin{bmatrix} \bar{x}^+ \\ \bar{x}^- \end{bmatrix} = \bar{b} \end{array} \quad (118)$$

□

**Θεώρημα 6.3.2 ( $l^\infty$ -Βέλτιστη FSTS):** Έστω  $P = \tilde{D}_p^{-1}\tilde{N}_p \in \mathbb{R}^{l \times m}(d)$  είναι μια αριστερή  $\mathbb{R}[d]$ -πρώτη MFD της συνάρτησης μεταφοράς της ελεγχόμενης διεργασίας και  $C = N_c D_c^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times l}(d)$  μια δεξιά  $\mathbb{R}[d]$ -πρώτη MFD οποιουδήποτε FSTS ελεγκτή. Θεωρούμε επίσης ότι  $L_p = \begin{bmatrix} \tilde{N}_p & \tilde{D}_p \end{bmatrix}$  είναι ο αριστερός δομικός πίνακας της ελεγχόμενης διεργασίας και  $R_c = \begin{bmatrix} N_c^T & D_c^T \end{bmatrix}^T$

είναι ο δεξιός δομικός πίνακας του ελεγκτή με  $\partial_s(L_p) = \nu$  και  $\partial_s(R_c) = k$ . Τότε, υπάρχει πάντα ένας FSTS ελεγκτής τ.ω.  $\|\bar{E}_1\| = \text{ελάχιστο}$ , αν  $k \geq k_{min}$  όπου  $k_{min}$  είναι ο βαθμός οποιασδήποτε ελαχιστοβάθμιας ως προς τις στήλες λύσης της Διοφαντικής εξίσωσης  $\tilde{N}_p X + \tilde{D}_p Y = I_l$ .

**Απόδειξη:** Για κάθε  $k \geq k_{min}$  η λύση της Διοφαντικής εξίσωσης  $\tilde{N}_p X + \tilde{D}_p Y = I_l$  μπορεί να εκφραστεί από το σύστημα εξισώσεων (112). Εφόσον  $\|\bar{E}_1\|_\infty = \max |E_{1i}|$ ,  $i = 1, \dots, l(k + \nu)$  το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\begin{aligned} & \text{ελαχιστοποίησε } \max_i |E_{1i}| \\ & \text{με συνθήκη} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ \hat{A}_{21} & 0 & -I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{y} \\ \bar{E}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (119)$$

όπου  $A_{11}, A_{12}, \bar{z}, \bar{y}, \bar{b}_1$  ικανοποιούν το Θεώρημα 6.3.1 και  $\hat{A}_{21}$  δίνεται από την εξίσωση (116). Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε ένα σπάντα γραμμικό πρόγραμμα ως εξής ([26]). Έστω

$$\max_i |E_{1i}| = r \in R_{\geq 0} \quad (120)$$

Τότε  $-r \geq E_{1i} \geq r$ ,  $i = 1, \dots, l(k + \nu)$ , και αν η  $i$ -οστή γραμμή του  $\hat{A}_{21}$  παριστάνεται με  $\hat{a}_{21i}^T$ , έχουμε από την (118)

$$\hat{a}_{21i}^T \bar{z} + r \geq 0 \quad \text{και} \quad -\hat{a}_{21i}^T \bar{z} + r \geq 0 \quad (121)$$

Έτσι, εισάγοντας surplus μεταβλητές  $\bar{u}_1 \geq 0$ ,  $\bar{u}_2 \geq 0$  και ονομάζοντας  $i_c$  το διάνυσμα στήλη με όλα τα στοιχεία μονάδες, το πρόβλημα (119) γίνεται

$$\begin{aligned} & \text{ελαχιστοποίησε } r \\ & \text{με συνθήκη} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{A}_{21} & 0 & i_c & -I_l & 0 \\ -\hat{A}_{21} & 0 & i_c & 0 & -I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{y} \\ r \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (122)$$



Εφόσον τα  $\bar{z}$ ,  $\bar{y}$  δεν είναι αναγκαστικά θετικά, καταλήγουμε στο επόμενο γραμμικό πρόγραμμα.

ελαχιστοποίηση  $r$

$$\text{με συνθήκη} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{11} & A_{12} & -A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{A}_{21} & -\hat{A}_{21} & 0 & 0 & i_c & -I_l & 0 \\ -\hat{A}_{21} & \hat{A}_{21} & 0 & 0 & i_c & 0 & -I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}^+ \\ \bar{z}^- \\ \bar{y}^+ \\ \bar{y}^- \\ r \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{0} \end{bmatrix} \quad (123)$$

□

**Παρατήρηση 6.3.3** Το απόλυτο ελάχιστο της  $l^1$ -νόρμας  $\|\bar{e}_{1,ss}\|$  του σφάλματος σταθερής κατάστασης είναι προφανώς το μηδέν, γεγονός το οποίο οδηγεί σε τέλεια ανίχνευση. Συνεπώς, αν για  $k = \partial_s(R_c)$  υπάρχει ένας FSTS ελεγκτής ανίχνευσης, αυτός θα αποτελεί τη λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης (118) του Θεωρήματος 6.3.1. Η λύση στο πρόβλημα αυτό δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδική και αυτό μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα σύγκλισης στον αλγόριθμο βελτιστοποίησης. Ένας τρόπος για να αντιμετωπίσουμε αυτά τα προβλήματα είναι να εισάγουμε περισσότερους περιορισμούς στο ΓΠ όπως ακριβώς θα δείξουμε σε ακόλουθη ενότητα.

## 6.4 Εύρωστη FSTS

Από την ανάλυση που κάναμε στο Κεφάλαιο 5, είναι ξεκάθαρο ότι το βασικό χαρακτηριστικό της FST σταθεροποίησης είναι η τοποθέτηση των πόλων της  $d$ -συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού συστήματος στο άπειρο, ή των ιδιοτιμών του κλειστού συστήματος στο μηδέν. Το γεγονός αυτό κάνει το σχεδιασμό του FSTS ελεγκτή πολύ ευαίσθητο σε μεταβολές των παραμέτρων της ελεγχόμενης διεργασίας. Για παράδειγμα μια αφελής επιλογή του  $R$  στην περίπτωση ανίχνευσης μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα ένα σύστημα χωρίς την επιθυμητή απόδοση έναντι σε μεταβολές των παραμέτρων της ελεγχόμενης διεργασίας. Εφόσον το  $R$  είναι η ελεύθερη παράμετρος η οποία καθορίζει τον FSTS ελεγκτή, και στην περίπτωση ανίχνευσης το  $R$  δεν καθορίζεται μοναδικά από τη λύση της εξίσωσης

$$Q\tilde{D}_r + N_p R \tilde{D}_p = Y \tilde{D}_p \quad (124)$$

μπορούμε να επιλέξουμε το συγκεκριμένο  $R$  που μας παρέχει εύρωστη απόδοση.

Οι Zhao και Kimura [33]-[36] ασχολήθηκαν με το πρόβλημα του εύρωστου deadbeat ελέγχου. Στην ενότητα αυτή, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της νόρμας που εισάγαμε στην παράγραφο 6.1.1 θα υπολογίσουμε έναν διαφορετικό και πιο αποτελεσματικό δείκτη ευρωστίας (robustness index) από αυτόν που εισάγανε οι Zhao και Kimura. Αυτό μας επιτρέπει να εκμεταλευτούμε τη γραμμικότητα του τύπου (124) και να ανάγουμε το πρόβλημα της ευρωστίας σε ένα απλό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού [24]. Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε ότι η «ονομαστική» (nominal) ελεγχόμενη διεργασία ανιχνεύει, υπό την έννοια πεπερασμένου χρόνου αποκατάστασης, ακριβώς εισόδους με φραγμένη  $l^\infty$ -νόρμα και υπόκειται σε πολλαπλασιαστικές διαταραχές.

Θεωρούμε το σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης του Σχήματος 5 και έστω ότι παριστάνουμε με  $P_0$  τη συνάρτηση μεταφοράς της ονομαστικής ελεγχόμενης διεργασίας και με  $P$  τη δυναμική της πραγματικής ελεγχόμενης διεργασίας. Μια πολλαπλασιαστική διαταραχή θα μας δώσει

$$P - P_0 = \Delta P \cdot P, \quad \Delta P \text{ } l^\infty\text{-stable και } g_\infty(\Delta P) = p \quad (125)$$

Η ονομαστική συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος από το  $\bar{u}_1$  στο  $\bar{y}_2$  είναι

$$G_0 := W_{21}(P_0, C) = P_0 C (I + P_0 C)^{-1} \quad (126)$$

και η διαταραγμένη συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$$G := W_{21}(P, C) = P C (I + P C)^{-1} \quad (127)$$

με απλές πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$G - G_0 = \Delta G \cdot G \quad (128)$$

όπου

$$\Delta G = (I - G_0) \Delta P \quad (129)$$

Έτσι

$$g_p(\Delta G) \leq g_p(I - G_0) g_p(\Delta P) \quad (130)$$

και εφόσον η επαγόμενη  $l^\infty$ -νόρμα φράσει από πάνω όλες τις υπόλοιπες επαγόμενες νόρμες, μπορούμε να επιλέξουμε σαν δείκτη ευρωστίας την  $l^\infty$ -νόρμα του  $I - G_0$ , δηλαδή,

$$\rho := g_\infty(I - G_0) \quad (131)$$

Στην περίπτωση FST σταθεροποίησης,  $G_0 = I - D_c \tilde{D}_p$  και η (131) γίνεται

$$\rho := g_\infty(D_c \tilde{D}_p) \quad (132)$$

Το ακόλουθο Θεώρημα αποτελεί τη λύση του FSTS προβλήματος [24].

**Θεώρημα 6.4.1 (Εύρωστη FSTS):** Θεωρούμε το σύστημα κλειστού βρόγχου του Σχήματος 5 και έστω ότι  $P_0 = \tilde{D}_{p0}^{-1} \tilde{N}_{p0} = N_{p0} D_{p0}^{-1} \in \mathbb{R}^{l \times m}(d)$ ,  $C = \tilde{D}_c^{-1} \tilde{N}_c = N_c D_p^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times l}(d)$  είναι αριστερή και δεξιά MFD της ονομαστικής ελεγχόμενης διεργασίας και του ελεγκτή αντίστοιχα. Αν  $\bar{u}_1 = \tilde{D}_r^{-1} \tilde{n}_r$ ,  $\|\bar{u}_1\|_\infty < \infty$  είναι μια αριστερή MFD της εισόδου που θέλουμε να ανιχνεύσουμε, τότε η εύρωστη FSTS σε πολλαπλασιαστικές διαταραχές μπορεί να περιγραφεί από το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{array}{ll} \text{ελαχιστοποίηση} & g_\infty((Y - N_p R) \tilde{D}_p) = \|(Y - N_p R) \tilde{D}_p\|_1 \\ \text{με συνθήκη} & Q \tilde{D}_r + N_p R \tilde{D}_p = Y \tilde{D}_p \end{array} \quad (133)$$

για κάποιο συγκεκριμένο  $k = \partial_s(R)$  για το οποίο η εξίσωση

$$Q \tilde{D}_r + N_p R \tilde{D}_p = Y \tilde{D}_p \quad (134)$$

έχει λύση και  $Y$  είναι μια συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης  $\tilde{N}_p X + \tilde{D}_p Y = I_l$ .

**Απόδειξη:** Αν  $(X, Y)$  είναι μια συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης

$$\tilde{N}_p X + \tilde{D}_p Y = I_l$$

τότε η οικογένεια όλων των FSTS ελεγκτών που ανιχνεύουν την είσοδο  $\bar{u}_1 = \tilde{D}_r^{-1} \tilde{n}_r$ , δίνεται από τις σχέσεις

$$N_c = X + D_p R, \quad D_c = Y - N_p R \quad (135)$$

όπου το  $R$  ικανοποιεί την εξίσωση (134). Για ευρωστία, αν  $k = \partial_s(R)$ , η σχέση

$$\rho_k := g_\infty(D_c \tilde{D}_p) = g_\infty((Y - N_p R) \tilde{D}_p) = \|(Y - N_p R) \tilde{D}_p\|_1$$

θα πρέπει να είναι ελάχιστη. Αυτό μας οδηγεί στο πρόβλημα βελτιστοποίησης (133), το οποίο είναι ένα γραμμικό πρόγραμμα όπως αναφέρουμε στην παράγραφο 6.3.

□

**Παρατήρηση 6.4.2** *Εξαιτίας της φύσης των γραμμικών προγραμμάτων, η εύρωστη λύση  $\rho_k^*$  για κάποιο συγκεκριμένο  $k = \partial_s(R)$  ανήκει σε υποπεριοχή της λύσης γραμμικού προγράμματος με  $l = \partial_s(R) > k$ , (είναι δηλαδή *suboptimal*). Επομένως η  $\rho_k^*$  είναι μονοτονικά φθίνουσα συνάρτηση του  $k$ , δηλαδή*

$$\rho_l^* \leq \rho_k^*, \quad l \leq k$$

Για το λόγο αυτό μπορούμε να βελτιώσουμε την απόδοση της ευρωστίας του κλειστού συστήματος με το να αυξήσουμε τον χρόνο αποκατάστασης της απόκρισής του.

**Παρατήρηση 6.4.3** *Ο ελεγκτής του Θεωρήματος 6.4.1 δεν εγκνύται απαραίτητα ευστάθεια της διαταραγμένης συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού συστήματος. Πράγματι, από την εξίσωση (128) έχουμε ότι*

$$G = (I - \Delta G)^{-1} G_0$$

Για ευστάθεια, το  $(I - \Delta G)^{-1}$  θα πρέπει να είναι ευσταθές και αυτό είναι πιθανό αν [9]

$$g_\infty(\Delta G) = g_\infty((I - G_0)\Delta P) < 1$$

Έτσι, θα πρέπει να επιλέξουμε ένα  $k = \partial_s(R)$  τ.ω.

$$g_\infty(I - G_0) = \text{ελάχιστο} \quad \text{και} \quad g_\infty((I - G_0)\Delta P) < 1$$

## 6.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αναφερθήκαμε σε κάποια προχωρημένα προβλήματα σχεδιασμού οσον αφορά την FST σταθεροποίηση. Ασχοληθήκαμε με προβλήματα βελτιστοποίησης και ευρωστίας στα πλαίσια των συστημάτων μοναδιαίας ανάδρασης που χρησιμοποιήθηκαν σ' αυτήν την εργασία.

Συγκεκριμένα, περιγράψαμε τον τρόπο με τον οποίο τα παρακάτω προβλήματα:

ελαχιστοποίησης της  $l^1$ -νόρμας του σφάλματος σταθερής κατάστασης

ελαχιστοποίησης της  $l^\infty$ -νόρμας του διανύσματος του σφάλματος

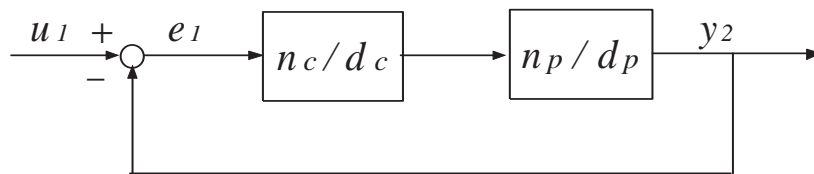
ευρωστία σε πολλαπλασιαστικές διαταραχές της ελεγχόμενης διεργασίας

μπορούν να αναχθούν σε πεπερασμένα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης δίνονται αναλυτικά στο επόμενο και τελευταίο κεφάλαιο.

## 7 Αλγοριθμοί-Παραδείγματα

Βασισμένοι στα θεωρητικά αποτελέσματα που εξάγαμε στο Κεφάλαιο 6 θα αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο με τον οποίο να υπολογίζουμε έναν FSTS ελεγκτή, ο οποίος να είναι ταυτόχρονα βέλτιστα εύρωστος. Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο σε ένα σύστημα κλειστού βρόγχου μοναδιαίας ανάδρασης και αφού υπολογίσουμε τον εύρωστο ελεγκτή θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά του σε συγκεκριμένες μεταβολές των παραμέτρων του συστήματος.

Η διάταξη που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ένα κλειστό σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης (Σχήμα 6) στο οποίο εφαρμόζεται εξωτερικά μια είσοδος  $u_1 = \frac{n_r}{d_r}$  και λαμβάνεται μια έξοδος  $y_2$  (σύστημα μιας εισόδου-μιας εξόδου - SISO). Ο ελεγκτής και η ελεγχόμενη διεργασία περιγράφονται από τα «πρώτα» πολυωνυμικά κλάσματα  $p = \frac{n_p}{d_p}$  και  $c = \frac{n_c}{d_c}$  αντίστοιχα.



Σχήμα 6: Βρόγχος μοναδιαίας ανάδρασης (SISO περίπτωση)

Η διάταξη του Σχήματος 6, δεδομένης μιας ονομαστικής (nominal) ελεγχόμενης διεργασίας  $p_0$ , σταθεροποιείται από μια οικογένεια FST ελεγκτών, οι οποίοι παραμετροποιούνται ως εξής:  $n_c = n_{cp} + t \cdot d_p$ ,  $d_c = d_{cp} - t \cdot n_p$ , όπου  $t$  είναι μια ελεύθερη παράμετρος. Βέβαια, μια απερίσκεπτη επιλογή του  $t$  μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα ένα σύστημα με χαμηλή απόδοση στην περίπτωση μικρών μεταβολών στις παραμέτρους της ελεγχόμενης διεργασίας. Για το λόγο αυτό θα επιλέξουμε  $t$  που να εξασφαλίζει εύρωστη απόδοση του συστήματος.

Ο δείκτης ευρωστίας (robustness index) που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η  $\|d_c d_p\|_1$  νόρμα, όπου  $H_{11}(p, c) = d_c d_p$  είναι η συνάρτηση μεταφοράς του σφάλματος από το  $\bar{u}_1$  στο  $\bar{e}_1$  (παράγραφος 6.4). Ελαχιστοποιώντας τον δείκτη ευρωστίας υπό τη συνθήκη ανίχνευσης (tracking condition)  $d_r |d_p d_c|$  (παράγραφος 5.3), υπολογίζουμε την παράμετρο  $t$  που μας δίνει τον ζητούμενο εύρωστο FST ελεγκτή. Ο ελεγκτής αυτός καθιστά το σύστημα βέλτιστα εύρωστο σε μικρές μεταβολές των παραμέτρων της ονομαστικής ελεγχόμενης διεργασίας.

## 7.1 FST αλγόριθμος

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε συνοψίζεται στα παρακάτω βασικά βήματα:

*Αλγόριθμος:*

*Βήμα 1* Υπολογισμός της οικογένειας των FST ελεγκτών  $(n_{cp}, d_{cp})$  που σταθεροποιούν την ελεγχόμενη διεργασία και παραμετροποίηση τους:

$$n_c = n_{cp} + t \cdot d_p, \quad d_c = d_{cp} - t \cdot n_p$$

*Βήμα 2* Υπολογισμός της ελεύθερης παραμέτρου  $t$  ελαχιστοποιώντας την 1-νόρμα  $\|d_c \cdot d_p\|_1$  ως προς τη συνθήκη ανίχνευσης  $d_r | d_p d_c$

*Βήμα 3* Αντικατάσταση του  $t$  που υπολογίσαμε στην οικογένεια των FST ελεγκτών για να υπολογίσουμε τον βέλτιστα εύρωστο.

Θα εξηγήσουμε αναλυτικά τον τρόπο υλοποίησης του κάθε βήματος:

*Βήμα 1:*

Ο υπολογισμός της οικογένειας των FST ελεγκτών είναι αρκετά απλός. Αρκεί να υπολογίσουμε μια λύση της Διοφαντικής εξίσωσης  $n_p n_c + d_p d_c = 1$  και να την παραμετροποιήσουμε κατάλληλα. Ένας ελεγκτής που μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα είναι ο «πρώτος» (prime) FSTS ελεγκτής (παράγραφος 5.2). Ο υπολογισμός γίνεται με τη χρήση πινάκων Toeplitz και μας δίνει τον «πρώτο» FSTS ελεγκτή:

$$\hat{c} = \frac{\hat{n}_c}{\hat{d}_c} \quad \text{ή} \quad c_{prime} = \frac{n_{pc}}{d_{pc}}$$

με τη χαρακτηριστική ιδιότητα:  $\partial(\hat{n}_c) = n - 1$ ,  $\partial(\hat{d}_c) = m - 1$ , όπου  $n = \partial(d_p)$ ,  $m = \partial(n_p)$ .

Η οικογένεια όλων των FSTS ελεγκτών δίνεται από την παραμετροποίηση:

$$n_c = n_{cp} + t \cdot d_p \tag{136}$$

$$d_c = d_{cp} - t \cdot n_p \tag{137}$$

όπου  $t$  είναι η ελεύθερη παράμετρος την οποία θα διερευνήσουμε στο επόμενο βήμα.

*Βήμα 2:*

Το βήμα αυτό υλοποιείται εύκολα με τη χρήση γραμμικού προγραμματισμού. Το γραμμικό πρόγραμμα που θα χρειαστεί να λύσουμε είναι το εξής (παράγραφος 6.2):

$$\begin{array}{ll} \text{ελαχιστοποίηση} & \|d_c \cdot d_p\|_1 \\ \text{με συνθήκη} & d_r |d_p d_c \end{array}$$

Μια επιπλέον συνθήκη που θα βοηθήσει στη λύση είναι η

$$|d_c \cdot d_p| \leq \kappa \quad (138)$$

όπου  $\kappa$  μια άγνωστη πολυωνυμική συνάρτηση που θα υπολογίσουμε μέσα από το γραμμικό πρόγραμμα. Η συνθήκη αυτή, που δηλώνει το φράξιμο της συνάρτησης μεταφοράς του σφάλματος, ισχύει πάντα στην περίπτωση των FST σταθεροποιημένων συστημάτων, με τα οποία εργαζόμαστε και δηλώνει ότι το σφάλμα δεν μπορεί να παίρνει ανεξέλεγκτες τιμές. Έτσι, το γραμμικό πρόγραμμα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{array}{ll} \text{ελαχιστοποίηση} & \|d_c \cdot d_p\|_1 \\ \text{με συνθήκη} & d_r |d_p d_c \\ & |d_c \cdot d_p| \leq \kappa \end{array} \quad (139)$$

Θα προσπαθήσουμε να το φέρουμε στη μορφή (96). Ας δούμε πως αναλύεται η κάθε σχέση ξεχωριστά:

- Η νόρμα  $\|d_c \cdot d_p\|_1$  :

Η συνέλιξη των δύο πολυωνύμων  $d_c$  και  $d_p$  δίνεται υπό μορφή διανύσματος ως εξής:

$$\begin{bmatrix} (d_c \cdot d_p)_0 \\ (d_c \cdot d_p)_1 \\ \vdots \\ (d_c \cdot d_p)_k \end{bmatrix} \quad (140)$$

όπου  $\partial(d_c \cdot d_p) = k$ . Η 1-νόρμα του παραπάνω διανύσματος δεν είναι άλλο από το άθροισμα των συνιστωσών του, δηλαδή:

$$\|d_c \cdot d_p\|_1 = (d_c \cdot d_p)_0 + (d_c \cdot d_p)_1 + \dots + (d_c \cdot d_p)_k$$

Σύμφωνα με τη σχέση (138) το διάνυσμα (140) έχει μέγιστη τιμή το  $\bar{\kappa}$ , (όπου  $\bar{\kappa}$  το διάνυσμα των συντελεστών της πολυωνυμικής συνάρτησης

$\kappa$ ). Αρκεί λοιπόν να ελαχιστοποιήσουμε το διάνυσμα  $\bar{\kappa}$ . Θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix} (d_c \cdot d_p)_0 \\ (d_c \cdot d_p)_1 \\ \vdots \\ (d_c \cdot d_p)_k \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_k \end{bmatrix} \quad (141)$$

Η ζητούμενη 1-νόρμα παίρνει τότε τη μορφή:

$$\|d_c \cdot d_p\|_1 \leq \|\bar{\kappa}\|_1 = \kappa_0 + \kappa_1 + \dots + \kappa_k \quad (142)$$

Η σχέση (142) μας δίνει την ποσότητα που ζητούμε να ελαχιστοποιήσουμε, δηλαδή την *αντικειμενική συνάρτηση (objective function)* (παράγραφος 6.2), η οποία μπορεί να γραφεί σαν:

$$\bar{c}^T \cdot \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_k \end{bmatrix} \quad (143)$$

όπου το ζητούμενο  $\bar{x}$  δεν είναι άλλο από το  $\bar{\kappa}$ .

- *Συνθήκη αντίχυνσης  $d_r | d_p d_c$  :*

Η συνθήκη αυτή μπορεί να γραφεί σαν  $d_c \cdot d_p = q \cdot d_r$ , όπου  $q$  είναι μια ελεύθερη παράμετρος αντίχυνσης. Αν αντικαταστήσουμε τον όρο  $d_c$  από τη σχέση (137), προκύπτει η σχέση:

$$q \cdot d_r + t \cdot n_p \cdot d_p = d_{cp} \cdot d_p \quad (144)$$

Για να χειριστούμε εύκολα την σχέση (144) μπορούμε να την αναλύσουμε με τη χρήση πινάκων Toeplitz ως εξής:

$$\begin{bmatrix} d_{r0} & 0 & \dots & 0 \\ d_{r1} & d_{r0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & d_{r0} \\ d_{r\nu} & & & \vdots \\ 0 & d_{r\nu} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_{r\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} +$$



$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} (n_p \cdot d_p)_0 & 0 & \dots & 0 \\ (n_p \cdot d_p)_1 & (n_p \cdot d_p)_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & (n_p \cdot d_p)_0 \\ (n_p \cdot d_p)_\mu & & & \vdots \\ 0 & (n_p \cdot d_p)_\mu & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & (n_p \cdot d_p)_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d_{cp} \cdot d_p)_0 \\ \vdots \\ (d_{cp} \cdot d_p)_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \Rightarrow A_1 \cdot \bar{q} + A_2 \cdot \bar{t} = \bar{b} \tag{145}
\end{aligned}$$

ή σε συμπαγή μορφή:

$$A_{12} \cdot \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{t} \end{bmatrix} = \bar{b} \tag{146}$$

όπου

$$A_{12} = [ A_1 \quad A_2 ]$$

Για να παράγουμε τους πίνακες Toeplitz της σχέσης (145) θεωρήσαμε ότι:

Ο βαθμός του  $d_r$  είναι  $\nu$ :  $\partial(d_r) = \nu$

Ο βαθμός του  $q$  είναι  $n$ :  $\partial(q) = n$

Ο βαθμός του  $t$  είναι  $m$ :  $\partial(t) = m$

Ο βαθμός της συνέλιξης  $n_p \cdot d_p$  είναι  $\mu$ :  $\partial(n_p \cdot d_p) = \mu$

Ο βαθμός της συνέλιξης  $d_{cp} \cdot d_p$  είναι  $l$ :  $\partial(d_{cp} \cdot d_p) = l$

Αν μάλιστα λάβουμε υπόψη τη σχέση  $\partial(d_c \cdot d_p) = k$  και τη συνθήκη ανίχνευσης  $d_c \cdot d_p = q \cdot d_r$ , είναι προφανές ότι θα πρέπει να ισχύει:

$$\partial(d_c \cdot d_p) = \partial(q) + \partial(d_r) \Rightarrow$$

$$k = n + \nu$$

Από τη σχέση (146) παρατηρούμε ότι το άγνωστο διάνυσμα  $[\bar{q}^T \quad \bar{t}^T]^T$  δεν συμπίπτει με αυτό της σχέσης (143). Για να προχωρήσουμε στο γραμμικό πρόγραμμα θα πρέπει να ορίσουμε ένα νέο άγνωστο διάνυσμα, το

οποίο να περιλαμβάνει όλα τα προηγούμενα άγνωστα διανύσματα. Ορίζουμε έτσι το νέο ζητούμενο διάνυσμα:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{t} \\ \bar{\kappa} \end{bmatrix} \quad (147)$$

ενώ οι σχέσεις (143) και (146) γίνονται αντίστοιχα:

$$\bar{c}^T \cdot \bar{x} = \left[ \underbrace{\mathbb{O}}_{1 \times n} \mid \underbrace{\mathbb{O}}_{1 \times m} \mid \underbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}_{1 \times (n+\nu)} \right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{t} \\ \bar{\kappa} \end{bmatrix} \quad (148)$$

$$\left[ A_1 \mid A_2 \mid \mathbb{O} \right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{t} \\ \bar{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (149)$$

$$A_{eq} \cdot \bar{x} = \bar{b}_{eq} \quad (150)$$

- Η συνθήκη ανισότητας  $|d_c \cdot d_p| \leq \kappa$

Θα πρέπει να φέρουμε την παραπάνω συνθήκη στη μορφή  $A_{neq} \cdot \bar{x} \leq \bar{b}_{neq}$ . Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη συνθήκη αντίχρεωσης  $d_c \cdot d_p = q \cdot d_r$ . Η συνθήκη ανισότητας παίρνει τότε τη μορφή:

$$|q \cdot d_r| \leq \kappa$$

η οποία αναλύεται με τη χρήση πινάκων Toeplitz, όπως προηγουμένως, ως εξής:

$$|A_1 \cdot \bar{q}| \leq \bar{\kappa} \quad (151)$$

όπου ο πίνακας  $A_1$ , όπως και στη σχέση (145), είναι ο Toeplitz πίνακας:

$$A_1 = \begin{bmatrix} d_{r0} & 0 & \dots & 0 \\ d_{r1} & d_{r0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & d_{r0} \\ d_{r\nu} & & & \vdots \\ 0 & d_{r\nu} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_{r\nu} \end{bmatrix}$$

ενώ τα διανύσματα  $\bar{q}$  και  $\bar{\kappa}$  είναι:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \bar{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_k \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (145), η σχέση (151) γίνεται:

$$\begin{aligned} |\bar{b} - A_2 \cdot \bar{t}| &\leq \bar{\kappa} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\bar{\kappa} &\leq \bar{b} - A_2 \cdot \bar{t} \leq \bar{\kappa} \\ \Rightarrow \begin{cases} -A_2 \cdot \bar{t} - \bar{\kappa} &\leq -\bar{b} \\ A_2 \cdot \bar{t} - \bar{\kappa} &\leq \bar{b} \end{cases} \end{aligned} \quad (152)$$

όπου ο πίνακας  $A_2$  είναι ο Toeplitz πίνακας

$$A_2 = \begin{bmatrix} (n_p \cdot d_p)_0 & 0 & \dots & 0 \\ (n_p \cdot d_p)_1 & (n_p \cdot d_p)_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & (n_p \cdot d_p)_0 \\ (n_p \cdot d_p)_\mu & & & \vdots \\ 0 & (n_p \cdot d_p)_\mu & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & (n_p \cdot d_p)_\mu \end{bmatrix}$$

Οι σχέσεις (152) μπορούν να γραφούν σε μια μοναδική εξίσωση ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{O} & -A_2 & -I \\ \mathbb{O} & A_2 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{t} \\ \bar{\kappa} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\bar{b} \\ \mathbb{O} \\ \bar{b} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (153)$$

$$A_{neq} \cdot \bar{x} \leq \bar{b}_{neq} \quad (154)$$

Συγκεντρώνοντας τις σχέσεις (148), (150), (154) προκύπτει το γραμμικό σύστημα που έχει μια αντικειμενική συνάρτηση, μια συνθήκη ισότητας και μια συνθήκη ανισότητας και παίρνει τη μορφή :

$$\begin{aligned} \text{ελαχιστοποίηση} & \quad \bar{c}^T \bar{x} \\ \text{με συνθήκη} & \quad A_{eq} \cdot \bar{x} = \bar{b}_{eq} \\ & \quad A_{neq} \cdot \bar{x} \leq \bar{b}_{neq} \end{aligned} \quad (155)$$

όπου το άγνωστο διάνυσμα είναι:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{t} \\ \bar{\kappa} \end{bmatrix}$$

τα διανύσματα είναι:

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_{eq} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_{neq} = \begin{bmatrix} -\bar{b} \\ \mathbb{O} \\ \bar{b} \end{bmatrix}$$

και οι πίνακες είναι:

$$A_{eq} = [ A_1 \quad A_2 \quad \mathbb{O} ] , \quad A_{neq} = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & -A_2 & -I \\ \mathbb{O} & A_2 & -I \end{bmatrix}$$

με  $A_1, A_2, \bar{b}$  να ορίζονται από τη σχέση (145).

Λύνοντας το παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα με τη βοήθεια του προγράμματος MATLAB (με τρόπο που θα δούμε στη συνέχεια), υπολογίζουμε το άγνωστο διάνυσμα  $\bar{x}$ , από το οποίο εξάγουμε τη ζητούμενη παράμετρο  $\bar{t}$  της οικογένειας των FSTS ελεγκτών.

**Βήμα 3:**

Στο τελευταίο βήμα υπολογίζουμε τον ζητούμενο FSTS ελεγκτή αντικαθιστώντας απλά την βέλτιστη παράμετρο  $\bar{t}$ , που υπολογίσαμε στο προηγούμενο βήμα, στην οικογένεια των ελεγκτών της σχέσης (136):

$$n_c = n_{cp} + t \cdot d_p$$

$$d_c = d_{cp} - t \cdot n_p$$

Έτσι, η συνάρτηση μεταφοράς του FSTS ελεγκτή δίνεται από το «πρώτο» πολυωνυμικό κλάσμα  $c = \frac{n_c}{d_c}$ .

## 7.2 Υλοποίηση και αποτελέσματα στο MATLAB

Στη συνέχεια θα γράψουμε έναν αλγόριθμο στο MATLAB που να υλοποιεί την διαδικασία που περιγράψαμε στην παράγραφο (7.1).

Θα ξεκινήσουμε με την δημιουργία μιας συνάρτησης που να υπολογίζει τον «πρώτο» (prime) ελεγκτή που ζητείται στο *Βήμα 1* του αλγορίθμου. Η συνάρτηση ονομάζεται **prime\_FSTS** και έχει την εξής μορφή:

**prime\_FSTS**

```
function[nc,dc]=prime_FSTS(np,dp)

% Η συνάρτηση αυτή επιστρέφει το «πρώτο» ζεύγος λύσεων της
% Διοφαντικής εξίσωσης:  $np.nc + dp.dc = 1$  (I), ενός συστήματος
% μοναδιαίας ανάδρασης.
%
% Δεδομένα εισόδου:
% np:= αριθμητής της ελεγχόμενης διεργασίας
% dp:= παρονομαστής της ελεγχόμενης διεργασίας
% Δεδομένα εξόδου:
% nc:= αριθμητής του ελεγκτή
% dc:= παρονομαστής του ελεγκτή
%
% ===== ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ! =====
% Όλα τα διανύσματα των συντελεστών των πολυωνύμων θα πρέπει να
% γράφονται σαν αύξουσες δυνάμεις του  $d$  ( $:= z^{-1}$ ).
% =====

% ===== ΒΑΘΜΟΙ =====
% m:= βαθμός του np
% n:= βαθμός του dp
% mi:= βαθμός του nc
% ni:= βαθμός του dc
% =====

clc;
syms m n mi ni
m=length(np)-1;
n=length(dp)-1;

% ===== ΠΡΩΤΟΣ FSTS ΕΛΕΓΚΤΗΣ =====
% Ο «πρώτος» FSTS ελεγκτής είναι μια μοναδική λύση της (I), όπου τα
% nc, dc έχουν εν γένει βαθμούς  $mi=n-1$  &  $ni=m-1$ .
```

```

mi=n-1;
ni=m-1;

% ===== ΛΥΣΗ =====
% Η λύση δίνεται από την εξίσωση sol=inv(T)*e1, όπου T:=[T1 T2],
% T1, T2 := toeplitz πίνακες
% e1 := το μοναδιαίο διάνυσμα
% sol: = [nc' dc']'

r1=[np(1), zeros(1,mi)];
r2=[dp(1), zeros(1,ni)];

T1=toeplitz([np zeros(1,mi)],r1);
T2=toeplitz([dp zeros(1,ni)],r2);
T=[T1 T2];

e1=eye(m+mi+1,1);

sol=inv(T)*e1;

for i=1:ni+1
    nc(i)=sol(i);
end

for i=1:mi+1
    dc(i)=sol(ni+1+i);
end

```

◇

Η συνάρτηση **prime\_FSTS**, που υπολογίζει τον «πρώτο» ελεγκτή (nc,dc) θα χρησιμοποιηθεί σε μια δεύτερη συνάρτηση, η οποία να εκτελεί τη βελτιστοποίηση του *Βήματος 2* υπολογίζοντας την ελεύθερη παράμετρο  $\bar{t}$  και στη συνέχεια να την αντικαθιστά στην οικογένεια των FSTS ελεγκτών, δίνοντας έτσι τον βέλτιστο εύρωστο FSTS ελεγκτή του *Βήματος 3*. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **optimal\_FSTS** και συντάσσεται ως εξής:

**optimal\_FSTS**

```

function[opt_norm,nc,dc]=optimal_FSTS(m,np,dp,dr)

% ===== L_1-βέλτιστη FSTS =====
%
% Η συνάρτηση αυτή επιστρέφει τον αριθμητή και τον παρονομαστή του
% FSTS ελεγκτή (nc,dc) ενός διακριτού SISO συστήματος μοναδιαίας
% ανάδρασης, ο οποίος ελαχιστοποιεί την  $L_1$  νόρμα του «σφάλματος
% σταθερής κατάστασης».
%
% Το απόλυτο ελάχιστο της  $L_1$  νόρμας του σφάλματος σταθερής
% κατάστασης θα πρέπει προφανώς να είναι μηδέν, γεγονός που αντιστοιχεί
% σε τέλεια ανίχνευση (perfect tracking).
%
% =====
% Παράμετροι του Συστήματος:
% =====
%
% δεδομένα εισόδου:
% np:= αριθμητής ελεγχόμενης διεργασίας
% dp:= παρονομαστής ελεγχόμενης διεργασίας
% dr:= παρονομαστής εισόδου του συστήματος
% m:= βαθμός του t (ελεύθερη παράμετρος
% της οικογένειας των FSTS ελεγκτών).
%
% δεδομένα εξόδου:
% opt_norm:= η βέλτιστη 1-νόρμα της συνάρτηση μεταφοράς
% του σφάλματος
% nc:= αριθμητής του ελεγκτή
% dc:= παρονομαστής του ελεγκτή

% ===== ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ! =====
% Όλα τα διανύσματα των συντελεστών των πολυωνύμων θα πρέπει να
% γράφονται σαν αύξουσες δυνάμεις του  $d$  ( $:= z^{-1}$ ).
% =====
% Στις ακόλουθες σημειώσεις με το σύμβολο «.» θα δηλώνουμε τη
% συνέλιξη, ενώ με «*» θα δηλώνουμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων.
% =====

% ===== FSTS ελεγκτές: =====
%

```

```

% Θα υπολογίσουμε την οικογένεια όλων των ελεγκτών που σταθεροποιούν
% την ελεγχόμενη διεργασία υπό την έννοια του πεπερασμένου χρόνου
% αποκατάστασης (FST), με χρήση της συνάρτησης prime_FSTS:
%      ncp:= αριθμητής του «πρώτου» ελεγκτή
%      dcp:= παρονομαστής του «πρώτου» ελεγκτή

```

```

[ncp,dcp]=prime_FSTS(np,dp);

```

```

% Παραμετροποίηση των FSTS ελεγκτών
%      nc=ncp+t.dp
%      dc=dcp-t.np

```

```

% ===== ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ =====
%                               Γραμμικό Πρόγραμμα
%
% Ελαχιστοποίησε:      ||dc.dp||_1 (I)      (norm(dc.dp,1))
% με συνθήκες:      q.dr+t.np.dp=dcp.dp (II) (συνθήκη ανίχνευσης)
%                               |dc.dp| <=mu (III)
%
% (I) -- > συνάρτηση μεταφοράς του σφάλματος H11=dc.dp
% Η εξίσωση (II) προκύπτει από τη συνθήκη ανίχνευσης -- >
% -- > dc.dp=q.dr, όπου q:= είναι η ελεύθερη παράμετρος ανίχνευσης
%
% Ορίζουμε ( από την εξίσωση (II) ):

```

```

dd=conv(dcp,dp);
nd=conv(np,dp);

```

```

% =====
% Βαθμοί του συστήματος:
% =====
%      m:= βαθμός του t
%      n:= βαθμός του q
%      ni:= βαθμός του dr
%      mi:= βαθμός του nd
%      el:= βαθμός του dd
%      k-1=ni+n (mi+m):= βαθμός του mu

```

```

ni=length(dr)-1;
mi=length(nd)-1;

```



```

el=length(dd)-1;

% =====
% Συνθήκη 1 :
% =====
% Για να ορίζεται η (II) -- > n+ni=m+mi

n=m+(mi-ni);
k=n+ni+1;
if ((n<=el-ni) & (m<=el-mi))
    n=el-ni;
    m=el-mi;
end
% =====

% Η εξίσωση (II) αναλύεται με τη χρήση πινάκων Toeplitz ως εξής:
%  $A1*q+A2*t=b$  (IV)

% Η εξίσωση (III) αναλύεται με τη χρήση πινάκων Toeplitz ως εξής:
%  $|b-A2*t| \leq \mu$  (V)

a1=toeplitz([dr zeros(1,n)],zeros(1,n+1));
a2=toeplitz([nd zeros(1,m)],zeros(1,m+1));

% =====
% 1ος περιορισμός :
% =====
%  $Aeq*x=beq$  -- > προκύπτει από την (IV) όπου:
%  $Aeq=[A1 A2 0], beq=[b' 0]', x=[q' t' \mu']'$ 

a=[a1 a2];

Aeq=[a zeros(k)];

bb=[dd zeros(1,k-(el+1))];
beq=bb';

% =====
% 2ος περιορισμός :
% =====

```

```

% Aneq*x<=bneq -- > προκύπτει από την (V) όπου:
% Aneq=[0 -A2 -I;0 A2 -I], bneq=[-b' 0' b' 0']', x=[q' t' mu']'

c2=[zeros(k,n+1) a2];
Aneq=[-c2 -eye(k); c2 -eye(k)];

bn=[dd zeros(1,k-(el+1))];
bneq=[-bn';bn'];

% =====
% Αντικειμενική συνάρτηση :
% =====
% c'*x -- > προκύπτει από την (III) όπου:
% c'=[0 0 1 1 ... 1] , x=[q' t' mu']'

c=[zeros(1,m+n+2),ones(1,k)];

% =====
% [x,fval]=linprog(c,Aneq,beq,Aeq,beq);
% =====

% =====
% Αποτελέσματα: t, mu
% =====

t=[];
for i=n+2:n+m+2
    t=[t x(i)];
end
mu=[];
for i=(n+m+3):(n+m+2+k)
    mu=[mu x(i)];
end

% =====
% Βέλτιστη νόρμα:
% =====

% opt_norm=||dc.dp||_1

```

```

tnd=conv(nd,t);

if length(dd)>length(tnd)
    ddtnd=-[tnd zeros(1,length(dd)-length(tnd))]+dd;
elseif length(tnd)>length(dd)
    ddtnd=[dd zeros(1,length(tnd)-length(dd))]-tnd;
else
    ddtnd=dd-tnd;
end;

opt_norm=norm(ddtnd,1);

% =====
% Βέλτιστος ελεγχτής:
% =====

%   nc=ncp+t.dp
%   dc=dcp-t.np

tdp=conv(t,dp);
tnp=conv(t,np);

if length(ncp)>length(tdp)
    nc=[tdp zeros(1,length(ncp)-length(tdp))]+ncp;
elseif length(tdp)>length(ncp)
    nc=[ncp zeros(1,length(tdp)-length(ncp))]+tdp;
else
    nc=ncp+tdp;
end;

if length(dcp)>length(tnp)
    dc=-[tnp zeros(1,length(dcp)-length(tnp))]+dcp;
elseif length(tnp)>length(dcp)
    dc=[dcp zeros(1,length(tnp)-length(dcp))]-tnp;
else
    dc=dcp-tnp;
end;

contr=filt(nc,dc,1);

```

◇

Ας εφαρμόσουμε όμως την παραπάνω συνάρτηση σε ένα απλό παράδειγμα.

### 7.2.1 Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε το σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης του Σχήματος 6 και έστω ότι η συνάρτηση μεταφοράς της ελεγχόμενης διεργασίας είναι [12]:

$$p(d) = \frac{n_p(d)}{d_p(d)} = \frac{-0.0132d - 0.0139d^2}{1 - 2.1889d + 1.1618d^2} \quad (156)$$

Εφαρμόζοντας τη συνάρτηση **prime\_FSTS** στο MATLAB υπολογίζουμε τον «πρώτο» ελεγκτή που σταθεροποιεί το σύστημα υπό την έννοια του *πεπερασμένου χρόνου αποκατάστασης* (FST). Ο ελεγκτής αυτός είναι:

$$c_p = \frac{n_{cp}}{d_{cp}} = \frac{-105.3836 + 66.6854d}{1 + 0.7978d} \quad (157)$$

Όπως ήταν αναμενόμενο επαληθεύεται η ιδιότητα των «πρώτων» ελεγκτών, δηλαδή:  $\partial(n_{cp}) = \partial(d_p) - 1$  και  $\partial(d_{cp}) = \partial(n_p) - 1$ .

Έστω ότι το σύστημα διεγείρεται από *παραβολική* είσοδο της μορφής:

$$u_1(d) = \frac{d(d+1)}{(1-d)^3} = \frac{n_r(d)}{d_r(d)} \quad (158)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση **optimal\_FSTS** για να υπολογίσουμε τον βέλτιστα εύρωστο ελεγκτή που περιγράψαμε στον αλγόριθμο της παραγράφου 7.2, ενώ στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την απόκριση του συστήματος.

Η εφαρμογή της συνάρτησης (για  $m = \partial(t) = 3$ ) μας δίνει τον βέλτιστα εύρωστο ελεγκτή με συνάρτηση μεταφοράς:

$$c_{or} = \frac{n_{cor}}{d_{cor}} \Rightarrow \quad (159)$$

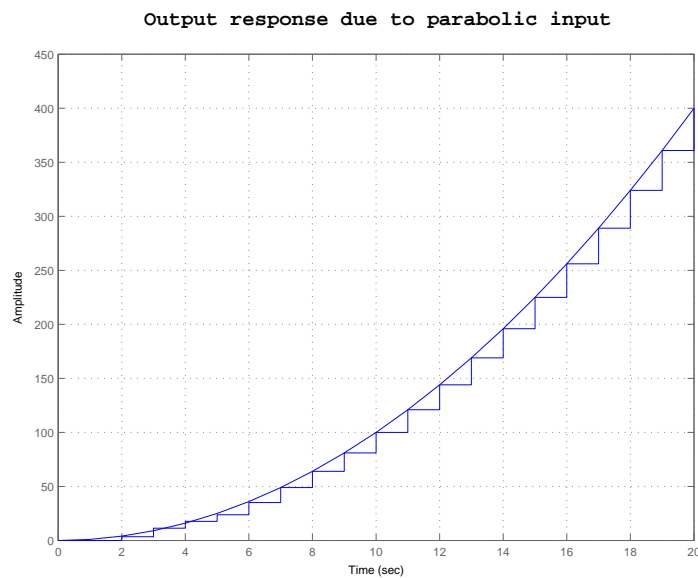
$$c_{or} = \frac{-257.3 + 440.7d - 164.6d^2 - 235.2d^3 + 247.7d^4 - 68.15d^5}{1 - 1.207d - 1.563d^2 + 1.933d^3 + 0.6532d^4 - 0.8154d^5}$$

Η τιμή της αντίστοιχης βέλτιστης νόρμας είναι:

$$\|d_c d_p\|_1 = 19.4733 \quad (160)$$

Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε την απόδοση του συστήματός μας προσομοιώνοντάς το με τη βοήθεια του Simulink (Σχήμα 20). Οι αποκρίσεις του συστήματος μοναδιαίας ανάδρασης με τη χρήση του  $c_{or}$  ελεγκτή, φαίνονται στα Σχήματα 7 και 8.

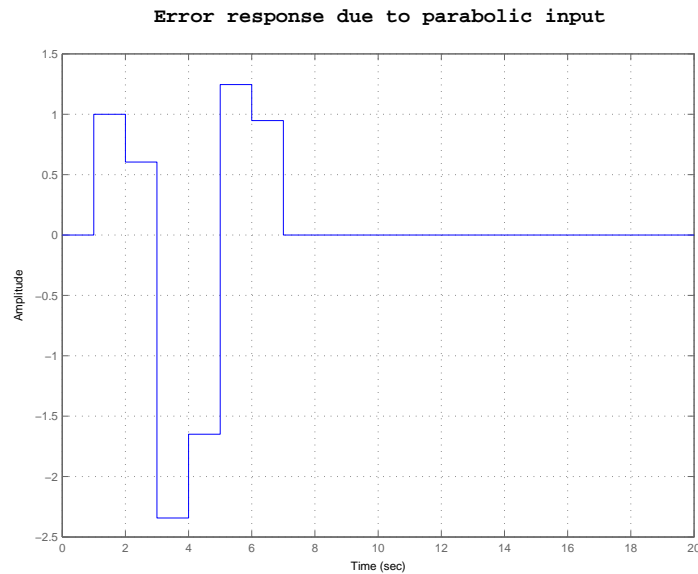
Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε το σύστημα αποκτά την ζητούμενη απόδοση, δηλαδή ανιχνεύει το παραβολικό σήμα εισόδου, σε μόλις 7 χρονικά βήματα (Σχήμα 7). Αυτό φαίνεται πιο ξεκάθαρα από το αντίστοιχο διάγραμμα του σφάλματος, το οποίο μηδενίζεται από το 7<sup>ο</sup> χρονικό βήμα και μετά (Σχήμα 8).



Σχήμα 7: Απόκριση του Σήματος Εξόδου σε παραβολική είσοδο ( $m = 3$ ).

Τα παραπάνω αποτελέσματα λήφθηκαν με βαθμό της ελεύθερης παραμέτρου  $t$  ίσο με 3 ( $\partial(t) = 3$ ). Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για διάφορες τιμές του  $m$ , ( $m = \partial(t)$ ) παρατηρούμε ότι η τιμή της νόρμας  $\|d_c d_p\|_1$  μειώνεται, δηλαδή γίνεται πιο βέλτιστη. Στο Σχήμα 9 μπορούμε να δούμε την μεταβολή της τιμής της νόρμας  $\|d_c d_p\|_1$  με το  $m$  και την βέλτιστη τιμή στην οποία καταλήγει (τα αποτελέσματα βρέθηκαν με τη χρήση του προγράμματος **-example\_FSTS-** που παραθέτουμε στο Παράρτημα Α').

Παρατηρούμε στο Σχήμα 9 ότι ο Δείκτης Ευρωστίας  $\|d_c d_p\|_1$  παρουσιάζει απότομη μείωση στα αρχικά βήματα. Έτσι, για μικρές τιμές του  $m$ , θα μπορούμε



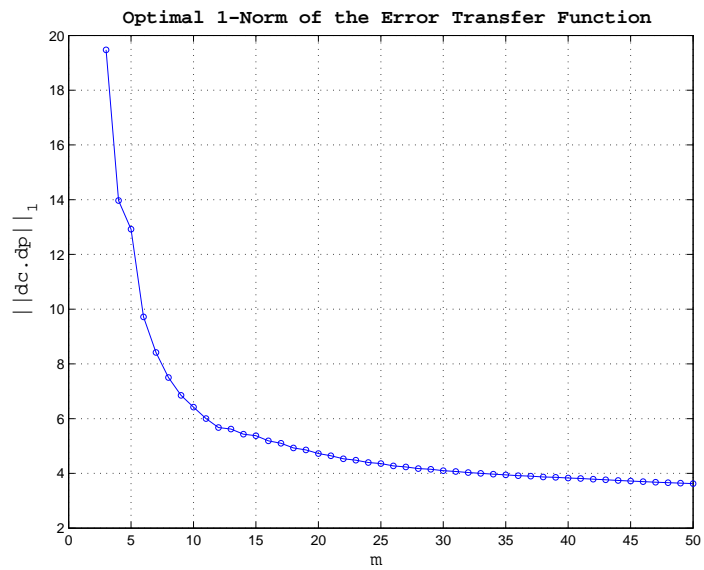
Σχήμα 8: Απόκριση του Σφάλματος Σταθερής Κατάστασης σε παραβολική είσοδο ( $m = 3$ ).

να περιμένουμε μεγάλη βελτίωση. Ωστόσο, όσο το  $m$  παίρνει μεγαλύτερες τιμές, η επιπλέον αύξησή του δεν επιφέρει μεγάλη βελτίωση στην ευρωστία. Στο παράδειγμα αυτό είναι αρκετό να πάρουμε τιμές του  $m < 30$ . Στον Πίνακα 1 φαίνονται τιμές της βέλτιστης νόρμας για διάφορα  $m$ , όπως υπολογίστηκαν από το πρόγραμμα **-example\_FSTS-**.

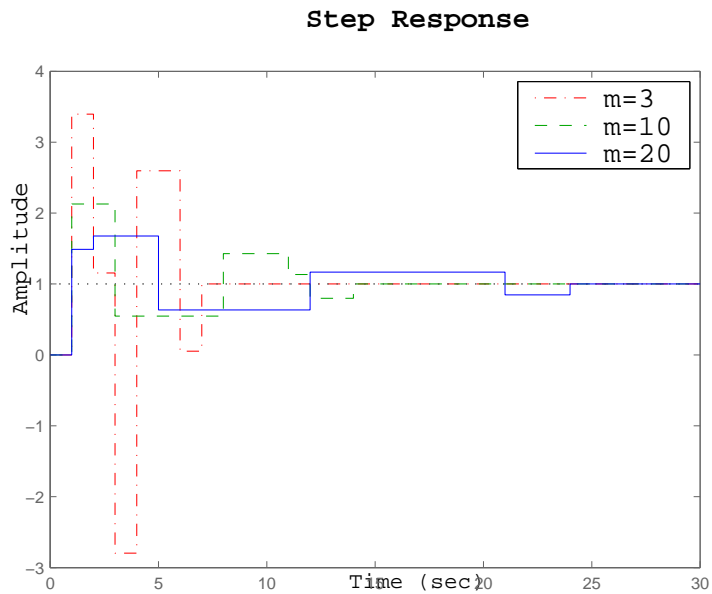
Για να δούμε πιο ξεκάθαρα την βελτίωση της ευρωστίας καθώς το  $m$  αυξάνεται, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα προσομοίωσης του συστήματος για  $m = 3, 10, 20$  (Σχήματα 10 & 11). Για πιο εύκολη παρατήρηση της απόκρισης, εφαρμόσαμε βηματική είσοδο στο σύστημα. Είναι ολοφάνερο ότι η ευρωστία βελτιώνεται με την αύξηση του  $m$ .

### 7.2.2 Επαλήθευση της Ευρωστίας του συστήματος

Το σύστημα που πραγματοποιήσαμε στο Παράδειγμα 7.2.1 είναι βέλτιστα εύρωστο. Για να επαληθεύσουμε την ευρωστία θα εφαρμόσουμε κάποιες διαταραχές στην ονομαστική ελεγχόμενη διεργασία (156) και θα μελετήσουμε εκ νέου την απόκριση του συστήματος χρησιμοποιώντας τον εύρωστο ελεγκτή που υπολογίσαμε προηγουμένως.



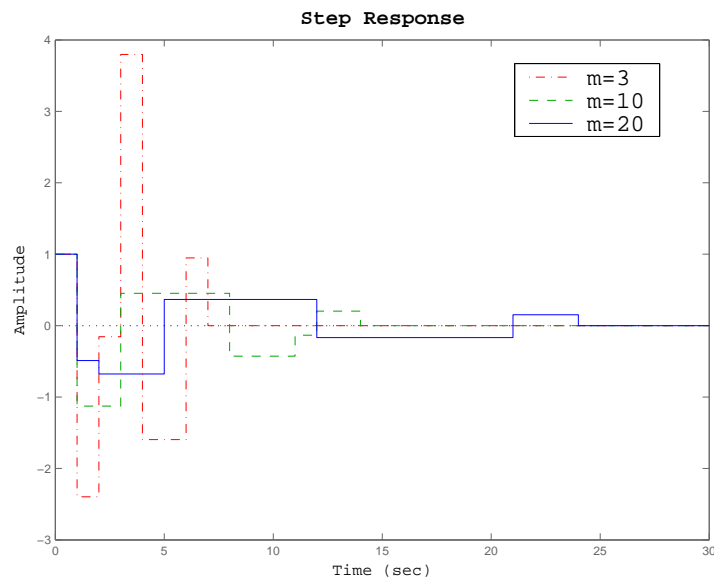
Σχήμα 9: Μεταβολή της βέλτιστης τιμής της νόρμας  $\|d_{cdp}\|_1$  ως προς το βαθμό  $m$  της ελεύθερης παραμέτρου  $t$ .



Σχήμα 10: Απόκριση του συστήματος σε βηματική είσοδο για  $m = 3, 10, 20$ .

$m$	$\ d_c d_p\ _1$	$m$	$\ d_c d_p\ _1$	$m$	$\ d_c d_p\ _1$
3	19.4733	13	5.6188	23	4.4826
4	13.9679	14	5.4303	24	4.3980
5	12.9210	15	5.3765	25	4.3591
6	9.7156	16	5.1874	26	4.2710
7	8.4184	17	5.0996	27	4.2363
8	7.5016	18	4.9274	28	4.1769
9	6.8487	19	4.8585	29	4.1480
10	6.4222	20	4.7250	30	4.0982
11	6.0014	21	4.6421	31	4.0663
12	5.6763	22	4.5315	32	4.0282

Πίνακας 1: Βέλτιστος Δείκτης Ευρωστίας  $\|d_c d_p\|_1$



Σχήμα 11: Απόκριση του σφάλματος σταθερής κατάστασης σε βηματική είσοδο για  $m = 3, 10, 20$ .

Οι πολλαπλασιαστικές διαταραχές που θα εφαρμόσουμε έχουν τη μορφή

$$P - P_0 = \Delta P \cdot P \quad , \quad \Delta P \in l^\infty - \text{ευσταθές} \quad (161)$$

όπου

$$\Delta P = \frac{b}{1 - a \cdot d} \quad , \quad |a| < 1 \quad \text{και} \quad \|\Delta P\|_1 = \frac{b}{1 - a}$$



και  $P_0$  η ονομαστική ελεγχόμενη διεργασία

$$P_0 = \frac{n_p(d)}{d_p(d)} = \frac{-0.0132d - 0.0139d^2}{1 - 2.1889d + 1.1618d^2}$$

Έχοντας σαν δεδομένη τη διάταξη του Σχήματος 6 και την παραβολική είσοδο  $u_1$  του συστήματος, θα μελετήσουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(a)	$m = \partial_s(t) = 3$	$a = 0.8$	$b = 0.009$
(b)	$m = \partial_s(t) = 6$	$a = 0.8$	$b = 0.009$
(c)	$m = \partial_s(t) = 6$	$a = 0.8$	$b = 0.019$
(d)	$m = \partial_s(t) = 3$	$a = 0.8$	$b = 0.019$

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη με τον υπολογισμό της διαταραγμένης ελεγχόμενης διεργασίας:

$$P - P_0 = \Delta P \cdot P \Rightarrow P \cdot (1 - \Delta P) = P_0 \Rightarrow P \cdot \frac{1 - b - a \cdot d}{1 - a \cdot d} = P_0 \Rightarrow P = \frac{1 - a \cdot d}{1 - b - a \cdot d} \cdot P_0 \quad (162)$$

(a) Για τις τιμές  $a = 0.8, b = 0.009$ , η σχέση (162) με τη βοήθεια της σχέσης (156) παίρνει τη μορφή:

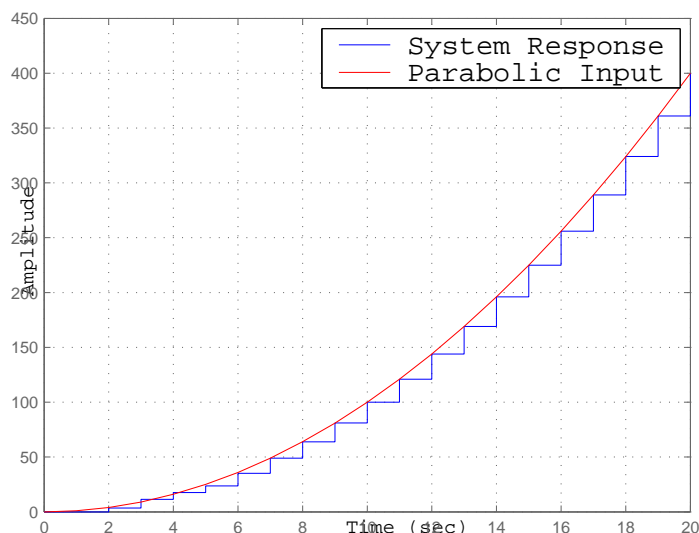
$$P = \frac{1 - 0.8 \cdot d}{1 - 0.009 - 0.8 \cdot d} \cdot \frac{-0.0132d - 0.0139d^2}{1 - 2.1889d + 1.1618d^2} \Rightarrow P = \frac{-0.0132d - 0.00334d^2 + 0.01112d^3}{0.991 - 2.969d + 2.902d^2 - 0.9294d^3} \quad (163)$$

Θα υπολογίσουμε την απόκριση του συστήματος της διαταραγμένης ελεγχόμενης διεργασίας με τη χρήση του εύρωστου ελεγκτή  $c_{or}$  (159), όπως επίσης και του σφάλματος σταθερής κατάστασης. Ο βαθμός της ελεύθερης παραμετρου  $t$  λαμβάνεται  $m = \partial(t) = 3$ . Οι αποκρίσεις φαίνονται στα Σχήματα 12 και 13.

Στην περίπτωση του διαταραγμένου συστήματος θα πρέπει οποσδήποτε να λάβουμε υπόψη την Παρατήρηση 6.4.3, σύμφωνα με την οποία για να εξασφαλίσουμε την ευστάθεια της διαταραγμένης συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα πρέπει να διασφαλίσουμε την ισχύ της σχέσης:

$$g_\infty((I - G_0)\Delta P) < 1 \Rightarrow \|d_c d_{p0} \Delta P\|_1 < 1 \quad (164)$$

System Response:  $m=3$ ,  $a=0.8$ ,  $b=0.009$



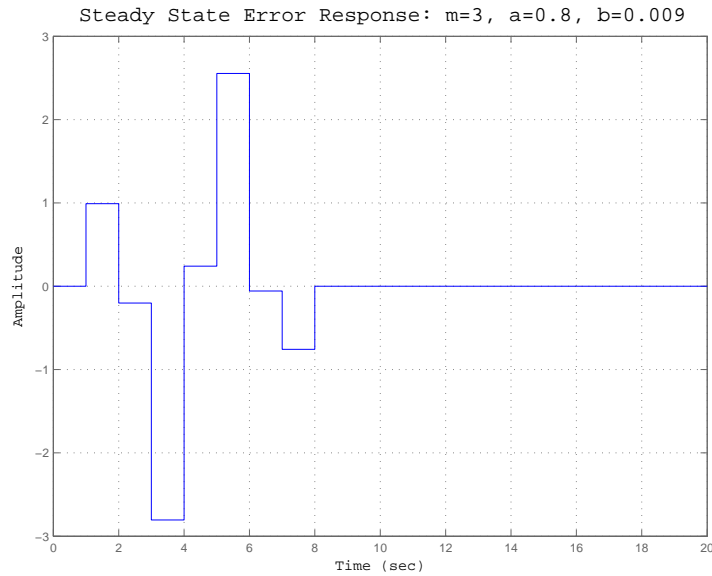
Σχήμα 12: Απόκριση του διαταραγμένου συστήματος σε παραβολική είσοδο ( $a = 0.8$ ,  $b = 0.009$ ,  $m = 3$ )

όπου  $d_{p0}$  ο παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς της ονομαστικής ελεγχόμενης διεργασίας.

Στην περίπτωση (α), αν λάβουμε υπόψη ότι  $\|\Delta P\|_1 = \frac{b}{1-a}$  και ότι  $\|d_c d_{p0}\|_1 = 19.4733$  (από Πίνακα 1) η σχέση (164) παίρνει την τιμή  $\|d_c d_{p0} \Delta P\|_1 \leq 0.87615 < 1$  και επομένως το σύστημα είναι ευσταθές. Από τα Σχήματα 12 και 13 παρατηρούμε ότι το σύστημα ανιχνεύει την παραβολική είσοδο από το 8<sup>ο</sup> χρονικό βήμα και μετά, ενώ τα όρια της περιοχής του μέτρου του σφάλματος δεν ξεφεύγουν πολύ από αυτά του ονομαστικού μοντέλου. Επομένως το διαταραγμένο σύστημα διατηρεί την εύρωστη απόδοση του ονομαστικού συστήματος, η οποία βέβαια, μπορεί να βελτιωθεί, όπως θα δούμε και παρακάτω, για μεγαλύτερες τιμές του  $m = \partial(t)$ .

- (b) Στην δεύτερη αυτή περίπτωση οι τιμές των  $a$  και  $b$  είναι ακριβώς ίδιες με την περίπτωση (α) ( $a = 0.8$ ,  $b = 0.009$ ), και η συνάρτηση μεταφοράς της ελεγχόμενης διεργασίας έχει την τιμή

$$P = \frac{-0.0132d - 0.00334d^2 + 0.01112d^3}{0.991 - 2.969d + 2.902d^2 - 0.9294d^3} \quad (165)$$



Σχήμα 13: Απόκριση του σφάλματος σταθερής κατάστασης του διαταραγμένου συστήματος σε παραβολική είσοδο ( $a = 0.8, b = 0.009, m = 3$ )

Αυτή τη φορά όμως θα υπολογίσουμε την απόκριση του συστήματος για μεγαλύτερο βαθμό  $m = \partial(t) = 6$ . Οι αποκρίσεις φαίνονται στα Σχήματα 14 και 15.

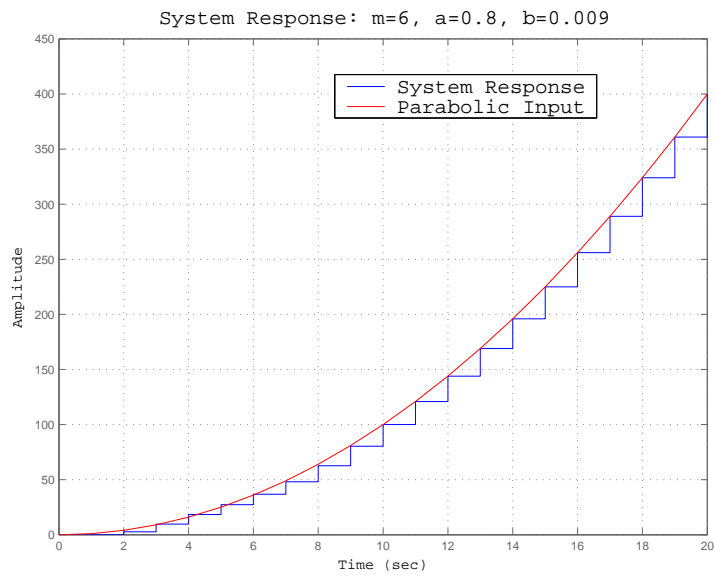
Για να μελετήσουμε την ευστάθεια του συστήματος θα υπολογίσουμε, με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση (a), την τιμή της σχέσης (164), η οποία είναι:  $\|d_c d_{p0} \Delta P\|_1 \leq 0.4374 < 1$ . Επομένως το σύστημα είναι και πάλι ευσταθές. Κάνοντας σύγκριση με την προηγούμενη περίπτωση, παρατηρούμε ότι το σύστημα γίνεται πιο βέλτιστο για μεγαλύτερη τιμή του  $m$ .

- (c) Για τιμές των παραμέτρων  $a = 0.8, b = 0.019$ , η σχέση (162) με τη βοήθεια της σχέσης (156) παίρνει τη μορφή:

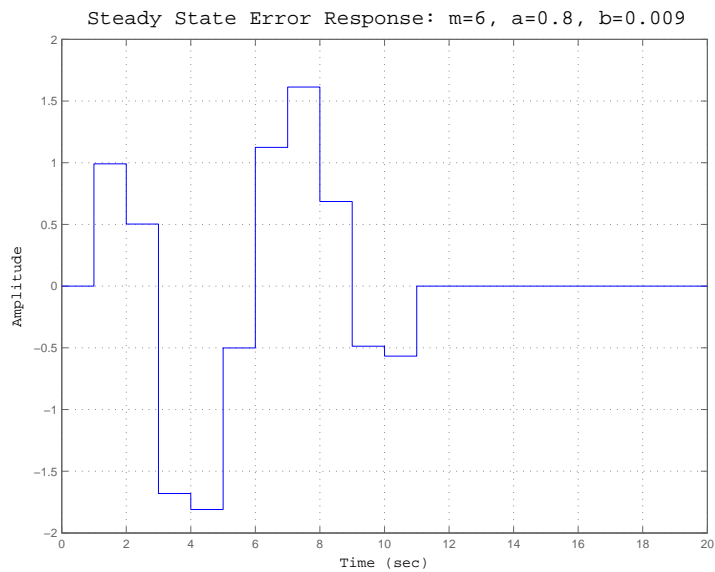
$$P = \frac{1 - 0.8 \cdot d}{1 - 0.019 - 0.8 \cdot d} \cdot \frac{-0.0132d - 0.0139d^2}{1 - 2.1889d + 1.1618d^2} \Rightarrow$$

$$P = \frac{-0.0132d - 0.00334d^2 + 0.01112d^3}{0.981 - 2.947d + 2.891d^2 - 0.9294d^3} \quad (166)$$

Οι αποκρίσεις του διαταραγμένου συστήματος στη συγκεκριμένη περίπτωση, για βαθμό της ελεύθερης παραμέτρου  $t$  ίσο με  $m = \partial(t) = 6$ , φαί-

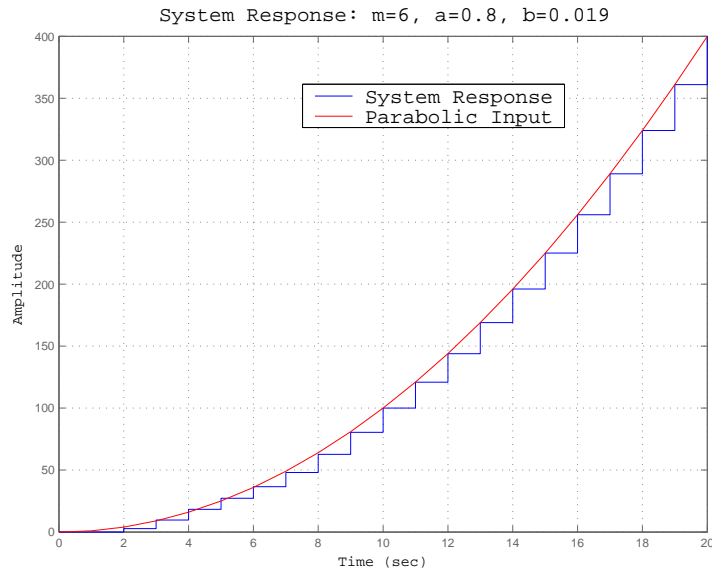


Σχήμα 14: Απόκριση του διαταραγμένου συστήματος σε παραβολική είσοδο ( $a = 0.8, b = 0.009, m = 6$ )



Σχήμα 15: Απόκριση του σφάλματος σταθερής κατάστασης του διαταραγμένου συστήματος σε παραβολική είσοδο ( $a = 0.8, b = 0.009, m = 6$ )

νονται στα Σχήματα 16 και 17.



Σχήμα 16: Απόκριση του διαταραγμένου συστήματος σε παραβολική είσοδο ( $a = 0.8, b = 0.019, m = 6$ )

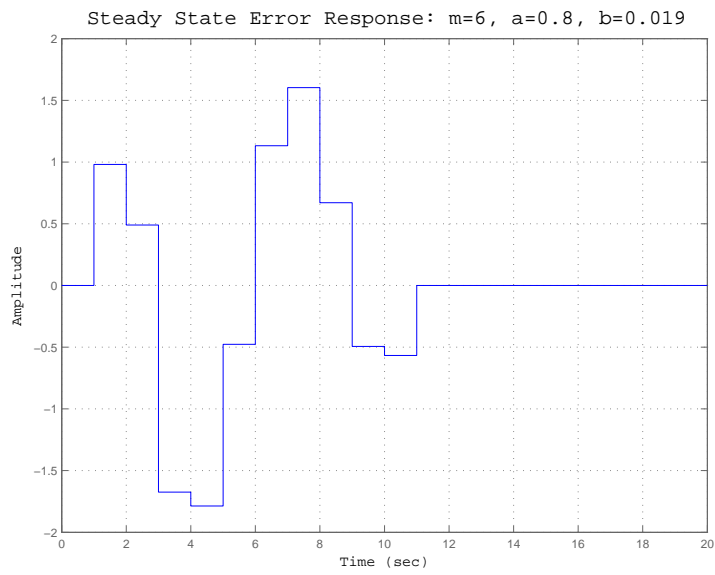
Παρατηρούμε ότι και σ' αυτή την περίπτωση το σύστημα ανιχνεύει την παραβολική είσοδο, επομένως διατηρεί τα χαρακτηριστικά του ονομαστικού μοντέλου. Το σύστημα είναι ευσταθές, καθώς η τιμή της νόρμας  $\|d_c d_{p0} \Delta P\|_1 \leq 0.9234$  είναι και πάλι μικρότερη της μονάδας (για  $m = 6$ ).

- (d) Στην τελευταία περίπτωση θα κρατήσουμε τις τιμές των  $a$  και  $b$  που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη περίπτωση (c) ( $a = 0.8, b = 0.009$ ), με συνάρτηση μεταφοράς της ελεγχόμενης διεργασίας

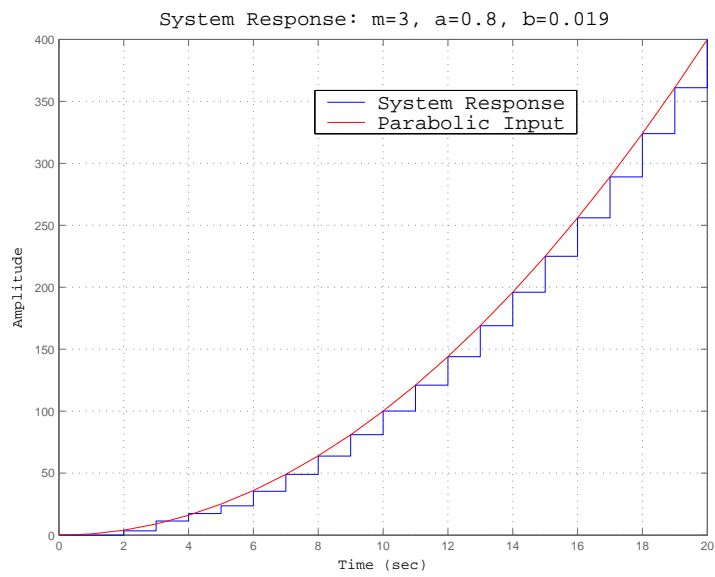
$$P = \frac{-0.0132d - 0.00334d^2 + 0.01112d^3}{0.981 - 2.947d + 2.891d^2 - 0.9294d^3} \quad (167)$$

και θα υπολογίσουμε την απόκριση του συστήματος για μικρότερο βαθμό  $m = \partial(t) = 3$ . Οι αποκρίσεις φαίνονται στα Σχήματα 18 και 19.

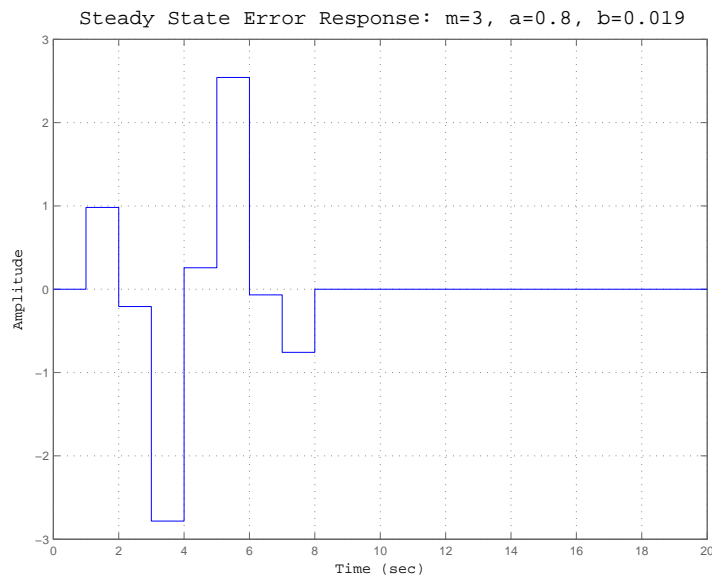
Αν υπολογίσουμε την τιμή της σχέσης (164), παρατηρούμε ότι είναι  $\|d_c d_{p0} \Delta P\|_1 \leq 1.84965$ . Επομένως στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για την ευστάθεια του συστήματος, παρ' όλο που



Σχήμα 17: Απόκριση του σφάλματος σταθερής κατάστασης του διαταραγμένου συστήματος σε παραβολική είσοδο ( $a = 0.8, b = 0.019, m = 6$ )



Σχήμα 18: Απόκριση του διαταραγμένου συστήματος σε παραβολική είσοδο ( $a = 0.8, b = 0.019, m = 3$ )



Σχήμα 19: Απόκριση του σφάλματος σταθερής κατάστασης του διαταραγμένου συστήματος σε παραβολική είσοδο ( $a = 0.8, b = 0.019, m = 3$ )

αυτό έχει βέλτιστη απόκριση και ανιχνεύει επιτυχώς την παραβολική είσοδο. Η μέγιστη τιμή του σφάλματος είναι μεγαλύτερη από αυτή της προηγούμενης περίπτωσης (c), γεγονός αναμενόμενο καθώς ο βαθμός  $m$  της ελεύθερης παραμέτρου  $t$  και συνεπώς ο χρόνος αποκατάστασης είναι μικρότερος.

### 7.3 Συμπεράσματα

Το τελευταίο αυτό κεφάλαιο αποτέλεσε την εφαρμογή όσων αναλύσαμε σ' αυτή την εργασία. Τα αποτελέσματα αυτής της εφαρμογής αποδεικνύουν ιδανικά την ορθότητα των θεωρητικών αποτελεσμάτων των Κεφαλαίων 5 & 6.

Αρχικά παραθέσαμε τον Αλγόριθμο της διαδικασίας βελτιστοποίησης που ακολουθήσαμε, όπως επίσης και τον τρόπο με τον οποίο μετατρέπονται οι εξισώσεις της παραγράφου 6.4 σε Γραμμικό Πρόγραμμα. Στη συνέχεια δώσαμε την υλοποίηση του Αλγορίθμου με τη χρήση του προγράμματος MATLAB, καθώς και κάποια αριθμητικά παραδείγματα.

Στο παράδειγμα 7.2.1 δόθηκε μια σαφής αναπαράσταση της απόκρισης του βέλτιστου συστήματος και του σφάλματος σταθερής κατάστασης, καθώς επίσης

και η βέλτιστη τιμή του δείκτη ευρωστίας για συγκεκριμένο αριθμό χρονικών βημάτων. Παρατηρήθηκε ότι ο δείκτης ευρωστίας γίνεται όλο και περισσότερο βέλτιστος όσο ο αριθμός χρονικών βημάτων αυξάνεται. Έτσι, η βελτίωση της ευρωστίας εξασφαλίζεται εις βάρος της χρονικής βελτιστοποίησης (time optimality).

Στην παράγραφο 7.2.2, για να επαληθεύσουμε την ευρωστία του ονομαστικού συστήματος της προηγούμενης παραγράφου, εφαρμόσαμε διάφορες πολλαπλασιαστικές διαταραχές στην ελεγχόμενη διεργασία και μελετήσαμε την απόκριση των συστημάτων που προέκυψαν χρησιμοποιώντας τον εύρωστο ελεγκτή που είχαμε υπολογίσει στο Παράδειγμα 7.2.1. Τα αποτελέσματα επαλήθευσαν την ευρωστία του συστήματος, καθώς τα διαταραγμένα συστήματα ακολούθησαν την απόδοση του αρχικού συστήματος (Σχήματα 12-19). Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, τα συστήματα πλησίαζαν περισσότερο στην ονομαστική απόδοση, όσο μεγαλύτερος ήταν ο βαθμός  $m$  της ελεύθερης παραμέτρου  $t$  της οικογένειας των FSTS ελεγκτών, και κατά συνέπεια όσο μεγαλύτερος ήταν ο χρόνος αποκατάστασης του συστήματος. Αυτό, δυστυχώς, είναι υποχρεωτικό στην περίπτωση που ο ελεγκτής έχει ένα βαθμό ελευθερίας, όπως στην περίπτωση που μελετούμε. Είναι, ωστόσο, πιθανό να επιτύχουμε βελτιστοποίηση ευρωστίας και χρόνου ταυτόχρονα αλλάζοντας την δομή του ελεγκτή. Τέτοιοι ελεγκτές ονομάζονται *ελεγκτές δύο βαθμών ελευθερίας* και αποτελούν πεδίο μελέτης πάνω στο οποίο έχουν εξάγει αποτελέσματα αρκετοί επιστήμονες όπως οι Milonidis και Karcianas στα πλαίσια της FST σταθεροποίησης [25].



## A' Παράρτημα

### A'.1 Προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν στην προσομοίωση

#### example\_FSTS

```
% Στο παράδειγμα αυτό θα θεωρήσουμε το σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης
% του Σχήματος (6).
%
% Δεδομένης μιας συγκεκριμένης ελεγχόμενης διεργασίας (np,dp) και
% μιας εισόδου (nr,dr), υπολογίζουμε τις τιμές της βέλτιστης 1-νόρμας
% της συνάρτησης μεταφοράς του σφάλματος σταθερής κατάστασης
% για διάφορες τιμές του m.
%
% ===== ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ! =====
% Όλα τα διανύσματα των συντελεστών των πολυωνύμων θα πρέπει να
% γράφονται σαν αύξουσες δυνάμεις του  $d$  ( $:= z^{-1}$ ).
% =====

np=input('Enter vector of coefficients of Plant numerator: ')
dp=input('Enter vector of coefficients of Plant denominator: ')
dr=input('Enter vector of coefficients of Input denominator: ')

ni=length(dr)-1; % — Input denominator degree (dr) — %

% =====
% Συνθήκη :
% =====
% Για να είναι το σύστημά μας underdetermined θα πρέπει να ισχύει
% η παρακάτω συνθήκη:
%  $ni < m + 1$  ή  $mi < n + 1 \Rightarrow$ 
%  $m > ni - 1$  ή  $n < mi - 1$  (I)
% Η συνθήκη (I) δείχνει ότι η μικρότερη ακέραια τιμή που μπορεί
% να πάρει το m είναι πάντα ni.
% =====

opt_value=[ ];
numer=[ ];

for i=ni:50
```

```

[r1,r2,r3]=optimal_FSTS(i,np,dp,dr);
opt_value=[opt_value r1];
numer=[numer i];

end

% ===== Βέλτιστη τιμή =====
disp('Optimal Values of The 1-Norm of the Error Transfer Function for
increasing number of m: ')
opt_value'
% =====

% ===== Γραφική Παράσταση =====
plot(numer,opt_value,'b-o')
title('Optimal 1-Norm of the Error Transfer Function for different values
of m')
xlabel('m')
ylabel('||dc.dp||_1')
grid
% =====

```

### simul\_FSTS

```

% ===== Προσομοίωση Ανίχνευσης =====
%
% Το παράδειγμα αυτό χρησιμοποιεί το πρόγραμμα Simulink για να
% προσομοιώσει την απόκριση ενός SISO διακριτού συστήματος μοναδιαίας
% ανάδρασης, για δεδομένη Ελεγχόμενη Διεργασία και είσοδο του
% συστήματος.
%
% Η συνάρτηση μεταφοράς του Ελεγκτή θα βρεθεί με χρήση της συνάρτησης
% optimal_FSTS.
%
% Η παράμετρος m θα δίνεται από το χρήστη.
% =====

% ===== ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ! =====
% Όλα τα διανύσματα των συντελεστών των πολυωνύμων θα πρέπει να
% γράφονται σαν αύξουσες δυνάμεις του  $d$  ( $:= z^{-1}$ ).

```

```

% =====

np=input('Enter vector of coefficients of Plant numerator: ')
dp=input('Enter vector of coefficients of Plant denominator: ')
dr=input('Enter vector of coefficients of Input denominator: ')

m=input('Enter the degree of the free parameter "t" of the family of all
FSTS controllers:')

% ===== ΣΥΝΘΗΚΗ =====
% Η ελάχιστη τιμή του m είναι πάντα ni, όπου ni = length(dr)-1
% (βλέπε σημειώσεις στο example_FSTS.m)
% =====

if m<(length(dr)-1)
    disp('Value of m cannot be less than the Input denominator degree!')
else
    [opt,nc,dc]=optimal_FSTS(m,np,dp,dr);
end

% =====
% Ανοίγοντας το αρχείο simu_FSTS.mdl και τρέχοντάς το, μπορούμε
% να παρατηρήσουμε την απόδοση του συστήματος.
% =====

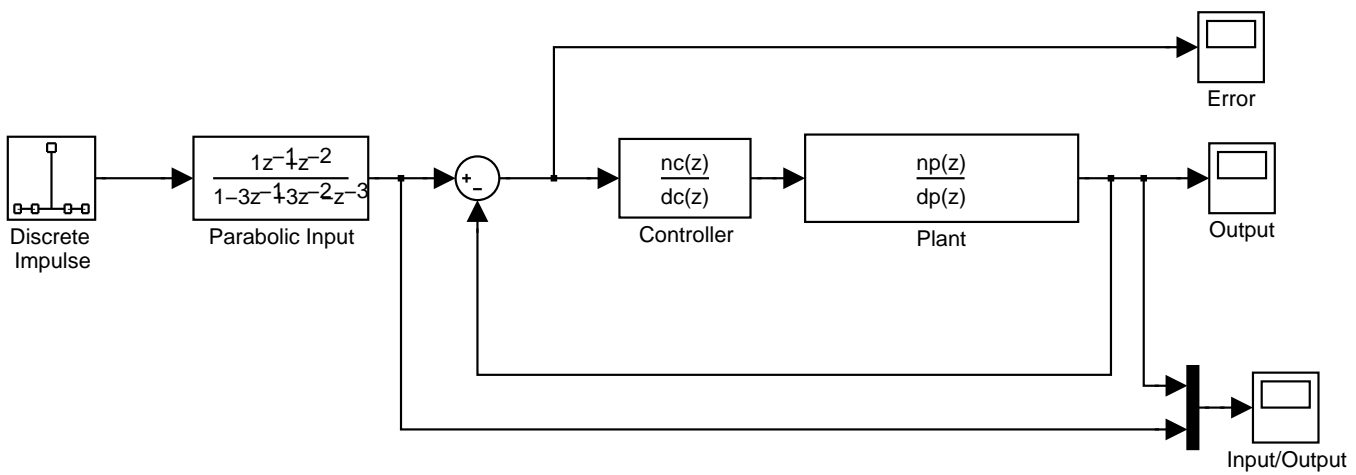
```

## Αναφορές

- [1] Bergen A.R. and Ragazzini J.R., Sampled-Data Techniques for Feedback Control Systems, *AIEE Trans.*, Vol 73(II), 1954, pp.236-247.
- [2] Burton D.M., *A First Course in Rings and Ideals*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1970.
- [3] Chen C.T., *Linear System Theory and Design*, Holt-Saunders International Editions, Japan, 1984.
- [4] Dahleh M.A. and Pearson J.B.,  $l^1$  Optimal Feedback Controllers for Discrete-Time Systems. *Proc. ACC*, Seattle WA, June 1986, pp. 1964-1968.
- [5] Dahleh M.A. and Pearson J.B.,  $l^1$  Optimal Feedback Controllers for MIMO Discrete-Time Systems. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-32, Apr. 1987, pp. 314-322.
- [6] Dahleh M.A. and Pearson J.B.,  $L^1$  Optimal Compensators for Continuous-Time Systems. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-32, Oct. 1987, pp. 889-895.
- [7] Dahleh M.A. and Pearson J.B., Optimal Rejection of Persistent Disturbances, Robust Stability, and Mixed Sensitivity Minimization. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-33, No. 8, Aug. 1988, pp. 722-731.
- [8] Dahleh M.A. and Pearson J.B., Minimization of a Regulated Response to a Fixed Input. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-33, No. 10, Oct. 1988, pp. 924-930.
- [9] Desoer C.A. and Vidyasagar M., *Feedback Systems: Input-Output Properties*, New York Academic, 1975.
- [10] Godement R., *Algebra*, Hermann, Paris, 1968.
- [11] Hartley B. and Hawkes T.O., *Rings, Modules and Linear Algebra*, Chapman and Hall Ltd., 1987.
- [12] Isermann R., *Digital Control Systems*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.
- [13] Jury E.I., *Theory and Application of the z-Transform Method*, Robert E. Krieger Publishing Company Inc., Florida, 1982.

- [14] Karcanias N., *The Basic Theory of Polynomial and Rational Matrices for Linear Multivariable Control*, Research Notes, Control Engineering Centre, City University, London, 1988.
- [15] Karcanias N., *On Internal and External Stability of Feedback Systems*, Research Notes, Control Engineering Centre, City University, London, 1988.
- [16] Karcanias N. and Milonidis E., Total Finite Settling Time Stabilization for Discrete Time SISO Systems. *Proc. 5th IMA Control Theory Conf.*, Univ. of Strathclyde Glasgow, 1988. Also in *Maths of Control Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1992, pp.71-85.
- [17] Kolmogorov A.N. and Fomin S.V., *Introductory Real Analysis*, Dover Publications Inc., New York, 1975.
- [18] Kucera V., *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach* John Wiley & Sons Inc., London, 1979.
- [19] Kucera V., *Analysis and Design of Discrete Linear Control*, Prentice Hall International (UK) Ltd., 1991.
- [20] Kucera V., Algebraic Theory of Discrete Optimal Control for Single-Variable Systems, Parts I, II and III. *Kybernetika*, Vol. 9, 1973, pp. 94-107, 206-221 and 291-312.
- [21] Kucera V., Algebraic Theory of Discrete Optimal Control for Multi-variable Systems. *Kybernetika*, published in instalments, Vols. 10-12, 1974, pp. 1-240.
- [22] Luenberger D.G., *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Inc., 1989.
- [23] Milonidis E. and Karcanias N.,  $l^1$ -optimization and Shaping in FST Stabilizing Control. *ECC'97*, Brussels, July 1997.
- [24] Milonidis E. and Karcanias N., Robust MIMO FST Stabilisation. *4th IEEE Mediterranean Symposium*, Krete, Greece, June 1996.
- [25] Milonidis E. and Karcanias N., Two-Parameter FST Stabilization. *CDC'96*, Kobe, Japan, Dec. 1996.
- [26] Späth H., *Mathematical Algorithms for Linear Regression*, Academic Press Inc., 1987.

- [27] Vardulakis A.I.G., *Linear Multivariable Control: Algebraic analysis and synthesis methods*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester (UK), 1991.
- [28] Vidyasagar M., *Control System Synthesis: A factorization approach*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1985.
- [29] Vidyasagar M., Optimal Rejection to Persistent Bounded Disturbances, *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-31, No.6, June 1986, pp. 527-534.
- [30] Vidyasagar M., *Nonlinear System Analysis*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New Jersey, 1978.
- [31] Youla D.C., Bongiorno J.J. & Jabr H.A., Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers, Parts I and II. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-21, 1976, pp. 3-13 and 319-338.
- [32] Youla D.C., Bongiorno J.J. & Lu C.N., Single-Loop Feedback Stabilization for Linear Multivariable Dynamical Plants. *Automatica*, Vol. 10, 1974, pp. 159-173.
- [33] Zhao Y. and Kimura H., Dead-Beat Control with Robustness. *Int. J. Control*, Vol. 43, No. 5, 1986, pp.1427-1440.
- [34] Zhao Y. and Kimura H., Multivariable Dead-Beat Control with Robustness. *Int. J. Control*, Vol. 47, No. 1, 1988, pp. 229-255.
- [35] Zhao Y. and Kimura H., Two-Degrees-of-Freedom Dead-Beat Control System with Robustness. *Int. J. Control*, Vol. 48, No. 1, 1988, pp. 303-315.
- [36] Zhao Y. and Kimura H., Two-Degrees-of-Freedom Dead-Beat Control System with Robustness: Multivariable Case. *Int. J. Control*, Vol. 49, No. 2, 1989, pp. 667-679.



Σχήμα 20: Προσομοίωση παραδείγματος 7.2.1 στο Simulink