ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

Ελεγξιμότητα και Παρατηρησιμότητα στα Ιδιόμορφα Συστήματα Ελέγχου

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χαράλαμπος Ι. Λεονταρίδης

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2006

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ”

Ελεγξιμότητα και Παρατηρησιμότητα στα Ιδιόμορφα Συστήματα Ελέγχου

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χαράλαμπος Ι. Λεονταρίδης

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 19η Δεκεμβρίου 2006.

…………………………	…………………………	…………………………
Α. Βαρδουλάκης	Ν. Καραμπετάκης	Μ. Γουσίδου – Κουτίτα
Καθηγητής Α.Π.Θ.	Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ.	Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2006

…………………………………………..

Χαράλαμπος Ι. Λεονταρίδης
Πτυχιούχος Μαθηματικός Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημιίου Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα ιδιόμορφα συστήματα αποτελούνται από τις επονομαζόμενες ιδιομορφες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες χαρακτηρίζουν τα συστήματα με πολλά στοιχεία τα οποία δεν συναντιόνται στα κλασσικά συστήματα. Επιπλέον, υπάρχουν κρουστικοί όροι και παραγωγίσιμες είσοδοι στην απόκριση κατάστασης, πίνακα μεταφοράς χωρίς συγκεκριμένη ιδιότητα, σταθερές αρχικές συνθήκες κ.λ.π. που κάνουν τη μελέτη των ιδιόμορφων συστημάτων να έχει περισσότερο ενδιαφέρον από ότι στα κλασσικά συστήματα. Τα ιδιόμορφα συστήματα τα συναντάει κανείς στα μηχανικά συστήματα (όπως είναι τα ηλεκτρολογικά κυκλώματα, τα δυναμικά συστήματα, αεροδυναμική μηχανική και χημικές διαδικασίες), κοινωνικά συστήματα, οικονομικά συστήματα, βιολογικά συστήματα, ανάλυση δικτύων κ.α. Σε πολλά άρθρα, τα ιδιόμορφα συστήματα (singular systems) αναφέρονται και ως descriptor variable systems, generalized state space systems, semistate systems, differential – algebraic systems κ. λ. π.

Δυο βασικές έννοιες των ιδιόμορφων συστημάτων είναι η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα. Χαρακτηρίζοντας τις δομικές ιδιότητες από πολλές οπτικές γωνίες, η ελεγξιμότητα, η R-ελεγξιμότητα και η κρουστική ελεγξιμότητα είναι τρεις σημαντικές έννοιες στα ιδιόμορφα συστήματα. Χρησιμοποιώντας αυτές τις έννοιες μπορεί κανείς να κατανοήσει την ελεγξιμότητα από είσοδο ελέγχου. Οι έννοιες αυτές της ελεγξιμότητας ωστόσο αντικατοπτρίζουν και τη διαφορά μεταξύ των ιδιόμορφων συστημάτων από τα κανονικά. Αντίστοιχα με την ελεγξιμότητα, στα ιδιόμορφα συστήματα έχουμε και τις έννοιες της παρατηρησιμότητας στα ιδιόμορφα συστήματα, της R-παρατηρησιμότητας και της κρουστικής παρατηρησιμότητας. Οι έννοιες αυτές χαρακτηρίζουν την ικανότητα της ανοικοδόμησης της κατάστασης από μετρήσιμες εισόδους – εξόδους.

Στο 1^{o} κεφάλαιο της παρούσης εργασίας γίνεται μια αναφορά στα ιδιόμορφα συστήματα, στις εξισώσεις που αναφέρονται σε αυτά καθώς και τις λύσεις τους. Στο 2^{o} κεφάλαιο έχουμε μια εκτενή παρουσίαση της έννοιας της ελεγξιμότητας από διάφορους επιστήμονες (L.Dai, Kalman, D.Cobb, F. L. Lewis, Vardulakis A. I. G.), ενώ στο 3^{o} κεφάλαιο έχουμε την έννοια της παρατηρησιμότητας στα ιδιόμορφα συστήματα όπως έχει αναφερθεί από τους επιστήμονες (L.Dai, Kalman, D.Cobb, F. L. Lewis). Τέλος, στο 4^{o} και τελευταίο κεφάλαιο αυτής της εργασίας γίνεται μια κριτική – σύγκριση στις έννοιες της ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στα δυο προηγούμενα κεφάλαια.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Ιδιόμορφα συστήματα ελέγχου, ελεγξιμότητα, παρατηρησιμότητα

ABSTRACT

Singular systems are governed by the so – called singular differential equations, which endow the systems with many special features that are not found in classical systems. Among these are impulse terms and input derivatives in the state response, nonproperness of transfer matrix, consistent initial conditions, etc., making the study of singular systems more sophisticated than of classical linear systems. Singular systems are found in engineering systems (such as electrical circuit network, power systems, aerospace engineering, and chemical processing), social systems, economic systems, biological systems, network analysis etc. In many articles singular systems are called the descriptor variable systems, generalized state space systems, semistate systems, differential – algebraic systems etc.

Two fundamental concepts in singular control systems are controllability and observability. Characterizing the structural properties from various views, controllability, R-controllability, and impulse controllability are three important concepts in singular systems. By using these concepts, we may have a fair understanding of controllability by control input. The controllabilities also reflect the difference of singular systems from normal ones. In the same way with controllability, in singular control systems, there are the concepts observability, R-observability and impulses observability. These concepts characterize the ability of state reconstruction from measure inputs - outputs.

In chapter 1 of this work we discuss singular control systems, the equations which deals with the singular control systems and the solutions of them. In Chapter 2, there is a comprehensive description of the concept of controllability from different scientists (L.Dai, Kalman, D.Cobb, F. L. Lewis, Vardulakis A. I. G.), whereas in chapter 3, there is the concept of observability in singular control systems as it is reported from the scientists (L.Dai, Kalman, D.Cobb, F. L. Lewis, Vardulakis A. I. G.). Finally, in the last 4th chapter, there is a review – comparison in concepts of controllability and observability, as these are reported in the previous chapters.

KEY WORDS

Singular control systems, controllability, observability.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1^{o} ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΙΔΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ
(SINGULAR CONTROL SYSTEMS)

1-1. Περιγραφή

Αρχικά θα κάνουμε μια εισαγωγή στα ιδιόμορφα συστήματα ελέγχου. Θα δώσουμε μια περιγραφή για το είδος αυτών των συστημάτων ελέγχου[7].

Τα ιδιόμορφα συστήματα ελέγχου βασίζονται στα μοντέλα στον χώρο καταστάσεων (state space systems), η δε ανάλυση και σύνθεση συστημάτων είναι οι θεμελιώδεις αρχές της θεωρίας ελέγχου που αναπτύχθηκαν στο τέλος του 1950 και στις αρχές του 1960. Τα μοντέλα χώρου κατάστασης μπορούν να δημιουργηθούν κυρίως χρησιμοποιώντας την επονομαζόμενη ως state space μέθοδο πολλών μεταβλητών, της οποίας το πλεονέκτημα είναι ότι ,όχι μόνο μας δίνει μια πλήρη καινούρια μέθοδο για την ανάλυση και τη σύνθεση ενός συστήματος, αλλά επίσης μας προσφέρει μεγάλη βοήθεια για την καλύτερη κατανόηση των συστημάτων.

Για να πάρουμε ένα μοντέλο χώρου κατάστασης, είναι αναγκαίο να επιλέξουμε μερικές μεταβλητές όπως είναι η ταχύτητα, το βάρος, θερμοκρασία και η επιτάχυνση, οι οποίες πρέπει να είναι επαρκείς για να χαρακτηρίσουν ένα σύστημα. Έτσι, πολλές εξισώσεις έχουν αναπτυχθεί που αναφέρονται στις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών. Φυσικά, είναι συνήθως διαφορικές ή αλγεβρικές εξισώσεις που αποτελούν τη μορφή του συστήματος, ή το είδος εξίσωσης. Η γενική του μορφή είναι η εξής:

$$f(\dot{x}(t), x(t), u(t), t) = 0 \qquad (1\text{-}1.1a)$$

$$g(x(t), u(t), y(t), t) = 0 \qquad (1\text{-}1.1b)$$

όπου x(t) είναι η κατάσταση του συστήματος, το οποίο συνθέτουν οι μεταβλητές : u(t) είναι η είσοδος ελέγχου, y(t) είναι η έξοδος και f και g είναι διανυσματικές συναρτήσεις των $\dot{x}(t)$, x(t), u(t), y(t) και t ,στις κατάλληλες διαστάσεις.

Μια ειδική περίπτωση των (1-1.1) που συνήθως περιγράφουν το σύστημα που μας ενδιαφέρει είναι η εξής:

$$E(t)\dot{x}(t)=H(x(t),u(t),t)$$
$$y(t)=J(x(t),u(t),t) \qquad (1\text{-}1.2)$$

όπου H, J είναι διανυσματικές συναρτήσεις των x(t), u(t) και t στις κατάλληλες διαστάσεις. Ο πίνακας E(t) μπορεί να είναι και μη αντιστρέψιμος (singular). Τα συστήματα που περιγράφονται από τις (1-1.2) είναι η γενική μορφή των επονομαζόμενων ιδιόμορφων συστημάτων (singular systems).

Αν H, J είναι γραμμικές συναρτήσεις των x(t) και u(t) και E ανεξάρτητο του t, μια πιο ειδική μορφή των (1-1.2) είναι το γραμμικό ιδιόμορφο σύστημα:

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t) \qquad (1\text{-}1.3)$$

το οποίο είναι το κύριο σύστημα που θα μελετήσουμε σε αυτήν την εργασία. Εδώ έχουμε ότι $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^r$. $E, A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$ και $C \in R^{rxn}$ είναι σταθεροί πίνακες.

Όταν ο E είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα (1-1.3) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\dot{x}(t)=E^{-1}Ax(t)+E^{-1}Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t) \qquad (1\text{-}1.4)$$

Δε θα ασχοληθούμε με αυτήν την περίπτωση αλλά μόνο με αυτήν όπου ο E είναι μη αντιστρέψιμος (singular), δηλαδή $\operatorname{rank}E = q < n$.

Στην πρακτική ανάλυση συστήματος και στην κατασκευή του συστήματος ελέγχου, πολλά συστήματα μπορούν να αναπτυχθούν σύμφωνα με τη μορφή (1-1.2), ενώ δεν μπορούν να περιγραφούν από τις (1-1.4) . Οι μελέτες των ιδιόμορφων συστημάτων ξεκίνησαν στα τέλη του 1970, ωστόσο πρώτη φορά αναφέρθηκαν το 1973 [25]. Σε πολλά άρθρα, τα ιδιόμορφα συστήματα (singular systems) αναφέρονται και ως descriptor variable systems, generalized state space systems, semistate systems, differential – algebraic systems, singular singularly perturbed systems, degenerate systems, constrained systems κ.λ.π.

Τα ιδιόμορφα συστήματα εμφανίζονται σε πολλά συστήματα, όπως μηχανικά συστήματα (για παράδειγμα, ηλεκτρικό ρεύμα, ηλεκτρικά δίκτυα, αεροδυναμική, χημικές διαδικασίες) , κοινωνικοοικονομικά συστήματα, ανάλυση δικτύου, βιολογικά συστήματα και σε πολλά άλλα.

Παράδειγμα: 1. (Δυναμικό μοντέλο Leontief)

Το θεμελιώδες δυναμικό Leontief μοντέλο για τα οικονομικά συστήματα είναι ένα ιδιόμορφο σύστημα. Η περιγραφή αυτού του μοντέλου είναι η εξής [17]:

$$x(k) = Ax(k) + B[x(k + 1) - x(k)] + d(k) \qquad (1\text{-}1.5)$$

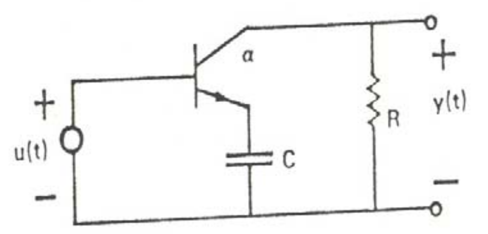
όπου x(k) είναι το διάνυσμα εξόδων, d(k) είναι το διάνυσμα οριστικών ζητήσεων (περιλαμβάνοντας και τις επενδύσεις), A είναι ο Leontief πίνακας εισόδου – εξόδου και B είναι ο πίνακας – συντελεστής για το κεφάλαιο. Οι πίνακες A και B υποθέτουμε ότι είναι γνωστοί και ανεξάρτητοι του k. Αν η διάσταση του διανύσματος x(k) είναι n, και το σύστημα (1-1.5) λειτουργεί με περίοδο k = 0, 1, …, N – 1, τότε για ένα καθορισμένο σύνολο από οριστικές ζητήσεις, το σύνολο των εξισώσεων αναπαριστά ένα σύνολο από nN εξισώσεις με n(N+1) αγνώστους. Μια λύση από αυτό το σύνολο καλείται τροχιά του συστήματος Leontief. Το σύστημα (1-1.5) μπορεί να ξαναγραφεί και ως:

$$Bx(k+1)=(I-A+B)x(k)-d(k)$$

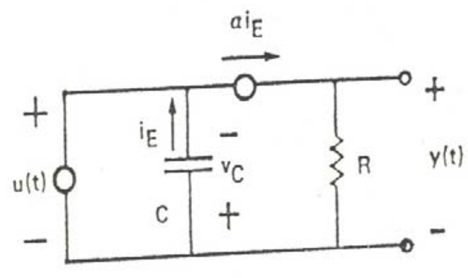
Στην περίπτωση που ο B είναι μη-αντιστρέψιμος (singular) το σύστημα είναι ιδιόμορφο. Το στοιχείο b_{ij} του πίνακα B αναπαριστά την τιμή των αποθεμάτων των εμπορευμάτων i, η οποία είναι όσο ένα καλό κεφάλαιο, τέτοιο ώστε ο τομέας j να αντιστοιχεί σε κάθε μονάδα παραγωγής. Αν όλοι οι τομείς δεν παράγουν σημαντικά κεφάλαια (η γεωργία είναι ένα κλασσικό παράδειγμα σε πολλά μοντέλα), είναι συνηθισμένο μερικές από τις γραμμές του πίνακα B να αποτελούνται μόνο από μηδενικά στοιχεία. Έτσι, η απαίτηση μεγάλης συγκρότησης κεφαλαίων σε μια πολυσύνθετη οικονομία συνήθως απαιτεί ο B να είναι μη-αντιστρέψιμος (singular). Στην πραγματικότητα, η τάξη του B μπορεί να είναι πολύ μικρότερη του n, όπου n ο αριθμός των τομέων.

Παράδειγμα: 2. (Ηλεκτρονικό κύκλωμα)

Ένα νέο πεδίο έρευνας που πρέπει να αναφερθεί είναι η εφαρμογή των ιδιόμορφων συστημάτων στη θεωρία δικτύων (network theory).



Σχ. 1(a)



Σχ. 1(b)

Χρησιμοποιώντας το ισοδύναμο κύκλωμα στο Σχ. 1(b) για το δίκτυο Σχ. 1(a) έχουμε το εξής ιδιόμορφο σύστημα:

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad (1\text{-}1.6)$$

όπου $x=[v_c \;\; i_E]^T$ [19]. Η ιδιομορφία του πίνακα που είναι συντελεστής του $\dot{x}$ αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι αν δεν ισχύει η συνθήκη $v_c(0)=-u(0)$ και $i_E(0)$, υπάρχει ένας κρουστικός όρος (impulsive response) όταν το κύκλωμα λειτουργήσει τη χρονική στιγμή $t = 0$. Γενικά, ο Newcomb[19] δείχνει ότι τα μη γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα κυκλώματα ικανοποιούν τις ελάχιστες δυνατές προϋποθέσεις, οι οποίες περιγράφονται από τη σχέση:

$$E\dot{x}=f(x,u,t) \qquad (1\text{-}1.7)$$

όπου $x=[v^T \;\; i^T]^T$, v το διάνυσμα της τάσης και i το διάνυσμα του link.

1-2. Κανονικότητα των Γενικών Ιδιόμορφων Εξισώσεων

Ας θεωρήσουμε το παρακάτω ιδιόμορφο σύστημα:

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+f(t) \tag{1-2.1}$$

όπου $E, A \in R^{nxn}$ και $f(t) \in R^n$, είναι μια ειδική περίπτωση των σχέσεων:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t) \\ y(t)&=Cx(t) \end{aligned}$$

όταν $B=I_n$. Η f(t) είναι διαφορίσιμη, έχει όσες παραγώγους χρειάζονται. Για την (1-2.1), θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη, μοναδικότητα και κατασκευή της λύσης της.

ΛΗΜΜΑ 1-2.1[8]: Για κάθε δυο πίνακες $E, A \in R^{mxn}$, υπάρχουν πάντα δυο αντιστρέψιμοι πίνακες Q,P τέτοιοι ώστε:

$$\begin{aligned} \tilde{E}&=QEP=diag(0,L_1,L_2,...,L_P,L_1',L_2',...,L_q',I,N) \\ \tilde{A}&=QAP=diag(0,J_1,J_2,...,J_P,J_1',J_2',...,J_q',A_1,I) \end{aligned} \tag{1-2.2}$$

όπου $0 \in R^{m_0 x n_0}$, $A_1 \in R^{hxh}$

$$L_i=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, J_i=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \in R^{m_i x(m_i+1)}$$

i=1,2,...,p

$$L_j' = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, J_j' = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in R^{(n_j+1)xn_j}$$

j=1,2,...,q

$$N=diag(N_{k_1},N_{k_r},...,N_{k_r}) \in R^{gxg} \quad ,$$

$$N_{k_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in R^{k_i x k_i} \quad , \qquad i=1,2,...,r \ ,$$

$$m_0+\sum_i m_i+\sum_j (n_j+1)+\sum_i k_i+h=m$$

$$n_0+\sum_j n_j+\sum_i (m_i+1)+\sum_i k_i+h=n$$

$$\sum_i k_i=g$$

Παίρνοντας το μετασχηματισμό $x(t)=P\tilde{x}(t)$ και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον αντιστρέψιμο πίνακα Q την (1-2.1), έχουμε :

$$\tilde{E}\,\dot{\tilde{x}}(t)=\tilde{A}\,\tilde{x}(t)+\tilde{f}(t), \tilde{f}(t)=Q\,f(t) \qquad (1\text{-}2.3)$$

Αναλύοντας την (1-2.3) σύμφωνα με την (1-2.2), έχουμε τα εξής:

$$O\,\dot{x}_{n_0}(t)=f_{m_0}(t) \tag{1-2.4a}$$

$$L_i\,\dot{x}_{m_i}(t)=J_i x_{m_i}(t)+f_{m_i}(t),i=1,2,...,p \tag{1-2.4b}$$

$$L_j{}'\dot{x}_{n_j}(t)=J_j{}'x_{n_j}(t)+f_{n_j}(t),j=1,2,...,q \tag{1-2.4c}$$

$$N_{k_i}\,\dot{x}_{k_i}(t)=x_{k_i}(t)+f_{k_i}(t),i=1,2,...,r \tag{1-2.4d}$$

$$\dot{x}_n(t)=A_1 x_n(t)+f_n(t) \tag{1-2.4e}$$

όπου $x_k(t)\in R^k$, $f_k(t)\in R^k$ και

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= [\,x_{n_0}{}^{\tau}\quad x_{m_1}{}^{\tau}\quad\cdots\quad x_{m_p}{}^{\tau}\quad x_{n_1}{}^{\tau}\quad\cdots\quad x_{n_q}{}^{\tau}\quad x_{\kappa_1}{}^{\tau}\quad\cdots\quad x_{\kappa_r}{}^{\tau}\quad x_n{}^{\tau}]\\ \tilde{f}(t) &= [\,f_{n_0}{}^{\tau}\quad f_{m_1}{}^{\tau}\quad\cdots\quad f_{m_p}{}^{\tau}\quad f_{n_1}{}^{\tau}\quad\cdots\quad f_{n_q}{}^{\tau}\quad f_{\kappa_1}{}^{\tau}\quad\cdots\quad f_{\kappa_r}{}^{\tau}\quad f_n{}^{\tau}]\end{aligned}$$

Έτσι, για τη λύση της εξίσωσης (1-2.2) μπορούμε ισοδύναμα να λύσουμε τις εξισώσεις (1-2.4a ~ e). Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε την επιλυσιμότητα κάθε υποσυστήματος.

1. Η εξίσωση (1-2.4a) μπορεί να λυθεί μόνο όταν $f_{m_0}(t)=0$. Σε αυτήν την περίπτωση, (1-2.4a) είναι μια ταυτόσημη εξίσωση για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $x_{n_0}(t)$. Έτσι, η (1-2.4a) είτε είναι αδύνατη είτε έχει άπειρες λύσεις.

2. Η εξίσωση (1-2.4b) αποτελείται από ένα σύνολο εξισώσεων της μορφής:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{bmatrix}\dot{z}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1\end{bmatrix}z(t)+f_z(t)\,.$$

Αναπτύσσοντας το παραπάνω, έχουμε:

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t) + f_1(t), \quad \dot{z}_2(t) = z_3(t) + f_2(t), \ldots, \quad \dot{z}_{k-1}(t) = z_k(t) + f_{k-2}(t) .$$

Φαίνεται καθαρά ότι, για κάθε διαφορίσιμη εξίσωση, τα $z_1(t),\ z_2(t), \ldots, z_k(t)$ μπορούν να προσδιοριστούν επιτυχώς. Επομένως, τέτοιες εξισώσεις έχουν άπειρες λύσεις.

3. Κάθε εξίσωση (1-2.4c) έχει την εξής μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & \end{bmatrix} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & \end{bmatrix} z(t) + f_z(t) .$$

Αναπτύσσοντας, έχουμε τα εξής ισοδύναμα:

$$\begin{gathered} \dot{z}_1(t) = f_1(t), \quad \dot{z}_2(t) = z_1(t) + f_2(t), \ldots, \\ \dot{z}_k(t) = z_{k-1}(t) + f_k(t), \quad \dot{z}_k(t) + f_{k+1}(t) = 0 \end{gathered}$$

Εκτός από την τελευταία, οι εξισώσεις μπορούν να προσδιορίσουν μοναδικές συναρτήσεις $z_1(t),\ z_2(t), \ldots, z_k(t)$.Για την τελευταία εξίσωση, η $z_k(t)$ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $\dot{z}_k(t) + f_{k+1}(t) = 0$. Αυτό δείχνει ότι η εξίσωση δεν έχει λύση εκτός αν $f_{k+1}(t)$ ικανοποιεί τη συνθήκη $\dot{z}_k(t) + f_{k+1}(t) = 0$.

4. Η εξίσωση (1-2.4d) γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \dot{z}(t) = z(t) + f_z(t) .$$

Οι οποίες μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$\dot{z}_2(t) = z_1(t) + f_1(t), \quad \dot{z}_3(t) = z_2(t) + f_2(t), \ldots,$$
$$\dot{z}_k(t) = z_{k-1}(t) + f_{k-1}(t), \quad \dot{z}_k(t) + f_k(t) = 0$$

Ξεκινώντας από την τελευταία, τα $z_1(t)$, $z_2(t), \ldots,$ $z_k(t)$., μπορούν επιτυχώς να προσδιορίσουν την $f_Z(t)$. Έτσι, (1-2.4d) έχει μια και μοναδική λύση για κάθε $f_Z(t)$.

5. Το σύστημα (1-2.4e) είναι ένα συνηθισμένο σύστημα, το οποίο έχει μοναδική λύση για κάθε τμηματικά συνεχή συνάρτηση f(t).

Συμπερασματικά: Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης της εξίσωσης (1-2.1) είναι η εξαφάνιση των (1-2.4a) - (1-2.4c) ή με αλλά λόγια,

$$QEP = diag(I,N)\ ,\ QAP = diag(A_1,I) \qquad (1\text{-}2.5)$$

Αυτή η συνθήκη δεν είναι τόσο προφανής και είναι δύσκολη να επαληθευτεί. Για να το απλοποιήσουμε αυτό, ορίζουμε τα παρακάτω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1-2.1: Για κάθε δυο πίνακες E, $A \in R^{nxn}$, το ζεύγος (E, A) ονομάζεται κανονικό (regular) αν υπάρχει μια αριθμητική σταθερά α∈` : | αE + A | ≠ 0 ή το πολυώνυμο $|\ sE - A\ | \neq 0$.

ΛΗΜΜΑ 1-2.2: Το (E, A) είναι κανονικό αν και μόνον αν δυο αντιστρέψιμοι πίνακες Q, P μπορούν να επιλέγουν:

$$QEP=diag(I_{n_1},N), \quad QAP=diag(A_1,I_{n_2}) \qquad (1\text{-}2.6)$$

όπου $n_1+n_2=n$, $A_1 \in R^{n_1xn_1}$, $N \in R^{n_2xn_2}$ είναι μηδενοδύναμος.

Το επόμενο κριτήριο μας δίνει ένα εύκολο κριτήριο κανονικότητας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1-2.1 [7]: Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) Το σύστημα (1-1.3) είναι κανονικό.

(2) Αν $X_0 = \mathrm{KerA}$, $X_i = \{x \,/\, Ax \in EX_{i-1}\}$, πρέπει $\mathrm{KerE} \cap X_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, ...$

(3) Αν $Y_0 = \mathrm{KerA}^\tau$, $Y_i = \{x \,/\, A^\tau x \in E^\tau Y_{i-1}\}$, $\mathrm{KerE}^\tau \cap Y_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, ...$

(4) Έστω :

$$G(k)=\begin{pmatrix} E & & & & \\ A & E & & & \\ & A & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & E \\ & & & & A \end{pmatrix} \in R^{(k+1)nxnk}$$

Τότε rank G(k)=nk , k=1, 2, …

(5) Έστω :

$$F(k)=\begin{pmatrix} E & A & & & \\ & E & A & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & A \\ & & & E & A \end{pmatrix} \in R^{nkxn(k+1)}$$

Τότε rank F(k)=nk , k=1, 2, …

<u>*Παράδειγμα:1)*</u> Ας θεωρήσουμε το επόμενο ζεύγος πινάκων:

$$E=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε την απόλυτη τιμή $|\, sE - A \,|$. Έτσι έχουμε:

$$\left|sE - A\right| = \left|s\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| =$$

$$= \left\|\begin{bmatrix} 0 & s & s \\ s & s & 0 \\ -s & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{bmatrix} -1 & s & s-1 \\ s & s-2 & 0 \\ -s+1 & 0 & s-1 \end{bmatrix}\right\| = -4(s-1)^2 \neq 0$$

Επομένως, (E, A) είναι κανονικό.

Αυτή η μέθοδος όμως είναι ακατάλληλη αν εφαρμοστεί σε πίνακες E, A οι οποίοι είναι μεγάλης τάξης. Για το λόγο αυτό, ο Luenberger [18], σχεδίασε ένα άλλο κριτήριο γνωστό ως τυχαίος αλγόριθμος (shuffle algorithm).

Έστω ο nx2n πίνακας:

$$[E \quad A] \tag{1-2.7}$$

Αν ο E είναι αντιστρέψιμος, τότε το σύστημα (E, A) είναι κανονικό και ο αλγόριθμος σταματάει. Στην περίπτωση που ο E δεν είναι αντιστρέψιμος (singular) και παίρνοντας μετασχηματισμό γραμμών, μπορούμε να αλλάξουμε την (1-2.7) σε ένα block της μορφής:

$$\begin{bmatrix} E_1 & A_1 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \in R^{qxn} \tag{1-2.8}$$

όπου $E_1 \in R^{qxn}$ έχει πλήρη τάξη γραμμών με q = rankE. Τότε, αντιμεταθέτουμε τη δεύτερη γραμμή του πίνακα της (1-2.8) και παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} E_1 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{1-2.9}$$

Αν $\left[E_1 / A_2\right]$ είναι αντιστρέψιμος, τότε (Ε, Α) είναι κανονικό και ο αλγόριθμος σταματάει. Διαφορετικά, επαναλαμβάνουμε τον αλγόριθμο.

<u>*Παράδειγμα 2:*</u> Ας θεωρήσουμε τον σύνθετο πίνακα (Ε, Α) που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα (1). Έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}2.10)$$

όπου Ε είναι singular. Ένας μετασχηματισμός γραμμής στον (1-2.10) μας δίνει

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}2.11)$$

και αντιμεταθέτοντας τον (1-2.11) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο αριστερός 3x3 πίνακας είναι αντιστρέψιμος, πράγμα που σημαίνει ότι το (Ε, Α) είναι κανονικό.

1-3. Ισοδυναμία των Ιδιόμορφων Συστημάτων

Ας δούμε γενικά τι εννοούμε όταν λέμε ότι έχουμε μια σχέση ισοδυναμίας:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια σχέση ~ σε ένα σύνολο Α καλείται σχέση ισοδυναμίας αν:

1) a ~ a για όλα τα a ε A (ανακλαστική)
2) a ~ b αν και μόνο αν b ~ a (συμμετρική)
3) Αν a ~ b και b ~ c, τότε a ~ c (μεταβατική),

όπου a, b, $c \in A$.

Για να απλοποιήσουμε τα πράγματα, τη μεταβλητή του χρόνου t , θα την παραλείψουμε εκτός αν είναι αναγκαίο να τη χρησιμοποιήσουμε. Η αρχική συνθήκη για το χρόνο θα θεωρήσουμε ότι είναι $t_0 = 0$.

Έστω τα δυο ιδιόμορφα συστήματα:

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad (1\text{-}3.1)$$

και

$$\begin{aligned} \tilde{E}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned} \qquad (1\text{-}3.2)$$

όπου $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^r$, $E, A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$, $C \in R^{rxn}$ είναι σταθεροί πίνακες.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δυο αντιστρέψιμοι πίνακες Q και P τέτοιοι ώστε:

$$x = P\tilde{x} \qquad (1\text{-}3.3)$$

και $QEP = \tilde{E}$, $QAP = \tilde{A}$, $QB = \tilde{B}$, $CP = \tilde{C}$. Τα συστήματα (1-3.1) και (1-3.2) ονομάζονται περιορισμένα ισοδύναμα συστήματα (restricted system equivalent (r.s.e)) . Η σχέση (1-3.3) είναι ο ισότιμος μετασχηματισμός.

Από τον ορισμό, η ισοδυναμία περιορισμένου συστήματος είναι μια σχέση ισοδυναμίας που έχει τις παραπάνω ιδιότητες, δηλαδή, ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Ας δούμε με βάση το ιδιόμορφο σύστημα (1-3.1) το παρακάτω λήμμα:

1-3.1 Πρώτη ισοδύναμη μορφή (First Equivalent Form)(EF1)

ΛΗΜΜΑ 1-2.2 [7] : Για κάθε ιδιόμορφο σύστημα (1-3.4), υπάρχουν δυο αντιστρέψιμοι πίνακες Q και P τέτοιοι ώστε το (1-3.4) είναι r.s.e. στο

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 &= C_1 x_1 \end{aligned} \qquad (1\text{-}3.5a)$$

$$\begin{aligned} N\dot{x}_2 &= x_2 + B_2 u \\ y_2 &= C_2 x_2 \end{aligned} \qquad (1\text{-}3.5b)$$

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 = y_1 + y_2 \qquad (1\text{-}3.5c)$$

με τον μετασχηματισμό ομοιότητας:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P^{-1}x \ , \ \mathrm{x}_1 \in \mathrm{R}^{n_1 x n_2}, \mathrm{x}_2 \in \mathrm{R}^{n_2 x n_2} \qquad (1\text{-}3.6)$$

και

$$\mathrm{QEP} = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_{n_1}, \mathrm{N}),\ \mathrm{QAP} = \mathrm{diag}(\mathrm{A}_1, \mathrm{I}_{n_2}),\ \mathrm{QB} = [\mathrm{B}_1/\mathrm{B}_2],\ \mathrm{CP} = [\mathrm{C}_1 \quad \mathrm{C}_2] \qquad (1\text{-}3.7)$$

όπου $n_1 + n_2 = n$, $N \in R^{n_2 x n_2}$ είναι μηδενοδύναμος.

Οι εξισώσεις (1-3.5) αποτελούν την EF1 (First Equivalent Form), συνήθως αποκαλείται ως βασική ανάλυση (standard decomposition). Σε αυτή τη μορφή (1-3.5a) και (1-3.5b) ονομάζονται αργά και γρήγορα υποσυστήματα αντίστοιχα και οι x_1 και x_2 αποκαλούνται αργές και γρήγορες μεταβλητές, αντίστοιχα.

Γενικά, οι πίνακες Q και P, οι οποίοι μετατρέπουν ένα ιδιόμορφο σύστημα στην μορφή EF1, δεν είναι μοναδικοί, εξαιτίας της μη – μοναδικότητας της EF1. Υποθέτοντας ότι οι $\overline{Q}$ και $\overline{P}$ είναι αντιστρέψιμοι και το σύστημα (1-3.4) μετατρέπεται στη μορφή EF1, με αλλά λόγια το σύστημα είναι r.s.e στο:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{x}}_1 &= \overline{A}_1 \overline{x}_1 + \overline{B}_1 u \\ \overline{y}_1 &= \overline{C}_1 \overline{x}_1 \end{aligned} \qquad (1\text{-}3.8a)$$

$$\begin{aligned} \overline{N}\dot{\overline{x}}_2 &= \overline{x}_2 + \overline{B}_2 u \\ \overline{y}_2 &= \overline{C}_2 \overline{x}_2 \end{aligned} \qquad (1\text{-}3.8b)$$

$$y = \overline{C}_1 \overline{x}_1 + \overline{C}_2 \overline{x}_2 = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 \qquad (1\text{-}3.8c)$$

με τον μετασχηματισμό $\overline{P}^{-1}x = [\overline{x}_1 \,/\, \overline{x}_2]$.

Το επόμενο θεώρημα μας δείχνει τη σχέση μεταξύ των πινάκων Q, P και $\overline{Q}$ και $\overline{P}$ και των πινάκων που είναι συντελεστές στο σύστημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1–3.1: Ας υποθέσουμε ότι οι (1-3.5) – (1-3.7) και οι (1-3.8) είναι οι EF1s για το σύστημα (1-3.4). Τότε $n_1 = \overline{n}_1, n_2 = \overline{n}_2$, και υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $T_1 \in R^{n_1 x n_1}$, $T_2 \in R^{n_2 x n_2}$ τέτοιοι ώστε:

$$\begin{aligned} &Q = \mathrm{diag}(T_1,T_2)\overline{Q}, && P = \overline{P}\mathrm{diag}(T_1,T_2) \\ &A_1 = T_1\overline{A}_1T_1^{-1}, && N = T_2\overline{N}T_2^{-1} \\ &B_i = T_i\overline{B}_i, && C_i = \overline{C}_iT_i^{-1},\ i=1,2 \end{aligned} \tag{1-3.9}$$

<u>Παράδειγμα 1-3.2:</u> Ας δούμε ένα παράδειγμα ιδιόμορφου συστήματος ελέγχου και πως μετασχηματίζεται σύμφωνα με τον L.Dai[7].

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E}\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B}u \tag{1-3.10}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C}x$$

Αν πάρουμε τον εξής μετασχηματισμό $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P^{-1}x$, $x_1 \in$ □ ^{2}, $x_2 \in$ □ ^{2} και

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{τότε έχουμε:}$$

Υπολογίζουμε το γινόμενο QAP, από το οποίο θα προκύψει ο πίνακας A_1 (πάνω αριστερά) και το n_2:

$$QAP = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = diag(A_1, I_{n_2}) \;\Rightarrow\; \{n_2=2\}$$

$$I_{n_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το QB, βρίσκοντας έτσι τους πίνακες B_1 και B_2:

$$QB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Μετά το CP, για τους πίνακες C_1 και C_2 :

$$CP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C_1 = [0 \quad 1], \qquad C_2 = [0 \quad 0]$$

Επίσης, υπολογίζουμε το QEP για να προκύψει ο πίνακας N και το n_1 :

$$QEP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = diag(I_{n_1}, N) \;\Rightarrow\; \{n_1=2\}$$

$$I_{n_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οπότε, έχοντας υπολογίσει τους A_1, B_1, B_2, N, C_1 και C_2 το σύστημα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ 0 &= x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_1 \end{aligned} \qquad (1\text{-}3.11)$$

Το οποίο είναι το σύστημα της μορφής EF1 για το σύστημα του παραδείγματος 1-3.2.

1-4. Απόκριση Κατάστασης

Έστω ότι έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad (1\text{-}4.1)$$

όπου $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^r$, E, $A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$, $C \in R^{rxn}$ είναι σταθεροί πίνακες. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, το σύστημα (1-4.1) είναι r.s.e. στο:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 &= C_1 x_1 \end{aligned} \qquad (1\text{-}4.2a)$$

$$\begin{aligned} N\dot{x}_2 &= x_2 + B_2 u \\ y_2 &= C_2 x_2 \end{aligned} \qquad (1\text{-}4.2b)$$

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 = y_1 + y_2 \qquad (1\text{-}4.2c)$$

όπου $x_1 \in R^{n_1 x n_2}$, $x_2 \in R^{n_2 x n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $N \in R^{n_2 x n_2}$ είναι μηδενοδύναμος τέτοιος ώστε $N^h = 0$ και

$$QEP = diag(I_{n_1}, N),\ QAP = diag(A_1, I_{n_2}),\ QB = [B_1/B_2],\ CP = [C_1 \quad C_2] \qquad (1\text{-}4.3a)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P^{-1}x \qquad (1\text{-}4.3b)$$

Παρατηρούμε ότι το αργό υποσύστημα (1-4.2) είναι μια συνηθισμένη διαφορική εξίσωση. Έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $x_1(0)$ (η αρχική συνθήκη υποθέσαμε ότι είναι μηδέν) για κάθε τμηματικά συνεχής συνάρτηση u(t):

$$x_1(t) = e^{A_1 t}x_1(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1 u(\tau)d\tau \qquad (1\text{-}4.4)$$

Έτσι, το διάνυσμα κατάστασης $x_1(t)$ υπολογίζεται πλήρως από τα $x_1(0)$, $u(\tau)$ $(0 \le \tau \le t)$.

Έστω, ότι η συνάρτηση u(t) είναι h φορές τμηματικά συνεχής παραγωγίσιμη. Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της (1-4.2b) και πολλαπλασιάζοντας τα από αριστερά με τον πίνακα N, προκύπτουν οι επόμενες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} N\dot{x}_2 &= x_2 + B_2 u \\ N^2 x_2^{(2)} &= N\dot{x}_2 + NB_2\dot{u} \\ &\cdots \\ N^h x_2^{(h)} &= N^{h-1}x^{(h-1)}{}_2 + N^{h-1}B_2 u^{(h-1)} \end{aligned} \qquad (1\text{-}4.5)$$

όπου $x_2^{(i)}$ είναι η i – οστή παράγωγος του $x_2(t)$. Από τις παραπάνω εξισώσεις και το γεγονός ότι $N^h = 0$, η λύση της $x_2(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)} \qquad (1\text{-}4.6)$$

Το $x_2(t)$ είναι ο γραμμικός συνδυασμός των παραγώγων της u(t) σε χρόνο t. Για κάθε βαθμωτό $\varepsilon > 0$, οι ιδιότητες της $u(\tau)$, $0 \le \tau \le t - \varepsilon$ δεν έχουν καμία συμβολή στο $x_2(t)$. Αυτό δείχνει ένα ενδιαφέρον φαινόμενο μεταξύ των καταστάσεων $x_1(t)$ και $x_2(t)$: $x_1(t)$ αντιπροσωπεύει το αθροιστικό αποτέλεσμα της $u(\tau)$, $0 \le \tau \le t$, που δεν έχει σχέση με την u(t), ενώ αντίθετα, η $x_2(t)$ αποκρίνεται τόσο γρήγορα, ώστε επίμονα αντικατοπτρίζει όλες τις ιδιότητες της u(t) στο χρόνο t. Αυτός είναι και ο λόγος, που οι σχέσεις (1-4.2a) και (1-4.2b) ονομάζονται αργά και γρήγορα υποσυστήματα, αντίστοιχα.

Συνοψίζοντας, η κατάσταση και η έξοδος ενός ιδιόμορφου συστήματος (1-4.1) δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x(t) &= P[I/0]x_1(t) + P[0/I]x_2(t) = \\ &= P[I/0](e^{A_1 t}x_1(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1 u(\tau)d\tau) - P[0/I]\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) \end{aligned} \qquad (1\text{-}4.7a)$$

$$y = Cx(t) = CP\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}(e^{A_1 t}x_1(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1 u(\tau)d\tau) - CP\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) \qquad (1\text{-}4.7b)$$

Πιο συγκεκριμένα, θέτοντας $t > 0,\ t \to 0^+$, παίρνουμε:

$$x(0^+) = P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}x_1(0) - P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(0^+) \qquad (1\text{-}4.8)$$

η οποία ονομάζεται συμβιβαστή αρχική συνθήκη που εξαρτάται από την αρχική τιμή x(0).

Έστω, ότι η u(t) είναι h φορές τμηματικά συνεχής και παραγωγίσιμη. Οι συμβολισμοί $\dot{x}_2'(t)$ και $\dot{x}_2(t)$ χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν τις παραγώγους του $x_2(t)$ στις κατανεμημένες και κανονικές έννοιες αντίστοιχα. Έτσι, η ισοδύναμη κατανομή της (1-4.2b) είναι:

$$N\dot{x}_2'(t) - Nx_2(0)\delta(t) = x_2(t) + B_2 u(t)$$

όπου η δ(t) είναι η συνάρτηση του Dirac. Ξαναγράφοντας την παραπάνω εξίσωση ως εξής:

$$N\dot{x}_2'(t) = x_2(t) + B_2 u(t) + Nx_2(0)\delta(t)$$

και από την (1-4.6) έχουμε:

$$x_2(t) = -\sum_{i=1}^{h-1} \delta^{(i-1)}(t)N^i x_2(0) - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) \qquad (1\text{-}4.9)$$

Αυτή είναι η γενική μορφή της λύσης του γρήγορου υποσυστήματος (1-4.2b) με την έννοια της κατανομής. Θα την ονομάζουμε λύση της κατανομής (distribution solution), όπου εμφανίζονται κρουστικοί όροι.

Από τις (1-4.4) και (1-4.9) προκύπτει ότι η γενική απόκριση της κατάστασης, η x(t) είναι:

$$\begin{aligned} x(t) = {} & P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}e^{A_1 t}\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}P^{-1}x(0) + P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1 - \\ & -P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\sum_{i=1}^{h-1}\delta^{(i-1)}(t)N^i\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}P^{-1}x(0) - P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) \end{aligned} \qquad (1\text{-}4.10)$$

Η πολύπλοκη αυτή μορφή της λύσης x(t) (1-4.10) είναι αυτή που χαρακτηρίζει τα ιδιόμορφα συστήματα και τα κάνει να διαφέρουν από τα κανονικά. Προφανώς, οι (1-4.10) και (1-4.7a) είναι το ίδιο όταν t > 0.

Παράδειγμα 1-4.1 Ας θεωρήσουμε το ίδιο σύστημα που είδαμε και στο παράδειγμα 1-3.2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \qquad (1\text{-}4.11)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

το οποίο το μετασχηματίσαμε στις σχέσεις (1-3.11). Από τις (1-4.6) και (1-4.4), το αργό και γρήγορο υποσύστημα έχουν τις επόμενες λύσεις:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{A_1 t} x_1(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau \\ x_2(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \qquad (1\text{-}4.12)$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε το x(t), την απόκριση της κατάστασης του συστήματος (1-4.11) ως εξής:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_1(t) \end{bmatrix}$$

όπου

$$x_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} -\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t & -2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ 2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t & \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{bmatrix} x_1(0) +$$

$$+ \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \begin{bmatrix} -\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau) - \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau) \\ 2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau) \end{bmatrix} u(\tau) d\tau$$

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Σ' αυτό το παράδειγμα, όπως είδαμε, N=0, όποτε δεν εμφανίζονται κρουστικοί όροι στη γρήγορη απόκριση της κατάστασης.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι, η (1-4.10) είναι η λύση της (1-4.1), στην έννοια της κατανομής και όχι μια λύση με τη συνηθισμένη έννοια. Έτσι, όταν ζητηθεί, η λύση (1-4.10) δεν ισούται με την συνήθη έννοια της διαφορικής εξίσωσης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η ισότητα να ισχύει για την έννοια της κατανομής.

2^{o} ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΙΔΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ (CONTROLLABILITY IN SINGULAR CONTROL SYSTEMS)

Χαρακτηρίζοντας τις δομικές ιδιότητες από πολλές οπτικές γωνίες, η ελεγξιμότητα, η R-ελεγξιμότητα (R-controllability) και η κρουστική ελεγξιμοτητα (impulse controllability) είναι τρεις σημαντικές έννοιες στα ιδιόμορφα συστήματα. Χρησιμοποιώντας αυτές τις έννοιες μπορεί κανείς να έχει μια πολύ καλή εικόνα της ελεγξιμότητας από είσοδο ελέγχου. Οι έννοιες αυτές της ελεγξιμότητας ωστόσο αντικατοπτρίζουν και τη διαφορά μεταξύ των ιδιόμορφων συστημάτων από τα κανονικά.

Για τις έννοιες της ελεγξιμότητας, όπως και της παρατηρησιμότητας που θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, πολλές έρευνες έχουν γίνει και κάθε μια από αυτές, παρουσιάζει με το δικό της τρόπο την ελεγξιμότητα και την παρατηρησιμότητα, που σε πολλά σημεία τις κάνει να διαφέρουν μεταξύ τους. Θα παρουσιάσουμε τους διαφορετικούς ορισμούς που έχουν δοθεί ως τώρα για την ελεγξιμότητα των ιδιόμορφων συστημάτων.

2-1. Ελεγξιμότητα, R-ελεγξιμότητα και Κρουστική Ελεγξιμότητα σύμφωνα με τον L.Dai [7]

Έστω το ιδιόμορφο σύστημα ελέγχου

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \qquad (2\text{-}1.1)$$

όπου $x(t)\colon R^n \to R^n$, $u\colon R^m \to R^m$, $y\colon R^r \to R^r$ και $E, A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$, $C \in R^{rxn}$ είναι σταθεροί πίνακες.

Για κάθε ιδιόμορφο σύστημα της μορφής (2-1.1), όπως είδαμε και στην προηγούμενη παράγραφο, υπάρχουν δυο αντιστρέψιμοι πίνακες Q και P τέτοιοι ώστε το (2-1.1) είναι αυστηρά ισοδύναμο με το σύστημα (r.s.e.):

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u$$
$$y_1 = C_1 x_1$$
$$N\dot{x}_2 = x_2 + B_2 u \qquad (2\text{-}1.2)$$
$$y_2 = C_2 x_2$$
$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 = y_1 + y_2$$

βάσει του ισότιμου μετασχηματισμού:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P^{-1}x \ , \ x_1(t): R^n \to R^{n_1}, x_2: R^n \to R^{n_2}, \ R \in R^{nxn}$$

και

$$QEP = diag(I_{n_1}, N), \ QAP = diag(A_1, I_{n_2}), \ QB = [B_1/B_2], \ CP = [C_1 \quad C_2]$$

όπου $n_1 + n_2 = n$, και $N \in R^{n_2 x n_2}$ είναι μηδενοδύναμος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2-1.1: Το σύστημα (2-1.2) ονομάζεται **ελέγξιμο** αν, για κάθε $t_1 > 0$, $x(0) \in R^n$ και $w \in R^n$, υπάρχει μια είσοδος ελέγχου $u(t) \in C_p^{h-1}$,(όπου C_p^{h-1} είναι το (h–1) φορές τμηματικά συνεχές διαφορίσιμο σύνολο συναρτήσεων), τέτοιο ώστε $x(t_1) = w$.

Αυτός ο ορισμός, δηλώνει ότι σύμφωνα με την υπόθεση της ελεγξιμότητας, για κάθε αρχική συνθήκη x(0), μπορούμε πάντα να επιλέγουμε μια είσοδο ελέγχου $u(t) \in C_p^{h-1}$ τέτοια ώστε η απόκριση κατάστασης να ξεκινάει από το x(0) και να καταλήγει σε οποιαδήποτε ορισμένη θέση στον $\mathbb{R}^n$ για κάθε δοσμένη χρονική στιγμή. Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι ο ορισμός είναι μια φυσική γενίκευση της ελεγξιμότητας που ισχύει στα κανονικά συστήματα.

Ας ξαναγράψουμε το (2-1.2) σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 &= C_1 x_1 \end{aligned} \qquad (2\text{-}1.2a)$$

$$\begin{aligned} N\dot{x}_2 &= x_2 + B_2 u \\ y_2 &= C_2 x_2 \end{aligned} \qquad (2\text{-}1.2b)$$

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 = y_1 + y_2 \qquad (2\text{-}1.2c)$$

Τότε έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2-1.1: (1). Το υποσύστημα (2-1.2a) είναι ελέγξιμο αν-ν:

$$\text{rank}[sE - A, B] = n \text{ για κάθε } s \in \mathbb{C}, \; s \text{ πεπερασμένο},$$

όπου $\mathbb{C}$ αναπαριστά το μιγαδικό επίπεδο.

(2). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(a). Το γρήγορο υποσύστημα (2-1.2b) είναι ελέγξιμο

(b). $\text{rank}[B_2, NB_2, ..., N^{h-1}B_2] = n_2$

(c). $\text{rank}[N \quad B_2] = n_2$

(d). $\text{rank}[E \quad B] = n$

(e). Για κάθε αντιστρέψιμους πίνακες Q_1 και P_1, που ικανοποιούν τη σχέση $E = Q_1\text{diag}(I,0)P_1$, έστω $Q_1B=[\tilde{B}_1 \,/\, \tilde{B}_2]$.Τότε, ο $\tilde{B}_2$ έχει πλήρη τάξη γραμμών, $\text{rank}\,\tilde{B}_2 = n\text{-rank}E$

(3) Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(a). Το σύστημα (2-1.2) είναι ελέγξιμο

(b).Συγχρόνως και το αργό (2-1.2a) αλλά και το γρήγορο υποσύστημα (2-1.2b) είναι ελέγξιμα.

(c). $\text{rank}[B_1, A_1B_1, \ldots, A_1^{n_1-1}B_1] = n_1$ και

$\text{rank}[B_2, NB_2, \ldots, N^{h-1}B_2] = n_2$

(d). $\text{rank}[sE - A \quad B] = n$, για κάθε $s \in \mathbb{C}$, s πεπερασμένο, και $\text{rank}[E \quad B] = n$.

(e). Ο πίνακας :

$$D_1 = \begin{bmatrix} -A & & & & B & & & \\ E & -A & & & & B & & \\ & E & \ddots & & & & \ddots & \\ & & \ddots & -A & & & & \ddots \\ & & & E & & & & B \end{bmatrix} n^2x(n+m-1)n$$

ή ισοδύναμα

$$D_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -A & B \\ E & 0 \end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix} -A & B \\ E & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{bmatrix} -A & B \\ E & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} n^2x(n+m-1)n$$

έχει πλήρη τάξη γραμμών rank D1 = n2 .

Για την καλύτερη κατανόηση του θεωρήματος 2-1.1, ας δούμε το παράδειγμα που ακολουθεί:

Παράδειγμα 2-1.1: Έστω το σύστημα που χρησιμοποιήσαμε και στο παράδειγμα (1-3.2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Ας δούμε χωριστά κάθε μια από τις περιπτώσεις του θεωρήματος 2-1.1

(1). Στην περίπτωση του συστήματος έχουμε ότι n = 4. Θα υπολογίσουμε το rank[sE – A, B]. Έτσι έχουμε:

$$\text{rank}[sE - A, B] = \text{rank} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ -1 & 0 & s & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} = 4 = n$$

(2). (a) Έχουμε ότι: $\begin{aligned} N\dot{x}_2 &= x_2 + B_2 u \\ y_2 &= C_2 x_2 \end{aligned}$ με N = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Οπότε με την αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}_2 = x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u$ με $x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$, επομένως:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}_2 = x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \Rightarrow \begin{cases} 0 = x_{21} - 1u \\ 0 = x_{22} \end{cases}$, δηλαδή το x_{22} δεν ελέγχεται από την είσοδο u. Άρα το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο.

(b) Στην περίπτωση που μελετάμε, ο B_2 είναι 2x1 πίνακας οπότε παίρνουμε h = 2. Έτσι, θα υπολογίσουμε το rank[B_2, NB_2], όπου N = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Έτσι έχουμε:

$$\text{rank}[B_2, NB_2] = \text{rank}\begin{bmatrix} -1 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Το $n_2 = 2$ αλλά όπως βλέπουμε από την παραπάνω σχέση $1 \neq 2$.

(c) Εδώ υπολογίζουμε το rank[N B_2], το οποίο για να είναι το σύστημα ελέγξιμο πρέπει να είναι ίσο με $n_2 = 2$. Οπότε:

$$\text{rank}[N \;\; B_2\,] = \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 2$$

(d) Υπολογίζουμε το rank[E B]. Στο παράδειγμα που έχουμε, ισχύει ότι n=4. Ας δούμε αν ισχύει ότι rank[E B] = 4.

rank $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix} = 3 \neq 4 = n$. Άρα, δεν ισχύει ούτε η (d) προϋπόθεση του θεωρήματος.

(e) Όπως είδαμε από τους ισοδύναμους μετασχηματισμούς έχουμε ότι QEP = diag(I_2,N) $\Rightarrow$ E = Q^{-1} diag(I,0) P^{-1} , δηλαδή οι αντιστρέψιμοι πίνακες Q_1 και P_1 είναι οι εξής δυο: $Q_1 = Q^{-1}$, $P_1 = P^{-1}$. Επομένως,

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης: $$Q_1 B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Πρέπει $\tilde{B}_2$ να έχει πλήρη τάξη γραμμών και rank $\tilde{B}_2$ = n – rankE. Όμως, rank $\tilde{B}_2$ =1 και

n - rankE = 4 –2 = 2. Άρα, rank $\tilde{B}_2 \neq$ n – rankE .

(3) (c) Όπως έχουμε δει $n_1 = 2$ και $n_2 = 2$, οπότε θα υπολογίσουμε για αυτήν την περίπτωση το rank[B_1, A_1B_1] και το rank[B_2, NB_2]. Έτσι,

$$\text{rank}[B_1, A_1B_1] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & \vdots & -1 \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} = 2 = n_1$$

$$\text{rank}[B_2, NB_2] = \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 2 = n_2$$

(d) Τα έχουμε υπολογίσει στο (1) και (2d)

(e) Ο πίνακας D_1 θα είναι διάστασης 16x16, διότι n = 4 και m = 1. Οπότε, n^2 x (n + m – 1)n = 4^2 x (4 + 1 – 1)4 = 16 x 16. Έτσι έχουμε:

$$
D_1 = \left[\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
0 & -1 & 0 & 0 & \vdots & & & & & & & & & & & 0 & & & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & & & & & & & & & & & 0 & & & \\
1 & 0 & 0 & -1 & \vdots & & & & & & & & & & & 0 & & & \\
0 & -1 & -1 & -1 & \vdots & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & & & \cdots & \cdots & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 0 & 0 & \vdots & & & & & & & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & & & & & & & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & -1 & \vdots & & & & & & & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \vdots & & & & & & & -1 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \\
 & & & & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 0 & 0 & \vdots & & & 0 & \\
 & & & & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & & & 0 & \\
 & & & & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & -1 & \vdots & & & 0 & \\
 & & & & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \vdots & & & -1 & \\
 & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & & & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & & & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & & & & -1
\end{array}\right]
$$

ο οποίος δεν έχει πλήρη τάξη γραμμών rank□ $D_1 = 4 \neq 16 = n^2$.

<u>Συμπέρασμα παραδείγματος:</u> Όπως διαπιστώνει εύκολα κανείς, χρησιμοποιώντας όλα τα σκέλη του παραπάνω θεωρήματος (2-1.1), το σύστημα που χρησιμοποιήσαμε δεν είναι ελέγξιμο.

Ας δούμε τώρα την έννοια της R – ελεγξιμότητας. Έχουμε τον εξής ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2-1.2: Το ιδιόμορφο σύστημα (2-1.2) ονομάζεται **R-ελέγξιμο** (R-controllable), αν είναι ελέγξιμο στο R, ή ακριβέστερα, για κάθε ορισμένο $t_1>0$, $x_1(0) \in R$ και $w \in R$ πάντα υπάρχει μια αποδεκτή είσοδος ελέγχου $u(t) \in C^{h-1}$ τέτοια ώστε: $x(t_1) = w$.

Η R-ελεγξιμότητα (R-controllability) εγγυάται την ελεγξιμότητα για το σύστημα, από οποιαδήποτε αποδεκτή αρχική συνθήκη $x_1(0) \in R$ σε κάθε εφικτό διάνυσμα κατάστασης και αυτή η διαδικασία ολοκληρώνεται για οποιαδήποτε δοσμένη χρονική περίοδο αν η είσοδος ελέγχου u(t) είναι κατάλληλα επιλεγμένη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2-1.2: Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

i) Το ιδιόμορφο σύστημα (2-1.2) είναι R – ελέγξιμο

ii) Το αργό υποσύστημα (2-1.2a) είναι ελέγξιμο

iii) $\text{rank}[sE - A, B] = n$, για κάθε $s \in \square$ και s είναι πεπερασμένο

iv) $\text{rank}\,[B_1, A_1 B_1, \ldots, A_1^{n_1 - 1} B_1] = n_1$

v) $$D_2 = \begin{bmatrix} -A & & & & B & & & \\ E & -A & & & & B & & \\ & E & \ddots & & & & \ddots & \\ & & \ddots & -A & & & & \ddots \\ & & & E & & & & B \end{bmatrix} \in \square^{\kappa n \times (n+m)\kappa}$$

όπου $\kappa \geq n_1$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, για παράδειγμα, $\kappa = \text{rank}E$ ή $\kappa = n$. Ο πίνακας D_2 έχει πλήρη τάξη γραμμών κn.

Παράδειγμα: Από τον ορισμό της R – ελεγξιμότητας, το παρακάτω ιδιόμορφο σύστημα:

$$N\dot{x} = x + Bu$$
$$y = Cx$$

όπου N είναι μηδενοδύναμος, είναι R – ελέγξιμο. ▲

Φαίνεται καθαρά, ότι οι έννοιες της ελεγξιμότητα και R – ελεγξιμότητα σχετίζονται αυστηρά με την τερματική συμπεριφορά του συστήματος, η οποία είναι στοιχείο ενός διανυσματικού χώρου. Από την άλλη μεριά, όμως, στο χώρο κατάστασης, υπάρχουν επίσης και κρουστικοί όροι οι οποίοι εμφανίζονται είτε από την αρχική συνθήκη, είτε από την πιθανή συμπεριφορά απεικόνισης της εισόδου ελέγχου $u \in C_p^{h-1}$ και των παραγώγων της. Το σύστημα έχει στην αρχή κρουστικούς όρους και στη συνέχεια ομαλή συμπεριφορά. Η R – ελεγξιμότητα ενδιαφέρεται όχι για το ξεκίνημα του συστήματος αλλά για την συνέχεια.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.4, δεν υπάρχουν κρουστικοί όροι στην $x_1(t)$ όταν $u \in C_p^{h-1}$ και ο κρουστικός όρος στην $x_2(t)$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$x_{2\tau}(t) = -\sum_{i=1}^{h-1} \delta^{(i-1)}(t) N^i x_2(0) - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 \Delta_\tau(u^{(i)}(t)) \qquad (2\text{-}1.3)$$

και όταν u(t) = 0, $\Delta_\tau(u^{(i)}(t)) = 0$, έχουμε:

$$x_{2\tau} = -\sum_{i=1}^{h-1} \delta^{(i-1)}(t) N^i x_2(0) \qquad (2\text{-}1.4)$$

Προφανώς, $x_{2\tau} = 0$ όταν $x_2(0) = 0$. Για κάθε στοιχείο w του διανυσματικού χώρου, έχουμε:

$$I_\tau(w,t) = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{2\tau}(w,t) \end{bmatrix}, \quad I_{2\tau}(w,t) = -\sum_{i=1}^{h-1} \delta^{(i-1)}(t-\tau) N^i w \qquad (2\text{-}1.5)$$

Τότε το $I_{\tau=0}(x_2(0), t)$ δηλώνει την κρουστική συμπεριφορά του x(t) στο αρχικό σημείο, η οποία προκαλείται αυστηρά μόνο από την αρχική συνθήκη $x_2(0)$. Το $I_\tau(w,t)$, περιλαμβάνει όλους τους πιθανούς κρουστικούς όρους του x(t) στο τ.

Καθώς, ο κρουστικός όρος στην κατάσταση x(t) εμφανίζεται μόνο στην $x_2(t)$ τότε: $x_\tau(t) = [\ 0 / x_{2\tau}(t)\ ]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2-1.3: Το σύστημα (2-1.2) ορίζεται ως **κρουστικά ελέγξιμο**, αν για κάθε αρχική συνθήκη x(0), τ ∈ □ και $w \in R^{n_2}$, υπάρχει μια αποδεκτή είσοδος ελέγχου $u \in C^{h-1}$ τέτοια ώστε:

$$x_\tau(t) = I_\tau(w,t) \qquad (2\text{-}1.6)$$

Αυτός ο ορισμός είναι όμοιος με τον ορισμό της ελεγξιμότητας. Αυτό χαρακτηρίζει την ικανότητα να παράγονται κρουστικοί όροι από αποδεκτό έλεγχο. Σύμφωνα με την κρουστική ελεγξιμότητα, ένας κατάλληλος έλεγχος σε αποδεκτό σύνολο μπορεί να επιλεγεί ως εξής: οι κρουστικές συνθήκες x(t) μπορούν να αντιστοιχούν σε οποιοδήποτε στοιχείο του $I_\tau(R^{n_2}, t)$ για οποιαδήποτε δοσμένη χρονική στιγμή τ. Έτσι, $I_\tau(R^{n_2}, t) = \{I_\tau(w, t) / w \in R^{n_2}\}$. Συμπερασματικά, το x_τ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πιθανή τιμή.

Η κρουστική ελεγξιμοτητα είναι σημαντική για την αναγκαιότητα να απαλείψει τα κρουστικά τμήματα σε ένα σύστημα στο οποίο οι κρουστικές συνθήκες είναι γενικά μη αναμενόμενο να εμφανιστούν. Διαφορετικά, μια δυνατή κρουστική συμπεριφορά μπορεί να σταματήσει τη λειτουργία του συστήματος ή ακόμα και να το καταστρέψει.

Ας δούμε λοιπόν το κριτήριο για την κρουστική ελεγξιμοτητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2-1.3: Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

a) Το σύστημα (2-1.2) είναι κρουστικά ελέγξιμο

b) Το υποσύστημα (2-1.2b) είναι κρουστικά ελέγξιμο

c) $\mathrm{Ker}\, N + \mathrm{Im}[B_2, NB_2, \ldots, N^{h-1}B_2] = R^{n_2}$

d) $\mathrm{Im}N = \mathrm{Im}[NB_2, N^2B_2, ..., N^{h-1}B_2]$

e) $\mathrm{Im}N + \mathrm{Im}B_2 + \mathrm{Ker}N = R^{n_2}$

f) Έστω η ανάλυση ελεγξιμότητας του (N,B_2) είναι η εξής:

$$\left(\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ 0 & N_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

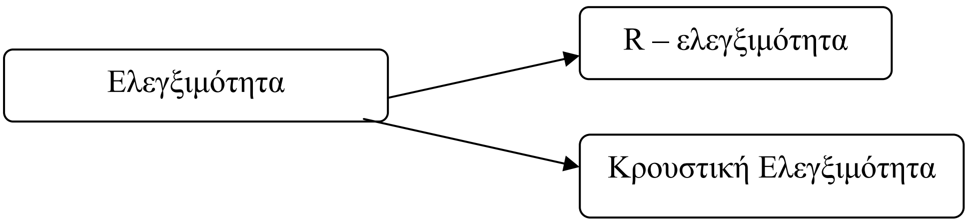
Τότε είτε το N_{22} εξαφανίζεται, είτε υπάρχει ένας πίνακας M τέτοιος ώστε:

$$[N_{12} \ / \ N_{22}] = [N_{11} \ / \ 0]M$$

g) $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B \end{bmatrix} = n + \mathrm{rank}E$

Από τα θεωρήματα 2-1.3 και 2-1.2, προκύπτει ότι ένα σύστημα είναι κρουστικά ελέγξιμο αν είναι ελέγξιμο. **Το αντίστροφο δεν ισχύει.**

Η σχέση μεταξύ των 3 εννοιών της ελεγξιμότητας μπορεί να περιγραφεί στο παρακάτω διάγραμμα.



2-2. Η έννοια της ελεγξιμότητας σύμφωνα με τον KALMAN [10]

Αρχικά, ας δούμε μερικά εισαγωγικά στοιχεία που θα μας βοηθήσουν για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της ελεγξιμότητας σύμφωνα με τον Kalman.

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Kalman [9], ο αντίστροφος πίνακας $(sE - A)^{-1}$ μπορεί να εκφρασθεί με μια δυναμοσειρά του s όπως παρακάτω:

$$(sE - A)^{-1} = \Phi_{-\mu}s^{\mu-1} + ... + \Phi_{-1}s^{0} + \Phi_{0}s^{-1} + ...+ \Phi_{k}s^{k-1} + ... \qquad (2\text{-}2.1)$$

όπου μ είναι ο δείκτης μηδενικότητας του $sE - A$, δηλαδή,

$$\mu - 1 = \mathrm{rank}E - \deg(\det[sE - A])$$

είναι ο βαθμός του πολυωνυμικού μέρους του $(sE - A)^{-1}$ στην (2-2.1). Οι πίνακες $\Phi_j \in R^{nxn}$ ($j = -\mu,\dots, -1, 0, 1,\dots$) ορίζονται μοναδικά από τις σχέσεις:

$$E\Phi_k = A\Phi_{k-1}, \quad (k = -\mu,..., -2,-1 \text{ με } \Phi_{-\mu-1} = 0) \qquad (2\text{-}2.2a)$$

$$E\Phi_0 - A\Phi_{-1} = I_n \qquad (2\text{-}2.2b)$$

$$\Phi_k = (\Phi_0 A)^k\Phi_0 = \Phi_{k-1}A\Phi_0 \quad (k = 1, 2, 3, ...) \qquad (2\text{-}2.2c)$$

$$\Phi_{-k} = -\Phi_{-k+1}E\Phi_{-1} = (-\Phi_{-1}E)^{k-1}\Phi_{-1} \quad (k = 2,3,...,\mu) \qquad (2\text{-}2.2d)$$

ή ισοδύναμα από τις σχέσεις:

$$\Phi_k E = \Phi_{k-1}A, \quad (k = -\mu,..., -2,-1 \text{ με } \Phi_{-\mu-1} = 0) \qquad (2\text{-}2.3a)$$

$$\Phi_0 E - \Phi_{-1}A = I_n \qquad (2\text{-}2.3b)$$

$$\Phi_k = \Phi_0(A\Phi_0)^k = \Phi_0 A\Phi_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, ...) \qquad (2\text{-}2.3c)$$

$$\Phi_{-k} = -\Phi_{-1}E\Phi_{-k+1} = \Phi_{-1}(-E\Phi_{-1})^{k-1} \quad (k = 2,3,...,\mu) \qquad (2\text{-}2.3d)$$

Σύμφωνα με τις (2-2.2c,d) ή ισοδύναμα με τις (2-2.3c,d), οι Φ_κ μπορούν να υπολογιστούν από τα Φ_0 και Φ_{-1}. Βασιζόμενοι στις (2-2.2a,b) και (2-2.3a1,b1) μπορούν να προκύψουν οι επόμενες ιδιότητες:

$$\Phi_i E \Phi_j = \Phi_j E \Phi_i \quad (\text{για καθε i, j}) \tag{2-2.4a}$$

$$\Phi_i E \Phi_j = \begin{cases} -\Phi_{i+j}, & i < 0, j < 0 \\ \Phi_{i+j}, & i \geq 0, j \geq 0 \\ 0, & ij \leq 0 \text{ και } |i| + |j| \neq 0 \end{cases} \tag{2-2.4b}$$

$$\Phi_i A \Phi_j = \begin{cases} -\Phi_{i+j+1}, & i < 0, j < 0 \\ \Phi_{i+j+1}, & i \geq 0, j \geq 0 \\ 0, & ij \leq 0 \text{ και } |i| + |j| \neq 0 \end{cases} \tag{2-2.4c}$$

Η λύση του ιδιόμορφου συστήματος (2.1), με βάση τα προηγούμενα μπορεί να παρουσιαστεί και στις δυο μορφές, ανοιχτή και κλειστή. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το διάνυσμα της εισόδου u(t) είναι μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση του χρόνου, με μεμονωμένα σημεία ασυνέχειας και πλήρως διαφορίσιμη εκτός από τα σημεία ασυνέχειας. Επίσης, $u(t) = 0$, όταν $t < 0$. Στα σημεία ασυνέχειας, οι παράγωγοι της συνάρτησης εκφράζονται από τις συναρτήσεις του Dirac. Για να αντλήσουμε τη λύση από το σύστημα (2.1), χρησιμοποιούμε μετασχηματισμό Laplace και έτσι έχουμε:

$$X(s) = (sE-A)^{-1}Ex(0-) + (sE-A)^{-1}Bu(s) \tag{2-2.5}$$

$$Y(s) = CX(s) = C(sE-A)^{-1}Ex(0-) + C(sE-A)^{-1}Bu(s) \tag{2-2.6}$$

όπου $X(s) = L_{-}\{x(t)\}$, $U(s) = L_{-}\{u(t)\}$ και $Y(s) = L_{-}\{y(t)\}$, και όπου L_{-} είναι ο μετασχηματισμός Laplace, δηλαδή, $L_{-}\{x(t)\} = \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$. Με αντικατάσταση της (2-2.1) στην (2-2.5) έχουμε:

$$\begin{aligned} X(s) = {} & (\Phi_{-\mu}s^{\mu-1} + \ldots + \Phi_{-1}s^0 + \Phi_0 s^{-1} + \ldots + \Phi_k s^{-k-1} + \ldots)Ex(0-) + \\ & + (\Phi_{-\mu}s^{\mu-1} + \ldots + \Phi_{-1}s^0 + \Phi_0 s^{-1} + \ldots + \Phi_k s^{-k-1} + \ldots)BU(s) \end{aligned} \tag{2-2.7}$$

Μετατρέποντας την παραπάνω έκφραση σε συνάρτηση του χρόνου t έχουμε:

$$
\begin{aligned}
x(t) = (&\Phi_{-\mu}\delta^{(\mu-1)}(t) + \ldots + \Phi_{-1}\delta(t) + \Phi_0 u_s(t) + \\
&+ \Phi_1 \frac{t^1}{1!} + \ldots + \Phi_k \frac{t^k}{k!} + \ldots)Ex(0-) + \Phi_{-\mu}Bu^{(\mu-1)}(t) + \\
&+ \ldots + \Phi_{-1}Bu(t) + \Phi_0 B\int_{0-}^{t} u(\tau_0)d\tau_0 + \Phi_1 B\int_{0-}^{t}\int_{0-}^{\tau_0} u(\tau_1)d\tau_1 d\tau_0 + \\
&+ \ldots + \Phi_k B\int_{0-}^{t}\int_{0-}^{\tau_0}\ldots\int_{0-}^{\tau_{k-1}} u(\tau_k)d\tau_k \ldots d\tau_1 d\tau_0 + \ldots \quad (\forall t \geq 0)
\end{aligned}
\tag{2-2.8}
$$

όπου $u_s(t)$ είναι η βηματική συνάρτηση. Η (2-2.8) μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$
\begin{aligned}
x(t) = (&\Phi_{-\mu}\delta^{(\mu-1)}(t) + \ldots + \Phi_{-1}\delta(t) + \Phi_0 u_s(t) + \\
&+ \Phi_1 \frac{t^1}{1!} + \ldots + \Phi_k \frac{t^k}{k!} + \ldots)Ex(0-) + \Phi_{-\mu}Bu^{(\mu-1)}(t) + \\
&+ \ldots + \Phi_{-1}Bu(t) + \Phi_0 Bu^{(-1)}(t) + \Phi_1 Bu^{(-2)}(t) + \\
&+ \ldots + \Phi_k Bu^{(-k-1)}(t) + \ldots \quad (\forall t \geq 0)
\end{aligned}
\tag{2-2.9}
$$

όπου $u^{(-k-1)}(t) = \int_{0-}^{t}\int_{0-}^{\tau_0}\ldots\int_{0-}^{\tau_{k-1}} u(\tau_k)d\tau_k \ldots d\tau_1 d\tau_0, \quad k \geq 0$ (2-2.10)

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις (2-2.3c,d) και (2-2.8), η ακόλουθη κλειστή μορφή λύσης είναι η εξής:

$$
\begin{aligned}
x(t) = (&\Phi_{-\mu}\delta^{(\mu-1)}(t) + \ldots + \Phi_{-1}\delta^{(0)}(t))Ex(0-) + \Phi_0 e^{A\Phi_0 t}Ex(0-) + \\
&+ \Phi_{-\mu}Bu^{(\mu-1)}(t) + \ldots + \Phi_{-1}Bu(t) + \Phi_0\int_{0-}^{t} e^{A\Phi_0(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau
\end{aligned}
\tag{2-2.11}
$$

Παρατήρηση: Αν x(t) είναι μια κατανομή, οι λύσεις της (2-2.8) δια μέσου της (2-2.11) διατηρούνται όπως είναι, ακόμα και αν αντικαταστήσουμε τις κανονικές παραγώγους της u(t) από τις αντίστοιχες παραγώγους κατανομής.

Μετά τα παραπάνω, που είναι χρήσιμα για την κατανόηση της ελεγξιμότητας κατά Kalman, μπορούμε να αρχίσουμε με τον ορισμό της ελεγξιμότητας:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2-2.1: Το σύστημα (2-1.1) είναι **ελέγξιμο** αν για κάθε x(0-) και κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα, [0, T] ($T \geq 0$), και μια συνάρτηση εισόδου, u(t) ($t \in [0, T]$), τέτοιο ώστε: $x(T) = \xi$. ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ 2-2.1: Το σύστημα (2-2.1) είναι ελέγξιμο, αν και μόνο αν

$$\operatorname{rank}\left[\Phi_{-\mu}B \;\ldots\; \Phi_{-1}B \quad \Phi_0 B \;\ldots\; \Phi_{n-1}B\right] = n \tag{2-2.12}$$

Απόδειξη: Έστω $\xi = x(T)$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2-2.9) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\xi = {} & (\Phi_{-\mu}\delta^{(\mu-1)}(T) + \ldots + \Phi_{-1}\delta(T) + \Phi_0 u_s(T) + \\
& + \Phi_1 \frac{T^1}{1!} + \ldots + \Phi_k \frac{T^k}{k!} + \ldots)Ex(0\text{-}) + \Phi_{-\mu}Bf^{(0)}(T) + \\
& + \ldots + \Phi_{-1}Bf^{(-\mu+1)}(T) + \Phi_0 Bf^{(-\mu)}(T) + \Phi_1 Bf^{(-\mu-1)}(T) + \\
& + \ldots + \Phi_k Bf^{(-k-\mu)}(T) + \ldots \quad (\forall t \geq 0)
\end{aligned} \tag{2-2.13}$$

ή ισοδύναμα:

$$\xi = \left[\Phi_{-\mu} \;\ldots\; \Phi_{-1} \quad \Phi_0 \;\ldots\; \Phi_k \;\ldots\right]
\begin{bmatrix}
\delta^{(\mu-1)}(T)Ex(0\text{-}) \\
\vdots \\
\delta^{(0)}(T)Ex(0\text{-}) \\
u_s(T)Ex(0\text{-}) \\
\frac{T^1}{1!}Ex(0\text{-}) \\
\vdots \\
\frac{T^k}{k!}Ex(0\text{-}) \\
\vdots
\end{bmatrix} +$$

$$+\left[\Phi_{-\mu}B \;\ldots\; \Phi_{-1}B \quad \Phi_0 B \;\ldots\; \Phi_k B \;\ldots\right]
\begin{bmatrix}
f^{(0)}(T) \\
\vdots \\
f^{(1-\mu)}(T) \\
f^{(-\mu)}(T) \\
\vdots \\
f^{(k-\mu)}(T) \\
\vdots
\end{bmatrix} \tag{2-2.14}$$

όπου $f^{(k-\mu)}(t) = u^{(k-1)}(t),\ \forall t \geq 0,\ (k \in \{\mu, \mu\text{-}1, \ldots, 1, 0, -1, \ldots\})$. Προφανώς, η ιδιότητα της ελεγξιμότητας ικανοποιείται αν και μόνο αν υπάρχει μια f(t) τέτοια ώστε η (2-2.14) ισχύει για ένα $T \geq 0$ και για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$. Σύμφωνα με την παρατήρηση που έγινε παραπάνω, φαίνεται καθαρά ότι όταν η u(t) είναι μια τμηματικά συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση του χρόνου, οι όροι $f^{(j)}(t)$ ($j = 0, \ldots, -\mu$) πρέπει να αντικατασταθούν από τις αντίστοιχες παραγώγους κατανομής u(t).

Αναγκαιότητα: Για να αποδείξουμε την Αναγκαιότητα υποθέτουμε ότι το σύστημα (2-2.1) είναι ελέγξιμο. Έτσι, σύμφωνα με τον ορισμό της ελεγξιμότητας, για $x(0\text{-}) = 0$ υπάρχει ένα $T \geq 0$ και ένα σήμα $f(t)$ τέτοιο ώστε η (2-2.14) ικανοποιείται για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν $T \geq 0$ και $f(t)$ τέτοια ώστε να ικανοποιείται η επόμενη σχέση:

$$\xi = [\Phi_{-\mu}B \ \ldots \ \Phi_{-1}B \ \ \Phi_0 B \ \ldots \ \Phi_k B \ \ldots] \begin{bmatrix} f^{(0)}(T) \\ \vdots \\ f^{(1-\mu)}(T) \\ f^{(-\mu)}(T) \\ \vdots \\ f^{(k-\mu)}(T) \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}2.15)$$

Έστω ότι, $\operatorname{rank}[\Phi_{\mu}B \ldots \Phi_{-1}B \ \ \Phi_0 B \ldots \Phi_{n-1}B] < n$. Από το θεώρημα του Cayley-Hamilton παρατηρείται ότι οι όροι $(\Phi_0 A)^k$ $(k \geq n)$ είναι γραμμικά εξαρτημένοι από τους όρους $(\Phi_0 A)^k$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$. Έτσι, οι όροι $\Phi_k B = \Phi_0(\Phi_0 A)^k B$ $(k \geq n)$ πρέπει να είναι γραμμικά εξαρτημένοι από τους όρους $\Phi_k B = \Phi_0(\Phi_0 A)^k B$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$. Οπότε, αυτό κρατάει το rank τέτοιο ώστε $\operatorname{rank}[\Phi_{\mu}B \ldots \Phi_{-1}B \ \ \Phi_0 B \ldots \Phi_k B \ldots] < n$. Από αυτήν την ανισότητα και την σχέση (2-2.15) συμπεραίνει κανείς ότι το ξ ανήκει σε ένα υποδιάστημα του $\mathbb{R}^n$, η διάσταση του οποίου είναι μικρότερη του n. Αυτό, έρχεται σε αντίθεση με το ότι το ξ μπορεί να επιλεγεί από οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Έτσι, η υπόθεση ότι $\operatorname{rank}[\Phi_{\mu}B \ldots \Phi_{-1}B \ \ \Phi_0 B \ldots \Phi_k B \ldots] < n$ είναι άτοπη, οπότε η αναγκαιότητα της συνθήκης (2-2.12) αποδείχτηκε.

Ικανότητα της συνθήκης: Έστω ότι η (2-2.12) ισχύει. Αρκεί να αποδείξουμε ότι, η ιδιότητα της ελεγξιμότητας ισχύει όταν $T > 0$ και η $u(t)$ είναι πλήρως διαφορισιμη. Η σχέση (2-2.14) για $T > 0$ μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής:

$$\tilde{\xi} = [\Phi_{-\mu}B \ \dots \ \Phi_{-1}B \quad \Phi_0 B \ \dots \ \Phi_k B \ \dots] \begin{bmatrix} f^{(0)}(T) \\ \vdots \\ f^{(1-\mu)}(T) \\ f^{(-\mu)}(T) \\ \vdots \\ f^{(k-\mu)}(T) \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}2.16)$$

όπου:

$$\xi = \tilde{\xi} - [\Phi_0 \ \dots \ \Phi_k \ \dots] \begin{bmatrix} u_s(T)Ex(0-) \\ \dfrac{T^1}{1!}Ex(0-) \\ \vdots \\ \dfrac{T^k}{k!}Ex(0-) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

και χρησιμοποιήσαμε ότι $\delta^{(k)}(t) = 0$ ($\forall$ $t > 0$, $\forall$ $k \geq 0$) .Ομοίως με την απόδειξη της που αφορά την ικανότητα της συνθήκης της ελεγξιμότητας στα κανονικά συστήματα [9] και το θεώρημα του Cayley – Hamilton για $\Phi_k B = \Phi_0(\Phi_0 A)^k B$ ($k \geq n$) , η σχέση (2-2.16) μπορεί να εκφρασθεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\tilde{\xi} = [\Phi_{-\mu}B \ \dots \ \Phi_{-1}B \quad \Phi_0 B \ \dots \ \Phi_{n-1}B] \begin{bmatrix} \zeta_{-\mu} \\ \vdots \\ \zeta_{-1} \\ \zeta_0 \\ \vdots \\ \zeta_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}2.17)$$

όπου $\begin{bmatrix} \zeta_{-\mu} \\ \vdots \\ \zeta_{-1} \\ \zeta_0 \\ \vdots \\ \zeta_{n-1} \end{bmatrix} \in \square^{(n+\mu)\,m\,x\,1}$ είναι ένα διάνυσμα από πραγματικούς αριθμούς το οποίο

μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα από κατάλληλη f(t) (t∈ (0, T]). Από την (2-2.12)

παρατηρείται ότι πάντα υπάρχει ένα διάνυσμα $\begin{bmatrix} \zeta_{-\mu} \\ \vdots \\ \zeta_{-1} \\ \zeta_0 \\ \vdots \\ \zeta_{n-1} \end{bmatrix}$ που ικανοποιεί την (2-2.17) για

κάθε $\tilde{\xi} \in R^n$. Έτσι, η (2-2.14) ισχύει πάντα για κάθε $\tilde{\xi} \in R^n$ και κάθε x(0-) με T > 0. Άρα, οι απαιτήσεις της ελεγξιμότητας ικανοποιούνται. ▲

ΟΡΙΣΜΟΣ 2-2.2: Έστω x(0-) = 0. Το σύνολο όλων των απεικονίσεων x(T) σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα [0, T](T ≥ 0) διαμέσου μιας εισόδου u(t) (t ∈ [0, T]) ονομάζεται υποδιάστημα της ελεγξιμότητας του συστήματος (2-2.1) και συμβολιζεται ως ℵ. ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ 2-2.2: Ισχύει ότι

$$\aleph = \mathrm{Im}[\Phi_\mu B \ldots \ \Phi_{-1}B \ \ \Phi_0 B \ldots \ \Phi_{n-1}B]$$

όπου Im{.} είναι η εικόνα του ορίσματος – πίνακα. ▲

ΟΡΙΣΜΟΣ 2-2.3: Το σύστημα (2-1.1) είναι **R-ελέγξιμο** αν για κάθε x(0-) υπάρχει ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα, [0, T](T >0) και μια συνάρτηση εισόδου u(t) (t ∈ [0, T]), τέτοια ώστε x(T) = 0. ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ 2-2.3: Το σύστημα (2-1.1) είναι R-ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$\mathrm{rank}[\Phi_0 B \ \ldots \ \Phi_{n-1}B] = \mathrm{rank}\Phi_0 \qquad (2\text{-}2.18).$$

Στη συνέχεια, θα παρουσιαστεί ο ορισμός και το κριτήριο για την κρουστική ελεγξιμότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2-2.4: Το σύστημα (2-1.1) είναι **κρουστικά ελέγξιμο** αν και μόνο αν για κάθε x(0-) υπάρχει μια φραγμένη είσοδος u(t) ($t \geq 0$) τέτοια ώστε το x(t) είναι πεπερασμένο για κάθε $t \geq 0$. ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ 2-2.4: Το σύστημα (2-1.1) είναι κρουστικά ελέγξιμο αν και μόνο αν ικανοποιείται η επόμενη συνθήκη:

$$\text{rank}[\Phi_{-\mu}B \;\; \ldots \;\; \Phi_{-2}B] = \text{rank}\Phi_{-2} \tag{2-2.19}$$

<u>*Παράδειγμα 2-2.1:*</u> Έστω το σύστημα (2-1.1) με τους εξής πίνακες:

$$E=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&2&-4\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

Οι συντελεστές – πίνακες του αναπτύγματος του επιλύσιμου πίνακα είναι οι εξής:

$$\Phi_{-3}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \Phi_{-2}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\Phi_{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\qquad \Phi_{0}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad \Phi_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή n = 5 και μ = 3, ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι ο εξής:

$$\begin{bmatrix}\Phi_{-3}B & \Phi_{-2}B & \Phi_{-1}B & \Phi_0 B & \Phi_1 B & \Phi_2 B & \Phi_3 B & \Phi_4 B\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Φαίνεται καθαρά ότι:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\Phi_{-3}B & \Phi_{-2}B & \Phi_{-1}B & \Phi_0 B & \Phi_1 B & \Phi_2 B & \Phi_3 B & \Phi_4 B\end{bmatrix} = 5$$

Έτσι, το σύστημα είναι ελέγξιμο. Ο πίνακας της R-ελεγξιμότητας είναι:

$$\begin{bmatrix}\Phi_0 B & \Phi_1 B & \Phi_2 B & \Phi_3 B & \Phi_4 B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Όπως φαίνεται, ισχύει ότι $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\Phi_0 B & \Phi_1 B & \Phi_2 B & \Phi_3 B & \Phi_4 B\end{bmatrix} = 2$. Επιπλέον, έχουμε ότι $\operatorname{rank}\Phi_0 = 2$. Έτσι, το σύστημα είναι R-ελέγξιμο όπως αναμενόταν.

Ο πίνακας της κρουστικής ελεγξιμότητας είναι:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{-3}B & \Phi_{-2}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή, $\text{rank}\begin{bmatrix} \Phi_{-3}B & \Phi_{-2}B \end{bmatrix} = 2$ και $\text{rank}\{\Phi_{-2}\} = 2$, το σύστημα είναι κρουστικά ελέγξιμο.

2-3 Η έννοια της ελεγξιμότητα από τον D.Cobb[6]

Ας θεωρήσουμε το σύστημα:

$$\theta: \begin{array}{l} E\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{array} \qquad (2\text{-}3.1)$$

όπου E, A: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, B: $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, C: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι γραμμικές απεικονίσεις με E ιδιόμορφο (μη – αντιστρέψιμο) και

$$\left| Es - A \right| \neq 0 \qquad (2\text{-}3.2)$$

Η (1) είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων του (2-3.1) [8]. Είναι προτιμότερο να αναλύσουμε το (2-3.1) σε υποσυστήματα. Ας θέσουμε: $r = \deg |Es - A|$. Τότε, ([8],[4]) υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και οι υπόχωροι $S \oplus F = R^n$ με $\dim S = r$, τέτοιοι ώστε να έχουμε το επόμενο ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{array}{l} ME\dot{x} = MAx + MBu \\ y = Cx \end{array} \qquad (2\text{-}3.3)$$

στην εξής μορφή:

$$\theta_s : \begin{aligned} \dot{x}_s &= A_s x_s + B_s u \\ y_s &= C_s x_s \end{aligned} \qquad (2\text{-}3.4a)$$

$$\theta_f : \begin{aligned} A_f \dot{x}_f &= x_f + B_f u \\ y_f &= C_f x_f \end{aligned} \qquad (2\text{-}3.4b)$$

$$y = y_s + y_f \qquad (2\text{-}3.4c)$$

όπου A_f είναι ένας μηδενοδύναμος τελεστής με εκθέτη q. Ας είναι η αρχική συνθήκη για το σύστημα θ_s (2-3.4b) ως εξής: $x_s(0) = x_{0s}$.

Θα χρειαστούμε τα επόμενα για τη συνέχεια. Ας θεωρήσουμε ότι C^i είναι το σύνολο των συνεχών διαφορίσιμων απεικονίσεων κατά i φορές και C_p^i είναι το σύνολο των τμηματικά συνεχών διαφορίσιμων απεικονίσεων κατά i φορές στο $\mathbb{R}$ με πεδίο τιμών ανάλογα με την περίπτωση. Επίσης, C_p^{i+} είναι το ίδιο με το C_p^i, αλλά στο διάστημα $[0, \infty)$. Έστω D, είναι το σύνολο των C^∞ φραγμένων συναρτήσεων φ: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και D΄ ο χώρος των κατανομών στο $\mathbb{R}$ [24]. Ορίζουμε D_p΄ να είναι οι τμηματικά συνεχείς κατανομές. Αυτές αποτελούνται από εκείνες τις κατανομές f για τις οποίες υπάρχουν δείκτες …, τ_{-2}, τ_{-1}, τ_0, τ_1, τ_2, … στο $\mathbb{R}$ και μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση g τέτοια ώστε f = g στο διάστημα (τ_{i-1}, τ_i) για κάθε i. Τέλος, έστω D^+ και D^τ είναι τα διαστήματα των κατανομών στο διάστημα $[0, \infty)$. Τα στοιχεία των D΄ , D_p΄ , D^+ και D^τ έχουν όλα πεδίο τιμών ανάλογα με την περίπτωση.

Για να ασχοληθεί κανείς με το κρουστικό μέρος των x και y χρειάζεται να γνωρίζει τους περιορισμούς των στοιχείων του D_p΄ . Για οποιοδήποτε $\tau \in \mathbb{R}$ και για οποιαδήποτε συνάρτηση $f \in D_p'$, υπάρχει ε > 0 και μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση g, τέτοια ώστε: f = g στο (τ – ε, τ). Ορίζεται:

$$f\,|[\tau, \infty) \in D'$$

από:

$$< f\,|\,[\tau, \infty), \varphi > = \begin{cases} 0, \text{ αν } \varphi \subset (-\infty, \tau) \\ < f, \varphi > - \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} g(t)\varphi(t)dt, \text{ αν } \varphi \subset [\tau\text{-}\varepsilon, \infty) \end{cases}$$

Αυτό ορίζει την $f\,|[\tau, \infty)$ μοναδικά καθώς:

$$D_{(-\infty,\, \tau]} + D_{[\tau\, -\, \varepsilon, \infty)} = D$$

όπου D_I δηλώνει τον υπόχωρο του D που αποτελείται από εκείνες τις φ, ορισμένες στο I. Ορίζοντας την $f\,|(-\infty, \tau)$, παρόμοια με πριν, ισχύει το εξής:

$$f\,|[\tau_1, \tau_2] = f\,|[\tau_1,\infty) + f\,|(-\infty, \tau_2] - f, \;\; \tau_2 \geq \tau_1$$

$$f\,[\tau] = f\,|[\tau,\tau]$$

$$f_+ = f\,|\,[0,\infty)$$

Τότε, για οποιαδήποτε $f \in D_p'$, έχουμε $f_+ \in D^+$ και $f[\tau] \in D^\tau$. Τα δεξιά και τα αριστερά όρια στο D_p', ορίζονται ως εξής: $f(\tau^-) = g(\tau^-)$ και $f(\tau^+) = g(\tau^+)$ όπου g είναι τμηματικά συνεχής και f = g στο (τ – ε, τ) και (τ, τ + ε). Τότε:

$$\Delta_\tau f = f(\tau^+) - f(\tau^-)$$

είναι η μεταβολή της f στο τ. Έστω δ_τ είναι η κρουστική μονάδα στο τ. Τότε έχουμε το επόμενο προφανές αποτέλεσμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: Για κάθε $f \in D_p'$,

1) $(f\,|[\tau, \infty)) = f\,|[\tau, \infty) + \delta_\tau f(\tau^-)$
2) $(f[\tau]) = f[\tau] - \delta_\tau (\Delta_\tau f)$

Μπορούμε να γράψουμε τη μοναδική λύση της (2-3.4b) [8] :

$$x_f = -\sum_{i=0}^{q-1} A_f^i B_f u^i \qquad (2\text{-}3.5)$$

όπου u^i είναι η i – οστή παράγωγος στην έννοια της κατανομής. Σύμφωνα με τον Campbell [2], η αρχική συνθήκη x_0 είναι ¨ασυμβίβαστη¨ αν $x_0 \notin S$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι, όπως φαίνεται από τη (2-3.5), η θ_f (2-3.4b) καθορίζεται ολοκληρωτικά μόνο από το u.

Μια χρήσιμη παρατήρηση που θα χρησιμοποιηθεί για να γίνουν πιο κατανοητά τα παρακάτω είναι ότι:

$$\theta_f^\tau: \begin{array}{c} A_f(x_f[\tau]) = x_f[\tau] - \delta_\tau A_f(\Delta_\tau x_f) \\ y_f[\tau] = C_f x_f[\tau] \end{array} \qquad (2\text{-}3.6)$$

όσο u $\in$ C_p^{q-1}, $\Delta_\tau x_s = 0$ τότε $\Delta_\tau x = \Delta_\tau x_f$. Έτσι η ανάλογη έκφραση με τη σχέση (2-3.5) για το θ_f^τ (2-3.6) είναι:

$$\begin{aligned} x_f[\tau] &= -\sum_{i=0}^{q-1} A_f^i(-\delta_\tau^i A_f(\Delta_\tau x_f)) = \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \delta_\tau^{i-1} A_f^i(\Delta_\tau x) \end{aligned} \qquad (2\text{-}3.7)$$

και αυτό συμβαίνει γιατί από το 2 της **ΠΡΟΤΑΣΗΣ 1** έχουμε ότι:

$$A_f[(x_f[\tau] \; + \; \delta_\tau(A_f x_f)] = x_f[\tau]$$

Αυτό σημαίνει ότι, η κρουστική συμπεριφορά του θ στο τ εξαρτάται μόνο από τη μεταβολή του x στο τ. Όλες οι συναρτήσεις u που παράγουν το ίδιο $\Delta_\tau x$ καταλήγουν στο ίδιο x[τ].

Ας δούμε τώρα την ελεγξιμότητα, όπως την περιγράφει ο συγγραφέας του άρθρου.

ΟΡΙΣΜΟΣ [31]: Το θ (2-3.1) είναι **ελέγξιμο** αν για κάθε τ > 0, $x_{0_s} \in S$ και $w \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει u ϵ C^{q-1} τέτοιο ώστε x(τ) = w.

Ορίζουμε τους εξής υπόχωρους:

$$\Re_s = \sum_{i=0}^{r-1} \mathrm{Im}(A_s^i B_s), \qquad \Re_f = \sum_{i=0}^{q-1} \mathrm{Im}(A_f^i B_f)$$

$$\Re = \Re_s \oplus \Re_f$$

$\Re$ είναι ο ελέγξιμος υπόχωρος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 [31]:

1) Έστω $\tau > 0$, $x_{0_s} \in S$ και $w \in \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει $u \in C^{q-1}$ τέτοιο ώστε $x(\tau) = w$ αν και μόνο αν $w \in \Re$.

2) θ_s (2-3.4a) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν $Im(\lambda E - A) + ImB = \mathbb{R}^n$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.

3) Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

a) θ_f (2-3.4b) είναι ελέγξιμο

b) $\Re_f = F$

c) $ImA_f + ImB_f = F$

d) $ImE + ImB = \mathbb{R}^n$

4) Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

a) θ (2-3.1) είναι ελέγξιμο.

b) θ_s (2-3.4a) και θ_f (2-3.4b) είναι και τα δυο ελέγξιμα.

c) $\Re = \mathbb{R}^n$

Τώρα θα επεκτείνουμε το θεώρημα κατά μια έννοια τέτοια ώστε να αποσαφηνίζεται η διαφορά ανάμεσα στα [23] και [29]. Όσο οι απεικονίσεις και οι κρουστικές αποκρίσεις στη φυσική απόκριση είναι ένα μοναδικό γνώρισμα για τα ιδιόμορφα συστήματα, θα ήθελε κανείς να εμπεδώσει τα προηγούμενα αποτελέσματα με προτάσεις όσον αφορά τα θ^+ και θ^τ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Υπάρχει ένα $u \in C_p^{q-1}$ τέτοιο ώστε $\Delta_\tau x = w$ αν και μόνο αν $w \in \Re_f$.

Περνώντας στην κρουστική φάση, χρειάζονται να αναφερθούν κάποιοι ορισμοί. Όπως είδαμε στην (2-3.7), μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $I_\tau : F \rightarrow D^\tau$ που αντιστοιχεί το x στο αντίστοιχο κρουστικό τμήμα. Έτσι,

$$I_\tau(w) = \sum_{i=1}^{q-1} \delta_\tau^{i-1} A_f^i w \qquad (2\text{-}3.8)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το θ (2-3.1) είναι **κρουστικά ελέγξιμο** αν για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$, $w \in F$, υπάρχει $u \in C_p^{q-1}$: $x[\tau] = I_\tau(w)$.

Η κρουστική ελεγξιμότητα εγγυάται την ικανότητα να παράγεται ένα μέγιστο σύνολο από κρουστικές αποκρίσεις, ανά πάσα στιγμή, σύμφωνα με την ακόλουθη έννοια: Έστω ότι οι E, A δίνονται αλλά ο B και η είσοδος u μπορούν να μεταβάλλονται και να παίρνουν όλες τις τιμές. Θέτοντας, B = I, παίρνουμε $\Re_f = F$ και από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι μπορεί να προκύψει οποιοδήποτε $\Delta_\tau x \in F$. Έτσι, από τη σχέση (2-3.8), έχουμε ότι το μέγιστο σύνολο που μπορεί πιθανότατα να παραχθεί στο τ από κρουστικές κατανομές, για τους σταθερούς πίνακες E και A, είναι το $I_\tau(F) \subset D^\tau$. Από την άλλη όμως, αν και ο πίνακας B δίνεται, από το Θεώρημα 2 και την σχέση (2-3.8), το κρουστικό σύνολο στο τ είναι το $I_\tau(\Re_f)$. Έτσι, ένας ισοδύναμος ορισμός για την κρουστική ελεγξιμότητα του θ είναι ότι:

$$I_\tau(F) = I_\tau(\Re_f)$$

Η ικανότητα να παράγεται η μέγιστη τάξη κρούσεων είναι σημαντική, όπως για παράδειγμα στα προβλήματα όπου συμβαίνουν τυχαίες αναταραχές. Για να το δει κανείς αυτό, ας δούμε το παρακάτω σύστημα:

$$E\dot{x} = Ax + Bu + v$$

όπου v είναι μια είσοδος αναταραχής. Προφανώς, οποιαδήποτε απεικόνιση $\Delta_\tau x \in F$ μπορεί να προκληθεί από την v μόνο, καταλήγοντας ίσως σε οποιαδήποτε κατανομή από το σύνολο $I_\tau(F)$. Τότε, η κρουστική ελεξγιμότητα είναι ισοδύναμη με την ικανότητα να ακυρωθούν όλες οι διαταραχές χρησιμοποιώντας την είσοδο u.

Ας χαρακτηρίσουμε τώρα την κρουστική ελεγξιμότητα αλγεβρικά. Έστω,

$$g_r = \sum_{i=1}^{q-1} \mathrm{Im}(A_f^i B_f)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: Για κάθε w ∈ F, υπάρχει $u \in C_p^{q-1}$: x[τ] = $I_\tau(w)$ αν και μόνο αν $I_\tau(w) \in g_r$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3, μπορούμε να περιγράψουμε λεπτομερώς το σύνολο $I_\tau(\Re_f)$ των διαταραχών, όπου η είσοδος u μπορεί να παράγει. Ας δούμε την επόμενη πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3: Το $I_\tau(\Re_f)$ είναι ένας υπόχωρος του D^τ ισόμορφος στο g_r.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4: Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1) Το θ (2-3.1) είναι κρουστικά ελέγξιμο
2) Το θ_f (2-3.4b) είναι κρουστικά ελέγξιμο
3) $\Re_f + KerA_f = F$
4) $g_r = ImA_f$
5) $ImA_f + ImB_f + KerA_f = F$
6) Τότε υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση K: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε: $\deg |Es - (A+BK)| = rankE$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5:

1) Το θ (2-3.1) είναι ελέγξιμο στο άπειρο σύμφωνα με τον Rosenbrock[23] αν και μόνο αν το θ_f (2-3.4b) είναι ελέγξιμο.
2) Το θ (2-3.1) είναι ελέγξιμο σύμφωνα με τον Rosenbrock[23] αν και μόνο αν το θ_s (2-3.4a) είναι ελέγξιμο.
3) Το θ (2-3.1) είναι ελέγξιμο στο άπειρο σύμφωνα με τον Verghese[29] αν και μόνο αν το θ (2-3.1) είναι κρουστικά ελέγξιμο.
4) Το θ (2-3.1) είναι ελέγξιμο σύμφωνα με τον Verghese[29] αν και μόνο αν το θ_s (2-3.4a) είναι ελέγξιμο και το θ(2-3.1) είναι κρουστικά ελέγξιμο.

2-4. Η έννοια της ελεγξιμότητας στα ιδιόμορφα συστήματα σύμφωνα με τον F.L.Lewis[15]

Έστω το σύστημα:

$$E\dot{x} = Ax + Bu \qquad (2\text{-}4.1)$$

$$y = Cx \qquad (2\text{-}4.2)$$

με $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε λέμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το $z\in\mathbb{R}^n$ είναι **εφικτό (reachable)** αν υπάρχει ένας έλεγχος $u\in\mathbb{R}^m$ σε οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα [0, T], τέτοιος ώστε το x(t) είναι συνεχώς διαφορίσιμο και x(T) = z, όταν x(0) = 0, ενώ το σύστημα είναι **ελέγξιμο** όταν κάθε $z\in\mathbb{R}^n$ είναι ελέγξιμο.

▲

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το $z\in\mathbb{R}^n$ είναι **ελέγξιμο (controllable)** αν υπάρχει ένας έλεγχος $u\in\mathbb{R}^m$ σε οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα [0, T], τέτοιος ώστε x(0) = z, x(T) = 0 και x(t) είναι συνεχώς διαφορίσιμο, ενώ το σύστημα είναι **εφικτό** όταν κάθε $z\in\mathbb{R}^n$ είναι εφικτό. ▲

Παρατηρούμε ότι, στο άπειρο, η εφικτότητα και η ελεγξιμότητα δεν είναι ισοδύναμες όταν |E| = 0.

Η εύρεση εισόδου u(t) που θα μεταφέρει το σύστημα από το x(0) στο x(T) γίνεται ως εξής (Weierstrass μορφή [3]): Ορίζεται ένα πεπερασμένο γραμμικό ολοκλήρωμα ως εξής:

$$G_f = \int_0^T \tau^{2r} e^{A_1\tau} B_1 B_1^T e^{J^T\tau} d\tau \qquad (2\text{-}4.3)$$

όπου r οποιοσδήποτε ακέραιος που ικανοποιεί τη σχέση

$$r > (a - 1)/2 \qquad (2\text{-}4.4)$$

και ο πεπερασμένος πίνακας εφικτότητας ως:

$$U_\infty = [B_2 \;\; NB_2 \;\; \cdots \;\; N^{a-1}B_2] \qquad (2\text{-}4.5)$$

(όπου N, A_1, B_2 είναι οι πίνακες όπως τους έχουμε ορίσει στο 1° Κεφάλαιο και a είναι ο δείκτης μηδενικότητας του πίνακα N, τέτοιος ώστε $N^a = 0$. Επίσης, το T χρησιμοποιείται συγχρόνως για να δηλώσει και τον τελικό χρόνο T, αλλά και τον ανάστροφο των πινάκων. Η διαφορά τους φαίνεται καθαρά στο κείμενο).

Έστω $\{u_1\}$ είναι μια λύση του

$$U_{\infty}\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{a-1} \end{bmatrix} = - x_2(T) \qquad (2\text{-}4.6)$$

και η ¨γρήγορη¨ είσοδος:

$$u_{\infty}(t) = [1 \ (t\text{-}T) \ \cdots \ \frac{(t\text{-}T)^{a-1}}{(a\text{-}1)!}]\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{a-1} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}4.7)$$

Έστω w είναι η λύση του

$$G_f w = x_1(T) - e^{A_1 \tau} x_1(0) - \int_0^T e^{A_1(T-\tau)} B_1 u_{\infty}(\tau) d\tau \qquad (2\text{-}4.8)$$

και η ¨αργή¨ είσοδος δίνεται από τη σχέση:

$$u_f(t) = (T\text{-}t)^{2r} B^T e^{A_1^T (T-t)} w \qquad (2\text{-}4.9)$$

Χρησιμοποιώντας τις (1-4.4), (1-4.9) μπορούμε να δείξουμε ότι η απαιτούμενη είσοδος είναι:

$$u(t) = u_{\infty}(t) + u_f(t) \qquad (2\text{-}4.10)$$

Σύμφωνα με τον Ozcaldiran[20], ένας ανοικτός έλεγχος ο οποίος εγγυάται ότι το x(t) δεν έχει κρουστικές αποκρίσεις, κατασκευάζεται κατά τον ίδιο τρόπο.

Παρατηρούμε ότι, στην (2-4.10) περιλαμβάνεται τόσο ένας διακριτός τύπος όσο και ένας συνεχής τύπος μεταβαλλόμενου ελέγχου.

Φαίνεται καθαρά ότι, ο έλεγχος από το x(0) στο x(T) υπάρχει μόνο αν οι σχέσεις (2-4.6) και (2-4.8) έχουν λύση. Ορίζοντας τον πεπερασμένο πίνακα εφικτότητας

$$U_f = [B_1 \ \ A_1 B_1 \ \cdots \ A_1^{n_1 -1} B_1] \qquad (2\text{-}4.11)$$

όπου $x_1 \in R^{n_1}$, μπορούμε να δείξουμε ότι [3,31], ο εφικτός υπόχωρος του (2-4.1) είναι:

$$\Re = \Re_f + \Re_\infty \qquad (2\text{-}4.12)$$

όπου

$$\Re_f = \Re(U_f), \quad \Re_\infty = \Re(U_\infty) \qquad (2\text{-}4.13)$$

είναι ο πεπερασμένος και ο κρουστικός υπόχωρος,

Όσο οι αρχικές συνθήκες $x_2(0) \in N(E)$ δεν επηρεάζουν το $x_2(t)$, μπορούμε να ορίσουμε τον κρουστικό ελέγξιμο υπόχωρο ως εξής:

$$C_\infty = \Re(U_\infty) + N(N) \qquad (2\text{-}4.14)$$

και επειδή

$$C_f = \Re_f = \Re(U_f) \qquad (2\text{-}4.15)$$

μπορούμε να εκφράσουμε τον ελέγξιμο υποχωρο ως [20]:

$$C = C_f \oplus C_\infty \qquad (2\text{-}4.16)$$

Η πεπερασμένη εφικτότητα και η κρουστική ελεγξιμότητα είναι ίδιες και ισοδύναμες στην έλλειψη πεπερασμένων μηδενικών από τον πίνακα ελεγξιμότητας

$$P(s) = [sE - A \quad B] \qquad (2\text{-}4.17)$$

Τα επόμενα θεωρήματα μας δίνουν κάποια κριτήρια για την εφικτότητα και την ελεγξιμότητα στο άπειρο[6, 13]. Σημειώνουμε ότι $n_2 = n - \deg |sE - A|$ και η = dimN(E).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2-4.1: Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

a) Το (2-4.1) είναι **εφικτό στο άπειρο**, δηλαδή $\Re_\infty = R^{n_2}$.
b) Οι γραμμές του B_2 που αντιστοιχούν στις τελευταίες γραμμές από όλα τα Jordan blocks του N είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
c) $\text{rank}[B_2 \;\; NB_2 \;\; \ldots \;\; N^{a-1} B_2] = n_2$ [21, 31]
d) $\Re(E) + \Re(B) = \square^{n}$ (ή ισοδύναμα $\Re(N) + \Re(B_2) = \Re(B_2)$) [4]
e) $q^T(sN - I)^{-1}B_2 = 0$ για σταθερό q συνεπάγεται ότι q = 0, δηλαδή έχουμε, $\dim < \{q \in R^{n_2} \mid q^T(sN - I)^{-1}B_2 = 0\} > = 0$ [12]
f) Ο πίνακας [E – sA B] (ή ισοδύναμα $[N - sI \quad B_2]$) έχει πλήρη τάξη όταν s = 0 [23, 31].

ΘΕΩΡΗΜΑ 2-4.2: Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

a) Το (2-4.1) είναι **ελέγξιμο στο άπειρο**, δηλαδή, $C_\infty = R^{n_2}$

b) Οι γραμμές του B_2 που αντιστοιχούν στις τελευταίες γραμμές από τα μη τετριμμένα Jordan block του N είναι γραμμικά ανεξάρτητες [27]

c) $\text{rank}[NB_2 \ \ldots \ N^{a-1} B_2] = n_2 - \eta$ [21]

d) $\Re(E) = AN(E) + \Re(B) = \mathbb{R}^n$ (ή ισοδύναμα $\Re(N) + N(N) + \Re(B_2) = = \Re(B_2)$) [1, 4]

e) $\dim < \{ q \in R^{n_2} \mid q^T N(sN - I)^{-1} B_2 = 0 \} > = \eta$

f) $P(1/s) = [(1/s)E - A \quad B]$ (ή ισοδύναμα $[(1/s)N - I \quad B_2]$ έχει πλήρη τάξη όταν $s = 0$ [28])

Από τα παραπάνω θεωρήματα φαίνεται καθαρά ότι η εφικτότητα στο άπειρο είναι ισοδύναμη με την έλλειψη μηδενικών στο άπειρο του πολυωνυμικού πίνακα P(s) σύμφωνα με τον Rosenbrock[23], ενώ η ελεγξιμότητα στο άπειρο είναι ισοδύναμη με την έλλειψη μηδενικών στο άπειρο του πολυωνυμικού πίνακα P(s) σύμφωνα με τους Pugh και Ratcliffe[22].Το [22] είναι το ίδιο όπως και η ελεγξιμότητα από τους Verghese, Levy και Kailath [29].

2-5. Η έννοια της ελεγξιμότητας στα ιδιόμορφα συστήματα σύμφωνα με τον A.I.G. Vardulakis[26]

Έστω ότι έχουμε το ιδιόμορφο σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned} E\dot{\beta}(t) &= A\beta(t) + B_0 u(t) \\ y(t) &= C\beta(t) \end{aligned} \qquad (2\text{-}5.1)$$

όπου $E \in \mathbb{R}^{rxr}$, $A \in \mathbb{R}^{rxr}$ και $B_0 \in \mathbb{R}^{rxm}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2-5.1: Ένα $\beta_0 \neq 0 \ \epsilon \mathbb{R}^r$, $\beta_0 = \beta^c(0\text{-}) \ \epsilon \ H_{Iu}$, όπου c είναι η c – ιοστή παράγωγος του $\beta(t)$: $(0\text{-}, \infty) \to \mathbb{R}^r$ και

$$H_{Iu} = \{\beta^c(0-) \in \mathbb{R}^r \mid \beta^c(0-) \in [C, C_\infty][\mathbb{R}^n \oplus < J_\infty \mid \mathrm{Im}\bar{\Omega} > + \mathrm{Ker}J_\infty]\}$$

(όπου $C_\infty \in \mathbb{R}^{rxv}$, $J_\infty = \text{blockdiag}[J_{\infty 1}, J_{\infty 2}, ..., J_{\infty\zeta}] \in \mathbb{R}^{vxv}$ με

$$J_{\infty i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{v_i x v_i}$$ για $i = 1, 2, \ldots, \zeta$ και $v = \sum_{i=1}^{\zeta} v_i$, $v_i, \zeta \in \mathbb{Z}^+$ και

$\Omega = BB_0 \in \mathbb{R}^{nxm}$ και $\bar{\Omega} = B_\infty B_0 \in \mathbb{R}^{vxm}$, με $B \in \mathbb{R}^{nxr}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{rxm}$ και $B_\infty \in \mathbb{R}^{nxr}$ με $n = \deg|A(s)|$) είναι **ελέγξιμο** αν υπάρχει μια είσοδος $u(t) \in C_p^{\hat{q}_r}$ και $T > 0$ τέτοια ώστε,

$$\beta^c(T) = \beta_T = [C, C_\infty]\begin{bmatrix} x_s^c(T) \\ x_f^c(T) \end{bmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^r \qquad (2\text{-}5.2)$$

όπου $x_s^c(t) = e^{Jt}x_s(0-) + \int_{0-}^{t} e^{J(t-T)}BB_0u(\tau)d\tau$

και $x_f^c(t) = -\sum_{i=1}^{\hat{q}_r} \delta(t)^{(i-1)} J^i{}_\infty x_f(0-) + \sum_{i=0}^{\hat{q}_r} J^i{}_\infty B_\infty B_0 u(t)^{(i)}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2-5.2: Το $\beta_0 \in \mathbb{R}^r$ είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$\beta_0 \in [C, C_\infty]\{< J \mid \mathrm{Im}\Omega > \oplus [< J_\infty \mid \mathrm{Im}\bar{\Omega} > + \mathrm{Ker}J_\infty]\} \qquad (2\text{-}5.3)$$

ΟΡΙΣΜΟΙ 2-5.3: Το σύνολο

$$[C, C_\infty]\{< J \mid \mathrm{Im}\Omega > \oplus [< J_\infty \mid \mathrm{Im}\bar{\Omega} > + \mathrm{Ker}J_\infty]\} \subseteq \mathbb{R}^r \qquad (2\text{-}5.4)$$

ονομάζεται ελέγξιμος υπόχωρος του ιδιόμορφου συστήματος (2-5.1).

Ο υπόχωρος

$$C_s = < J \mid \mathrm{Im}\Omega > \subseteq \mathbb{R}^n \qquad (2\text{-}5.5)$$

ονομάζεται αργός ελέγξιμος υπόχωρος κατάστασης του (2-5.1). Ο υπόχωρος

$$C_f = < J_\infty \mid \mathrm{Im}\bar{\Omega} > + \mathrm{Ker}J_\infty \subseteq \mathbb{R}^v \qquad (2\text{-}5.6)$$

ονομάζεται γρήγορος ελέγξιμος υπόχωρος κατάστασης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2-5.4: Κάθε $\beta_0 \in \mathbb{R}^r$ είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$[C, C_\infty]\{< J \mid \mathrm{Im}\Omega > \oplus [< J_\infty \mid \mathrm{Im}\bar{\Omega} > + \mathrm{Ker}J_\infty]\} = \mathbb{R}^r \qquad (2\text{-}5.7)$$

ή ισοδύναμα αν και μόνο αν

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \bar{Q} = r \tag{2-5.8}$$

$$\text{όπου } \bar{Q} = [C,\ C_\infty]\begin{bmatrix} Q_s & \vdots & 0_{n,(\hat{q}_r+1)+\sigma} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0_{\nu,nm} & \vdots & Q_f,\ N(J_\infty) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rx[(n+\hat{q}_r+1)m+\sigma]},$$

$N(J_\infty) \in \mathbb{R}^{\nu x\sigma}$, $\sigma = \nu - k$, $k = \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} J_\infty$ είναι ένας πίνακας βάση του $\operatorname{Ker}J_\infty$,

$Q_s = [\Omega,\ J\Omega,\ ...,J^{n-1}\Omega] \in \mathbb{R}^{nxnm}$ και $Q_f = [\bar{\Omega},\ J_\infty\bar{\Omega},\ ...,J_\infty^{\hat{q}_r}\bar{\Omega}] \in \mathbb{R}^{\nu x(\hat{q}_r+1)m}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2-5.5: Κάθε $\beta_0 \in \mathbb{R}^r$ είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} Q_s & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & Q_f,\ N(J_\infty) \end{bmatrix} = r = n + \nu \tag{2-5.9}$$

ή ισοδύναμα αν και μόνο αν

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} Q_s = n \text{ και } \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} [Q_f,\ N(J_\infty)] = \nu . \tag{2-5.10}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2-5.6: Το ιδιόμορφο σύστημα (2-5.1) είναι:

a) αργό ελέγξιμο κατάστασης (slow state controllable) αν $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} Q_s = n$
b) γρήγορο ελέγξιμο κατάστασης (fast state controllable) (ή ελέγξιμο όταν $s = \infty$) αν $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} [Q_f,\ N(J_\infty)] = \nu$
c) ελέγξιμο αν είναι και αργό ελέγξιμο κατάστασης και γρήγορο ελέγξιμο κατάστασης ή ισοδύναμα αν ισχύει η (2-5.9).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2-5.7: Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

a) Το σύστημα (2-5.1) είναι γρήγορο ελέγξιμο κατάστασης
b) $< J_\infty \mid \operatorname{Im}\bar{\Omega} > + \operatorname{Ker}J_\infty = \mathbb{R}^\mu$
c) $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} [J_\infty\bar{\Omega}, J_\infty^2\bar{\Omega},\ ...,\ J_\infty^{\hat{q}_r}\bar{\Omega}] = \nu - \sigma = k$
d) $\operatorname{Ker}J_\infty + \operatorname{Im}J_\infty + \operatorname{Im}\bar{\Omega} = \mathbb{R}^\nu$
e) οι γραμμές του $\bar{\Omega}$ που αντιστοιχούν στις τελευταίες γραμμές των μη – τετριμμένων Jordan blocks του J_∞ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Παρατήρηση: Η προσέγγιση που κάνει ο Vardulakis[26] παρουσιάζει τα αποτελέσματα και ακολουθεί τη φιλοσοφία για την ελεγξιμότητα των Yip and Sincovec[31], οι οποίοι γενικεύουν τα αποτελέσματα μιας γεωμετρικής προσέγγισης της ελεγξιμότητας των κανονικών συστημάτων χώρου κατάστασης που κάνει ο Wonham[30]. Επίσης, ο Vardulakis[26] επηρεάστηκε και από τους Ozcaldiran[20] και Lewis[15].

2-6. Επίλογος

Όπως είδαμε στις παραπάνω παραγράφους, οι έννοιες της ελεγξιμότητας διατυπώνονται κατά διαφορετικό τρόπο από τους συγγραφείς. Η κριτική και κατά κάποιο τρόπο σύγκριση, πάνω σε αυτό θα διατυπωθεί στο $4^{ο}$ Κεφάλαιο αυτής της εργασίας.

3^o ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΙΔΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ
(OBSERVABILITY IN SINGULAR CONTROL SYSTEMS)

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με την ελεγξιμότητα στα ιδιόμορφα συστήματα. Τώρα θα γίνει μια αναφορά στην παρατηρησιμότητα στα ιδιόμορφα συστήματα, στην R-παρατηρησιμότητα και στην κρουστική παρατηρησιμότητα, όπως είδαμε αντίστοιχα για την ελεγξιμότητα. Οι έννοιες αυτές χαρακτηρίζουν την ικανότητα της ανοικοδόμησης της κατάστασης από μετρήσιμες εξόδους.

3-1. Παρατηρησιμότητα, R–παρατηρησιμότητα και Κρουστική Παρατηρησιμότητα σύμφωνα με τον L. Dai [7]

ΟΡΙΣΜΟΣ 3-1.1: Το σύστημα (2-1.2) είναι **παρατηρήσιμο** αν η αρχική συνθήκη x(0) μπορεί μοναδικά να υπολογιστεί από τις u(t), y(t), με $0 \leq t < \infty$.

Η λύση x(t) ενός ιδιόμορφου συστήματος, εξαρτάται από το διάνυσμα αρχικών συνθηκών Ex(0-). Συνεπώς, ο προσδιορισμός της κατάστασης x(t) του συστήματος βάσει γνωστών εξόδων και εισόδων συνδέεται άρρηκτα με την εύρεση του Ex(0-).

Έστω,

$$R_s = \mathrm{Ker}[C_1/C_1A_1/\ ...\ /C_1A_1^{n_1-1}] \text{ και } R_f = \mathrm{Ker}[C_2/C_2N/\ ...\ /C_2N^{h-1}]$$

Τότε έχουμε το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3-1.1: Ας θεωρήσουμε το σύστημα (2-1.2)

(1) Έστω u(t) = 0. Τότε y(t) = 0, $t \geq 0$ αν και μόνο αν x(0) ϵ $R_s \oplus R_f$.

(2) Το αργό υποσύστημα (2-1.2a) είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν rank[sE – A / C] = n, για κάθε s ϵ□ , s πεπερασμένο.

(3) Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

(a) Το γρήγορο υποσύστημα (2-1.2b) είναι παρατηρήσιμο

(b) rank$[C_2 / C_2N / \ldots / C_2N^{h-1}] = n_2$.

(c) Ker$[N / C_2] = \{0\}$.

(d) rank$[N / C_2] = n_2$.

(e) rank[E / C] = n.

(f) Για κάθε δυο αντιστρέψιμους πίνακες Q_1, P_1 που ικανοποιούν τις σχέσεις $Q_1E\ P_1$ = diag $(I_q\ ,\ 0)$, $CP_1 = [\overline{C}_1, \overline{C}_2]$, $\overline{C}_2$ έχει πλήρη τάξη στηλών, rank$\overline{C}_2$ = n – rankE.

(4) Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

(i) Το σύστημα (2-1.2) είναι παρατηρήσιμο.

(ii) Συγχρόνως και το αργό και το γρήγορο υποσύστημα είναι παρατηρήσιμα.

(iii) rank[sE – A / C] = n, για κάθε sϵ□ , s πεπερασμένο και rank[E/C]= n.

(iv) Ο πίνακας

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} -A & E & & & \\ & -A & E & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -A & E \\ C & & & & \\ & C & & & \\ & & C & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & C \end{bmatrix} (n + r - 1)n \text{ x } n^2$$

έχει πλήρη τάξη στηλών δηλαδή rank$\Theta_1 = n^2$. ▲

Ας δούμε τον τρόπο κατασκευής του x(0) δεδομένου ότι γνωρίζουμε όταν u(t) = 0 $\in C_p^{h-1}$, η απόκριση της κατάστασης σύμφωνα με τη σχέση (1-4.10) έχουμε:

$$x_1(t) = e^{A_1 t}x_1(0), \qquad y_1 = C_1 x_1$$

$$x_2(t) = -\sum_{i=1}^{h-1}\delta^{(i-1)}(t)N^i x_2(0) \ , \qquad y_2 = C_2 x_2$$

$$y = y_1 + y_2$$

Γνωρίζουμε ότι y(t) = 0, αν και μόνο αν $y_1(t) = 0$ και $y_2(t) = 0$.

Αν $y_1 = C_1x_1 = C_1e^{A_1t}x_1(0) = 0$, παίρνοντας τις παραγώγους και στα δυο μέλη όταν t = 0, έχουμε:

$$[C_1 \ / \ C_1A_1 \ / \ ... \ / \ C_1A_1^{n_1-1}]x_1(0) = 0$$

οπότε, $x_1(0) \in R_s$. Για το $y_2(t)$ έχουμε επίσης ότι:

$$y_2(t) = C_2x_2(t) = -\sum_{i=1}^{h-1}\delta^{(i-1)}(t)C_2N^i x_2(0) \ , \qquad y_2(0) = C_2x_2(0)$$

Έτσι έχουμε ότι $y_2(t) = 0$, αν και μόνο αν

$$C_2N^i x_2(0) = 0, \ i = 0, 1, 2, ..., h\text{-}1$$

δηλαδή,

$$[C_2 \ / \ C_1N \ / \ ... \ / \ C_2N^{h-1}]x_2(0) = 0 .$$

Επομένως, $x_2(0) \in R_f$. Άρα $x(0) \in R_s \oplus R_f$.

Παράδειγμα 3-1.1: Έστω το σύστημα που χρησιμοποιήσαμε και στο παράδειγμα (1-3.2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}x$$

Ας δούμε χωριστά κάθε μια από τις περιπτώσεις του θεωρήματος 3-1.1.

(1) Ας υπολογίσουμε πρώτα τα R_s και R_f.

$R_s = Ker[C_1 / C_1A_1]$, όπου $C_1 = [0 \ \ 1]$ και $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, όπως έχουμε δει από το παράδειγμα. Οπότε:

$C_1A_1 = [0 \ \ 1] \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \ \ 0]$ και $R_s = Ker\ [C_1 / C_1A_1\ ] = Ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \{0\}$,

διότι ο $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος με αποτέλεσμα το $Ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ να είναι 0.

Άρα $R_s = \{0\}$.

Για τον υπολογισμό του R_f έχουμε:

$R_f = Ker[C_2 / C_2N]$, όπου $C_2 = [0 \ \ 0]$ και $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, οπότε:

$C_2N = [0 \ \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ \ 0]$ και $R_f = Ker[C_2 / C_2N] = Ker \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^2$

Άρα $R_f = \{(x_1, x_2) / x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

Αλλά, $R_s \cap R_f \neq \{0\}$, οπότε δεν ορίζεται το ευθύ άθροισμα $R_s \oplus R_f$. Άρα η περίπτωση 1 δεν ισχύει.

(2) Θα υπολογίσουμε το rank[sE – A / C].

$[sE - A / C] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & s & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Έχουμε ότι rank[sE – A / C] = 4 = n . Άρα rank[sE – A / C] = n $\Rightarrow$ το αργό υποσύστημα είναι παρατηρήσιμο.

(3) (b) Για να είναι το σύστημα παρατηρήσιμο, πρέπει $\mathrm{rank}[C_2 / C_2N] = n_2$, δηλαδή $\mathrm{rank}[C_2 / C_2N] = 2$. Ας δούμε αν ισχύει το παραπάνω:

$C_2 = [0\ \ 0]$, $C_2N = [0\ \ 0]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0\ \ 0]$. Άρα :

$$\mathrm{rank}[C_2 / C_2N] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \neq 2, \text{ άτοπο.}$$

(c) $\mathrm{Ker}[N / C_2] = \{0\}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$[N / C_2] = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}[N / C_2] = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = \{(x_1, x_2) / x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \neq \{0\},$$

δηλαδή οποιοδήποτε διάνυσμα.

(d) $\mathrm{rank}[N / C_2] = n_2$. Είδαμε ότι $[N / C_2] = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$, για το οποίο έχουμε

ότι $\mathrm{rank}[N / C_2] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = 0 \neq n_2 = 2$. Επομένως και αυτή η περίπτωση του θεωρήματος μας δείχνει ότι το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο.

(e) $\mathrm{rank}[E / C] = n$. $[E / C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, για το οποίο έχουμε ότι:

$$\mathrm{rank}[E / C] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \neq 4 = n.$$ Οπότε δεν ισχύει και εδώ ότι το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

(f) Στην περίπτωση που εξεταζουμε $Q_1 = Q$ και $P_1 = P$. Οπότε έχουμε ότι: $Q_1EP_1 = QEP = \mathrm{diag}(I_q,0)$, $CP_1 = [\bar{C}_1,\bar{C}_2]$ όπου $\bar{C}_1 = C_1$ και $\bar{C}_2 = C_2$. Αλλά ο $C_2=[0\ 0]$ δεν έχει πλήρη τάξη στηλών και επίσης έχουμε rank $C_2 = 0$, ενώ n – rankE = 4 – 2 = 2 $\neq$ rank C_2. Άρα, το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο.

(4) Τα (i), (ii), (iii) τα εξετάσαμε παραπάνω. Ας δούμε την (iv) περίπτωση του θεωρήματος.

(iv) Ο πίνακας θ_1 θα είναι διάστασης 16x16 γιατί n = 4, r = 1. Επομένως, $(4 + 1 - 1)4 \times 4^2 = 16\mathrm{x}16$. Έτσι, ο θ_1 είναι ο εξής:

$$\theta_1 = \begin{bmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

ο οποίος έχει τάξη 4 που είναι μικρότερη του $n^2 = 16$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3-1.2: Το σύστημα (2-1.2) είναι **R – παρατηρήσιμο**, αν είναι παρατηρήσιμο σε εφικτό σύνολο R, ή, με άλλα λόγια οποιαδήποτε κατάσταση στο εφικτό σύνολο μπορεί να υπολογιστεί μοναδικά από το y(t) και u(τ), όταν $0 \leq \tau \leq t$.

Ενώ, η παρατηρησιμότητα αντικατοπτρίζει την ικανότητα αναπαράστασης ολόκληρης της κατάστασης (μαζί με τους κρουστικούς όρους, αν υπάρχουν) από μια μετρήσιμη έξοδο, μαζί με την είσοδο ελέγχου, η R – παρατηρησιμότητα χαρακτηρίζει την ικανότητα αναπαράστασης μόνο της εφικτής κατάστασης (χωρίς κρουστικούς όρους) από την ίδια πηγή πληροφόρησης.

Προφανώς, από τον ορισμό, το σύστημα (2-1.2) είναι R – παρατηρήσιμο αν είναι παρατηρήσιμο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3-1.2: Το σύστημα (2-1.2) είναι R – παρατηρήσιμο αν και μόνο αν το αργό υποσύστημα είναι παρατηρήσιμο, δηλαδή, rank[sE – A / C] = n, για κάθε s ϵ□ , s πεπερασμένο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3-1.3: Για το σύστημα (2-12) τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(a) Το σύστημα (2-1.2) είναι R – παρατηρήσιμο.

(b) Το αργό του υποσύστημα είναι παρατηρήσιμο

(c) Ο πίνακας

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} -A & E & & & \\ & -A & E & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -A & E \\ & & & & -A \\ C & & & & \\ & C & & & \\ & & C & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & C \end{bmatrix} (n+r)k \times nk$$

έχει πλήρη τάξη στηλών nk, με $k \geq n_1$.

<u>*Παράδειγμα 3-1.3:*</u> Από τον ορισμό, το γρήγορο σύστημα

$$N\dot{x} = x + Bu$$
$$y = Cx$$

όπου N είναι μηδενοδύναμος, είναι πάντα R – παρατηρήσιμο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3-1.3: Αν το x_τ (t) μπορεί να υπολογιστεί μοναδικά από τα y_τ (t) και $\Delta_\tau u(t)$ για κάθε $\tau \geq 0$, το σύστημα (2-1.2) θα ονομάζεται **κρουστικά παρατηρήσιμο**.

Ο ορισμός αυτός είναι κατά σημεία μόνο όταν τα x_τ και y_τ έχουν μη μηδενικές τιμές. Παρατηρεί κανείς ότι, η συμπεριφορά του άλματος στην είσοδο, συνεισφέρει στους κρουστικούς όρους του x(t). Η κρουστική παρατηρησιμότητα εγγυάται την ικανότητα του υπολογισμού κατά μοναδικό τρόπο της κρουστικής συμπεριφοράς του x(t) από τις πληροφορίες που λαμβάνουμε από την κρουστική συμπεριφορά της εξόδου και τη συμπεριφορά του άλματος στην είσοδο. Συγκρίνοντας την παρατηρησιμότητα με την R – παρατηρησιμότητα, μπορούμε να πούμε ότι αναφέρονται σε πεπερασμένες τιμές στην απόκριση της κατάστασης, ενώ η κρουστική παρατηρησιμότητα εστιάζεται στους κρουστικούς όρους που παίρνουν άπειρες τιμές.

ΛΗΜΜΑ 3-1.1: Για το σύστημα (2-1.2, y_τ (t) = 0 όταν u(t) = 0, αν και μόνο αν $x_2(0)$ є $NR_1 = Ker[C_2N \,/\, C_2N^2 \,/\, \dots \,/\, C_2N^{h-1}]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3-1.4: Για το σύστημα (2-1.2) τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Το σύστημα (2-1.2) είναι κρουστικά παρατηρήσιμο

(ii) Το γρήγορο υποσύστημα του (2-1.2b) κρουστικά παρατηρήσιμο

(iii) $R_f \cap ImN = \{0\}$.

(iv) $NR_f = KerN$

(v) $KerN \cap KerC_2 \cap ImN = \{0\}$

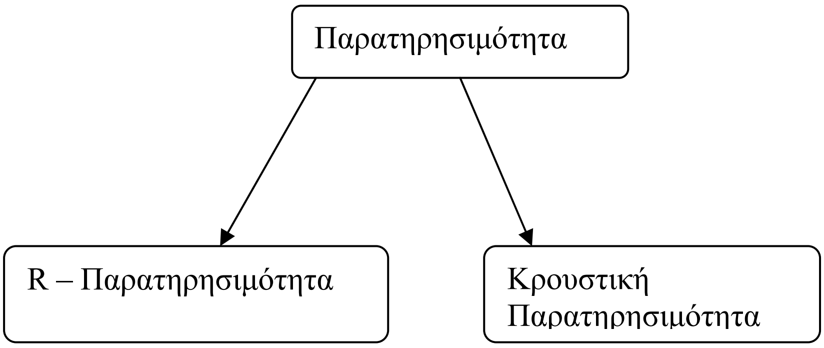
(vi) Έστω,

$$\left(\begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}, [C_{21} \quad 0] \right)$$

είναι ο κατάλληλος μετασχηματισμός του (N, C_2). Σ' αυτήν την περίπτωση (N_{11}, C_{21}) είναι παρατηρήσιμο. Τότε πρέπει είτε ότι το N_{22} να μην υπάρχει, οπότε το (N, C_2) είναι παρατηρήσιμο, είτε $N_{22} = 0$ και ισχύει $rankN_{11} = rank[N_{11} / N_{21}]$.

(vii) $$\text{rank}\begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \text{rank}E .$$

Για ένα δοσμένο σύστημα, η παρατηρησιμότητα, η R – παρατηρησιμότητα και η κρουστική παρατηρησιμότητα χαρακτηρίζουν την ικανότητα τους να αναπαριστούν την κατάσταση από διαφορετικές σκοπιές. Ένα σύστημα είναι κρουστικά παρατηρήσιμο αν είναι παρατηρήσιμο, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Η σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε αυτές τις παρατηρησιμότητες φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Παράδειγμα 3-1.4: Από τον ορισμό, το αργό υποσύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1x_1 + B_1u \\ y_1 &= C_1x_1 \end{aligned}$$

είναι πάντα κρουστικά παρατηρήσιμο.

3-2. Η έννοια της παρατηρησιμότητας σύμφωνα με τον Kalman[10]

Σε αυτήν τη παράγραφο, θα παρουσιαστούν οι διάφοροι τύποι παρατηρησιμότητας και το αντίστοιχο κριτήριο που ισχύει.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3-2.1: Το σύστημα (2-1.1) είναι **παρατηρήσιμο** αν, γνωρίζοντας τα y(t), u(t) με t ϵ [0, T] (T > 0) και y(0-) οδηγούν μοναδικά στον υπολογισμό του Ex(0-).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3-2.1: Το σύστημα (2-1.1) είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C\Phi_{-\mu} \\ \vdots \\ C\Phi_{-1} \\ C\Phi_{0} \\ \vdots \\ C\Phi_{n-1} \end{bmatrix} = n \qquad (3\text{-}2.1)$$

Από τον ορισμό της παρατηρησιμότητας, ορίζεται ένας σημαντικός υπόχωρος του χώρου των αρχικών συνθηκών Ex(0-).

ΟΡΙΣΜΟΣ 3-2.2: Το σύνολο όλων των x(0-) που μπορεί μοναδικά να υπολογιστεί από τα δοσμένα y(t), u(t) (t ϵ [0, T], T > 0) και y(0-) ονομάζεται ο υπόχωρος παρατηρησιμότητας του συστήματος (2-1.1) και συμβολίζεται με $\Im$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3-2.2: Ισχύει ότι

$$\Im = R^n - \operatorname{Ker}\left\{\begin{bmatrix} C\Phi_{-\mu} \\ \vdots \\ C\Phi_{-1} \\ C\Phi_{0} \\ \vdots \\ C\Phi_{n-1} \end{bmatrix}(A\Phi_{-1}A + E\Phi_0 E)\right\} \qquad (3\text{-}2.2)$$

όπου Ker{.} είναι ο πυρήνας του πίνακα $\begin{bmatrix} C\Phi_{-\mu} \\ \vdots \\ C\Phi_{-1} \\ C\Phi_{0} \\ \vdots \\ C\Phi_{n-1} \end{bmatrix}(A\Phi_{-1}A + E\Phi_0 E)$.

<u>Παρατήρηση:</u> Επειδή το σύστημα (2-1.1) είναι χρονικά αναλλοίωτο, οι ορισμοί 3-2.1 και 3-2.2 μπορούν να καλύψουν και την περίπτωση όπου η αρχική συνθήκη Ex(0-) μπορεί να αντικατασταθεί από την Ex(t_0-) (όπου t_0 οποιαδήποτε χρονική στιγμή) και το χρονικό διάστημα [0, T] αντικαθίσταται από το χρονικό διάστημα [t_0,T] ($T \geq t_0$) .Προφανώς, τα θεωρήματα 3-2.1 και 3-2.2 μπορούν και αυτά να καλύψουν την παραπάνω περίπτωση.

Πριν αναφερθεί ο ορισμός της R – παρατηρησιμότητας, ας θεωρήσουμε το σύνολο των ελεύθερων συμβιβαστών αρχικών συνθηκών, που είναι το σύνολο των συμβιβαστών αρχικών συνθηκών με μηδενική είσοδο (ελεύθερη απόκριση). Σύμφωνα με τον αντίστοιχο ορισμό [7], το σύνολο των συμβιβαστών αρχικών συνθηκών είναι το σύνολο των πιθανών αποκρίσεων του συστήματος όταν t = 0+ για κάθε αρχική συνθήκη x(0-) και μοναδική είσοδο u(t).

Έτσι, η ελεύθερη απόκριση $\overline{x}(t)$ του συστήματος (2-1.1) σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \geq 0$ παίρνει τη μορφή,

$$\overline{x}(t) = (\Phi_{-\mu}\delta^{(\mu-1)}(t) + ... + \Phi_{-1}\delta^{(0)}(t))E\Phi_{-1}x_f(0\text{-}) + \Phi_0 e^{A\Phi_0 t}E\Phi_0 x_s(0\text{-}) \quad (3\text{-}2.3)$$

Έτσι, η ελεύθερη απόκριση του συστήματος για t = 0+ είναι:

$$\overline{x}(0+) = (\Phi_{-\mu}\delta^{(\mu-1)}(0+) + ... + \Phi_{-1}\delta^{(0)}(0+))E\Phi_{-1}x_f(0\text{-}) + \Phi_0 e^{A\Phi_0(0+)}E\Phi_0 x_s(0\text{-}) \quad (3\text{-}2.4)$$

Επειδή, $\delta^{(j)}(0+) = 0$ η σχέση (3-2.4) παίρνει τη μορφή $\overline{x}(0+) = \Phi_0 E\Phi_0 x_s(0\text{-})$ ή ισοδύναμα:

$$\overline{x}(0+) = \Phi_0 Ex(0\text{-}) \quad (3\text{-}2.5)$$

Η σχέση (3-2.5) είναι ο γενικός χαρακτηρισμός των ελεύθερων συμβιβαστών αρχικών συνθηκών. Με βάση τη σχέση αυτή, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 3-2.3: Το σύστημα (2-1.1) είναι **R – παρατηρήσιμο** αν το διάνυσμα όλων των ελεύθερων συμβιβαστών αρχικών συνθηκών, $E\overline{x}(0+) = E\Phi_0 Ex(0\text{-})$, μπορεί μοναδικά να υπολογιστεί με βάση τα y(t) και u(t) (t ϵ (0, T]).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3-2.3: Το σύστημα (2-1.1) είναι R – παρατηρήσιμο αν και μόνο αν:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C\Phi_0 \\ \vdots \\ C\Phi_{n-1} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\Phi_0 \quad (3\text{-}2.6)$$

Ας δούμε τώρα τι έχει αναφέρει ο Kalman για την κρουστική παρατηρησιμότητα. Το κομμάτι των αρχικών συνθηκών που ενεργοποιεί τους κρουστικούς όρους της ελεύθερης απόκρισης του συστήματος, είναι το διάνυσμα $\Phi_{-1}x_f$ (0-). Από την σχέση (3-2.3) φαίνεται καθαρά ότι αν γνωρίζουμε το $\Phi_{-1}E\Phi_{-1}x_f(0-)$ μπορούμε να προχωρήσουμε στον μοναδικό υπολογισμό του κρουστικού μέρους της ελεύθερης απόκρισης του συστήματος. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (2-2.4c), η ελεύθερη κρουστική απόκριση του συστήματος μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$(-\Phi_{-\mu+1}E\delta^{(\mu-1)}(t) - \ldots - \Phi_{-1}E\delta^{(1)}(t) + I_n\delta^{(0)}(t))\Phi_{-1}E\Phi_{-1}x_f(0-).$$

Έτσι, δυο διαφορετικοί όροι της μορφής $\Phi_{-1}E\Phi_{-1}x_f(0-)$ οδηγούν σε δυο διαφορετικές ελεύθερες κρουστικές αποκρίσεις. Οι όροι της μορφής $\Phi_{-1}E\Phi_{-1}x_f(0-)$ μπορούν να εκφρασθούν ισοδύναμα ως εξής:

$$\tilde{x}(0+) = \Phi_{-1}Ex(0-) \qquad (3\text{-}2.7)$$

Ο υπόχωρος που ορίζεται από την παραπάνω σχέση είναι το συμπλήρωμα του υπόχωρου των ελεύθερων συμβιβαστών αρχικών συνθηκών, στο χώρο των διανυσμάτων της μορφής Ex(0-). O χώρος τον διανυσμάτων Ex(0-) ονομάζεται ως ο χώρος των ενεργών αρχικών συνθηκών. Προφανώς, μόνο οι αρχικές συνθήκες που οδηγούν στο $Ex(0-) \neq 0$, προκαλούν ελεύθερη απόκριση στο σύστημα, η οποία δεν είναι μηδέν. Με αλλά λόγια, αν η $x(0-) \in \text{Ker}\{E\}$, η ελεύθερη απόκριση του συστήματος είναι ίση με το μηδέν. Βασισμένοι σε αυτές τις παρατηρήσεις, τα διανύσματα που ανήκουν στον υπόχωρο που ορίζεται από τη σχέση (3-2.7) ονομάζονται ελεύθερες μη-συμβιβαστές αρχικές συνθήκες. Προφανώς, αυτός ο υπόχωρος ενεργοποιεί τους κρουστικούς όρους της ελεύθερης απόκρισης του συστήματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3-2.4: Το σύστημα (2-1.1) είναι **κρουστικά παρατηρήσιμο** αν το διάνυσμα των ελεύθερων μη-συμβιβαστών αρχικών συνθηκών, δηλαδή το διάνυσμα $\tilde{x}(0+) = \Phi_{-1}Ex(0-)$, μπορεί μοναδικά να υπολογιστεί με βάση τα y(t) και u(t) ($t \in [0, T]$, $T > 0$).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3-2.4: Το σύστημα (2-1.1) είναι κρουστικά παρατηρήσιμο αν και μόνο αν:

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} C\Phi_{-\mu} \\ \vdots \\ C\Phi_{-2} \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\Phi_{-2} \qquad (3\text{-}2.8)$$

<u>Παράδειγμα 3-2.1: :</u> Έστω το σύστημα (2-1.1) (παράδειγμα 2-2.1) με τους εξής πίνακες:

$$E=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&2&-4\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Ο πίνακας παρατηρησιμότητας είναι ο εξής:

$$\begin{bmatrix} C\Phi_{-3}\\ C\Phi_{-2}\\ C\Phi_{-1}\\ C\Phi_{0}\\ C\Phi_{1}\\ C\Phi_{2}\\ C\Phi_{3}\\ C\Phi_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0\\ -1&0&-1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&2&-4\\ 0&0&0&0&-8\\ 0&0&0&-8&0\\ 0&0&0&-16&32 \end{bmatrix}$$

Προφανώς, ισχύει ότι:

$$\mathrm{rank}\{\begin{bmatrix}[C\Phi_{-3}]^T & [C\Phi_{-2}]^T & [C\Phi_{-1}]^T & [C\Phi_{0}]^T & [C\Phi_{1}]^T & [C\Phi_{2}]^T & [C\Phi_{3}]^T & [C\Phi_{4}]^T\end{bmatrix}\} = 5.$$

Έτσι, το σύστημα είναι παρατηρήσιμο. Ο πίνακας της R – παρατηρησιμότητας είναι:

$$\begin{bmatrix} C\Phi_0 \\ C\Phi_1 \\ C\Phi_2 \\ C\Phi_3 \\ C\Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 32 \end{bmatrix}$$

Προφανώς, ισχύει ότι $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \Phi_0 B & \Phi_1 B & \Phi_2 B & \Phi_3 B & \Phi_4 B \end{bmatrix} = 2$. Επίσης, ισχύει ότι $\mathrm{rank}\Phi_0 = 2$. Έτσι, το σύστημα είναι R – παρατηρήσιμο, όπως αναμενόταν. Ο πίνακας της κρουστικής παρατηρησιμότητας είναι ο εξής:

$$\begin{bmatrix} C\Phi_{-3} \\ C\Phi_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Προφανώς, ισχύει ότι $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} C\Phi_{-3} \\ C\Phi_{-2} \end{bmatrix} = 2$. Επίσης, ισχύει ότι $\mathrm{rank}\,\Phi_{-2} = 2$. Οπότε, είναι κρουστικά παρατηρήσιμο.

3-3. Η Παρατηρησιμότητα από τον D.Cobb[6]

Σε αυτήν την παράγραφο θα οριστεί η παρατηρησιμότητα για τα ιδιόμορφα συστήματα κατά έναν τρόπο που να την μετατρέπει σε ότι ισχύει για τα κανονικά συστήματα όταν E = I και να παρέχει ένα σύνολο αποτελεσμάτων ανάλογα με τα θεωρήματα 1-5 που είδαμε στην ελεγξιμότητα του D.Cobb[6].

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το θ είναι **παρατηρήσιμο** αν, με βάση τα $u_+ \in C_p^{q-1+}$, $y_+ \in D^+$ και το y(0-) μπορεί να υπολογιστεί το x(0-). Το θ είναι **κρουστικά παρατηρήσιμο** αν, για κάθε τ $\in$ R, με βάση το y[τ], υπολογίζεται το x[τ].

Επίσης, ορίζουμε τα εξής:

$$\Pi_s = \bigcap_{i=0}^{r-1} \mathrm{Ker}(C_s A_s^i), \qquad \Pi_f = \bigcap_{i=0}^{q-1} \mathrm{Ker}(C_f A_f^i)$$

$$\Pi = \Pi_s \oplus \Pi_f$$

$$g_n = \bigcap_{i=1}^{q-1} \mathrm{Ker}(C_f A_f^i)$$

Με τρόπο ανάλογο με τον Wonham [30], ονομάζουμε $\prod$ ως τον μη-παρατηρήσιμο υπόχωρο και τον g_n ως τον κρουστικά μη-παρατηρήσιμο υπόχωρο.

Τα παρακάτω θεωρήματα είναι σε πλήρη συμμετρία με αυτά που έχουν ειπωθεί και στην ελεγξιμότητα για τα ιδιόμορφα συστήματα από τον ίδιο επιστήμονα.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

1) Έστω $u_+=0$ στο σύστημα θ^+. Τότε, $y_+ = 0$, $y(0\text{-}) = 0$ αν και μόνο αν $x(0\text{-}) \in \prod$.
2) Το θ_s είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν Ker (sE – A) ∩ Ker C = 0 για κάθε s ∈ □ .
3) Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
   (a) Το θ_f είναι παρατηρήσιμο.
   (b) $\prod_f = 0$.
   (c) $\mathrm{Ker}\, A_f \cap \mathrm{Ker}\, C_f = 0$
   (d) Ker E ∩ Ker C = 0
4) Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
   (a) Το θ είναι παρατηρήσιμο.
   (b) Τα θ_s και θ_f είναι συγχρόνως παρατηρήσιμα.
   (c) $\prod = 0$.

Ας δούμε τώρα την κρουστική παρατηρησιμότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το σύστημα (2-1.1) είναι **κρουστικά παρατηρήσιμο** αν, για κάθε τ∈ □ και γνωρίζοντας το y[τ] μπορεί να υπολογιστεί το x[τ].

ΘΕΩΡΗΜΑ: y[τ] = 0, αν και μόνο αν, $x(\tau^+) - x(\tau^-) \in g_n$.

ΛΗΜΜΑ: Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1) Το θ είναι κρουστικά παρατηρήσιμο.
2) θ_f είναι κρουστικά παρατηρήσιμο.

3) $\prod_f \cap \mathrm{Im}A_f = 0$.

4) $g_n = \mathrm{Ker}A_f$

5) $\mathrm{Ker}A_f \cap \mathrm{Ker}C_f \cap \mathrm{Im}A_f = 0$

6) Υπάρχει ένας n x k πίνακας K τέτοιος ώστε : $\deg |Es - (A+KC)| = \mathrm{rank}E$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: 1) Το θ (2-3.1) είναι παρατηρήσιμο στο άπειρο σύμφωνα με τον Rosenbrock[23] αν και μόνο αν το θ_f (2-3.4b) είναι παρατηρήσιμο.

2) Το θ_f (2-3.4b) είναι παρατηρήσιμο σύμφωνα με τον Rosenbrock[23] αν και μόνο αν το θ (2-3.1) είναι παρατηρήσιμο.

3) Το θ (2-3.1) είναι παρατηρήσιμο στο άπειρο σύμφωνα με τον Verghese[29] αν και μόνο αν το θ (2-3.1) είναι κρουστικά παρατηρήσιμο.

4) Το θ (2-3.1) είναι παρατηρήσιμο σύμφωνα με τον Verghese[29] αν και μόνο αν το θ_s (2-3.4a) είναι παρατηρήσιμο και το θ (2-3.1) είναι κρουστικά παρατηρήσιμο.

Η ισοδυναμία μεταξύ των 1) και 3) του Λήμματος μπορεί να αποδειχθεί σύμφωνα με το επόμενο δυικό θεώρημα. Ας θεωρήσουμε το δυικό σύστημα:

$$E'\dot{x} = A'x + C'u$$
$$y = B'x$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: 1) Το σύστημα (2-1.1) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν το δυικό σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

2) Το σύστημα (2-1.1) είναι κρουστικά ελέγξιμο αν και μόνο αν το δυικό σύστημα είναι κρουστικά παρατηρήσιμο.

3-4. Η έννοια της παρατηρησιμότητας σύμφωνα με τον F.Lewis[14]

Ας θεωρήσουμε το γραμμικά χρονικά αναλλοίωτο διακριτό σύστημα στο :

$$Ex_{k+1} = Fx_k + Gu_k \qquad (3\text{-}4.1a)$$

$$y_k = Hx_k,\ k = 0, 1, ..., N-1 \qquad (3\text{-}4.1b)$$

όπου $u_k \in \mathbb{R}^m$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $y_k \in \mathbb{R}^p$ και το N δηλώνει το χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει. Επίσης, $E, F \in \mathbb{R}^{nxm}$, $G \in \mathbb{R}^{nxm}$ και $H \in \mathbb{R}^{pxn}$.

Ακόμη, ονομάζουμε $\{\varphi_k\}$ το θεμελιώδη πίνακα για το σύστημα (3-4.1). Ο φ_k ικανοποιεί τις καλά ορισμένες ισότητες

$$E\varphi_k - F\varphi_{k-1} = \delta_{0_k} I \tag{3-4.2a}$$

$$\varphi_k E - \varphi_{k-1} F = \delta_{0_k} I \tag{3-4.2b}$$

όπου $\delta_{0_k} I$ είναι το δέλτα του Kronecker[12].

ΘΕΩΡΗΜΑ 3-4.1: Έστω ότι το σύστημα (3-4.1) είναι κανονικό, τότε ορίζουμε τον πίνακα παρατηρησιμότητας

$$V_N = \begin{bmatrix} H\varphi_{-1} & H\varphi_{N-1} \\ H\varphi_{-1} & \vdots \\ \vdots & H\varphi_1 \\ H\varphi_{-N} & H\varphi_0 \end{bmatrix} \tag{3-4.3}$$

Τότε για κάθε διάστημα [0, N + 1], η έξοδος και οι αρχικές και τελικές τιμές του x_k δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} F\varphi_{-1} & & F\varphi_{N-1} \\ E\varphi_{-N} & & E\varphi_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & V_N & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_N \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ex_{N+1} \\ Fx_0 \\ \cdots \\ \overline{y}_{1,N+1} \end{bmatrix} \tag{3-4.4a}$$

$$\begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N+1} \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{N+1} \\ y_0 \end{bmatrix} \tag{3-4.4b}$$

όπου w_0, w_N είναι ενδιάμεσες μεταβλητές. Έτσι, η παρατηρησιμότητα του συστήματος (3-4.1) μπορεί να μελετηθεί με βάση τις σχέσεις (3-4.4)

3-5. Επίλογος

Όπως είδαμε στις παραπάνω παραγράφους και οι έννοιες της παρατηρησιμότητας διατυπώνονται κατά διαφορετικό τρόπο, ανάλογα με την ελεγξιμότητα από τους συγγραφείς. Η κριτική και κατά κάποιο τρόπο σύγκριση, πάνω σε αυτό θα διατυπωθεί στο 4^o Κεφάλαιο αυτής της εργασίας.

Παρατήρηση: Αξίζει να σημειωθεί ότι ο L.Dai[7] έχει χρησιμοποιήσει αρκετά από τα στοιχεία που αναφέρει ο D.Cobb[3, 4, 5, 6].

$4^{ο}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΚΡΙΤΙΚΗ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΙΔΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

Οι έννοιες της ελεγξιμότητας και της παρατηρησιμότητας για τα ιδιόμορφα συστήματα ελέγχου προέρχονται ως φυσικά επακόλουθα των εννοιών της ελεγξιμότητας και της παρατηρησιμότητας που ισχύουν στα κανονικά συστήματα του χώρου κατάστασης.

Ας κάνουμε όμως μια πιο συγκεκριμένη κριτική ανάμεσα σε αυτά που είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια.

4-1. Ελεγξιμότητα

4-1.1. Γενικά

Ο Rosenbrock[23] ήταν ο πρώτος που μελέτησε σοβαρά τις ιδιότητες των ιδιόμορφων συστημάτων ελέγχου χρησιμοποιώντας την προσέγγιση σύμφωνα με τη συχνότητα. Ο ορισμός του για τα άπειρα αποσυζευτικά μηδενικά βασίστηκε στον Kronecker[11] και στην εργασία του πάνω στους άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Ενώ, ο ορισμός που παρουσιάστηκε από τον Rosenbrock[23] παρόλο ότι είχε κάποια εύστοχα αποτελέσματα, κρίθηκε μη ικανοποιητικός. Ο Verghese[29] σημείωσε ότι αυτό συνέβαινε γιατί ο Rosenbrock[23] δε χρησιμοποίησε όσο θα έπρεπε τις δυναμικές ιδιότητες του συστήματος. Ο ορισμός των άπειρων αποσυζευτικών μηδενικών εισόδου που δόθηκε από τον Verghese[29] κάλυψε τις όποιες ελλείψεις του αντίστοιχου ορισμού του Rosenbrock[23].

Μια χρονική προσέγγιση της έννοιας της ελεγξιμότητας έχει δοθεί από τους Yip και Sincovec[31] σε εφικτές καταστάσεις, η οποία επιτυγχάνεται από ένα συγκεκριμένο σύνολο αρχικών συνθηκών. Αυτές οι αρχικές συνθήκες είναι αναγκασμένες να ικανοποιούν τις εξισώσεις του ιδιόμορφου συστήματος αποκλείοντας οποιαδήποτε κρουστική κίνηση. Ωστόσο, αυτός ο ορισμός της ελεγξιμότητας απέτυχε να συγχωνεύσει ένα χαρακτηριστικό από τα ιδιόμορφα συστήματα που να το κάνει να ξεχωρίζει από την κανονική μορφή. Ο ορισμός αυτός φαίνεται να είναι ισοδύναμος στην έννοια των πεπερασμένων αποσυζευτικών μηδενικών και των άπειρων αποσυζευτικών μηδενικών όπως ορίστηκαν από τον Rosenbrock[23].

Ο Cobb[6] ασχολήθηκε με την πιθανή κρουστική κίνηση και οι ιδέες του πηγάζουν από τη προσέγγιση της συχνότητας που έγινε από τον Verghese[29]. Η ανάλυση του Cobb[6] είναι μια ακριβής μαθηματική, όσο αναφορά τη χρονική προσέγγιση, διατύπωση της ελεγξιμότητας η οποία είναι ισοδύναμη με την έννοια των άπειρων αποσυζευτικών μηδενικών όπως ορίστηκε από τον Verghese[29]. Αυτός ο ορισμός δηλώνει την ικανότητα του συστήματος να παράγει μια μέγιστη τάξη διαταραχών (impulses) χρησιμοποιώντας μη – κρουστικούς ελέγχους και δεν σχετίζεται άμεσα με την ικανότητα του συστήματος να φτάσει σε σταθερές καταστάσεις. Τα συστήματα που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη ονομάζονται κρουστικά ελέγξιμα (impulse controllable). Ο ορισμός της κρουστικής ελεγξιμότητας προέρχεται από την ιδέα της επικρατούσας ελεγξιμότητας, δηλαδή αυτής που παρουσιάζει ο Verghese[29] στον τομέα της συχνότητας. Ο Cobb[6] δίνει τον ορισμό αυτών των ιδεών σε σχέση με το χρόνο, με αποτέλεσμα η κρουστική ελεγξιμότητα να είναι ισοδύναμη με την έννοια των άπειρων αποσυζευτικών μηδενικών εισόδου, όπως ορίστηκε από τον Verghese[29], και από τώρα και στο εξής, με την έννοια της ελεγξιμότητας στο άπειρο. Οι Lewis και Ozcaldiran [13], αργότερα, παρουσίασαν ορισμούς της ελεγξιμότητας και της εφικτότητας για τις καταστάσεις του συστήματος οι οποίοι είναι ισοδύναμοι με την έννοια των άπειρων αποσυζευτικών μηδενικών εισόδου όπως ορίστηκε από τον Rosenbrock[23] και των Verghese[29] αντίστοιχα.

Ας συνεχίσουμε πιο αναλυτικά ξεκινώντας με τους παρακάτω ορισμούς:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Τα άπειρα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου ενός ιδιόμορφου συστήματος της μορφής (2-1.2) προκύπτουν από τα πεπερασμένα μηδενικά στο $s = 0$ στη σχέση $[E - sA \;\; B]$. (Rosenbrock[23])

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1: Το σύστημα (2-1.1), είναι **εφικτό** αν για όλα τα $\xi \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει ένας έλεγχος τέτοιος ώστε, η λύση $x(t)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη και ικανοποιεί της συνθήκες $x(0) = \xi$, $x(\tau) = \xi$ για κάποιο $\tau > 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2: Το σύστημα (2-1.1), είναι **ελέγξιμο** αν για όλα τα $\xi \in \mathbb{R}^{n}$ υπάρχει ένας έλεγχος u(t) τέτοιος ώστε η λύση x(t) είναι συνεχώς διαφορίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες $x(0) = \xi$, $x(\tau) = 0$ για κάποιο $\tau > 0$.

Οι παραπάνω ορισμοί οδηγούν στην κατάλληλη φυσική ερμηνεία της έννοιας αποσυζευτικών μηδενικών εισόδου. Πιο συγκεκριμένα, η εφικτότητα όπως ορίστηκε στον παραπάνω ορισμό (4.1) είναι ισοδύναμη με την έννοια τόσο των πεπερασμένων αποσυζευτικών μηδενικών εισόδου όσο και των άπειρων αποσυζευτικών εισόδου όπως ορίστηκαν από τον Rosenbrock[23], ενώ η ελεγξιμότητα σύμφωνα με τον ορισμό (4.2) είναι ισοδύναμη με την έννοια τόσο των πεπερασμένων αποσυζευτικών μηδενικών εισόδου όσο και των άπειρων αποσυζευτικών εισόδου όπως ορίστηκαν από τον Verghese[29]. Οι όροι εφικτότητα και ελεγξιμότητα στο άπειρο παραπέμπουν στην εφικτότητα και ελεγξιμότητα ,όπως ορίστηκαν παραπάνω, αντίστοιχα για το υποσύστημα (2-1.2) του συστήματος (2-1.1). Έτσι, το σύστημα είναι εφικτό στο άπειρο αν δεν έχει άπειρα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου σύμφωνα με τον Rosenbrock[23] και είναι ελέγξιμο στο άπειρο αν δεν έχει άπειρα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου σύμφωνα με τον Verghese[29].

Ας δούμε και τον επόμενο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3: Το σύστημα στη μορφή (2-1.2) είναι σύστημα κατάστασης **εφικτό στο άπειρο** αν για κάθε δοσμένο $\xi \in \mathbb{R}^{n_2 - t}$ υπάρχει κατάλληλος έλεγχος τέτοιος ώστε, $x_2(0-) = 0$, $x_2(\tau) = (\xi^T, \eta^T)^{T\alpha}$ για κάποιο $\tau > 0$ και όπου το $\eta \in \mathbb{R}^{t}$ είναι αυθαίρετο.

Αυτός ο ορισμός είναι ισοδύναμος στον ορισμό της ελεγξιμότητας στο άπειρο.

4-1.2. Αλγεβρικά αποτελέσματα

Ας θεωρήσουμε το σύστημα (2-1.2) και ας πάρουμε το υποσύστημα, όπως ορίστηκε στο 2^{o} Κεφάλαιο:

$$N\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2 u(t) \qquad (4.1)$$

όπου $N \in \mathbb{R}^{n_2 x n_2}$.

Οι έννοιες της ελεγξιμότητας από τους Rosenbrock[23] και Verghese[29] είχαν ως αποτέλεσμα ο Lewis[16] να χρησιμοποιήσει αυτές τις παρατηρήσεις για ελεγξιμότητα και να τις συνδυάσει όπως θα δούμε παρακάτω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 (Lewis[16]): Για το σύστημα (4.1) τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) το σύστημα είναι εφικτό στο άπειρο,

(b) $\text{rank}[B_2, NB_2, ..., N^{q_1-1}B_2] = n_2$,

(c) $\upsilon^T N[sN - I]^{-1}B_2 = 0$ όπου για σταθερό υ προκύπτει υ = 0,

(d) οι τελευταίες θέσεις γραμμών του B_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες,

(e) το σύστημα δεν έχει άπειρα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου όπως ορίστηκε από τον Rosenbrock[23],

(f) $\text{rank}[N \quad B_2] = n_2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1 (Lewis[16]): Για το σύστημα (4.1) τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(a) το σύστημα είναι σύστημα κατάστασης εφικτό στο άπειρο (ή ελέγξιμο),

(b) το σύστημα δεν έχει αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου στο άπειρο όπως ορίστηκε από τον Verghese[29],

(c) οι τελευταίες σειρές στις γραμμές του B_2 που αντιστοιχούν στα μη – τετριμμένα Jordan blocks του N είναι γραμμικά ανεξάρτητες,

(d) $\text{rank}[NB_2, N^2B_2, \ldots, N^{q_1-1}B_2] = n_2 - p$,

(e) $\dim\{\text{span } \upsilon \in \mathbb{R}^{n_2}; \upsilon^T N[sN - I]^{-1}B_2 = 0\} = n_2 - p$.

<u>*Απόδειξη:*</u> Η απόδειξη του θεωρήματος θα γίνει ως εξής:
$$\begin{array}{c}(a) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e)\\ \Updownarrow \\ (b)\end{array}.$$

(a)⇔(c) . Οι καταστάσεις του συστήματος στο χρόνο τα με μηδενικές αρχικές συνθήκες δίνονται από τη σχέση:

$$x_2(\tau) = -[B_2u(\tau) + NB_2u^{(1)}(\tau) + ... + N^{q_1-1}B_2u^{(q_1-1)}(\tau)]$$

ή σε μορφή πίνακα,

$$x_2(\tau) = -[B_2, NB_2, ..., N^{q_1-1}B_2]\begin{bmatrix} u(\tau) \\ u^{(1)}(\tau) \\ \vdots \\ u^{(q_1-1)}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Η λεπτομερής κατασκευή του $[B_2, NB_2, ..., N^{q_1-1}B_2]$ όπου $\eta_i = \sum_{j=1}^{i} q_j, i = 1,2,...,p$, και $b_i^T, i = 1,2,....,n_2$ είναι οι γραμμές του B_2 γίνεται ως εξής:

$$NB_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & \mathbf{0} & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_{\eta_1}^T \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{\eta_{p-t-1}+1}^T \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{\eta_{p-t}}^T \\ b_{\eta_{p-t+1}}^T \\ \vdots \\ b_{\eta_p}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2^T \\ \vdots \\ b_{\eta_1}^T \\ 0 \\ \vdots \\ b_{\eta_{p-t-1}+2}^T \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{\eta_{p-t}}^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ομοίως,

$$N^2B_2 = \begin{bmatrix} b_3^T \\ \vdots \\ b_{\eta_1}^T \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_{\eta_{p-t-1}+3}^T \\ \vdots \\ b_{\eta_{p-t}}^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

και για N^iB_2, I = 3, 4, …, $q_1 - 1$, οπότε έχουμε:

$$
[B_2, NB_2, ..., N^{q_1-1}B_2] = \begin{bmatrix}
b_1^T & b_2^T & b_3^T & & b_{\eta_1-1}^T & b_{\eta_1}^T \\
\vdots & \vdots & \vdots & & b_{\eta_1}^T & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \iddots & & \\
\vdots & \vdots & b_{\eta_1}^T & & & \\
\vdots & b_{\eta_1}^T & 0 & & & \\
b_{\eta_1}^T & 0 & 0 & & & \\
b_{\eta_{p-t-1}+1}^T & b_{\eta_{p-t-1}+2}^T & b_{\eta_{p-t-1}+3}^T & \iddots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \iddots & & \\
\vdots & \vdots & b_{\eta_{p-t}}^T & & & \\
\vdots & b_{\eta_{p-t}}^T & 0 & & & \\
b_{\eta_{p-t}}^T & 0 & \vdots & & & \\
b_{\eta_{p-t+1}}^T & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\
\vdots & \vdots & 0 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
b_{\eta_p}^T & 0 & 0 & \cdots & & 0
\end{bmatrix} \tag{4.2}
$$

με τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών του $N^{q_1-1}B_2$ να είναι ίσος με τον αριθμό των Jordan blocks του N τώρα τάξης q_1. Το σύστημα είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν υπάρχει μια κατάλληλη είσοδος ελέγχου τέτοια ώστε για όλα τα $\alpha \in \mathbb{R}^{n_2-t}$ να ισχύει

$$
\alpha = F\begin{bmatrix} u(\tau) \\ u^{(1)}(\tau) \\ \vdots \\ u^{(q_1-1)}(\tau) \end{bmatrix}
$$

όπου

$$
F = \begin{bmatrix}
b_1^T & b_2^T & b_3^T & b_{\eta_l -1}^T & b_{\eta_l}^T \\
\vdots & \vdots & \vdots & b_{\eta_l}^T & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \\
\vdots & \vdots & b_{\eta_l}^T & & \\
\vdots & b_{\eta_l}^T & 0 & & \\
b_{\eta_l}^T & 0 & 0 & & \\
b_{\eta_{p-t-1}+1}^T & b_{\eta_{p-t-1}+2}^T & b_{\eta_{p-t-1}+3}^T & \iddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \\
\vdots & \vdots & b_{\eta_{p-t}}^T & & \\
\vdots & b_{\eta_{p-t}}^T & 0 & & \\
b_{\eta_{p-t}}^T & 0 & \vdots & & \\
b_{\eta_{p-t+1}}^T & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
b_{\eta_p}^T & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
$$

Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση αν και μόνο αν rank$F = n_2 - t$. Μετασχηματίζοντας τώρα γραμμές του F σε ένα πίνακα F’ όπου στο πρώτο t_1 οι γραμμές του F’ είναι οι γραμμές του F που έχουν μια μη – μηδενική είσοδο σε οποιαδήποτε από τις τελευταίες l θέσεις, οι επόμενες $t_1 + t_2$ γραμμές του F’ είναι οι γραμμές του F που έχουν μηδενικές εισόδους στις τελευταίες l θέσεις αλλά μια μη – μηδενική είσοδο σε οποιαδήποτε από τις προηγούμενες l θέσεις κ.ο.κ. καταλήγοντας στις τελευταίες p – t γραμμές όπου αντιστοιχούν στις γραμμές του F που έχουν μια μη – μηδενική είσοδο σε μια από τις πρώτες l θέσεις, δηλαδή έχουμε:

$$
F' = \begin{bmatrix}
b_1 & & & & b_{\eta_1 - 1} & b^T_{\eta_1} \\
 & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & b^T_{\eta_{t_1} - 1} & b^T_{\eta_{t_1}} \\
 & & & & b^T_{\eta_1} & 0 \\
 & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & b^T_{t_1} & \vdots \\
 & & & & b^T_{\eta_1 + 1} & \vdots \\
 & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & b^T_{\eta_1 + 2} & \vdots \\
 & & & & 0 & \vdots \\
 & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\
 & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 & & \\
b^T_{\eta_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
b^T_{\eta_{p\text{-}t}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Τώρα αν F’ = $n_2 - t$ τότε όσο ο F’ είναι ένας $(n_2 - t)$ x lq_1 πίνακας σημαίνει ότι όλες οι γραμμές πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πιο συγκεκριμένα, οι τελευταίες p – t γραμμές του F’ πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, το οποίο σημαίνει ότι οι τελευταίες θέσεις γραμμών του B_2 που αντιστοιχούν στα μη τετριμμένα Jordan block του N είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Από την άλλη μεριά αν οι τελευταίες θέσεις γραμμών του B_2 που αντιστοιχούν στα μη τετριμμένα Jordan block του N είναι γραμμικά ανεξάρτητες τότε, από την κατασκευή του F’ έχουμε ότι rankF’= $n_2 - t$. Όσο F’ έχει την ίδια τάξη με τον F αυτός έχει ως αποτέλεσμα ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν οι τελευταίες θέσεις γραμμών του B_2 που αντιστοιχούν στα μη τετριμμένα Jordan block του N είναι γραμμικά ανεξάρτητες, όπως απαιτείται.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Τα άπειρα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου ενός συστήματος ορίζονται όπως τα άπειρα μηδενικά του $[sN - I \quad B_2]$, τα οποία μπορεί να δοθούν και από τα μηδενικά όταν w = 0 του $[(1/w)N - I \quad B_2]$. Τώρα, έχουμε τα εξής:

$$
[\frac{1}{w}N - I \quad B_2] = \left[\begin{array}{cccccccccc|c}
-1 & \frac{1}{w} & & & & & & & & & b_1^T \\
 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
 & & \ddots & \frac{1}{w} & & & & & & & \vdots \\
 & & & -1 & & & & \mathbf{0} & & & b_{\eta_1}^T \\
 & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\
 & & & & & -1 & \frac{1}{w} & & & & b_{\eta_{p-t-1}+1}^T \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
 & & & \mathbf{0} & & & & \frac{1}{w} & & & \vdots \\
 & & & & & & & -1 & & & b_{\eta_{p-t}}^T \\
 & & & & & & & & -1 & & b_{\eta_{p-t}+1}^T \\
 & & & & & & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & & & -1 & b_{\eta_p}^T
\end{array}\right]
$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί και ως εξής: $[\frac{1}{w}N - I \quad B_2] = D^{-1}(w)N(w)$ δηλαδή,

$$
= \left[\begin{array}{ccccccccc}
w & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & w & & & & & & \\
 & & & 1 & & \mathbf{0} & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & w & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \\
 & \mathbf{0} & & & & & w & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]^{-1}
\left[\begin{array}{cccccccccc|c}
w & 1 & & & & & & & & & b_1^T \\
 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
 & & w & 1 & & & & & & & b_{\eta_1-1}^T w \\
 & & & -1 & & & & \mathbf{0} & & & b_{\eta_1}^T \\
 & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\
 & & & & & w & 1 & & & & b_{\eta_{p-t-1}+1}^T w \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & & & w & 1 & & b_{\eta_{p-t-1}}^T w \\
 & & \mathbf{0} & & & & & & -1 & & b_{\eta_{p-t}}^T \\
 & & & & & & & & & -1 & b_{\eta_{p-t+1}}^T \\
 & & & & & & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & & & -1 & b_{\eta_p}^T
\end{array}\right]
$$

Η παραπάνω κατασκευή σημαίνει ότι τα άπειρα μηδενικά που προκύπτουν από το $[\frac{1}{w}N - I \quad B_2]$ δίνονται από τα πεπερασμένα μηδενικά της κατασκευής του N(w). Τώρα, όσο rankN(w) = n_2, έχει ως αποτέλεσμα ότι ο N(w) δεν περιέχει ένα μηδενικό όταν w = 0, αν και μόνο αν rankN(0) = n_2 ,όπου

$$
N(0) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & 0 & 1 & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & -1 & & & & & \mathbf{0} & & & & & b^T_{\eta_1} \\
 & & & & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & 0 & 1 & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & 0 & 1 & & & & & 0 \\
 & & \mathbf{0} & & & & & & -1 & & & & & b^T_{\eta_{p-t}} \\
 & & & & & & & & & & -1 & & & b^T_{\eta_{p-t+1}} \\
 & & & & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & -1 & b^T_{\eta_p}
\end{bmatrix} \tag{4.3}
$$

Προσθέτοντας τη γραμμή $q_1 + q_2 + ... + q_{j-1}$ στη γραμμή $q_1 + q_2 + ... + q_j$ για j = 1, 2, …, p – t στην (4.2) έχουμε τον εξής πίνακα:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & 0 & 1 & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & 0 & & & & & \mathbf{0} & & & & & b^T_{\eta_1} \\
 & & & & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & 0 & 1 & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & 0 & 1 & & & & & 0 \\
 & & \mathbf{0} & & & & & & 0 & & & & & b^T_{\eta_{p-t}} \\
 & & & & & & & & & & -1 & & & b^T_{\eta_{p-t+1}} \\
 & & & & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & -1 & b^T_{\eta_p}
\end{bmatrix}
$$

Επομένως, rankN(0) = n_2 αν και μόνο αν οι γραμμές $b_{\eta_1}^T, b_{\eta_2}^T, ..., b_{\eta_{p\text{-}t}}^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή, οι τελευταίες θέσεις γραμμών του B_2 που αντιστοιχούν στα μη τετριμμένα Jordan block του N είναι γραμμικά ανεξάρτητες, όπως απαιτείται.

(c) $\Leftrightarrow$ (d). Από τον πίνακα (4.2) έχουμε:

$$[NB_2, N^2B_2..., N^{q_1-1}B_2] = \begin{bmatrix} b_2^T & b_3^T & & b_{\eta_1-1}^T & b_{\eta_1}^T \\ \vdots & \vdots & & b_{\eta_1}^T & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ \vdots & b_{\eta_1}^T & & & \\ b_{\eta_1}^T & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ b_{\eta_{p\text{-}t\text{-}1}+2}^T & b_{\eta_{p\text{-}t\text{-}1}+3}^T & \iddots & & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ \vdots & b_{\eta_{p\text{-}t}}^T & & & \\ b_{\eta_{p\text{-}t}}^T & 0 & & & \\ 0 & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

Πρώτα ας υποθέσουμε ότι το (c) ισχύει. Τότε από την κατασκευή του (4.4) έχουμε ότι η τάξη του $[NB_2, N^2B_2..., N^{q_1-1}B_2]$ είναι ίση με n_2 μικρότερη από τον αριθμό των μηδενικών γραμμών. Μετά από έλεγχο ο αριθμός των μηδενικών γραμμών ισούται με αυτόν των Jordan blocks στον N, δηλαδή, είναι ίσος με p. Έτσι,

$$\text{rank}[NB_2, N^2B_2, ..., N^{q_1-1}B_2] = n_2 - p.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι το (d) ισχύει. Τώρα, όσο $[NB_2, N^2B_2, ..., N^{q_1-1}B_2]$ είναι ένας n_2 x $l(q_1 - 1)$ πίνακας της τάξης $n_2 - p$ πρέπει να περιέχει $n_2 - p$ γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές. Όπως είδαμε στον (4.2) ο $[NB_2, N^2B_2..., N^{q_1-1}B_2]$ έχει p μηδενικές γραμμές πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα ότι οι υπόλοιπες $n_2 - p$ γραμμές πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πιο συγκεκριμένα οι γραμμές $q_1 - 1, q_1 + q_2 - 1, \ldots, q_1 + q_2 + \ldots + q_{p\text{-}t} - 1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και δίνουν το (c). Έτσι (c), (d) είναι ισοδύναμα όπως απαιτείται.

(d)⇔(e).

$$\operatorname{rank}[NB_2, N^2B_2, \ldots, N^{q_1-1}B_2] = n_2 - p \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \dim\{\operatorname{span} \upsilon \in \mathbb{R}^{n_2}; \upsilon^T[NB_2, N^2B_2, \ldots, N^{q_1-1}B_2] = 0\} = n_2 - p \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \dim\{\operatorname{span} \upsilon \in \mathbb{R}^{n_2}; \upsilon^T NB_2 = \upsilon^T N^2B_2 = \ldots = \upsilon^T N^{q_1-1}B_2 = 0\} = n_2 - p \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \dim\{\operatorname{span} \upsilon \in \mathbb{R}^{n_2}; 0 = \upsilon^T N[I - sN + \ldots + (-1)^{q_1-2}s^{q_1-2}N^{q_1-2} + (-1)^{q_1-1}s^{q_1-1}N^{q_1-1}]B_2 = n_2 - p \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \dim\{\operatorname{span} \upsilon \in \mathbb{R}^{n_2}; 0 = \upsilon^T N[sN - I]^{-1}B_2\} = n_2 - p$$

Έτσι, (d), (e) είναι ισοδύναμα όπως απαιτείται για να συμπληρωθεί η απόδειξη. ▲

Ως αποτέλεσμα του θεωρήματος (4.1) φαίνεται ότι ο Lewis[16], χρησιμοποιεί για το κριτήριο της ελεγξιμότητας τις παρατηρήσεις που έχουν κάνει ο Rosenbrock[23] και ο Verghese[29].

Έχουμε δείξει ότι αν ένα ιδιόμορφο σύστημα δεν περιέχει άπειρα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου, σύμφωνα με τον Rosenbrock[23], τότε δεν περιέχει άπειρα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου σύμφωνα με τον Verghese[29]. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ότι το σύνολο των άπειρων αποσυζευτικών μηδενικών εισόδου όπως ορίστηκαν από τον Verghese[29] να είναι ένα υποσύνολο του σύνολο των άπειρων αποσυζευτικών μηδενικών εισόδου όπως ορίστηκαν από τον Rosenbrock[23]. Έτσι η απαίτηση ότι το σύστημα δεν έχει άπειρα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου, σύμφωνα με τον Rosenbrock[23] είναι πιο ισχυρή από την απαίτηση ότι το σύστημα δεν έχει άπειρα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου σύμφωνα με τον Verghese[29]. Αυτό είναι ξεκάθαρο, από τις παρατηρήσεις της εφικτότητας μαζί με τους αντίστοιχους ορισμούς των άπειρων αποσυζευτικών μηδενικών εισόδου. Πιο συγκεκριμένα είδαμε ότι η ελεγξιμότητα αφορά τον έλεγχο των δυναμικών μεταβλητών, ενώ η εφικτότητα στο άπειρο αφορά τον επιπλέον έλεγχο των μη – δυναμικών μεταβλητών. Επίσης, η έννοια της ελεγξιμότητας όπως ορίστηκε από τους Lewis και Ozcaldiran[13] επιβάλλει λιγότερο αυστηρές συνθήκες στο σύστημα από ότι η έννοια της R – ελεγξιμότητας όπως ορίστηκε από Yip και Sincovec[32]. Αυτό το μπέρδεμα προκύπτει από το γεγονός ότι, οι Lewis και Ozcaldiran[13] επιτρέπουν την κρουστική κίνηση ενώ οι Yip και Sincovec[32] όχι. Ο υπολογισμός της κρουστικής κίνησης έχει επομένως δειχτεί ότι αυξάνει την ικανότητα του συστήματος να επιτυγχάνει το απαιτούμενο αντικείμενο.

Όσο η έννοια της εφικτότητας ασχολείται με τις δυναμικές ιδιότητες του συστήματος φαίνεται ότι η απαίτηση γνώσης των μη – δυναμικών μεταβλητών γίνεται χωρίς σκοπό. Επομένως, ο ορισμός της ελεγξιμότητας είναι περισσότερο κατάλληλος από αυτόν της εφικτότητας στο άπειρο.

Αυτή η παρατήρηση ενισχύει την άποψη του Verghese[29] που τονίζει ότι η έλλειψη του ορισμού των άπειρων αποσυζευτικών μηδενικών εισόδου όπως δίνεται από τον Rosenbrock[23] οφείλεται στο ότι μεταχειρίζεται συγχρόνως τις δυναμικές και τις μη – δυναμικές μεταβλητές κατά τον ίδιο τρόπο. Ο ορισμός των άπειρων αποσυζευτικών μηδενικών εισόδου όπως δίνεται από τον Verghese[29] λαμβάνει υπόψη τις διαφορές μεταξύ των δυο τύπων μεταβλητών και μπορούμε να πούμε ότι είναι ο πιο κατάλληλος ορισμός. Παρόμοια, οι ορισμοί της ελεγξιμότητας που έχουν να κάνουν με την έννοια των άπειρων αποσυζευτικών μηδενικών εισόδου, όπως αυτή ορίστηκε από τον Verghese[29], φαίνεται να είναι οι πιο κατάλληλοι. Αυτοί οι ορισμοί λαμβάνουν υπόψη την πιθανή κρουστική κίνηση που γίνεται στα ιδιόμορφα συστήματα με αποτέλεσμα να ενεργοποιούνται οι δυναμικές ιδιότητες τέτοιων συστημάτων, ενώ οι ορισμοί που σχετίζονται με την έννοια των άπειρων αποσυζευτικών μηδενικών εισόδου, σύμφωνα με τον Rosenbrock[23], αγνοούν την κρουστική κίνηση.

Για αποφυγή σύγχυσης, ας δούμε τον επόμενο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3: Έστω το ιδιόμορφο σύστημα της μορφής (2-1.1) . Τότε το σύστημα ονομάζεται **ελέγξιμο** αν δεν έχει πεπερασμένα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου και **ελέγξιμο στο άπειρο** αν δεν έχει άπειρα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου όπως ορίζεται από τον Verghese[29].Επιπλέον, αν το σύστημα είναι συγχρόνως ελέγξιμο και ελέγξιμο στο άπειρο τότε είναι **αυστηρά ελέγξιμο**. Επίσης, το σύστημα ονομάζεται **εφικτό στο άπειρο** αν δεν περιέχει άπειρα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου σύμφωνα με τον Rosenbrock[23] και **αυστηρά εφικτό,** αν εκτός από άπειρα αποσυζευτικά μηδενικά δεν έχει και πεπερασμένα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου.

Επιπλέον, ας δούμε δυο σημαντικά θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2: Το ιδιόμορφο σύστημα της μορφής (2-1.2) είναι αυστηρά ελέγξιμο αν

$$(q_1 - 1)l \geq n_2 - p \tag{4.5}$$

και αυστηρά εφικτό αν

$$q_1 l \geq n_2 \tag{4.6}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3: Το ιδιόμορφο σύστημα της μορφής (2-1.2) είναι αυστηρά ελέγξιμο αν

$$l \geq p - t \tag{4.7}$$

και αυστηρά εφικτό αν

$$p \geq n_2 / q_1 \tag{4.8}$$

Τελειώνοντας, ας δούμε και ένα θεώρημα για την ελεγξιμότητα σύμφωνα με τον Cobb[6] που συνδυάζει τον Rosenbrock[23] και Verghese[29].

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.4:

1) Το θ (2-3.1) είναι ελέγξιμο στο άπειρο σύμφωνα με τον Rosenbrock[23] αν και μόνο αν το θ_f (2-3.4b) είναι ελέγξιμο.
2) Το θ (2-3.1) είναι ελέγξιμο σύμφωνα με τον Rosenbrock[23] αν και μόνο αν το θ_s (2-3.4a) είναι ελέγξιμο.
3) Το θ (2-3.1) είναι ελέγξιμο στο άπειρο σύμφωνα με τον Verghese[29] αν και μόνο αν το θ (2-3.1) είναι κρουστικά ελέγξιμο.
4) Το θ (2-3.1) είναι ελέγξιμο σύμφωνα με τον Verghese[29] αν και μόνο αν το θ_s (2-3.4a) είναι ελέγξιμο και το θ(2-3.1) είναι κρουστικά ελέγξιμο.

4-2. Παρατηρησιμότητα

Όσο αναφορά την έννοια της παρατηρησιμότητας και εδώ μπορούμε να βρούμε κάποια κοινά μεταξύ αυτών που έχουν ειπωθεί από τους διάφορους επιστήμονες. Στην περίπτωση της παρατηρησιμότητας θα μελετήσουμε όμως τι συμβαίνει, με βάση τα αποσυζευτικά μηδενικά εξόδου, αφού ένα ιδιόμορφο σύστημα είναι παρατηρήσιμο στο άπειρο αν δεν έχει αποσυζευτικά μηδενικά εξόδου.

Ας δούμε αναλυτικότερα τα θεωρήματα σύμφωνα με τον D.Cobb [6].

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.5:

1) Έστω $u_+=0$ στο σύστημα θ^+ .Τότε, $y_+ = 0$, $y(0\text{-}) = 0$ αν και μόνο αν $x(0\text{-}) \in \prod$.
2) Το θ_s είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν Ker $(\lambda E - A) \cap$ Ker $C = 0$ για κάθε $\lambda \in C$.
3) Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
   (a) Το θ_f είναι παρατηρήσιμο.
   (b) $\prod_f = 0$.
   (c) Ker $A_f \cap$ Ker $C_f = 0$
   (d) Ker $E \cap$ Ker $C = 0$
4) Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
   (a) Το θ είναι παρατηρήσιμο.
   (b) Τα θ_s και θ_f είναι συγχρόνως παρατήρημα.
   (c) $\prod = 0$.

<u>*Απόδειξη:*</u> 1) Αρκεί να εξετάσουμε ότι το y_{f+} ,όσο ισχύει ότι $y_{s+} = 0$ είναι ισοδύναμο με το $x_s(0\text{-}) \in \prod_s$. Όσο ισχύει $u_+ = 0$,

$$y_{f+} = \sum_{i=1}^{q-1} \delta^{i-1} C_f A_f^i x_f(0-)$$

έτσι έχουμε $y_{f+} = 0$, $y_{f+}(0-) = 0$ είναι ισοδύναμο με το

$$x_f(0-) \in \mathrm{Ker} C_f A_f^i,\ i = 0, 1, ..., q-1 \ .$$

2) Από την ανάλυση των θ_s (2-3.4a) και θ_f (2-3.4b) έχουμε ότι:

$$ME|S = 1, ME|F = A_f, \; ME|S = A_s, \; MA|F = I, C_s = C|S, C_f = C|F$$

Όσο $\lambda A_f - I$ είναι αντιστρέψιμος, τότε έχουμε:

$$Ker(\lambda E - A) \cap KerC = Ker(\lambda ME - MA) \cap KerC = Ker(\lambda I - A_s) \cap KerC_s \,.$$

3) Η ισοδυναμία των a) και b) προκύπτει από το 1) και από τον ορισμό της παρατηρησιμότητας. Όσο το $\prod_f$ ορίζεται κατά κάποιο τρόπο να είναι ταυτόσημο με το $\prod_s$, γνωρίζουμε από τη θεωρία του διαστήματος κατάστασης ότι το a) είναι ισοδύναμο με το ότι

$$Ker(\lambda I - A_f) \cap KerC_f = 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{C} \,.$$

Για να προκύψει το c), θέτουμε λ = 0. Τελειώνοντας , για να αποδείξουμε την ισοδυναμία των c) και d), εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό M, οπότε έχουμε:

$$KerE \cap KerC = KerME \cap KerC = KerA_f \cap KerC_f.$$

4) Η ισοδυναμία των a), b) και c) προκύπτει από τους ορισμούς της παρατηρησιμότητας και του $\prod$, και από το 1). ▲

Ας δούμε τώρα το θεώρημα που συνδέει τις έννοιες της παρατηρησιμότητας:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.6: 1) Το θ (2-3.1) είναι παρατηρήσιμο στο άπειρο σύμφωνα με τον Rosenbrock[23] αν και μόνο αν το θ_f (2-3.4b) είναι παρατηρήσιμο.

2) Το θ (2-3.4b) είναι παρατηρήσιμο σύμφωνα με τον Rosenbrock[23] αν και μόνο αν το θ (2-3.1) είναι παρατηρήσιμο.

3) Το θ (2-3.1) είναι παρατηρήσιμο στο άπειρο σύμφωνα με τον Verghese[29] αν και μόνο αν το θ (2-3.1) είναι κρουστικά παρατηρήσιμο.

4) Το θ (2-3.1) είναι παρατηρήσιμο σύμφωνα με τον Verghese[29] αν και μόνο αν το θ_s (2-3.4a) είναι παρατηρήσιμο και το θ είναι κρουστικά παρατηρήσιμο.

Θα ήταν σημαντικό να σημειώσουμε ότι ο Cobb[6] αναφέρει ότι το θ (2-3.1) είναι παρατηρήσιμο σύμφωνα με τους Yip and Sincovec[31] αν και μόνο αν το θ_s (2-3.4a) είναι παρατηρήσιμο με την έννοια που παρουσίασε ο Cobb[6]. Ακόμη, το θ_f (2-3.4b) είναι πάντα παρατηρήσιμο σύμφωνα με τους Yip and Sincovec[31]. Επίσης, αναφέρει ότι οι υπόχωροι $\Re_f$ και $\prod_f$ που έχουν οριστεί για τους όρους A_f, B_f και C_f, έτσι και οι υπόχωροι $\Re_s$ και $\prod_s$ έχουν οριστεί κατά τον ίδιο τρόπο για τους όρους A_s, B_s και C_s. Επιπλέον, όπως είδαμε κατά τον Kalman[10], χρησιμοποιώντας τον θεμελιώδη πίνακα απαιτούνται τέσσερις εξισώσεις (2-2.2) για να δείξουμε την ελεγξιμότητα ή την παρατηρησιμότητα ενός ιδιόμορφου συστήματος. Άρα, αν συνδυάσουμε τη μέθοδο που ακολουθείται κατά τον Cobb[6], όπου το σύστημα χωρίζεται σε δυο υποσυστήματα, τότε με τον Kalman[10] θα απαιτούνται τέσσερις εξισώσεις για το θ_s (2-3.4a) και άλλες τέσσερις για το θ_f (2-3.4b) , οπότε συνολικά οκτώ εξισώσεις της μορφής (2-2.2) για να καλύψουμε ολόκληρο το ιδιόμορφο σύστημα.

4-3. Επίλογος

Σε αυτό το κεφάλαιο συγκρίναμε τις έννοιες τις ελεγξιμότητας και της παρατηρησιμότητας που έχουν αναπτυχθεί κατά καιρούς στον 20^o αιώνα. Παρατηρήσαμε ότι οι συγγραφείς πολλές φορές παρουσιάζουν ομοιότητες αλλά και διάφορες στον τρόπο ανάπτυξης των θεωριών τους. Αυτό συμβαίνει γιατί η θεωρία ελέγχου και γενικά η μελέτη των συστημάτων χώρου κατάστασης και των ιδιόμορφων συστημάτων είναι μια επιστήμη που συνεχώς εξελίσσεται και έχει άμεση σχέση με την ανάπτυξη της τεχνολογίας σε όλους τους τομείς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Armentano V.A., “ The pencil (sE – A) and Controllability – Observability for Generalized Linear Systems: A Geometric Approach ”, *Proc. 23rd IEEE Conf. Dec. and control*, pp. 1507 – 1510, Las Vegas, NV, December 1984.

[2] Campbell S. L., *Singular systems of differential equations*, London: Pitman, 1980

[3] Cobb Daniel, “ *Descriptor variable and generalized Singularly Perturbed Systems: A Geometric Approach* ”, Ph. D. Thesis, Department of Electrical Engineering, University of Illinois, 1980.

[4] Cobb Daniel, “ *Feedback and Pole – placement in descriptor – variable Systems* ”, Int. J. Contr., Vol. 33, pp. 1135 – 1146, 1981.

[5] Cobb Daniel, *Observability and Impulse Observes in Descriptor – Variable systems*, Allerton 1982.

[6] Cobb Daniel, *“ Controllability, Observability and Duality in Singular Systems ”*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC – 29, No. 12, December 1984.

[7] Dai L., *Singular control systems*, © Springer – Verlag Berlin and New York, 1989.

[8] Gantmacher F. R., *The Theory of Matrices*, Chelsea, New York, 1974.

[9] Kalman R. E., “ *On the general theory of control systems* ”, Proc. First IFAC Congress, Moscow, 1960.

[10] Koumboulis F. N. and Mertzios B. G., “ *Circuits Systems and Signal Processing* ”, Vol. 18, No. 3, pp. 269-290, 1999

[11] Kronecker L., *“ Algebraishe Reduction der Schaaren Bilinearer Formen”*, S. – B. Akad, Berlin, pp. 763 – 776, 1880.

[12] Langenhop C. E., “ *Controllability and Stabilization of Regular Singular Linear Systems with constant coefficients* ”, Dept. of Math., S. Illinois Univ., December 6, 1979.

[13] Lewis F. L. and K. Ozcaldiran, “ *Reachability and Controllability for Descriptor Systems* ”, Proc. 27th Midwestern Symp. Circuits and Sys., pp. 690 – 695, Morgan – town, WV, June 1984.

[14] Lewis F. L, “ *Descriptor systems: fundamental matrix, reachability and observability matrices, subspaces* ”, Proceedings of 23rd Conference on Decision and Control, Las Vegas, NV, December 1984.

[15] Lewis F. L., “ *A survey of Linear singular systems, Circuits systems signal* ”, Process 5 3 – 36, 1986

[16] Lewis F. L., *Optimal control for singular systems*, in preparation, 1986

[17] Luenberger, D. G., “ *Dynamic equation in descriptor form* ”, IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC – 22, pp. 312 – 321, 1977.

[18] Luenberger D. G., “ *Time invariant descriptor systems* ”, Automatica, Vol. 14 pp. 473 – 480, 1978.

[19] Newcomb R. W., “ *The semistate Description of NonLinear Time – Variable Circuits* ”, Vol. CAS – 28, No. 1, pp. 62 – 71, January 1981.

[20] Ozcaldiran K., “ *Control of Descriptors Systems, Ph. D. Thesis, School of Electrical Engineering* ”, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, June 1985.

[21] Pandolfi L., “ *Controllability and Stabilization for Linear Systems of Algebraic and Differential equations* ”, J. Optimization Theory and Applic., Vol. 30, pp. 601 – 620, 1980.

[22] Pugh A. C. and P. A. Ratcliffe, “ *On the zeros and poles of a rational matrix* ”, Int. J. Control, Vol. 30, pp. 213 – 226, 1979.

[23] Rosenbrock H. H., “ *Structural properties of Linear Dynamical Systems* ”, Int. J. Contr., Vol. 20, pp. 191 – 202, 1974.

[24] Schwartz L., *Mathematics for the Physical sciences*. Reading, MA: Addison – Wesley, 1966.

[25] Singh S. P. and R. – W. Lin, “ *Existence of state equation representation of linear large – scale dynamic systems* ”, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT – 20, No. 5, pp. 239 – 246, 1973.

[26] Vardulakis A. I. G., *Linear Multivariable Control, ALGEBRAIC ANALYSIS AND SYNTHESIS METHODS*, John Wiley & Sons Ltd., pp. 235 – 239, 1991.

[27] Verghese G. C., “*Infinite – Frequency Behavior in Generalized Dynamical Systems* ”, Ph. D. Thesis, Dept. of Electrical Engineering, Stamford University, 1978.

[28] Verghese G. C. and T. Kailath, “ *Impulsive Behavior in Dynamical Systems: Structure and Significance* ”, Proc. 4th Int. Symp. Math. Theory, Networks, Sys., pp. 162 – 168, Delft, The Netherlands, July 1979.

[29] Verghese G. C., B.C. Levy and T. Kailath, “ *A generalized state space for singular systems* ”, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC – 26, pp. 811 – 831, 1981.

[30] Wonham W. M., *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, New York: Springer – Verlag 1979.

[31] Yip E. L. and R. F. Sincovec, " *Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems* " , IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC – 26, pp. 702 - 707, 1981.

[32] Yip E. L. and R. F. Sincovec, " *Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems* " , IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC – 30, No. 9, pp. 874 – 880, 1981.