

# Η Μέθοδος των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων για την Επίλυση Προβλημάτων του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου

Μπάντρα Ελπίδα

Διπλωματική Εργασία για το Μεταπτυχιακό στο Τμήμα των Μαθηματικών  
κατεύθυνση Θεωρητικής Πληροφορικής και Θεωρίας Συστημάτων και Ελέγχου



## Θεωρητικές Έννοιες

### *Εξισώσεις του Maxwell*

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{M} \quad \text{Νόμος Faraday} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad \text{Νόμος Ampere} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_e \quad \text{Νόμος Gauss για ηλεκτρικό} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = q_m \quad \text{Νόμος Gauss για μαγνητικό} \quad (4)$$

## Θεωρητικές Έννοιες

### Εξισώσεις Συνέχειας

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial q_e}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \frac{\partial q_m}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

### Καταστατικές Εξισώσεις

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (8)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{cond} + \mathbf{J}_{conv} + \mathbf{J}_0 = \sigma \mathbf{E} + q_e \mathbf{v} + \mathbf{J}_0 \quad (9)$$

## Συναρτήσεις Μικτών Δυναμικών

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi - \frac{1}{\epsilon}\nabla \times \mathbf{F} \quad (10)$$

$$\mathbf{H} = -j\omega\mathbf{F} - \nabla\Psi + \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A} \quad (11)$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{J}, 0] = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi \quad (12)$$

$$\mathbf{H}[0, \mathbf{M}] = -j\omega\mathbf{F} - \nabla\Psi \quad (13)$$

Μαγνητικό Διανυσματικό Δυναμικό  $\mathbf{A}$  και Ηλεκτρικό Βαθμωτό Δυναμικό  $\Phi$

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (14)$$

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = -\frac{q_e}{\epsilon} \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\epsilon\mu\Phi = 0. \quad (16)$$

Ηλεκτρικό Διανυσματικό Δυναμικό  $\mathbf{F}$  και Μαγνητικό Βαθμωτό Δυναμικό  $\Psi$

$$\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = -\epsilon \mathbf{M} , \quad (17)$$

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = -\frac{q_m}{\mu} \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} + j\omega\epsilon\mu\Psi = 0. \quad (19)$$

## Συναρτήσεις Green Δυναμικών

$$\underline{\underline{G}}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mu}{4\pi} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \underline{\underline{I}}$$

$$G^\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

και

$$\underline{\underline{G}}^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\varepsilon}{4\pi} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \underline{\underline{I}}$$

$$G^\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\mu} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

όπου

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jkR}}{R}. \quad (20)$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

και

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$



$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}^A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dD \quad (22)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_D G^\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') q_e(\mathbf{r}') dD \quad (23)$$

όπου  $D$  είναι η περιοχή στην οποία ορίζονται οι πηγές  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  και  $q_e(\mathbf{r}')$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}^F}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}') dD \quad (24)$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int_D G^\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') q_m(\mathbf{r}') dD. \quad (25)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{EJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dD + \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{EM}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}') dD \quad (26)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{HJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dD + \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{HM}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}') dD. \quad (27)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dD - \nabla \int_D G^\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') q_e(\mathbf{r}') dD \quad (28)$$

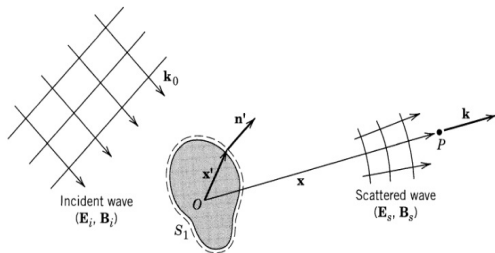
$$- \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \int \underline{\underline{\mathbf{G}}}^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}') dD$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -j\omega \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}') dD - \nabla \int_D G^\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') q_m(\mathbf{r}') dD \quad (29)$$

$$+ \frac{1}{\mu} \nabla \times \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dD$$

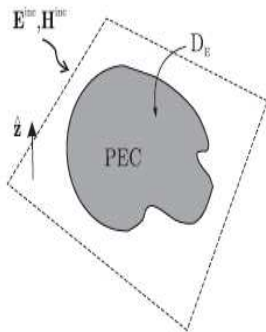
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) \quad (30)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^{sca}(\mathbf{r}) \quad (31)$$



## Ολοκληρωτική Εξίσωση Ηλεκτρικού Πεδίου (EFIE)

$$\int_{D_E} \underline{\underline{\mathbf{G}^{EJ}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dD = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}). \quad (32)$$



# Αντιμετώπιση Ηλεκτρομαγνητικών Προβλημάτων με πλήρως κυματικές (full wave) μεθόδους

## Διάκριση Μεθόδων

1. ανάλογα με το αν είμαστε στο πεδίο του χρόνου ή της συχνότητας
2. ανάλογα με το αν η μαθηματική περιγραφή του προβλήματος βασίζεται σε ολοκληρωτική ή διαφορική διατύπωση

## Σημαντικά Χαρακτηριστικά Μεθόδων Ολοκληρωτικών Εξισώσεων

οικονομική διαχείριση επεξεργαστικής ισχύος και υπολογιστικής μνήμης

σημαντική αναλυτική προεπεξεργασία

δύσκολες ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις

## Σημαντικά Χαρακτηριστικά Διαφορικών Μεθόδων

ελάχιστη αναλυτική προεπεξεργασία

ανάλυση τυχαίων γεωμετριών και υλικών με ανομοιογένειες

μεγάλος αριθμός αγνώστων

## Περιγραφή Μεθόδου

$$\mathbf{L}(f) = g \quad (33)$$

$$f \in D(L) \xrightarrow{L} g \in R(L)$$

Εάν  $f_n, n = 1, \dots$  είναι μία πλήρης βάση του  $D(L)$ , η αναλυτική λύση της (33) μπορεί να αναλυθεί ακριβώς στην (34)

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \neq 0 \quad (34)$$

## Περιγραφή Μεθόδου

Έστω τώρα γραμμικός υπόχωρος  $\mathbf{F}_N$ , διαστάσεων  $N$  και μία βάση του  $f_n, n = 1, \dots$ , από συναρτήσεις που είναι στοιχεία του πλήρους συνόλου της βάσης του άπειρου χώρου  $D(L)$ . Μία συνάρτηση  $f_A \in \mathbf{F}_N$  μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση

$$f_A \approx \sum_{n=1}^N a_n f_n \quad (35)$$

Επίσης,  $\mathbf{W}_n$  με  $w_n, n = 1, \dots, N$  συναρτήσεις και στοιχεία ενός πλήρους συνόλου.



## Περιγραφή Μεθόδου

Μία τυχαία συνάρτηση  $\mathbf{p} \in \mathbf{D}$  μπορεί να εκφραστεί, σύμφωνα με το θεώρημα προβολής, ως

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}_{\mathbf{W}_N}\{\mathbf{p}\} + \mathbf{h}, \langle \mathbf{h}, \mathbf{w}_n \rangle = 0, \forall \mathbf{w}_n \in \mathbf{W}_N \quad (36)$$

Η μέθοδος των ροπών προσεγγίζει την ακριβή λύση της εξίσωσης (34) του προβλήματος της εξίσωσης (33) με μία συνάρτηση της μορφής της εξίσωσης (35), ώστε οι προβολές των συναρτήσεων  $L(f)$  και  $L(f_A)$  πάνω στον υπόχωρο  $\mathbf{W}_N$  να είναι ίσες

$$\mathbf{P}_{\mathbf{W}_N}\{L(f)\} - \mathbf{P}_{\mathbf{W}_N}\{L(f_A)\} = 0 \quad (37)$$

## Περιγραφή Μεθόδου

ή ισοδύναμα, το σφάλμα (ή αλλιώς υπόλοιπο) να ελαχιστοποιείται

$$R = L(f) - L(f_A) = h - h_A \quad (38)$$

Η ισότητα των προβολών και ελαχιστοποίησης του σφάλματος γίνεται με την επιβολή μηδενισμού, κατά μέση έννοια, στα σταθμισμένα υπόλοιπα

$$\langle w_m, R \rangle = 0, m = 1, 2, \dots, N \quad (39)$$

## Περιγραφή Μεθόδου

ή ισοδύναμα στην παρακάτω σχέση,

$$\langle w_m, q \rangle = \langle w_m, L(f_A) \rangle, m = 1, 2, \dots, N \quad (40)$$

που επιβάλλει την ισότητα των προβολών της ακριβούς και προσεγγιστικής συνάρτησης πάνω στις συνιστώσες της βάσης του υποχώρου  $\mathbf{W}_N$ . Αντικαθιστώντας την εξίσωση (35) στην (40) οδηγούμαστε στη δημιουργία ενός αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων της μορφής

$$[l_{mn}] \{a_n\} = \{q_m\} \quad (41)$$

## Περιγραφή Μεθόδου

όπου

$$[l_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, L(f_1) \rangle & \langle w_1, L(f_2) \rangle & \cdot & \cdot & \cdot & \langle w_1, L(f_N) \rangle \\ \langle w_2, L(f_1) \rangle & \langle w_2, L(f_2) \rangle & \cdot & \cdot & \cdot & \langle w_2, L(f_1) \rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle w_N, L(f_1) \rangle & \langle w_N, L(f_2) \rangle & \cdot & \cdot & \cdot & \langle w_N, L(f_N) \rangle \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\{\mathbf{q}_m\} = \begin{bmatrix} \langle w_1, q \rangle \\ \langle w_2, q \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle w_N, q \rangle \end{bmatrix} \quad (43)$$

## Περιγραφή Μεθόδου

και  $\{\mathbf{a}_n\}$  ο πίνακας-στήλη περιέχει τους άγνωστους συντελεστές

$$\{\mathbf{a}_n\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{bmatrix} \quad (44)$$

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων (41) θα μας δώσει την προσεγγιστική λύση της εξίσωσης (33) με τη μορφή

$$f \approx (\mathbf{f}_n)[\mathbf{l}_{mn}]^{-1}\{\mathbf{q}_m\} \quad (45)$$

όπου  $(\mathbf{f}_n) = [f_1, \dots, f_N]$  ο αντίστοιχος πίνακας-γραμμή.

## Συναρτήσεις Βάσης και Βάρους

Οι συναρτήσεις βάσης και βάρους, ή ισοδύναμα, οι χώροι  $\mathbf{W}_N$  και  $\mathbf{F}_N$  ταυτίζονται. Αυτό συνεπάγεται αμφιμονοσήμαντα ότι ο τελεστής  $\mathbf{L}(\mathbf{f})$  είναι αυτοπροσαρτημένος

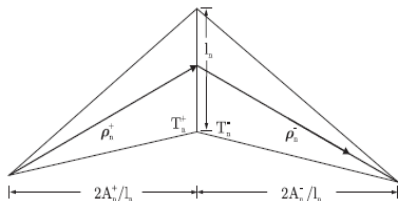
$$(\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{L}(\mathbf{f}_n) \rangle = \langle \mathbf{L}(\mathbf{w}_n), \mathbf{f}_n \rangle)$$

Μαθηματική Έκφραση Συνάρτησης Βάσης και Επιφανειακής Απόκλισης

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{I_n}{2A_n^+} \boldsymbol{\rho}_n^+, & \mathbf{r} \in T_n^+ \\ \frac{I_n}{2A_n^-} \boldsymbol{\rho}_n^-, & \mathbf{r} \in T_n^- \\ 0, & \mathbf{r} \notin T_n^\pm \end{cases} \quad (46)$$

$$\nabla_s \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} +\frac{I_n}{A_n^+}, & \mathbf{r} \in T_n^+ \\ -\frac{I_n}{2A_n^-}, & \mathbf{r} \in T_n^- \\ 0, & \mathbf{r} \notin T_n^\pm \end{cases} \quad (47)$$

# Το ρεύμα στην επιφάνεια του σκεδαστή



Το διανυσματικό άθροισμα των επιφανειακών ρευμάτων στις δύο πλευρές του σκεδαστή δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N I_N \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (48)$$



$$[Z] = \sum_m \sum_n [Z^{(mn)}] \quad (49)$$

όπου

$$[Z^{(mn)}] = \int_{S_m} \mathbf{J}_m(\mathbf{r}) \mathbf{E}[\mathbf{J}_n(\mathbf{r}')] dS \quad (50)$$

και

$$\mathbf{E}[\mathbf{J}_n(\mathbf{r})] = -j\omega\mu \int_{S_n} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_n(\mathbf{r}') dS' + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \int_{S_n} \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_n(\mathbf{r}') dS' \quad (51)$$

$$= -j\omega\mu \int_{S_n} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_n(\mathbf{r}') dS' - \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \int_{S_n} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{J}_n(\mathbf{r}') dS$$

$$[\mathbf{Z}^{(mn)}] = -j\omega\mu \int_{S_m} \mathbf{J}_m(\mathbf{r}) \int_{S_n} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_n(\mathbf{r}') dS' dS \quad (52)$$

$$- \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{S_m} \nabla \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}) \int_{S_n} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{J}_n(\mathbf{r}') dS' dS$$

$$[\mathbf{Z}^{(mn)}] = -j\omega\mu \int_{S_m} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{r}) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{r}) \\ \mathbf{f}_3(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \int_{S_n} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_1(\mathbf{r}') & \mathbf{f}'_2(\mathbf{r}') & \mathbf{f}'_3(\mathbf{r}') \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$dS' dS - \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{S_m} \begin{bmatrix} \nabla \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{f}_2(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{f}_3(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \int_{S_n} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

$$\begin{bmatrix} \nabla' \cdot \mathbf{f}'_1(\mathbf{r}') & \nabla' \cdot \mathbf{f}'_2(\mathbf{r}') & \nabla' \cdot \mathbf{f}'_3(\mathbf{r}') \end{bmatrix} dS' dS$$

Ο στοιχειακός πίνακας προκύπτει από το άθροισμα των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των συναρτήσεων βάσης των δύο στοιχείων (m και n) και μπορεί να γραφεί ως

$$[Z^{(mn)}] = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 Z_{pq}^{(mn)} \quad (54)$$

όπου

$$Z_{pq}^{(mn)} = -j\omega\mu \int_{S_m} \mathbf{f}_p(\mathbf{r}) \int_{S_n} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}'_q(\mathbf{r}') dS' dS - \quad (55)$$

$$\frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{S_m} \nabla \cdot \mathbf{f}_p(\mathbf{r}) \int_{S_n} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{f}'_q(\mathbf{r}') dS' dS.$$

και οι συναρτήσεις βάσεις στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων simplex γράφονται ως

$$\mathbf{f}_p = \frac{l_p}{2A} [\zeta_{p2} l_{p1} - \zeta_{p1} l_{p2}] \quad (56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_p = \frac{2l_p}{2A} \quad (57)$$

όπου  $p_1 = [(p-1) + 1] \bmod 3 + 1$ ,  $p_2 = [(p-1) + 2] \bmod 3 + 1$ ,  $l_p = \mathbf{r}_{p1} - \mathbf{r}_{p2}$  και  $A$  το εμβαδό του αντίστοιχου τριγωνικού στοιχείου.

$$Z_{pq}^{(mn)} = (l_p \cdot l_q) \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_i w_j' g(\mathbf{r}^{(i)}, \mathbf{r}'^{(j)}) \{-j\omega\mu \quad (58)$$

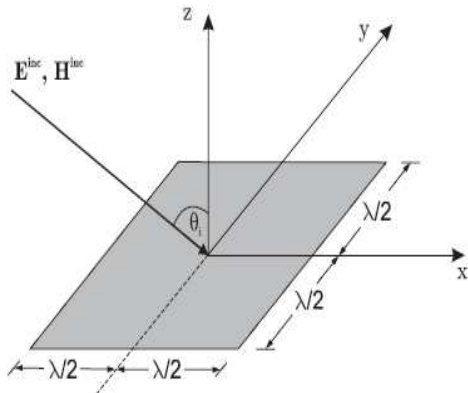
$$[\zeta_{p2}^{(i)} (\zeta_{q2}^{(j')} L_{p1,q1} - \zeta_{q1}^{(j')} L_{p1,q2}) - \zeta_{p1}^{(i)} (\zeta_{q2}^{(j')} L_{p2,q1} - \zeta_{q1}^{(j')} L_{p2,q2})] - \frac{4}{j\omega\epsilon} \}$$

$$L_{p,q} = l_p \cdot l_q' \quad (59)$$

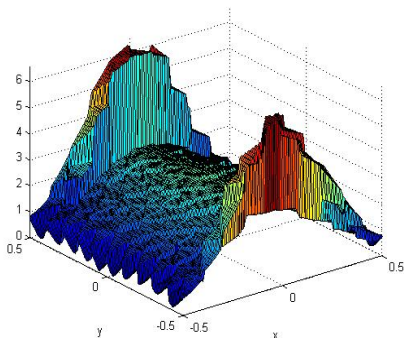
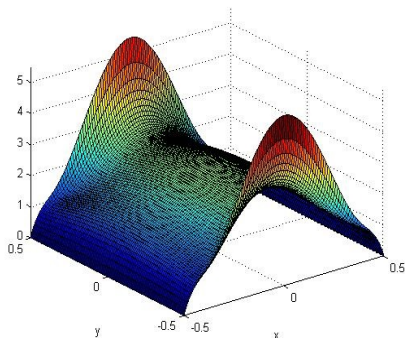
$$\mathbf{r}^{(i)} = \zeta_1^{(i)} \mathbf{r}_1 + \zeta_2^{(i)} \mathbf{r}_2 + \zeta_3^{(i)} \mathbf{r}_3 \quad (60)$$

$$\mathbf{r}'^{(j)} = \zeta_1^{(j)} \mathbf{r}'_1 + \zeta_2^{(j)} \mathbf{r}'_2 + \zeta_3^{(j)} \mathbf{r}'_3. \quad (61)$$

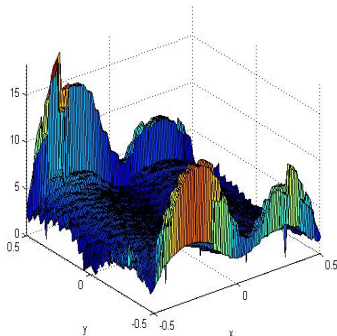
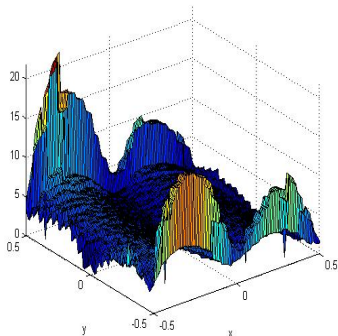
# 2D Μεταλλικός Σκεδαστής στον Ελεύθερο Χώρο



# Αναλυτική και Προσεγγιστική Λύση της Ρευματικής Κατανομής

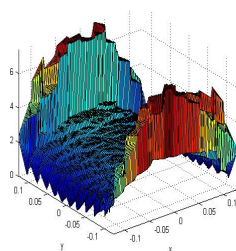
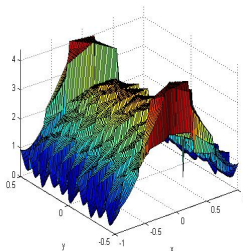
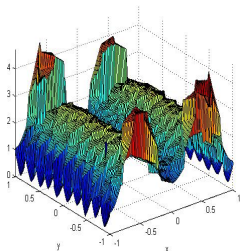


- διαστάσεις  $1 \text{ m}^2$  και  $\lambda=1\text{m}$
- το ηλεκτρικό πεδίο είναι πολωμένο κατα  $y$  και  $\theta = 0 \text{ rad}$



για γωνία πρόσπτωσης ίση με  $\theta = \frac{\pi}{4}$  rad και  $\theta = \frac{\pi}{6}$  rad αντίστοιχα και ένα refinement





για σχεδαστή διαστάσεων  $2 \times 2 \text{ m}^2$ , για  $2 \times 1 \text{ m}^2$  και  $1/4 \times 1/4 \text{ m}^2$   
αντίστοιχα

## Αναγκαία Συνθήκη

$$R \geq \frac{2D_{max}}{\lambda} \quad (62)$$

## Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (63)$$

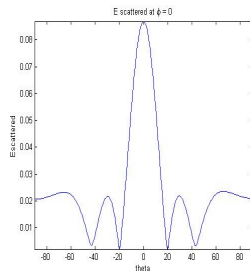
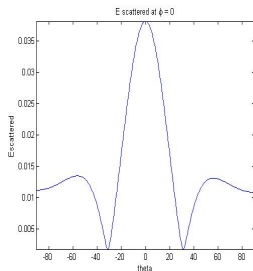
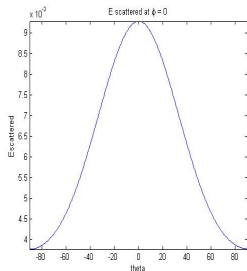
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (64)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο στις 3 διαστάσεις και η τρισδιάστατη διστατική διατομή σκέδασης

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int_{S_n} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_n(\mathbf{r}') dS' \quad (65)$$

$$\sigma_{3D} = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|\mathbf{E}^s|^2}{|\mathbf{E}^i|^2} = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 |\mathbf{E}^s|^2 \quad (66)$$

# Γραφήματα για σχεδαστή διαφορετικών διαστάσεων



το ηλεκτρικό πεδίο σε σημεία παρατήρησης στο μακρινό πεδίο, τα οποία βρίσκονται υπό γωνία  $\theta = [-90:10:90]$ , για σχεδαστή  $1 \times 1 \text{ m}^2$  για  $2 \times 2 \text{ m}^2$  και για  $3 \times 3 \text{ m}^2$  αντίστοιχα.

Ίδια αντιμετώπιση σχεδιαστών με πολύπλοκες επιφάνειες και στις τρεις διαστάσεις.



*Η διπλωματική μου εργασία καθώς και η παρουσίαση της θα είναι διαθέσιμη στο παρακάτω link*

<http://anemos.web.auth.gr/thesis/index.htm>

*Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας.*