ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
''ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ''

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μπάντρα Ελπίδα

Επιβλέπων: Καραμπετάκης Νικόλαος

Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 19 Ιανουαρίου 2016

………………………..	………………………..	………………………..
Ν. Καραμπετάκης	Γ. Ραχώνης	Τ. Γιούλτσης
Καθηγητής Α.Π.Θ.	Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ.	Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη Ιανουάριος 2016

....

Μπάντρα Ελπίδα

Διπλωματούχος – Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών – Ε.Μ.Π.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε τη μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων και την εφαρμογή της, για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων σκέδασης ηλεκτρομαγνητικού κύματος από δισδιάστατο μεταλλικό σκεδαστή σε ομογενές μέσο.

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε ορισμένες θεωρητικές αρχές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και την εφαρμογή τους στην μελέτη και ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων και διατάξεων. Επιπλέον, περιγράφουμε τη μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων, που είναι μία από τις πιο ισχυρές τεχνικές για τη μοντελοποίηση, την ανάλυση και την αντιμετώπιση επίπεδα στρωματοποιημένων γεωμετριών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζουμε το πως προκύπτουν, από τις εξισώσεις του Maxwell, οι ολοκληρωτικές εξισώσεις, που περιγράφουν τη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα σε ένα ομογενές μέσο. Παρουσιάζουμε τις συναρτήσεις Green στις δύο και στις τρεις διαστάσεις και δίνουμε τις εξισώσεις, που ορίζουν και περιγράφουν τις συναρτήσεις των δυναμικών. Έπειτα, ασχολούμαστε με τις επιφανειακά ισοδύναμες ολοκληρωτικές εκφράσεις για αγώγιμες επιφάνειες.

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε βήμα βήμα την αριθμητική επίλυση της μεθόδου των ολοκληρωτικών εξισώσεων με τη μέθοδο των ροπών (MoM). Πιο συγκεκριμένα, καταδεικνύουμε τον ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο των συναρτήσεων βάσης/βάρους στη διακριτοποίηση της ολοκληρωτικής εξίσωσης μικτών δυναμικών, σύμφωνα με τις διαδικασίες της διατύπωσης Galerkin. Στη συνέχεια, δείχνουμε πως οι συναρτήσεις βάσης (RWG) της μεθόδου των ροπών συσχετίζονται με τα στοιχεία ακμών της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Επιπλέον, δείχνουμε το πως μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά τα στοιχεία του πίνακα της μεθόδου των ροπών και από εκεί το διάνυσμα της ρευματικής κατανομής πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή μας. Τέλος, βλέπουμε πώς γίνεται η μοντελοποίηση της διέγερσης ενός μεταλλικού σκεδαστή.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την αναλυτική λύση για το δισδιάστατο πρόβλημα ενός μεταλλικού σκεδαστή στον ελεύθερο χώρο και την συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την δική μας αριθμητική επίλυση στο περιβάλλον του matlab. Τέλος, μελετάμε τη συμπεριφορά του κύματος στο μακρινό πεδίο, κάτι που αποτελεί βασικό στόχο σε εφαρμογές ραντάρ και ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης γενικότερα.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Μέθοδος των Ροπών, Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός, Θεωρία Σκέδασης, Μακρινό Πεδίο, Κοντινό Πεδίο

ABSTRACT

In this diploma thesis we study the Method of Moments and its numerical implementation in electromagnetics, for the solution of scattering problems.

In the first chapter, we provide an introduction to the scattering theory, a very brief overview of computational electromagnetics and the integral equations method.

In the second chapter, we describe the propagation of an electromagnetic wave in a homogenous medium using Maxwell's equations. We provide, also, expressions for radiation and scattering, vector potentials and the two- and three-dimensional Green's functions. We, then, present the surface equivalents and derive the electric integral equations for conducting surfaces.

In the third chapter, we describe the solution of integral equations. The method of moments is formalized and we calculate the matrix which provides the surface current. We, also, present the association of the MoM with the Finite Elements Method and the excitation of our two-dimensional metallic scatterer.

In the fourth chapter, we present the analytical solution for a two dimensional problem, via an available Benchmark solution and we compare it with our results. Last but not least, we examine our resuls for the far field.

KEY WORDS

Method of Moments (MoM), Integral Equations, Computational Electromagnetics, Scattering Theory, Far Field, Near Field

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Α.Π.Θ. κ. Τραϊανό Γιούλτση που δέχτηκε με χαρά να αναλάβει την καθοδήγηση της διπλωματικής μου εργασίας και για το ευχάριστο κλίμα συνεργασίας κατά τη διάρκεια εκπόνησής της. Είχα την τύχη φέτος να τον γνωρίσω και να συνεργαστώ με έναν καταπληκτικό άνθρωπο και καθηγητή, που με την υπομονή του και την αγάπη του για τη δουλειά του με ενέπνευσε και μου δίδαξε πολλά. Επίσης, να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Α.Π.Θ. κ. Νικόλαο Καραμπετάκη, του οποίου η συνεργασία ήταν άριστη και χωρίς αυτόν, το εγχείρημα της διατμηματικής διπλωματικής δεν θα ήταν εφικτό. Τέλος, ευχαριστώ θερμά την Θάλεια Πασσιά που με έβαλε στο πνεύμα των ολοκληρωτικών εξισώσεων και φυσικά τον Αθανάσιο Πολυμερίδη που μου έδειξε τον κόσμο του.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία

Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία, ασχολείται με τη μελέτη των πεδίων, που παράγουν τα ρεύματα και τα ηλεκτρικά φορτία. Είναι, ως εκ τούτου, θεμελιώδους σημασίας για την μελέτη της ηλεκτρολογίας και της φυσικής, αλλά και απαραίτητη για την κατανόηση, το σχεδιασμό, και τη λειτουργία πολλών πρακτικών συστημάτων που χρησιμοποιούν κεραίες, σκεδαστές, κυκλώματα και συσκευές μικροκυμάτων. Επίσης, παίζει καταλυτικό ρόλο στις επικοινωνίες με ραδιοσυχνότητες, στις ασύρματες επικοινωνίες, στη ραδιοτηλεόραση, στα ραντάρ, στα κυκλώματα και στις συσκευές στερεάς κατάστασης, στη μετατροπή της ηλεκτρομηχανικής ενέργειας, ακόμη και στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

Η θεωρία κυκλωμάτων, που είναι μια περιοχή που απαιτείται στην μελέτη της ηλεκτρολογίας, είναι μια ειδική περίπτωση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, και είναι έγκυρη όταν οι φυσικές διαστάσεις του κυκλώματος είναι μικρές σε σύγκριση με το μήκος κύματος. Η κυκλωματική θεωρία, πρέπει να τροποποιηθεί ώστε να περιλαμβάνει και φαινόμενα σύζευξης, όταν μελετάμε συστήματα μεγαλύτερων φυσικών διαστάσεων. Για παράδειγμα, η διάδοση του σήματος, η παραμόρφωση, και η σύζευξη στις γραμμές μικροταινίας που χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό των εξελιγμένων συστημάτων (όπως οι υπολογιστές και τα ηλεκτρονικά ολοκληρωμένων κυκλωμάτων) μπορούν να υπολογιστούν κατάλληλα μόνο με την κατανόηση των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων του πεδίου που συνδέεται με αυτά.

Η μελέτη του ηλεκτρομαγνητισμού περιλαμβάνει τόσο θεωρητικές όσο και εφαρμοσμένες έννοιες. Θεωρητικές είναι οι έννοιες που περιγράφονται από ένα σύνολο βασικών νόμων που διατυπώθηκαν, κατά κύριο λόγο, μέσω των πειραμάτων που διεξάγονταν κατά τη διάρκεια του δέκατου ένατου αιώνα από πολλούς επιστήμονες, όπως οι Faraday, Ampere, Gauss, Lenz, Coulomb, Volta, και άλλοι. Στη συνέχεια, συνδυάστηκαν σε ένα συνεκτικό σύνολο διανυσματικών εξισώσεων από τον Maxwell. Αυτές είναι οι ευρέως αναγνωρισμένες εξισώσεις του Maxwell. Οι εφαρμοσμένες έννοιες του ηλεκτρομαγνητισμού, διατυπώνονται από την εφαρμογή των θεωρητικών εννοιών για το σχεδιασμό και τη λειτουργία πρακτικών συστημάτων.

Τέλος, οι εξισώσεις του Maxwell, τόσο σε διαφορική όσο και σε ολοκληρωτική μορφή, περιγράφουν τις σχέσεις μεταξύ της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας και του κυκλώματος και παράγουν τις συνοριακές συνθήκες που σχετίζονται με την ηλεκτρική και μαγνητική συμπεριφορά των υλικών κατα μήκος των επιφανειών.

1.2 Αριθμητική Αντιμετώπιση Ηλεκτρομαγνητικών Προβλημάτων

Σε μακροσκοπική κλίμακα, η επίλυση των εξισώσεων του Maxwell, οδηγεί σε αναλυτικές εκφράσεις μόνο στην περίπτωση απλών γεωμετριών με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες. Στη γενική περίπτωση του ανομοιόμορφου χώρου και των μη ομογενών ηλεκτρομαγνητικών ιδιοτήτων είναι αδύνατο να βρεθεί αναλυτική λύση. Έτσι, αναπτύχθηκαν διάφορες αριθμητικές μέθοδοι, για την προσεγγιστική περιγραφή των σχετικών μεγεθών, με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και διαφορετική απόδοση και συμπεριφορά σε κάθε κατηγορία προβλημάτων. Ο κάθε αλγόριθμος που βασίζεται σε διαφορετική αριθμητική μέθοδο έχει κάποια πλεονεκτήματα και κάποιους περιορισμούς.

Διακρίνουμε τις μεθόδους μας στο αν οι αλγόριθμοί τους ανήκουν στο πεδίο του χρόνου ή της συχνότητας. Έπειτα, υπάρχει περαιτέρω διάκριση στις μεθόδους που είναι στο πεδίο του χρόνου ή της συχνότητας και στο αν η μαθηματική περιγραφή του προβλήματος βασίζεται σε διαφορική ή ολοκληρωτική διατύπωση.

Ανάμεσα στις μεθόδους στο πεδίο της συχνότητας, στις οποίες η ανεξάρτητη μεταβλητή που αντιστοιχεί στη διάσταση του χρόνου μετατρέπεται σε μία απλή συχνοτική παράμετρο με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier, περίοπτη θέση κατέχουν η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων και η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (FEM). Οι μέθοδοι των ολοκληρωτικών εξισώσεων απαιτούν σημαντική αναλυτική προεπεξεργασία,. Αντίθετα, στις μεθόδους των διαφορικών εξισώσεων, όπως στην FEM, οι οποίες προκύπτουν από τις εξισώσεις του Maxwell ή τις κυματικές εξισώσεις του Helmholtz, απαιτείται γενικά λιγότερη προεπεξεργασία.

Αναλυτικότερα, στη μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων, επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες, που πρέπει να ικανοποιούνται από το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, διατυπώνεται η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου (EFIE), του μαγνητικού πεδίου (MFIE) ή του συνδυσμού τους (CFIE). Επιπροσθέτως, με την εισαγωγή των συναρτήσεων δυναμικού προκύπτει μία παραλλαγή της ολοκληρωτικής εξίσωσης του ηλεκτρικού πεδίου, η ολοκληρωτική εξίσωση μικτών δυναμικών (MPIE). Η εξίσωση που προκύπτει συνδυάζεται με μια διαδικασία διακριτοποίησης, όπως τη μέθοδο των ροπών (MOM), όπου μετατρέπεται η ολοκληρωτική εξίσωση σε διακριτό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά τα άγνωστα μεγέθη. Όμως, η επιλογή της διατύπωσης των ολοκληρωτικών εξισώσεων μικτών δυναμικών οδηγεί σε ιδιάζοντα ολοκληρώματα, λόγω της ύπαρξης των συναρτήσεων Green που επιβάλλουν την αλληλεπίδραση μεταξύ όλων των αγνώστων ή των βαθμών ελευθερίας οδηγώντας σε πυκνούς πίνακες και κατά συνέπεια σε ισχυρά υπολογιστικά προβλήματα. Η αναλυτική μελέτη της διακριτοποίησης των ολοκληρωτικών εξισώσεων ηλεκτρικού πεδίου και η αναζήτηση διανυσματικών συναρτήσεων βάσης, για την προσέγγιση της ρευματικής κατανομής πάνω σε μία αγώγιμη επιφάνεια, είναι πολύ σημαντικές, καθώς επηρεάζουν σε πολύ μεγάλο βαθμό την ακρίβεια της αριθμητικής επλύσης των ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Η εναλλακτική οδός αντιμετώπισης ενός ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος, είναι με μία μέθοδος διαφορικών εξισώσεων, η οποία χρησιμοποιείται για την ανάλυση τυχαίων γεωμετριών (εδώ δε χρειάζεται να υπολογιστεί η συνάρτηση Green για τη συγκεκριμένη γεωμετρία του προβλήματος μαζί με τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των υλικών) καθώς και υλικών που παρουσιάζουν ανομοιογένειες. Τα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη υπολογίζονται και αποθηκεύονται στον τρισδιάστατο χώρο, ενώ λόγω της περιορισμένης μνήμης του υπολογιστή μας πρέπει ο αντίστοιχος υπολογιστικός χώρος να τερματιστεί. Αυτός ο περιορισμός καθιστά τις μεθόδους διαφορικών εξισώσεων κατάλληλες για κλειστά προβλήματα, ενώ σε ανοιχτά προβλήματα σκέδασης πρέπει να επιβάλλουμε κάποια απορροφητική οριακή συνθήκη ή κάποια αντίστοιχη συνθήκη ακτινοβολίας. Η διαφορική εξίσωση περιγράφει τοπικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ γειτονικών πεδιακών δειγμάτων, το οποίο οδηγεί συνήθως σε αραιούς πίνακες που είναι πιο εύκολο να αντιμετωπιστούν σε σχέση με τους πυκνούς πίνακες της μεθόδου των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Το μειονέκτημα αυτών των μεθόδων σε σχέση με τις ολοκληρωτικές, είναι ότι έχουν σημαντικά μεγαλύτερο αριθμό αγνώστων, καθώς η εφαρμογή του θεωρήματος Green στις ολοκληρωτικές μεθόδους επιτρέπει τη διατύπωση των πεδιακών μεγεθών με τη βοήθεια ολοκληρωτικών εκφράσεων που περιέχουν τις επιφανειακές ρευματικές κατανομές των σκεδαστών ελαττώνοντας έτσι τη μαθηματική διάσταση των προβλημάτων από τις τρεις σε δύο.

Τέλος, να πούμε ότι οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις, στις οποίες μας οδηγεί η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων, είναι δυσκολότερο να αντιμετωπιστούν, αλλά γίνονται πολύ πρακτικές όταν οι συναρτήσεις Green των αντίστοιχων γεωμετριών μπορούν να υπολογιστούν σε κλειστή μορφή ή μέσω ταχύτατων αλγορίθμων. Για τους παραπάνω λόγους έχει πολύ ενδιαφέρον στο κεφάλαιο 3 η σύνδεση της μεθόδου των ροπών, που είναι μία μέθοδος ολοκληρωτικών εξισώσεων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων που είναι μία μέθοδος διαφορικών εξισώσεων. Απομονώνοντας, δηλαδή, κατα τμήματα την αριθμητική μας επίλυση, μπορούμε να πάρουμε τα θετικά σημεία από κάθε μέθοδο και να μειώσουμε έτσι το υπολογιστικό κόστος.

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας

2.1 Εξισώσεις Maxwell και Οριακές Συνθήκες

Κάθε πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικού πεδίου περιγράφεται από τις εξισώσεις του Maxwell. Σε χρονομεταβλητή μορφή και με εισαγωγή των μαγνητικών ρευμάτων και φορτίων, ένα ηλεκτρομαγνητικό πέδιο, το οποίο οδεύει μέσα σε ένα ομογενές μέσο περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$\nabla\times\mathbf{E}=\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{M} \text{ Νόμος Faraday} \tag{1}$$

$$\nabla\times\ \mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J} \text{ Νόμος Ampere} \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=q_e \text{ Νόμος Gauss για ηλεκτρικό} \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=q_m \text{ Νόμος Gauss για μαγνητικό} \tag{4}$$

Οι παραπάνω ποσότητες ορίζονται ως εξής:
- **E** : ένταση ηλεκτρικού πεδίου (V/m),
- **H** : ένταση μαγνητικού πεδίου (A/m),
- **D**: πυκνότητα ηλεκτρικής ροής (Cb/m^2),
- **B** : πυκνότητα μαγνητικής ροής (Wb/m^2),
- **J** : πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος (A/m^2),
- **M** : πυκνότητα μαγνητικού ρεύματος (V/m^2),
- q_e : χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου (Cb/m^3),
- q_m: χωρική πυκνότητα μαγνητικού φορτίου (Wb/m^3).

Από τις παραπάνω εξισώσεις εξάγονται οι εξισώσεις συνέχειας

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial q_e}{\partial t}=0 \tag{5}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{M}+\frac{\partial q_m}{\partial t}=0 \tag{6}$$

και παράλληλα ισχύουν οι καταστατικές εξισώσεις (για τη μακροσκοπική εφαρμογή των εξισώσεων Maxwell)

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E} \tag{7}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{8}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{cond} + \mathbf{J}_{conv} + \mathbf{J}_0 = \sigma\mathbf{E} + q_e\mathbf{v} + \mathbf{J}_0 \tag{9}$$

όπου ε,μ η διηλεκτρική σταθερά και η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου αντίστοιχα.

Τα μαγνητικά ρεύματα και φορτία δεν αντιπροσωπεύουν πραγματικό φυσικό μέγεθος και εισάγονται χάριν συμμετρίας και επειδή είναι πολύ χρήσιμα στους λογιστικούς υπολογισμούς και κυρίως στη διατύπωση θεωρημάτων ισοδυναμίας.

Εισάγωντας αρμονική μεταβολή ως προς τον χρόνο (της μορφής $e^{j\omega t}$) και τη χρήση μιγαδικών μεγεθών, οι εξισώσεις (1) με (9), διαμορφώνονται ως εξής:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} - \mathbf{M} \tag{10}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\mathbf{D} + \mathbf{J} \tag{11}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_e \tag{12}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = q_m \tag{13}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + j\omega q_e = 0 \tag{14}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + j\omega q_m = 0 \tag{15}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \tag{16}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{17}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{cond} + \mathbf{J}_{conv} + \mathbf{J}_0 = \sigma\mathbf{E} + q_e\mathbf{v} + \mathbf{J}_0 \tag{18}$$

Αυτές οι εξισώσεις μαζί με τη συνθήκη Sommerfeld-Mueller για την επιφάνεια άπειρης σφαίρας, μπορούν να περιγράψουν οποιοδήποτε πρόβλημα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στον άπειρο χώρο και με εν γένει ομοιόμορφες χωρικές κατανομές πηγών.

2.2 Κυματική Εξίσωση και Συναρτήσεις Δυναμικού

Παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτες εξισώσεις του Maxwell είναι ένα ζευγάρι συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων, το οποίο αποσυμπλέκεται, με κόστος την αύξηση των τάξεων των διαφορικών εξισώσεων και έχουμε δύο διαφορικές εξισώσεις για την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου..

Σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιούνται αντί του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, κατάλληλες βοηθητικές συναρτήσεις δυναμικού, οι οποίες συσχετίζονται απευθείας με τις αντίστοιχες πηγές (φορτία και ρεύματα). Συνεπώς, τα πεδιακά μεγέθη εκφράζονται με τη βοήθεια συναρτήσεων μικτών δυναμικών, σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi - \frac{1}{\varepsilon}\nabla \times F \tag{19}$$

$$\mathbf{H} = -j\omega\mathbf{F} - \nabla\Psi + \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A} \tag{20}$$

Όταν έχουμε μόνο ηλεκριχές ή μόνο μαγνητικές πηγές, οι παραπάνω απλοποιούνται ως εξής:

$$\mathbf{E}[\mathbf{J}, 0] = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi \tag{21}$$

$$\mathbf{H}[0, \mathbf{M}] = -j\omega\mathbf{F} - \nabla\Psi \tag{22}$$

Τα δύο αυτά πεδιακά μεγέθη τα εκφράζουμε με τη βοήθεια συναρτήσεων μικτών δυναμικών $\mathbf{A}$, Φ, $\mathbf{F}$, Ψ. Το μαγνητικό δυναμικό $\mathbf{A}$ και το ηλεκτρικό βαθμωτό δυναμικό Φ ικανοποιούν τις κυματικές εξισώσεις (Helmholtz)

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \tag{23}$$

$$\nabla^2\Phi + k^2\Phi = -\frac{q_e}{\varepsilon} \tag{24}$$

και τη ρυθμιστική συνθήκη (gauge), γνωστή ως συνθήκη Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\Phi = 0. \tag{25}$$

Να σημειώσουμε ότι η επιλογή της ρυθμιστικής συνθήκης γίνεται αυθαίρετα και δεν είναι μοναδική. Αντίστοιχα το ηλεκτρικό διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{F}$, και το μαγνητικό βαθμωτό δυναμικό Ψ ικανοποιούν τις κυματικές εξισώσεις

$$\nabla^2\mathbf{F}, +k^2\mathbf{F}, = -\varepsilon\mathbf{M}\ , \tag{26}$$

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = -\frac{q_m}{\mu} \tag{27}$$

και τη ρυθμιστική συνθήκη (gauge) ή συνθήκη Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{F} + j\omega\varepsilon\mu\Psi = 0. \tag{28}$$

2.3 Δυαδικές Συναρτήσεις Green σε ομογενή χώρο

ΟιΟι συναρτήσεις Green μπορούν να θεωρηθούν ως η μαθηματική περιγραφή της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης από απόσταση μεταξύ μακροσκοπικών ρευματικών κατανομών και φορτίων και παριστάνουν την απόκριση του συστήματος σε μοναδιαία διέγερση. Επίσης, οι εκφράσεις των πεδιακών μεγεθών και των δυναμικών προκύπτουν ως υπερθετικά ολοκληρώματα των πηγών πολλαπλασιασμένες με τις αντίστοιχες συναρτήσεις Green.

2.3.1 Συναρτήσεις Green Δυναμικών

Σε έναν ομογενή χώρο οι συναρτήσεις Green των δυναμικών δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\mathrm{A}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{\mu}{4\pi} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\underline{\underline{\mathbf{I}}}$$

$$G^{\Phi}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')$$

και

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\mathrm{F}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{\varepsilon}{4\pi} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\underline{\underline{\mathbf{I}}}$$

$$G^{\Psi}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\mu} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')$$

όπου

$$g(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{e^{-jkR}}{R}. \tag{29}$$

Τέλος, η απόσταση μεταξύ των σημείων του πεδίου ή σημείων παρατήρησης ($\mathbf{r}$) και των σημείων της πηγής ($\mathbf{r}$') ισοδυναμεί με

$$\mathrm{R}{=}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

οι δυαδικές συναρτήσεις συμβολίζονται με $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ και η μοναδιαία δυάδα $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ αντιστοιχεί στον πίνακα μονάδα τάξης (3 x 3)

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

2.4 Τα Πεδιακά Μεγέθη και οι Ολοκληρωτικές τους Εκφράσεις

Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδιακά μεγέθη και οι βοηθητικές συναρτήσεις των δυναμικών μπορούν να θεωρηθούν υπέρθεση τιμών που οφείλονται σε στοιχειώδεις πηγές (ρεύματα και φορτία). Γι' αυτό, το μαγνητικό διανυσματικό και το ηλεκτρικό βαθμωτό δυναμικό, μπορούν να υπολογιστούν σε οποιοδήποτε σημείο r του ομογενούς χώρου, από τις παρακάτω σχέσεις

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\mathrm{A}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')dD \tag{31}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_D G^{\Phi}(\mathbf{r},\mathbf{r}')q_e(\mathbf{r}')dD \tag{32}$$

όπου D είναι η περιοχή στην οποία ορίζονται οι πηγές $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ και $q_e(\mathbf{r}')$.

Αντίστοιχα, το ηλεκτρικό διανυσματικό δυναμικό και το μαγνητικό βαθμωτό δυναμικό υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\mathrm{F}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{M}(\mathbf{r}')dD \tag{33}$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int_D G^{\Psi}(\mathbf{r},\mathbf{r}')q_m(\mathbf{r}')dD. \tag{34}$$

Τα πεδιακά μεγέθη μπορούν να εκφραστούν ως υπερθετικά ολοκληρώματα των ρευματικών πηγών και των αντίστοιχων δυαδικών συναρτήσεων Green ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{EJ}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')dD + \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{EM}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{M}(\mathbf{r}')dD \tag{35}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\mathrm{HJ}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')dD + \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{HM}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{M}(\mathbf{r}')dD. \tag{36}$$

Τέλος, το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο μπορούν να εκφραστούν ως υπέρθεση κατάλληλων πηγών και των συναρτήσεων Green των δυναμικών:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\mathrm{A}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')dD - \nabla \int_D G^{\Phi}(\mathbf{r},\mathbf{r}')q_e(\mathbf{r}')dD \\ -\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\int \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\mathrm{F}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{M}(\mathbf{r}')dD\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -j\omega \int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\mathrm{F}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{M}(\mathbf{r}')dD - \nabla \int_D G^{\Psi}(\mathbf{r},\mathbf{r}')q_m(\mathbf{r}')dD \\ +\frac{1}{\mu}\nabla\times\int_D \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\mathrm{A}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')dD.\end{aligned} \tag{38}$$

2.5 Ολοκληρωτικές Εκφράσεις Επιφάνειας

Τα προβλήματα σκέδασης ξεκινάμε να τα επιλύσουμε με τη βοήθεια των ολοκληρωτικών εξισώσεων και το διαχωρισμό των πεδίων σε προσπίπτοντα και σκεδαζόμενα. Σύμφωνα με το θεώρημα σκέδασης το συνολικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αποτελείται από το προσπίπτον και το σκεδαζόμενο

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) \tag{39}$$

$$\mathbf{H(r)}\mathbf{=}\mathbf{H}^{inc}\mathbf{(r)}\mathbf{+}\mathbf{H}^{sca}\mathbf{(r)}. \tag{40}$$

Τα προσπίπτοντα αντιστοιχούν στις πραγματικές φυσικές διεγέρσεις του προβλήματος, ενώ τα σκεδαζόμενα στις ισοδύναμες επαγόμενες πηγές και δίνονται από τις εξισώσεις (35)-(38).

Αρχικά, θεωρούμε επίπεδη αγώγιμη επιφάνεια απειροστού πάχους και πεπερασμένων διαστάσεων, επειδή $\mathbf{\hat{n}xE} = 0$ έχουμε $\mathbf{\hat{n}xE^s} = -\mathbf{\hat{n}xE^i}$,όπου $\mathbf{E}^i$ είναι γνωστό και ψάχνουμε μόνο το σκεδαζόμενο. Η συγκεκριμένη οριακή συνθήκη σε συνδυασμό με τις (35), (36), (39), (40) οδηγεί στη διατύπωση της ολοκληρωτικής εξίσωσης ηλεκτρικού πεδίου (EFIE)

$$\int_{D_E} \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\mathrm{EJ}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')dD = -\mathbf{\hat{z}xE^{inc}}(\mathbf{r}). \tag{41}$$

Αν αντί των (35), (36) χρησιμοποιήσουμε τις (37), (38) καταλήγουμε στη διατύπωση των ολοκληρωτικών εξισώσεων μικτών δυναμικών (MPIE). Η διατύπωση με μοναδικό άγνωστο την ηλεκτρική ρευματική κατανομή είναι η παρακάτω

$$-j\omega \int_{D_E} \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\mathrm{A}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')dD + \frac{1}{j\omega}\nabla \int_{D_E} G^{\Phi}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla'\cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')dD = -\mathbf{\hat{z}xE^{inc}}(\mathbf{r}) \tag{42}$$

Η επιλογή της επίλυσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης του ηλεκτρικού πεδίου είναι μονόδρομος για την περίπτωση επίπεδα αγώγιμων σκεδαστών, καθώς η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση μαγνητικού πεδίου (MFIE), μπορεί να διατυπωθεί μόνο στην περίπτωση αγώγιμων επιφανειών που περικλείουν κάποιον όγκο.

Κεφάλαιο 3

Μέθοδος Των Ροπών

3.1 Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός

Πριν από την εξέλιξη του ηλεκτρονικού υπολογιστή, η ανάλυση και ο σχεδιασμός των ηλεκτρομαγνητικών δομών γινόταν, κυρίως, πειραματικά. Από τη στιγμή που αναπτύχθηκαν οι γλώσσες προγραμματισμού και έπειτα, ξεκίνησε μία προσπάθεια προσεγγιστικού υπολογισμού των αναλυτικών λύσεων των ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων. Αυτό οδήγησε στη ραγδαία ανάπτυξη ενός πεδίου, που λέγεται υπολογιστικός ηλεκτρομαγνητισμός. Τα τελευταία 50 χρόνια, έχουν σχεδιαστεί πολλοί αλγόριθμοι και ισχυρές τεχνικές αριθμητικής ανάλυσης αναπτύχθηκαν σε αυτήν την περιοχή. Με την εξέλιξη των υπολογιστών, βελτιώνονται αυτοί οι αλγόριθμοι και αυξάνεται η πολυπλοκότητα και το μέγεθος των προβλημάτων που μπορούμε να λύσουμε.

Παρόλο που τα πειραματικά δεδομένα είναι ανεκτίμητα, ο στόχος της επιστήμης σήμερα είναι να κατασκευάσει αξιόπιστους αλγόριθμους, οι οποίοι προσομοιώνουν τη συμπεριφορά των συσκευών και των συστημάτων πριν κατασκευαστούν. Αυτό επιτρέπει στον μηχανικό τη βελτιστοποίηση του συστήματος και την αποφυγή λαθών, τα οποία πειραματικά θα ήταν αδύνατο να αποφευχθούν.

Τα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη υπολογίζονται και αποθηκεύονται στον τρισδιάστατο χώρο και ο αντίστοιχος υπολογιστικός χώρος θα πρέπει να τερματιστεί λόγω περιορισμένης δυνατότητας αποθήκευσης στη μνήμη του υπολογιστή. Γι' αυτόν τον λόγο όταν δεν έχουμε κλειστά προβλήματα πρέπει να επιβληθεί μία συνθήκη ακτινοβολίας ή αντίστοιχες απορροφητικές οριακές συνθήκες.

Στην περίπτωση των ολοκληρωτικών εξισώσεων πρέπει να υπολογιστεί η συνάρτηση Green για τη συγκεκριμένη γεωμετρία του προβλήματος, μαζί με τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των υλικών και να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή.

3.2 Αριθμητική Επίλυση

Η βασική ιδέα, για την αριθμητική επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων με τη μέθοδο των ροπών, είναι η μετατροπή της συνεχούς εξίσωσης σε ένα διακριτό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων.

Έστω λοιπόν το παρακάτω πρόβλημα

$$\mathbf{L}(\mathrm{f}) = \mathrm{g} \tag{43}$$

όπου $\mathbf{L}$ τελεστής με πεδίο ορισμού $\mathbf{D(L)}$, χώρο Hilbert απείρων διαστάσεων που προσδιορίζεται από τον τελεστή $\mathbf{L}$ και τις οριακές συνθήκες του προβλήματος, $\mathbf{R(L)}$ το πεδίων τιμών να είναι ένα μη γνήσιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού και ο χώρος Hilbert D είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $<$p,q$>$.

Εάν $\mathrm{f_n, n = 1, ...}$ είναι μία πλήρης ορθοκανονική βάση του $\mathbf{D(L)}$, η λύση της (43) γράφεται αναλυτικά ως

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \neq 0. \tag{44}$$

Θεωρούμε γραμμικό υπόχωρο $\mathbf{F_N}$ του $\mathbf{D}$ με διάσταση $\mathbf{N}$ και μία ορθοκανονική βάση του $\mathrm{f_n, n = \mathbf{1}, ...,N}$ από συναρτήσεις που είναι στοιχεία του πλήρους συνόλου της ορθοκανονικής βάσης του άπειρου χώρου $\mathbf{D(L)}$. Μία συνάρτηση $\mathrm{f_A} \in \mathbf{F_N}$μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση

$$f_A \approx \sum_{n=1}^{N} a_n f_n, \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \neq 0. \tag{45}$$

Θεωρούμε επίσης $\mathbf{W_n}$ γραμμικό υπόχωρο του $\mathbf{D}$ με διάσταση N και βάση του την $\mathbf{w_n}$, n=1,...,N, όπου $\mathrm{w_n}$ είναι ορθοκανονικές συναρτήσεις και στοιχεία ενός πλήρους συνόλου. Μία τυχαία συνάρτηση $\mathbf{p} \in \mathbf{D}$ μπορεί να εκφραστεί, σύμφωνα με το θεώρημα προβολής, ως

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}_{W_N}\{p\} + \mathrm{h}, < \mathrm{h}, \mathrm{w_n} >= 0, \forall \mathrm{w_n} \in \mathbf{W_n} \tag{46}$$

όπου $\mathbf{P_{W_N}}\{p\}$η προβολή της συνάρτησης p στον χώρο $\mathbf{W}_N$ και h η ελάχιστη απόσταση της συνάρτησης p από τον ίδιο χώρο. Η μέθοδος των ροπών προσεγγίζει την ακριβή λύση της εξίσωσης (44) του προβλήματος της εξίσωσης (43) με μία συνάρτηση της μορφής της εξίσωσης (45), ώστε οι προβολές των συναρτήσεων q = L(f) και $L(f_A)$πάνω στον υπόχωρο $\mathbf{W}_N$ να είναι ίσες:

$$\mathbf{P}_{W_N}\{L(f)\} - \mathbf{P}_{W_N}\{L(f_A)\} = 0 \tag{47}$$

ή ισοδύναμα, το σφάλμα (ή αλλιώς υπόλοιπο) από την εφαρμογή της (46)

$$R = L(f) - L(f_A) = h - h_A \tag{48}$$

να ελαχιστοποιείται. Το σφάλμα της προσέγγισης είναι δεύτερης τάξης, καθώς αυτό είναι ορθογώνιο προς την προβολή πάνω στον χώρο $\mathbf{W_N}$.

Η ισότητα των προβολών και ελαχιστοποίησης του σφάλματος γίνεται με την επιβολή μηδενισμού, κατά μέση έννοια, στα σταθμισμένα υπόλοιπα:

$$< w_m, R >= 0, m = 1, 2, ..., N \tag{49}$$

ή ισοδύναμα

$$< w_m, q >=< w_m, L(f_A) >, m = 1, 2, ..., N \tag{50}$$

που επιβάλλει την ισότητα των προβολών της ακριβούς και προσεγγιστικής συνάρτησης πάνω στις συνιστώσες της ορθοκανονικής βάσης του υποχώρου $\mathbf{W}_N$.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (45) στην (50) οδηγούμαστε στη δημιουργία ενός αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων της μορφής

$$[\mathbf{l_{mn}}]\{\mathbf{a_n}\} = \{\mathbf{q_m}\}, \tag{51}$$

όπου

$$[\mathbf{l_{mn}}] = \begin{bmatrix} < w_1, L(f_1) > & < w_1, L(f_2) > & . \;\; . \;\; . & < w_1, L(f_N) > \\ < w_2, L(f_1) > & < w_2, L(f_2) > & . \;\; . \;\; . & < w_2, L(f_1) > \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ < w_N, L(f_1) > & < w_N, L(f_2) > & . \;\; . \;\; . & < w_N, L(f_N) > \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$\{\mathbf{q}_m\} = \begin{bmatrix} < w_1, q > \\ < w_2, q > \\ . \\ . \\ . \\ < w_N, q > \end{bmatrix} \tag{53}$$

και ο πίνακας-στήλη

$$\{\mathbf{a_n}\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_N \end{bmatrix} \tag{54}$$

περιέχει τους άγνωστους συντελεστές του αναπτύγματος της εξίσωσης (51) της προσεγγιστικής λύσης. Η λύση του συστήματος των εξισώσεων (51) θα μας δώσει την προσεγγιστική λύση της εξ. (43) με τη μορφή

$$f \approx (\mathbf{f_n})[\mathbf{l_{mn}}]^{-\mathbf{1}}\{\mathbf{q_m}\} \tag{55}$$

όπου $(\mathbf{f}_n) = [f_1, ..., f_N]$ ο αντίστοιχος πίνακας-γραμμή. Το πρόβλημα που υπάρχει στην εφαρμογή της μεθόδου των ροπών είναι η επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων βάσης και βάρους $\mathbf{w}_m$, καθώς και η επιλογή της διάστασης $\mathbf{N}$ των υποχώρων. Εμείς θα εξετάσσουμε τη μέθοδο Galerkin, στην οποία οι συναρτήσεις βάσης και βάρους, ή ισοδύναμα, οι χώροι $\mathbf{W}_N$ και $\mathbf{F}_N$ ταυτίζονται. Αυτό συνεπάγεται αμφιμονοσήμαντα ότι ο τελεστής $\mathbf{L(f)}$ είναι αυτοπροσαρτήμενος $(< \mathbf{w_m}, \mathbf{L}(\mathbf{f_n}) >=< \mathbf{L}(\mathbf{w_n}), \mathbf{f_n} >)$.

3.3 Συναρτήσεις Βάσης και Βάρους

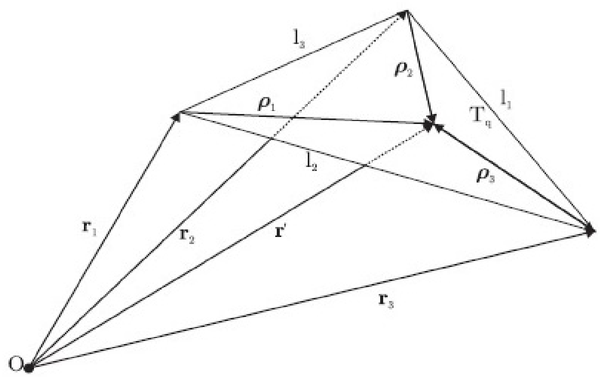
Η ακρίβεια που θα έχουμε στην αριθμητική επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων εξαρτάται σημαντικά από τις διανυσματικές συναρτήσεις βάσης που θα επιλέξουμε για την προσέγγιση της ρευματικής κατανομής πάνω σε μία αγώγιμη επιφάνεια.

3.3.1 Διανυσματικές Συναρτήσεις RWG

Οι πιο γνωστές συναρτήσεις βάσης για την αριθμητική επίλυση των EFIE σε τριγωνικά πλέγματα, είναι οι διανυσματικές συναρτήσεις των Rao-Wilton-Glisson (RWG).

Αντιστοιχώντας κάθε διανυσματική συνάρτηση βάσης RWG σε μία εσωτερική ακμή του πλέγματός μας, δηλαδή χωρίς τις συνοριακές ακμές, έχουμε συναρτήσεις που ισούνται με το μηδέν εκτός των τριγώνων που μοιράζονται την κοινή ακμή.

Στο παρακάτω σχήμα, παρατηρούμε δύο τρίγωνα του πλέγματός μας με μία κοινή ακμή (n) και πρόσημο που καθορίζεται από την υιοθέτηση μιας κατεύθυνσης αναφοράς για την κατανομή του ρεύματος στη νιοστή ακμή (εδώ θεωρούμε κατεύθυνση από το στοιχείο $\mathbf{T}_n^+$ προς το στοιχείο $\mathbf{T}_n^-$).



Σχήμα 3.1: Τοπικές συντεταγμένες και ακμές για τυχαίο τριγωνικό στοιχείο

Παρακάτω παραθέτουμε τη μαθηματική έκφραση της συνάρτησης βάσης για την νιοστή ακμή

$$\mathbf{f}_{\mathrm{n}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{2A_n^+}\rho_n^+, \ \mathbf{r} \in T_n^+ \\ \frac{l_n}{2A_n^-}\rho_n^-, \ \mathbf{r} \in T_n^- \\ 0, \ \mathbf{r} \notin T_n^\pm \end{cases} \tag{56}$$

όπου l_n το μήκος της ακμής και $A_n^\pm$ το εμβαδό του τριγωνικού στοιχείου $T_n^\pm$. Η συνάρτηση βάσης $\mathbf{f_n}(\mathbf{r})$ αποτελεί τμηματική προσέγγιση της επιφανειακής ρευματικής κατανομής με ιδιότητες που την καθιστούν ιδανική για την επίλυση προβλημάτων σκέδασης με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Αυτές οι ιδιότητες είναι οι παρακάτω

1. Το ρεύμα, εκτός από την συνιστώσα της κοινής ακμής που σχηματίζεται από το ζεύγος τριγώνων T_n^+ και T_n^-, δεν έχει συνιστώσα κάθετη στο σύνορο. Αυτό μας εξασφαλίζει την απουσία γραμμικών φορτίων κατά μήκος του συνόρου.

2. Η κάθετη νιοστή ακμή συνιστώσα του ρεύματος είναι συνεχής κατά μήκος της ακμής, καθώς ταυτίζεται κατα μήκος της συγκεκριμένης ακμής με το ύψος του τριγώνου. Εξασφαλίζεται έτσι η απουσία γραμμικών φορτίων για όλες τις ακμές των τριγωνικών στοιχείων.

3. Η πυκνότητα του φορτίου είναι σταθερή σε κάθε τριγωνικό στοιχείο, το συνολικό φορτίο σε κάθε ζευγάρι τριγώνων είναι μηδέν και η βαθμωτή συνάρτηση βάσης για το φορτίο έχει τη μορφή δύο παλμών, αφού η επιφανειακή απόκλιση είναι ανάλογη με την επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου (σύμφωνα με την εξίσωση συνέχειας)

$$\nabla_s \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{n}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} +\frac{l_n}{A_n^+}, \ \mathbf{r} \in T_n^+ \\ -\frac{l_n}{2A}, \ \mathbf{r} \in T_n^- \\ 0, \ \mathbf{r} \notin T_n^\pm \end{cases} \tag{57}$$

Το διανυσματικό άθροισμα των επιφανειακών ρευμάτων στις δύο πλευρές του σκεδαστή, το ρεύμα στην επιφάνεια δηλαδή, προσεγγίζεται από την παρακάτω σχέση

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N} I_N \mathbf{f}_{\mathrm{n}}(\mathbf{r}) \tag{58}$$

όπου N ο αριθμός των εσωτερικών ακμών. Ο μέγιστος αριθμός μη μηδενικών συναρτήσεων σε ένα τριγωνικό στοιχείο είναι τρεις, καθώς κάθε συνάρτηση βάσης αντιστοιχεί σε μία μη συνοριακή τιμή του πλέγματος. Το άθροισμα των κάθετων συνιστωσών του ρεύματος στις δύο πλευρές τις επιφάνειας ισούται με μηδέν, για αυτό και η συνεισφορά των συναρτήσεων βάσης των συνοριακών ακμών της επιφάνειας δεν λαμβάνεται υπόψη.

3.3.2 Σύνδεση με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διαδικασία σύνδεσης των συναρτήσεων βάσης RWG, με τις ακμές της μεθόδου των διανυσματικών πεπερασμένων στοιχείων. Αυτό συμβαίνει καθώς, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μία μέθοδος διαφορικών εξισώσεων. Εδώ, η διαφορική εξίσωση περιγράφει τοπικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ γειτονικών πεδιακών δειγμάτων, οδηγώντας στη δημιουργία αραιών πινάκων, οι οποίοι είναι πιο εύκολο να αντιμετωπιστούν.

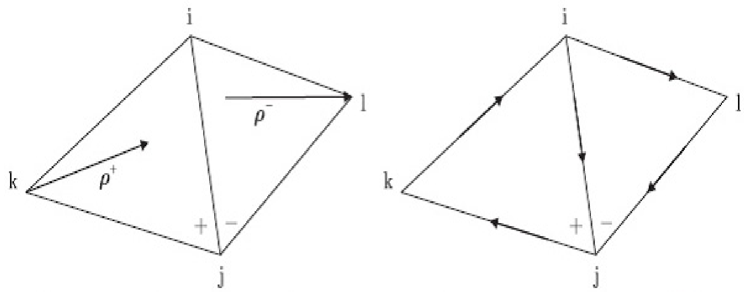
Ξαναγράφοντας την εξίσωση των συναρτήσεων RWG, για μία ακμή, με διαφορετικό συμβολισμό, έχουμε

$$\mathbf{f}_{\{i,j\}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l_{\{i,j\}}}{2A^+}\rho^+, \ \mathbf{r} \in T^+ \\ \frac{l_{\{i,j\}}}{2A^-}\rho^-, \ \mathbf{r} \in T^- \\ 0, \ \mathbf{r} \notin T_n^\pm \end{cases} \tag{59}$$

και αντίστοιχα η συνάρτηση βάσης για την ακμή {i,j} στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{W}_{\{i,j\}}(\mathbf{r}) = \zeta_i \nabla \zeta_j - \zeta_j \nabla \zeta_i \tag{60}$$

όπου ζ_i οι simplex συντεταγμένες της κορυφής i.



(α) Γεωμετρικές παράμετροι για τη συνάρτηση βάσης RWG τής ακμής $\{i, j\}$.

(β) Στοιχείο ακμών για τριγωνικά FEM.

Σχήμα 3.2: Γεωμετρία τυπικών στοιχείων για τις μεθόδους

Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις βάσης RWG και οι συναρτήσεις βάσης των ακμών συνδέονται με τη σχέση

$$\mathbf{f}_{\{i,j\}}(\mathbf{r}) = l_{\{i,j\}} \begin{cases} \hat{\mathbf{n}}^{+} \times \mathbf{W}_{\{i,j\}}(\mathbf{r}), \ \mathbf{r} \in T^{+} \\ \hat{\mathbf{n}}^{-} \times \mathbf{W}_{\{i,j\}}(\mathbf{r}), \ \mathbf{r} \in T^{-} \end{cases} \tag{61}$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}^{+}, \hat{\mathbf{n}}^{-}$τα αντίστοιχα μοναδιαία, κάθετα στα στοιχεία T^{+}, T^{-}, διανύσματα. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της συσχέτισής τους είναι ότι οι συναρτήσεις βάσης ανώτερης τάξης για υπολογισμό με τη μέθοδο των ροπών είναι πλέον διαθέσιμες από τη σχετική έρευνα που πραγματοποιήθηκε στην περιοχή των πεπερασμένων στοιχείων [Yioultsis and Tsiboukis, 1996],[Polstyanko and Lee, 1998].

3.4 Υπολογισμός στοιχείων πίνακα σύνθετης αντίστασης [Z]

Είναι πολύ σημαντικό στάδιο της αριθμητικής επίλυσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης του ηλεκτρικού πεδίου, ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα σύνθετης αντίστασης [Z]. Όπως και στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων έχουμε μια διαδικασία συνάθροισης (assembly) όπου ο πίνακας σύνθετης αντίστασης γράφεται ως άθροισμα των επιμέρους πινάκων για κάθε ζεύγος τριγωνικών στοιχείων του πλέγματος διακριτοποίησης.

$$[\mathbf{Z}] = \sum_{\mathrm{m}} \sum_{\mathrm{n}} [\mathbf{Z}^{(\mathbf{mn})}] \tag{62}$$

όπου

$$[\mathbf{Z}^{(\mathbf{mn})}] = \int_{S_m} \mathbf{J}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}) \mathbf{E}[\mathbf{J}_{\mathrm{n}}(\mathbf{r}')] dS \tag{63}$$

είναι ο πίνακας τάξης (3x3) που συσχετίζει την επίδραση της ρευματικής κατανομής του τριγωνικού στοιχείου T_n επιφάνειας S_n στο ηλεκτρικό πεδίο του τριγωνικού στοιχείου T_m επιφάνειας S_m, αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο παρατήρησης $\mathbf{r}$ που παράγεται από τη ρευματική κατανομή που ρέει στην επιφάνεια S_n δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{E}[\mathbf{J}_\mathrm{n}(\mathbf{r})] = -j\omega\mu \int_{S_n} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}_\mathrm{n}(\mathbf{r}')dS' + \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla \int_{S_n} \nabla' g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}_\mathrm{n}(\mathbf{r}')dS' \quad (64)$$

$$= -j\omega\mu \int_{S_n} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}_\mathrm{n}(\mathbf{r}')dS' - \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla \int_{S_n} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla' \cdot \mathbf{J}_\mathrm{n}(\mathbf{r}')dS$$

Άρα, ο στοιχειακός πίνακας προκύπτει από τη διαδικασία δοκιμής, σύμφωνα με τη μέθοδο Galerkin, και έχουμε

$$[\mathbf{Z}^{(mn)}] = -j\omega\mu \int_{S_m} \mathbf{J}_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \int_{S_n} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}_\mathrm{n}(\mathbf{r}')dS'dS \quad (65)$$

$$-\frac{1}{j\omega\varepsilon} \int_{S_m} \nabla \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}) \int_{S_n} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla' \cdot \mathbf{J}_\mathrm{n}(\mathbf{r}')dS'dS$$

ή αναλυτικότερα

$$[\mathbf{Z}^{(mn)}] = -j\omega\mu \int_{S_m} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{r}) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{r}) \\ \mathbf{f}_3(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \int_{S_n} g(\mathbf{r},\mathbf{r}') \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1'(\mathbf{r}') & \mathbf{f}_2'(\mathbf{r}') & \mathbf{f}_3'(\mathbf{r}') \end{bmatrix} dS'dS \quad (66)$$

$$-\frac{1}{j\omega\varepsilon} \int_{S_m} \begin{bmatrix} \nabla \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{f}_2(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{f}_3(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \int_{S_n} g(\mathbf{r},\mathbf{r}') \begin{bmatrix} \nabla' \cdot \mathbf{f}_1'(\mathbf{r}') & \nabla' \cdot \mathbf{f}_2'(\mathbf{r}') & \nabla' \cdot \mathbf{f}_3'(\mathbf{r}') \end{bmatrix} dS'dS$$

Η συνάρτηση Green σε ένα πρόβλημα σκέδασης του ελεύθερου χώρου είναι αυτή του κενού χώρου.

Ο στοιχειακός πίνακας προκύπτει από το άθροισμα των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των συναρτήσεων βάσης των δύο στοιχείων (m και n) και γράφεται ως

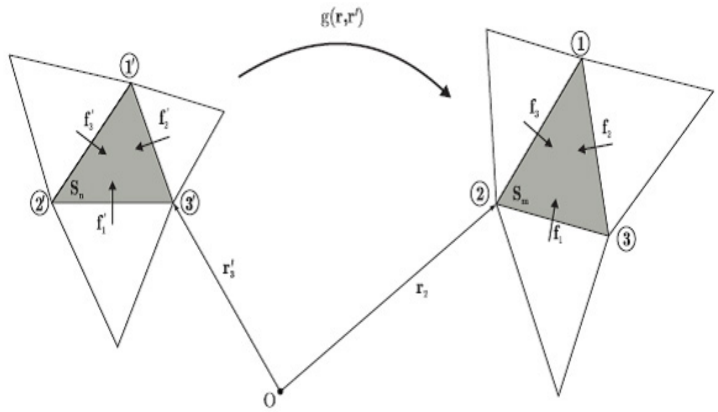
$$[Z^{(mn)}] = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} Z_{pq}^{(mn)} \quad (67)$$

όπου

$$Z_{pq}^{(mn)} = -j\omega\mu \int_{S_m} \mathbf{f}_p(\mathbf{r}) \int_{S_n} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{f}_q^{'}(\mathbf{r}')dS'dS- \quad (68)$$

$$\frac{1}{j\omega\varepsilon} \int_{S_m} \nabla \cdot \mathbf{f}_p(\mathbf{r}) \int_{S_n} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla' \cdot \mathbf{f}_q^{'}(\mathbf{r}')dS'dS.$$

Το παρακάτω σχήμα μας δίνει εικόνα αυτής της συνάθροισης



Σχήμα 3.3: Υπολογισμός του στοιχειακού πίνακα $[\mathbf{Z}^{(\mathrm{m,n})}]$. Οι συναρτήσεις βάσης των στοιχείων m και n συμπλέκονται μέσω της συνάρτησης **Green**.

και οι συναρτήσεις βάσεις στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων simplex γράφονται ως

$$\mathbf{f}_p = \frac{l_p}{2A}[\zeta_{p2}\mathbf{l}_{p1} - \zeta_{p1}\mathbf{l}_{p2}] \tag{69}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_p = \frac{2l_p}{2A} \tag{70}$$

όπου $p_1 = [(p-1)+1] \; mod \; 3+1, \; p_2 = [(p-1)+2] \; mod \; 3+1, \; \mathbf{l}_{\mathrm{p}} = \mathbf{r}_{p1} - \mathbf{r}_{p2}$ και A το εμβαδό του αντίστοιχου τριγωνικού στοιχείου. Η μη ύπαρξη αναλυτικής λύσης για τον υπολογισμό των τετραδιάστατων ολοκληρωμάτων της εξίσωσης (68) αλλά και η παρουσία της συνάρτησης απόστασης στον παρανομαστή της ολοκληρωτέας ποσότητας, λόγω της συνάρτησης Green, καθιστούν απαραίτητη την υλοποίηση αλγορίθμου για την ακριβή αριθμητική ολοκλήρωση. Ειδικά ο υπολογισμός του αυτο-όρου, δηλαδή της περίπτωσης όπου τα τρίγωνα m και n ταυτίζονται, δεν μπορεί να γίνει με κάποιο κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης, γιατί η ολοκληρωτέα ποσότητα παρουσιάζει ασθενώς ιδιάζουσα συμπεριφορά. Τα υπόλοιπα ολοκληρώματα $(m \neq n)$ υπολογίζονται ως εξής:

$$Z_{pq}^{(mn)} = (l_p \cdot l_q) \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} w_i w_{j'}^{'} g(\mathbf{r}(i), \mathbf{r}'^{(j')}) \{ -j\omega\mu[\zeta_{p2}^{(i)}(\zeta_{q2}^{(j')} L_{p1,q1} \tag{71}$$

$$-\zeta_{q1}^{(j')} L_{p1,q2}) - \zeta_{p1}^{(i)}(\zeta_{q2}^{(j')} L_{p2,q1} - \zeta_{q1}^{(j')} L_{p2,q2})] - \frac{4}{j\omega\varepsilon}\}$$

όπου $(\zeta_1^{(i)}, \zeta_2^{(i)}, \zeta_3^{(i)}; w_i)$, i = 1,2,...,I ο κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης για το εξωτερικό στοιχείο ή στοιχείο παρακολούθησης (observation triangle) T_m και $(\zeta_1^{(j')}, \zeta_2^{(j')}, \zeta_3^{(j')}; w'_{j'})$, j = 1,2,...,J ο κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης για το εσωτερικό στοιχείο ή στοιχείο πηγής (source triangle) T_n. Τέλος,

$$L_{p,q} = \mathbf{l}_\mathrm{p} \cdot \mathbf{l}_\mathrm{q}{}' \tag{72}$$

και

$$\mathbf{r}^{(i)} = \zeta_1^{(i)}\mathbf{r}_1 + \zeta_2^{(i)}\mathbf{r}_2 + \zeta_3^{(i)}\mathbf{r}_3 \tag{73}$$

$$\mathbf{r}'^{(j)} = \zeta_1^{(j)}\mathbf{r}_1' + \zeta_2^{(j)}\mathbf{r}_2{}' + \zeta_3^{(j)}\mathbf{r}_3'. \tag{74}$$

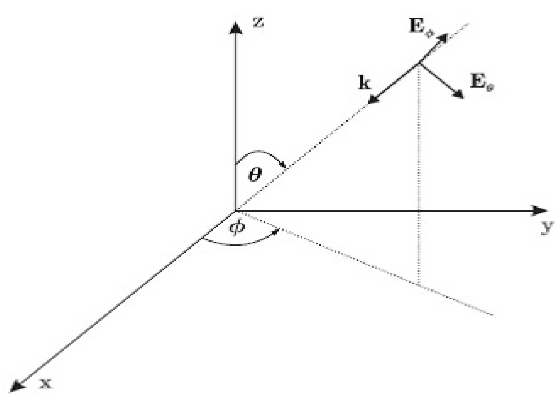
3.5 Διέγερση Σκεδαστή

Η διέγερση του σκεδαστή μας πρέπει να εκφραστεί ως πίνακας στήλη $\{\mathbf{q_n}\}$ ή $\{\mathbf{V}\}$ στο γραμμικό σύστημα (51) της μεθόδου των ροπών.

Έστω ότι έχουμε ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, το οποίο έχει ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = (E_\theta, E_\varphi)$ και μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) = (\mathrm{H}_\theta, \mathrm{H}_\varphi)$ και οδεύει μέσα σε ένα ομογενές μέσο με κατεύθυνση διάδοσης $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|)$ και η κυματική αντίσταση του μέσου είναι $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$. Τότε τα προσπίπτοντα πεδία του κύματός μας (E^{inc}, H^{inc}) θα περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = (E_\theta\hat{\theta + }E_\varphi\hat{\varphi})e^{-j\mathbf{kr}} \tag{75}$$

$$\mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) \tag{76}$$



Σχήμα 3.4: Επίπεδο κύμα που διαδίδεται σε ομογενές μέσο

Οι καρτεσιανές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου εκφρασμένες συναρτήσει των σφαιρικών του συντεταγμένων, σε έναν μεταλλικό σκεδαστή που βρίσκεται στο επίπεδο z=0 δίνονται από τους παρακάτω τύπους

$$E_x = E_\theta cos\theta cos\varphi - E_\varphi sin\varphi \tag{77}$$

$$E_y = E_\theta cos\theta sin\varphi + E_\varphi cos\varphi \tag{78}$$

$$E_z = -E_\theta sin\theta \tag{79}$$

και για τις καρτεσιανές συντεταγμένες της κατεύθυνσης διάδοσης έχουμε

$$k_x = -ksin\theta cos\varphi \tag{80}$$

$$k_y = -ksin\theta sin\varphi \tag{81}$$

$$k_z = -kcos\theta. \tag{82}$$

Τώρα πλέον έχοντας γνωστές τις εκφράσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου του επίπεδού μας κύματος, μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα διέγερσης στο γραμμικό αλγεβρικό σύστημα της μεθόδου των ροπών.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική Εφαρμογή σε 2D Μεταλλικό Σκεδαστή στον ελεύθερο χώρο

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε την αριθμητική εφαρμογή της μεθόδου των ολοκληρωτικών εξισώσεων και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του κώδικα που φτιάξαμε στο περιβάλλον του matlab με μία λύση που θεωρείται ότι παρέχει τη μεγαλύτερη ακρίβεια, σύμφωνα με την υπάρχουσα αρθρογραφία, η οποία προκύπτει από τη χρήση ειδικών συναρτήσεων βάσης ανώτερης τάξης. Ο αλγόριθμος αυτής της λύσης κατασκευάστηκε και δημοσιεύτηκε το 1998. Το πρόβλημα που θα εξετάζεται είναι η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου από δισδιάστατο μεταλλικό σκεδαστή στον ελεύθερο χώρο.

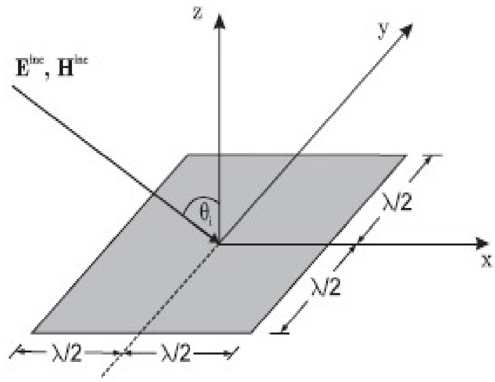
Υποθέτοντας ότι το επίπεδο κύμα μας έχει την παρακάτω μορφή:

$$E^{inc}(r) = E_0 e^{jk_0 z}\hat{x}, \tag{83}$$

$$H^{inc}(r) = -\frac{E_0}{\eta_0} e^{jk_0 z}\hat{y}, \tag{84}$$

με E_0να συμβολίζεται το πλάτος του προσπίπτοντος κύματος και $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ η χαρακτηριστική αντίσταση του ελεύθερου χώρου.

Επίσης, θεωρούμε ότι στο επίπεδο xy ενός καρτεσιανού συστήματος βρίσκεται ένας απειροστά λεπτός τετραγωνικός μεταλλικός σκεδαστής (PEC), διαστάσεων λxλ, μέσα σε ένα άπειρο ομογενές μέσο, όπως είναι ο αέρας και το κύμα μας μπορεί γενικά να προσπίπτει υπό γωνία ϑ, που σχηματίζεται από τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και τον άξονα z.



Σχήμα 4.1: Πρόσπτωση επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε έναν απειροστά λεπτό τατραγωνικό μεταλλικό σκεδαστή

4.2 Η Αναλυτική Λύση

Το επίπεδο κύμα μας προσπίπτει κάθετα στο σκεδαστή και η ακριβής υπολογιστική λύση (benchmark solution) υπολογίζεται σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις [Kolundžija, 1998] :

$$J(r) = J_x(x,y)\hat{x} + J_y(x,y)\hat{y}, \tag{85}$$

όπου

$$J_x(x,y) \approx \sum_{\substack{p=0\\(2)}}^{n-1} \left[\sum_{s=2}^{n} \alpha_{x,ps}(x_\lambda^s - 1) \right] \frac{y_\lambda^p}{\sqrt{1-y_\lambda^2}} \tag{86}$$

$$J_y(x,y) \approx \sum_{\substack{p=1\\(2)}}^{n-1} \left[\sum_{s=3}^{n} \alpha_{\upsilon,ps}(y_\lambda^s - y_\lambda) \right] \frac{x_\lambda^p}{\sqrt{1-x_\lambda^2}} \tag{87}$$

και $x_\lambda = 2x \setminus \lambda$, $y_\lambda = 2y \setminus \lambda$. Έχει αποδειχτεί ότι για τάξη προσέγγισης n=8 έχουμε τη μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα. Οι συντελεστές των αναπτυγμάτων των εξ. (86) και (87) για τις συνιστώσες x και y τις ρευματικής κατανομής και n=8, δίνονται στους παρακάτω πίνακες, αντίστοιχα

Πίνακας 4.1: Συντελεστές της συνιστώσας $J_x(x,y)$ της εξ. (86) για n=8

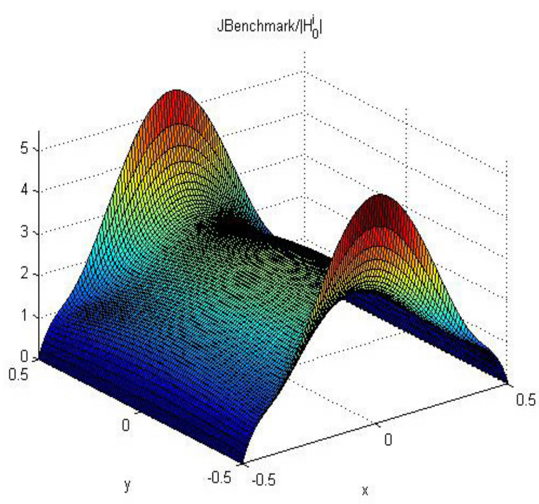
$\alpha_{x,ps} \cdot 10^3$	$s=2$	$s=4$	$s=6$	$s=8$
$p=0$	$-9.622+j10.649$	$1.149-j14.536$	$6.534+j15.652$	$-5.763-j11.140$
$p=2$	$7.492-j0.105$	$0.021+j5.201$	$-6.415-j9.338$	$5.686+j7.146$
$p=4$	$-2.398-j1.720$	$1.509-j0.547$	$-0.545+j2.875$	$-0.502-j1.075$
$p=6$	$0.265+j1.055$	$-1.003+j1.728$	$1.062-j5.947$	$-0.261+j3.714$

Πίνακας 4.2: Συντελεστές της συνιστώσας $J_y(x,y)$ της εξ.(87) για n=8

$\alpha_{y,ps} \cdot 10^3$	$s=3$	$s=5$	$s=7$
$p=1$	$0.412+j2.259$	$-0.365-j2.666$	$0.372+j1.657$
$p=3$	$0.172-j1.931$	$-1.818+j4.995$	$0.911-j3.624$
$p=5$	$-2.804+j2.101$	$6.718-j6.730$	$-3.823+j4.860$
$p=7$	$2.217-j0.859$	$-5.085+j3.261$	$2.955-j2.391$

Τέλος, σημειώνεται ότι όλες οι ποσότητες έχουν κανονικοποιηθεί ως προς το πλάτος της έντασης του μαγνητικού πεδίου του προσπίπτοντος επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος και ότι υποθέσαμε ως πλάτος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $E_0 = 1\mathrm{V/m}$.

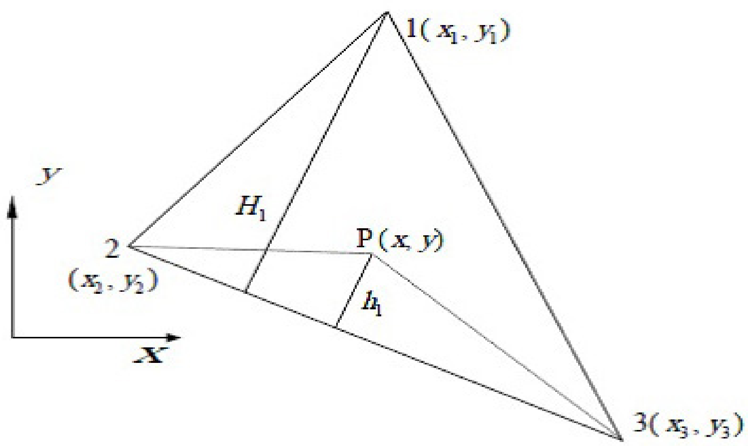
Επομένως, η ρευματική κατανομή στην επιφάνεια ενός patch διαστάσεων 1x1 m^2, στο οποίο σκεδάστηκε το παραπάνω ηλεκτρομαγνητικό κύμα πολωμένο κατά y, με μήκος κύματος λ=1, δίνεται στο παρακάτω γράφημα, όπως προκύπτει από την αναλυτική επίλυση.



Σχήμα 4.2: Πλάτος της συνιστώσας $J_x(x,y)$ της κατανομής του επιφανειακού ηλεκτρικού ρεύματος πάνω στον μεταλλικό σκεδαστή

4.3 Αριθμητική Αντιμετώπιση

Το πρώτο πράγμα που ξεκινάμε να κάνουμε, προκειμένου να αντιμετωπίσουμε αριθμητικά ένα πρόβλημα επιφανειακής ρευματικής κατανομής, είναι η διακριτοποίηση της επιφάνειάς μας σε απλά γεωμετρικά στοιχεία. Το τρίγωνο ή simplex στις δύο διαστάσεις, είναι το απλούστερο σχήμα αλλά και το καλύτερο για τη διακριτοποίηση τυχαίας επιφάνειας. Επίσης, ενώ μπορούμε να περιγράψουμε όλα τα μεγέθη ως προς τις καρτεσιανές συντεταγμένες, προτιμούμε την εισαγωγή κατάλληλων συμμετρικών, ως προς τους κόμβους του τριγώνου, συντεταγμένων, ώστε τα μεγέθη να εκφράζονται από αυτές ανεξάρτητα από τις καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων.



Σχήμα 4.3: Τριγωνικό στοιχείο και συντεταγμένες simplex

Επιλέξαμε την διακριτοποίηση της επίπεδης μεταλλικής πλάκας σε τρίγωνα, τα οποία προέκυψαν απευθείας από την εντολή initmesh του matlab (για περοσσότερη ακρίβεια μορούμε να κάνουμε refinemesh, αλλά με κάθε refinemesh έχουμε γεωμετρική αύξηση του υπολογιστικού κόστους). Αυτή η εντολή μας επιστρέφει τρεις πίνακες, οι οποίοι έχουν αριθμημένους τους κόμβους των τριγώνων και τις καρτεσιανές του συντεταγμένες [p] , τις ακμές αριθμημένες και από ποιους κόμβους αποτελούνται [e] και τα τρίγωνα αριθμημένα με τους κόμβους που τα σχηματίζουνε [t].

Ακολουθεί η διαδικασία δημιουργίας των πινάκων γεωμετρικής προεπεξεργασίας. Αρχικά, πρέπει να εντοπίσουμε ποιες ακμές είναι οι εσωτερικές, οι οποίες αποτελούν και τους αγνώστους μας και να τις ξεχωρίσουμε από τις εξωτερικές, αφού αυτές έχουν όπως είπαμε, ρεύμα μηδέν. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε τρεις πίνακες που θα μας βοηθήσουν στην αριθμητική επίλυση, αυτοί είναι :

- ο πίνακας που αντιστοιχεί σε κάθε εσωτερική ακμή τους δύο κόμβους που την αποτελούν
- ο πίνακας που αντιστοιχεί σε κάθε τρίγωνο τις τρεις ακμές του

- ο πίνακας που αντιστοιχεί σε κάθε κόμβο τις ακμές στις οποίες ανήκει.

Αφού υπολογίσουμε τα παραπάνω, είμαστε έτοιμοι για τη διαδικασία της συνάθροισης (assembly).

Υπολογίζουμε πρώτα τον πίνακα Z της μεθόδου των ροπών. Με γνωστούς τους συντελεστές των βαρών και των τριγωνικών συντεταγμένων ζ, από τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης δισδιάστατης επιφάνειας διακριτοποιημένης σε τρίγωνα του Gauss, συμπληρώνουμε τον πίνακα από τη σχέση (71), θεωρώντας αλληλεπίδραση μόνο μεταξύ τριγώνων που δεν ταυτίζονται. Ο υπολογισμός των αυτο-όρων, που προκύπτει στην περίπτωση των τριγώνων που αλληλεπιδρούν με τον εαυτό τους, δεν μπορεί να γίνει απευθείας με κάποιο κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης, καθώς η ολοκληρωτέα ποσότητα εμφανίζει ασθενώς ιδιάζουσα συμπεριφορά.

Ο ακριβής αριθμητικός υπολογισμός των τετραδιάστατων ολοκληρωμάτων για την περίπτωση του αυτο-όρου γίνεται με δύο μεθόδους. Η πρώτη είναι η μέθοδος αφαίρεσης της ιδιάζουσας συμπεριφοράς (singularity subtraction) [Wilton et al., 1984], [Caorsi et al., 1993], [Graglia, 1993], [Eibert and Hansen, 1995], [Arcioni et al., 1997] και η δεύτερη είναι η μέθοδος απαλοιφής της ιδιάζουσας συμπεριφοράς (singularity cancellation) [Telles, 1987], [Graglia, 1987], [Klees, 1993], [Rossi and Callen, 1999], [Khayat and Wilton, 2005].

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Rossi, προσθέτουμε στον πίνακα Z τις ποσότητες που υπολογίστηκαν από τους αυτο-όρους.

Ο πίνακας-στήλη της διέγερσης, υπολογίζεται στη συνέχεια, διαμορφώνοντας έτσι τις εξισώσεις μας ώστε να έχουμε την πόλωση κατά άξονα που επιθυμούμε και τη γωνία πρόσπτωσης που θέλουμε.

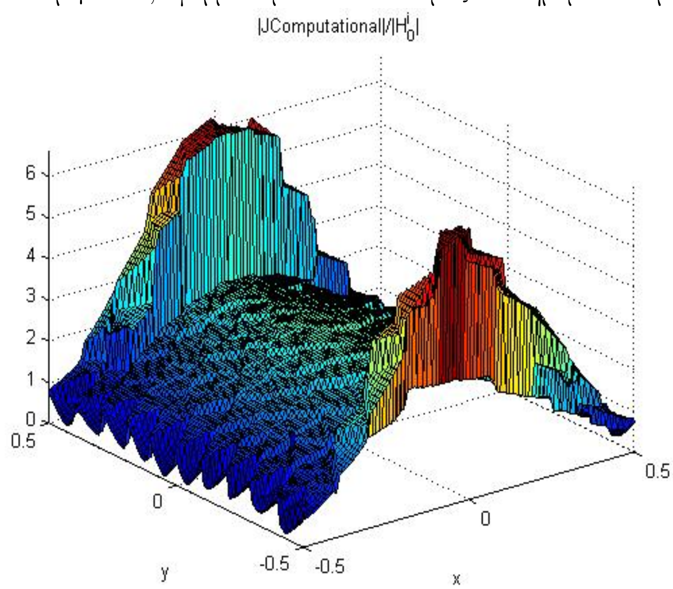
Μετά από τα παραπάνω βήματα, μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα-στήλη $\{a_n\}$ της σχέσης (51) και από τη σχέση (58) να υπολογίσουμε τις συνιστώσες της επιφανειακής ρευματικής κατανομής πάνω στην αγώγιμη πλάκα.

4.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Επιλέγοντας τις ίδιες συνθήκες που έχουμε στην ενότητα 4.2, ;ότι δηλαδή στον 1x1 m^2 τετραγωνικό μας σκεδαστή, προσπίπτει κάθετα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα πολωμένο κατά άξονα y και τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- συχνότητα $f = 3x10^8 Hz$,
- μήκος κύματος λ=1 m,
- κυματικός αριθμός $k_0 = 2pi/\lambda$,
- διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon_0 = 1/(36 * pi) * 10^{-9} A^2 \cdot s^4 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3}$,
- μαγνητική διαπερατότητα του αέρα $\mu_0 = 4 * pi * 10^{-7} kg \cdot m \cdot A^{-2} \cdot s^{-2}$,
- κυματική αντίσταση του μέσου $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ Ohm,
- κυκλική συχνότητα $\omega = k_0/\eta$ rad/sec,
- ένταση ηλεκτρικού πεδίου $\mathrm{E}_0 = 1\mathrm{V/m}$,
- ένταση μαγνητικού πεδίου $\mathrm{H}_0 = (1/\eta_0) x E_0 \mathrm{A/m}$

αλλά και χρήση της εντολής initmesh για τη διακριτοποίηση της επιφάνειας σε πλέγμα 466 τριγώνων, εφαρμόσαμε τον κώδικά μας και πήραμε το παρακάτω γράφημα

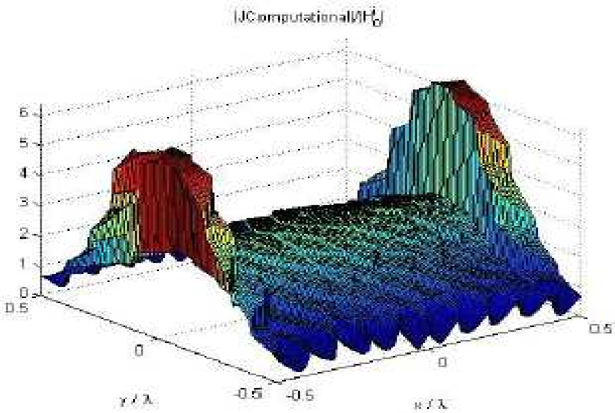


Όπως παρατηρούμε η προσέγγισή μας είναι πολύ κοντά στη λύση του Benchmark, πράγμα που σημαίνει ότι η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων ενδείκνυται για αυτά τα προβλήματα.

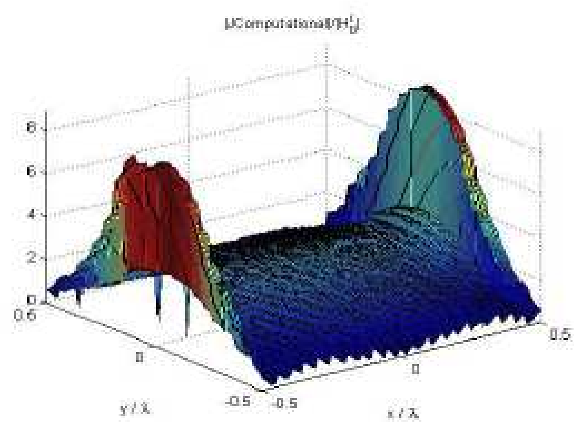
Παρακάτω παραθέτουμε γραφήματα για την κανονικοποιημένη, ως προς το πλάτος του μαγνητικού πεδίου, επιφανειακή ρευματική κατανομή που δημιουργήθηκε από την πρόσπτωση επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος από διαφορετικές συνθήκες.

1. <u>Μελετάμε το πλέγμα</u>

- Για κάθετη πρόσπτωση με κύμα πολωμένο κατά x άξονα και εντολή διακριτοποίησης poimesh (για ορθογώνια τρίγωνα)

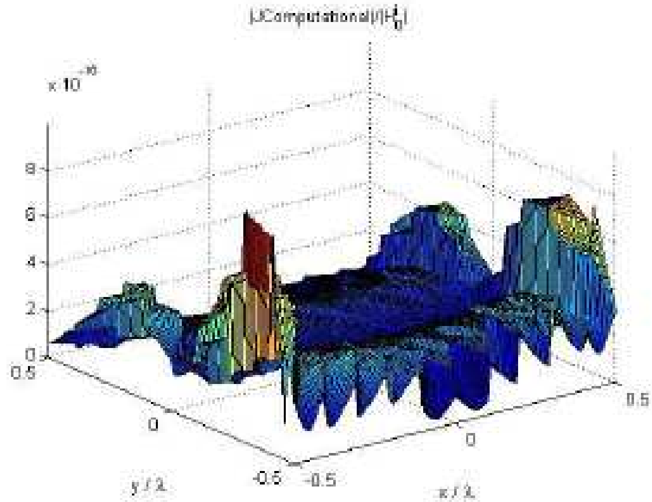


- Με ένα refinement στην εντολή initmesh

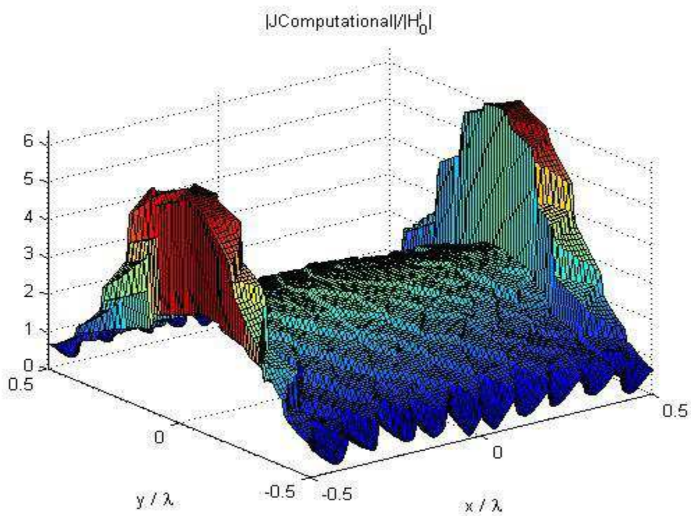


2. Μελετώντας διαφορετικές γωνίες πρόσπτωσης

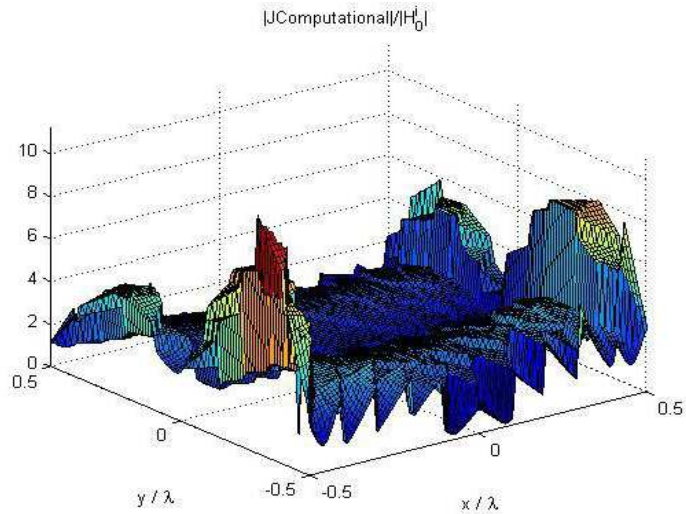
- Υποθέτοντας ότι το κύμα μας προσπίπτει με γωνία θ=π/2



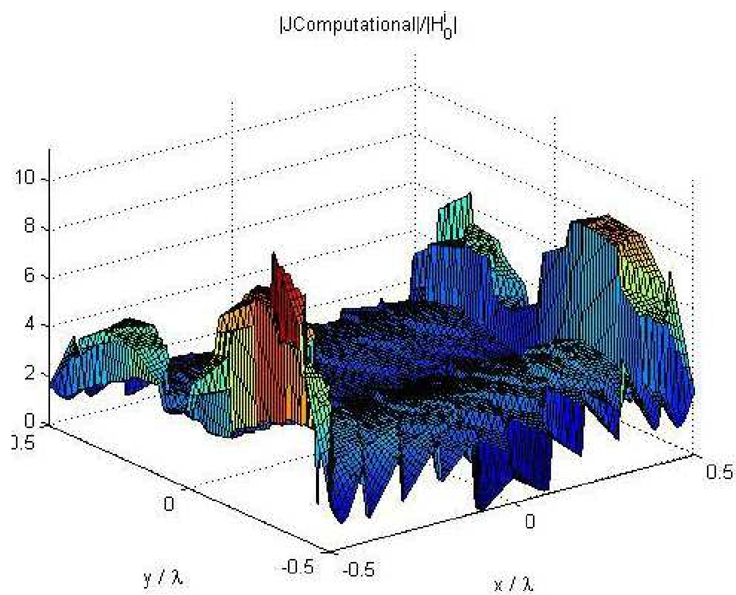
- Υποθέτοντας ότι το κύμα μας προσπίπτει με γωνία θ=π



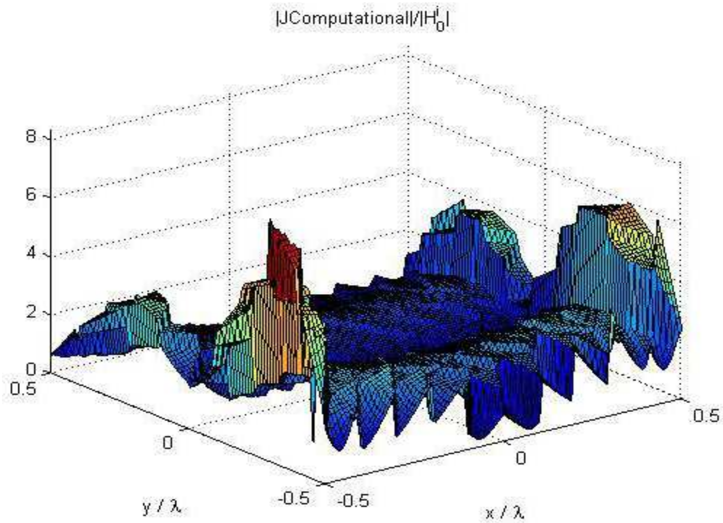
- Υποθέτοντας ότι το κύμα μας προσπίπτει με γωνία $\vartheta = \pi/4$



- Υποθέτοντας ότι το κύμα μας προσπίπτει με γωνία $\vartheta = \pi/6$

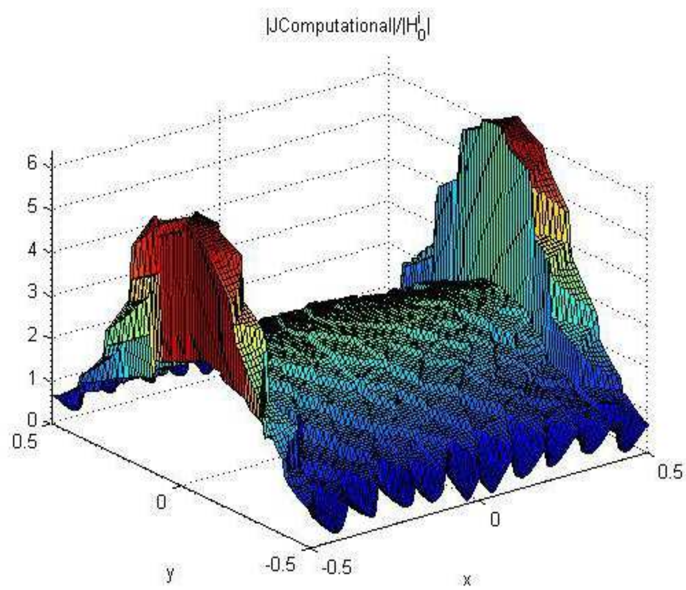


- Υποθέτοντας ότι το κύμα μας προσπίπτει με γωνία ϑ=π/3

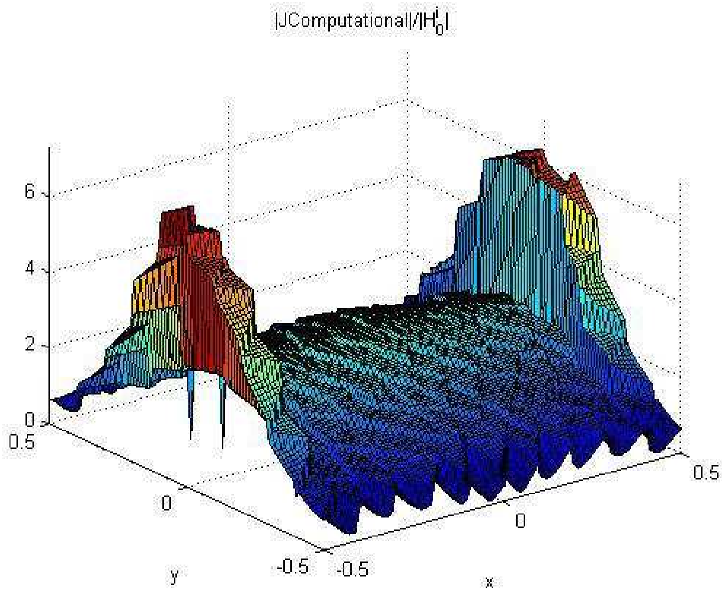


3. Εδώ παρατηρούμε τι θα συμβεί αν αλλάξουμε το μήκος κύματος σε ίδιων διαστάσεων patch.

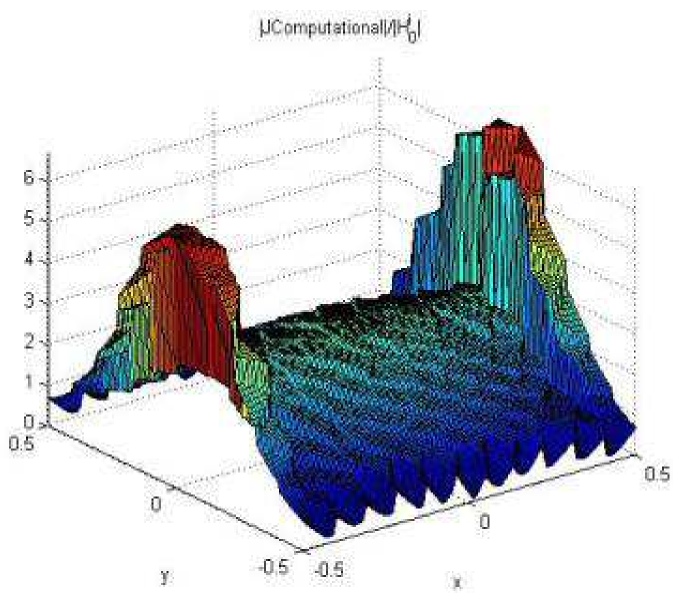
- Για μήκος κύματος λ=2m



• Για μήκος κύματος λ=100m

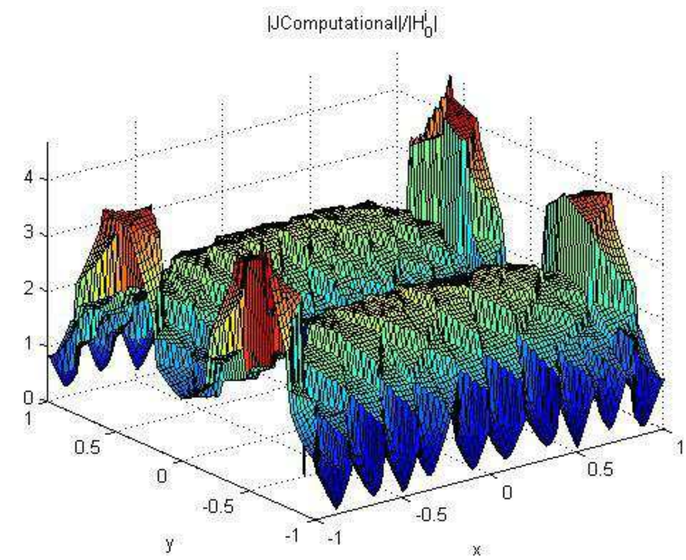


• Για μήκος κύματος λ=10^{-9}m

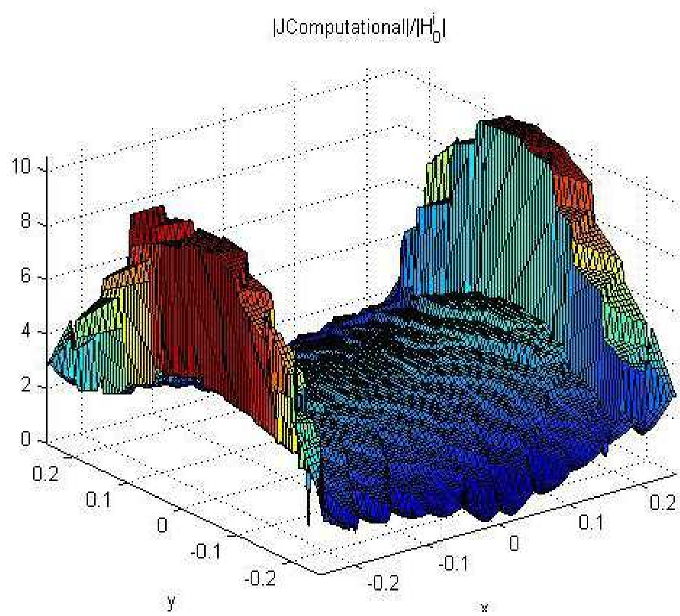


4. Παρακάτω παρατηρούμε τι θα συμβεί αν αλλάξουμε τις διαστάσεις του patch ενώ το μήκος κύματος είναι 1μ.

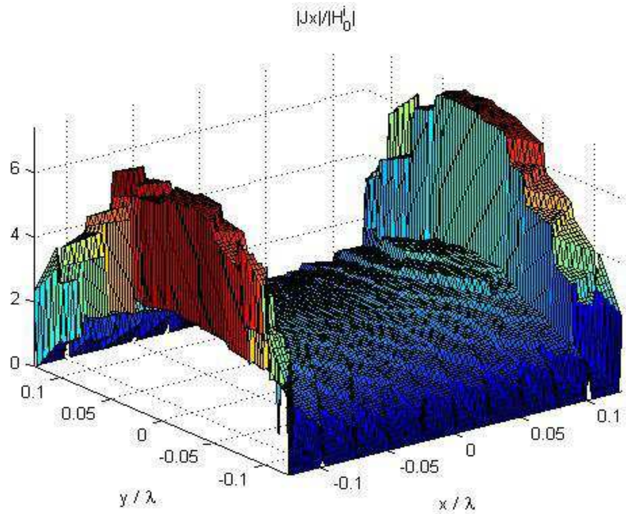
- Για patch 2x2m



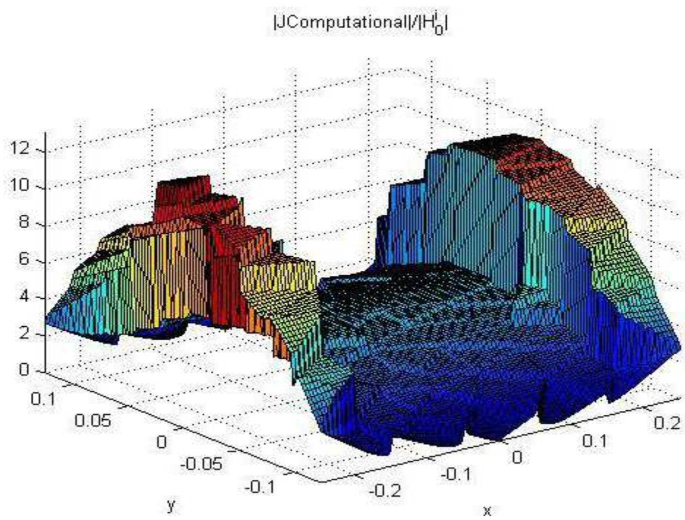
- Για patch 1/2x1/2m



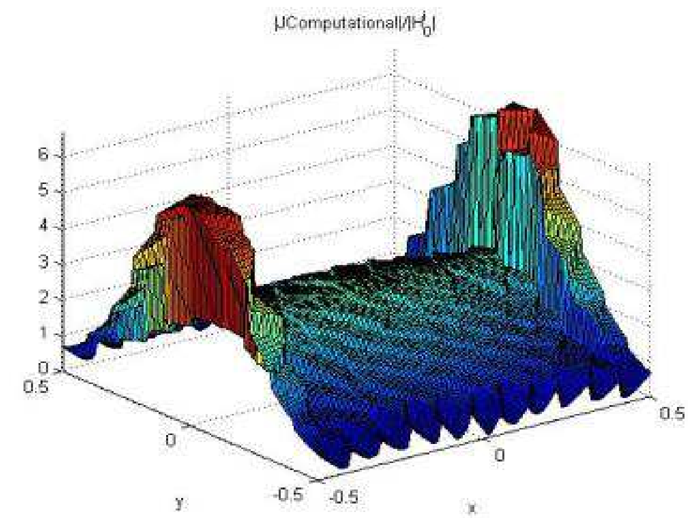
- Για patch 1/4x1/4m



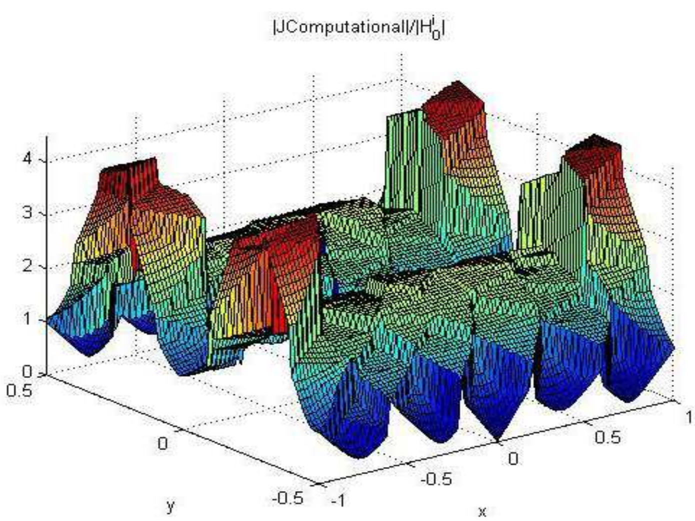
- Για patch 1/2x1/4m



- Για patch 1x1/2m



- Για patch 2x1m



4.5 Το Πρόβλημα στο Μακρινό Πεδίο

4.5.1 Εισαγωγή

Όταν θέλουμε να παρατηρήσουμε το σκεδαζόμενο πεδίο σε ένα σημείο το οποίο βρίσκεται πολύ μακρυά από την πηγή, μπορούμε να προσεγγίσουμε υπολογιστικά τη λύση του μακρινού πεδίου κάνοντας κάποιες απλοποιήσεις.

Η αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται για να εξασφαλίσουμε ότι βρισκόμαστε στο μακρινό πεδίο, είναι η απόσταση R του σημείου παρατήρησης να ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$R \geq \frac{2D_{max}}{\lambda} \tag{88}$$

όπου λ η τιμή του μήκους κύματος και D_{max} η μέγιστη διατομή του σκεδαστή.

Επειδή σε αυτήν την περίπτωση, ο μόνος όρος με σημαντικό πλάτος είναι το $\frac{1}{r}$, η εξίσωση (21) για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου στο μακρινό πεδίο γίνεται:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathrm{j}\omega\mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{89}$$

και το μαγνητικό πεδίο συναρτήσει του ηλεκτρικού δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta}\hat{\mathbf{r}}\mathbf{x}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{90}$$

για τη διάδοση ενός επίπεδου κύματος, με διεύθυνση διάδοσης κατα μήκος του διανύσματος $\hat{\mathbf{r}}$.

Στις τρεις διαστάσεις, η έκφραση για το μακρινό ηλεκτρικό πεδίο δίνεται παρακάτω

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu\int_{S_n} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J_n}(\mathbf{r}')d\mathbf{S}' \tag{91}$$

όπου $\mathbf{r}'$ είναι η πηγή και $\mathbf{r}$ το σημείο παρατήρησης.

Η διστατική διατομή σκέδασης (σ_{3D}) ή RCS, είναι το μέτρο της ικανότητας ενός στόχου να ανταναKλά τα σήματα ενός ραντάρ στη διεύθυνση του δέκτη του ραντάρ. Στις τρεις διαστάσεις η σ_{3D}, για τα προβλήματα σκέδασης με προσπίπτον πεδίο E^iκαι σκεδαζόμενο μακρινό πεδίο E^s, ορίζεται ως:

$$\sigma_{3D} = \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \frac{|\mathbf{E}^s|^2}{|\mathbf{E}^i|^2} = 4\pi r^2 |\mathbf{E}^s|^2 \tag{92}$$

όπου συνήθως, υποθέτουμε ότι $|\mathbf{E}^i| = 1$ για λόγους υπολογιστικής ευκολίας.

Οι αντίστοιχες διστατικές διατομές για τα ϑ- και φ- παράγωγα του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου ενός μοναδιαίου επίπεδου κύματος, είναι τα:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{k^2\eta_0^2}{4\pi}[E_\theta^s]^2 \tag{93}$$

$$\sigma_{\varphi\theta} = \frac{k^2\eta_0^2}{4\pi}[E_\varphi^s]^2 \tag{94}$$

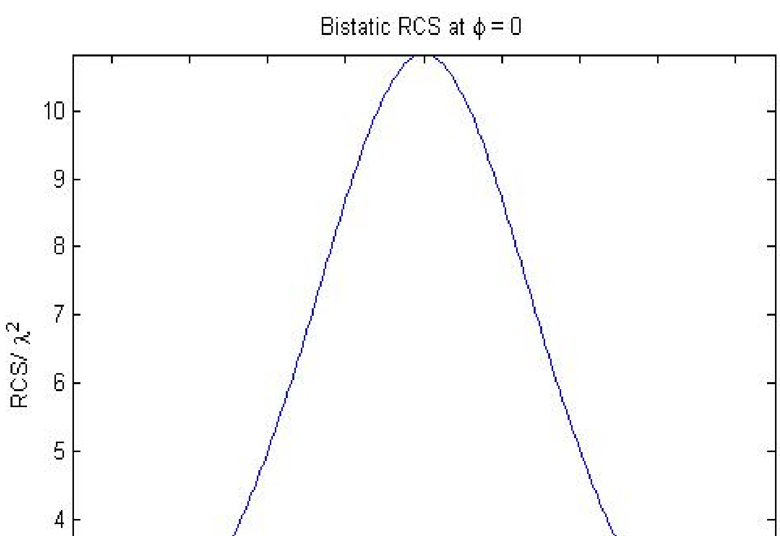
όπου ο πρώτος δείκτης στο σ συμβολίζει την πόλωση του σκεδαζόμενου κύματος και ο δεύτερος την πόλωση του προσπίπτοντος κύματος.

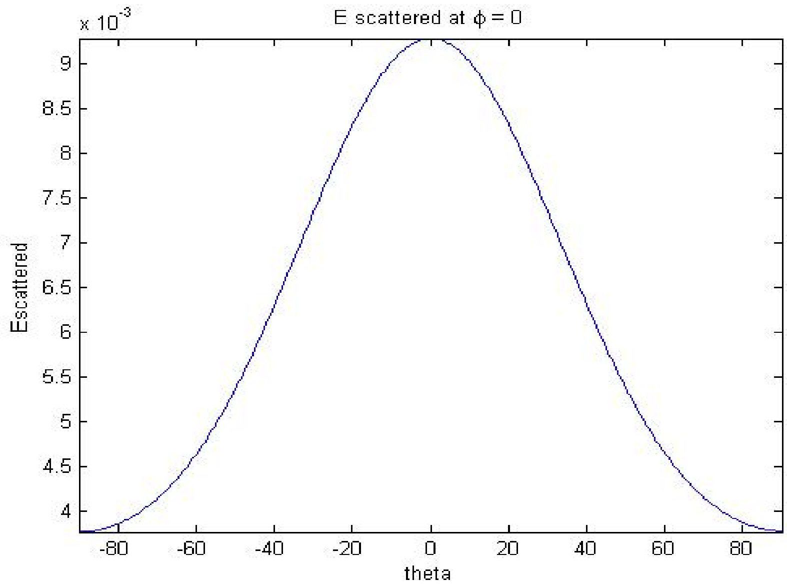
4.5.2 Αριθμητική Επίλυση

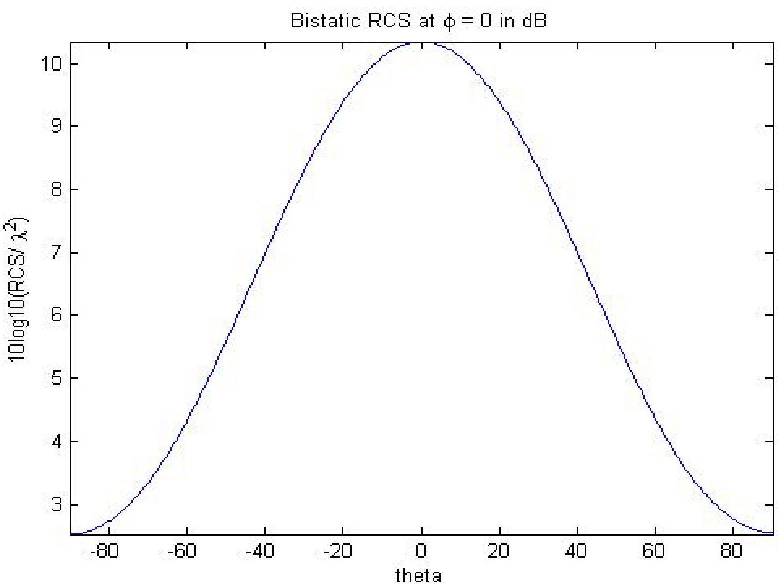
Για τον υπολογισμό της σχέσης (91), δοθέντος του μιγαδικού διανύσματος της ρευματικής κατανομής πάνω στις ακμές των τριγώνων από τη διαδικασία υπολογισμού του κοντινού πεδίου, έχουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση Green και τις συναρτήσεις βάσης $f_n(\mathbf{r}')$. Αφού, λοιπόν, κάνουμε αριθμητική ολοκλήρωση Gauss του γινομένου της σχέσης (91), μπορούμε να βρούμε τις τιμές του μακρινού ηλεκτρικού πεδίου σε διάφορα σημεία του χώρου, καθώς και τη διστατική διατομή σκέδασης.

Παρακάτω, δίνουμε τα γραφήματα της διστατικής διατομής σκέδασης και του ηλεκτρικού μακρινού πεδίου, για κάθετη πρόσπτωση σε δισδιάστατο μεταλλικό σκεδαστή.

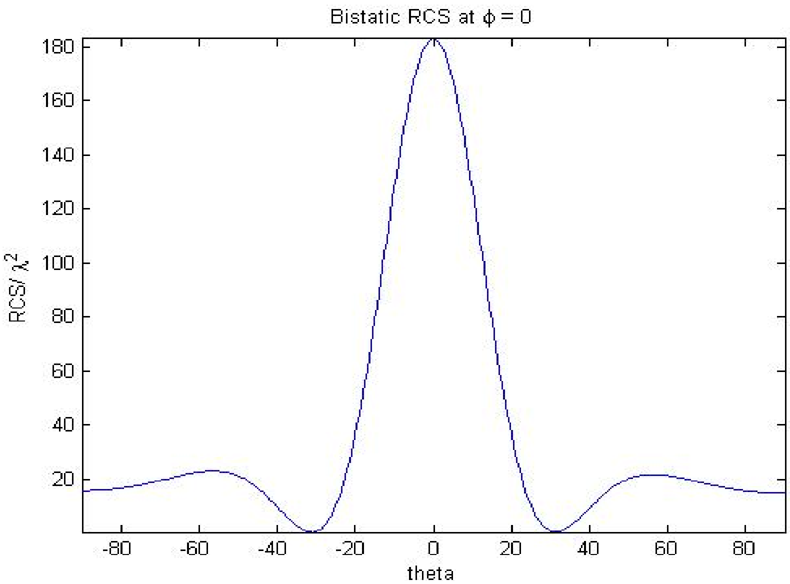
- Για patch 1x1m

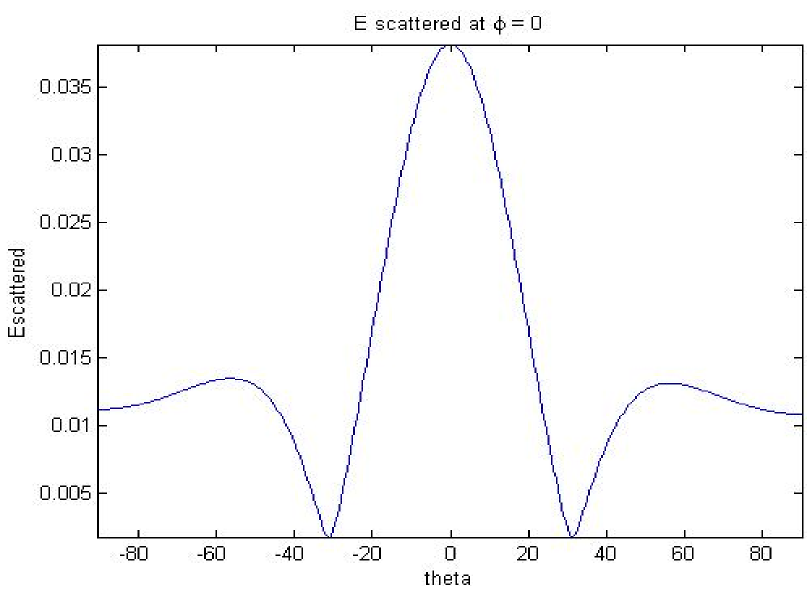


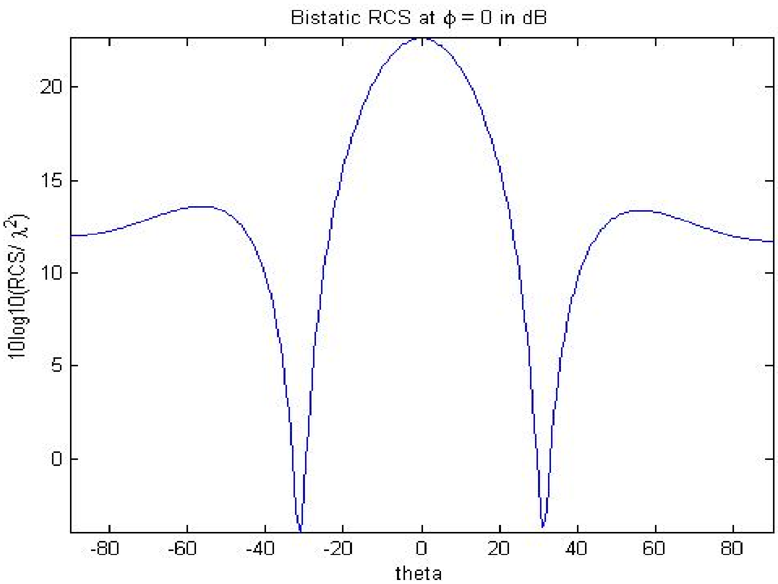

E scattered at ϕ = 0
x 10^-3
Escattered
theta
9
8.5
8
7.5
7
6.5
6
5.5
5
4.5
4
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80


Bistatic RCS at ϕ = 0 in dB
10log10(RCS/ λ^2)
theta
10
9
8
7
6
5
4
3
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80

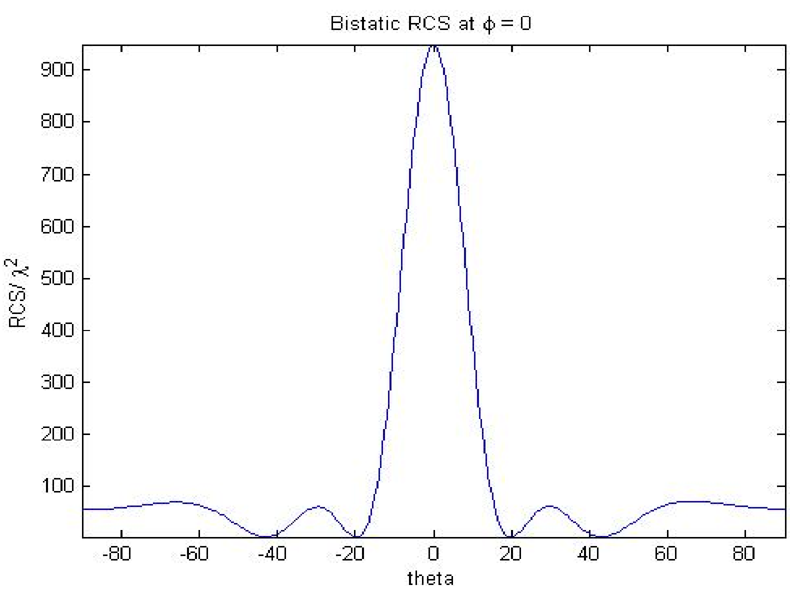
- Για patch 2x2m

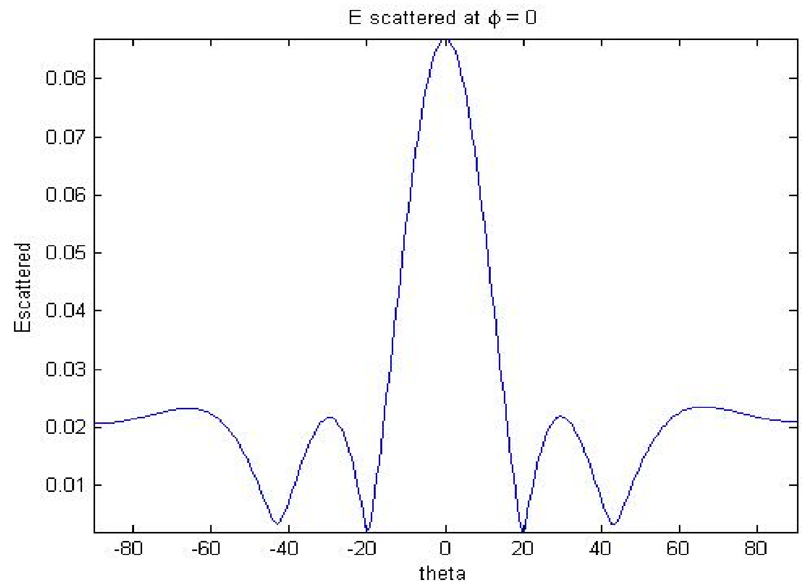


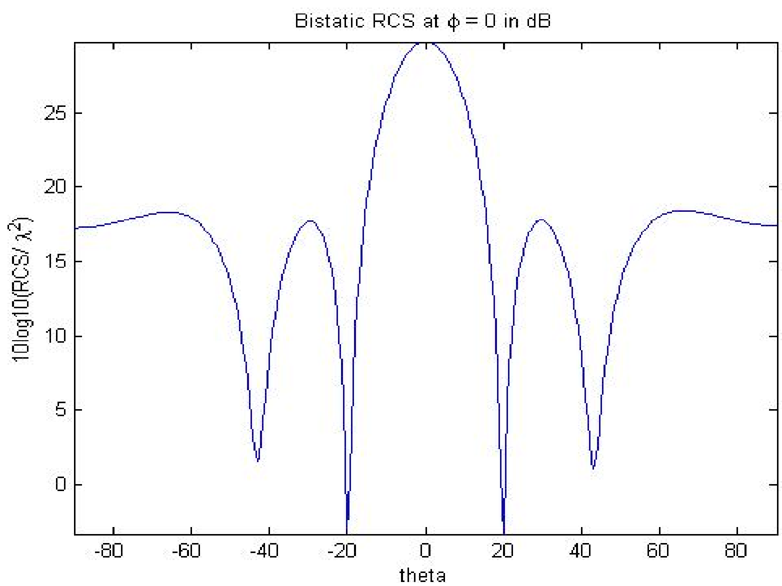




- Για patch 3x3m




E scattered at ϕ = 0
Escattered
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80
theta


Bistatic RCS at ϕ = 0 in dB
10log10(RCS/ λ²)
25
20
15
10
5
0
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80
theta

Κεφάλαιο 5

Κώδικας Matlab

Αρχικά, παραθέτουμε τον κώδικα που γράψαμε για τις γενικές μεταβλητές του προβλήματος αλλά και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή μας.

```
clc
clear all
format long
global k0
%%%%% General Inputs %%%%%%
f = 3*10^8;
lamda = 1*3*10^8/f;
Lpatch1 = 1*lamda;
Lpatch2 = 1*lamda;
k0 = 2*pi/lamda;
e0 = 1/(36*pi)*10^-9;
m0 = 4*pi*10^-7;
eta0 = sqrt(m0/e0);
% omega = 2*pi*f;
omega = k0/(sqrt(m0*e0));
E0 = 1;
Einc_0 = E0;
H0 = (1/eta0)*E0;
Z1_const = (1j*omega*m0)/(4*pi);
Z2_const = 1/(4*pi*1j*omega*e0);
%%%%%%%% Geometry - Patch %%%%%%%%%
Ax = Lpatch1;
Ay = Lpatch2;
gd = [ 3 4 -Lpatch1/2 Lpatch1/2 Lpatch1/2 -Lpatch1/2 -Lpatch2/2 -Lpatch2/2
Lpatch2/2 Lpatch2/2 ];
d1 = decsg(gd);
[p,e,t] = initmesh(d1);
% [p,e,t] = poimesh(d1,10,10);
% [p,e,t] = refinemesh(d1,p,e,t);
% [p,e,t] = refinemesh(d1,p,e,t);
% pdeplot(p,e,t); % axis equal; % axis tight;
```

Στη συνέχεια, παραθέτουμε τον κώδικα που χρειάστηκε για την κατασκευή των προπαρασκευαστικών πινάκων:

```
%%%%%%%%%%% Pre-Processing Matrices %%%%%%%%
N_n = length(p);
% N_n = number of nodes
Ne = length(t); % Ne = number of elements
N_ext_edges = length(e); % Number of exterior (boundary) edges
%for i=1:N_n
%text(p(1,i),p(2,i),num2str(i));
%end
%for ie=1:Ne
%n(1:3)=t(1:3,ie);
%xg = sum(p(1,n(1:3)))/3;
%yg = sum(p(2,n(1:3)))/3;
%text(xg,yg,num2str(ie)); %end
id = 0;
% id = number of edges
% N_n = number of nodes
node_to_node = spalloc(N_n,N_n,7*N_n); % Matrix of nodes
(i_node,j_node) = +ij_edge % (j_node,i_node) = -ji_edge
first_node = [3 1 2];
second_node = [2 3 1];
edge_node = zeros(2,3*Ne); % which two nodes create each edge
element_edge = zeros(3,Ne); % the three edges that consist a triangle
for ie = 1:Ne
n(1:3) = t(1:3,ie);
for ii = 1:3
n1 = n(first_node(ii));
n2 = n(second_node(ii));
if node_to_node(n1,n2) == 0
id = id+1;
edge_node(1,id) = n1;
edge_node(2,id) = n2;
element_edge(ii,ie) = id;
node_to_node(n1,n2) = id; node_to_node(n2,n1) = -id;
else
element_edge(ii,ie) = node_to_node(n1,n2);
end
end
end
```

```
clear node_to_node;
Nedges = id;
edge_node = edge_node(:,1:Nedges);
% for id = 1:Nedges
% n(1:2) = edge_node(1:2,id);
% xm = sum(p(1,n(1:2)))/2;
% ym = sum(p(2,n(1:2)))/2;
% text(xm,ym,num2str(id));
% end;
% figure;
% pdeplot(p,e,t);
% axis equal;
% axis tight;
% for ie = 1:Ne
% edges(1:3) = element_edge(1:3,ie); % for ii = 1:3
% n(1:2) = edge_node(1:2,abs(edges(ii)));
% xm = sum(p(1,n(1:2)))/2;
% ym = sum(p(2,n(1:2)))/2;
% text(xm,ym,num2str(abs(edges(ii))));
% end;
% end
node_to_node = spalloc(N_n,N_n,7*N_n);
for ii = 1:N_ext_edges n(1:2) = e(1:2,ii);
r1 = e(6,ii);
r2 = e(7,ii);
if (r1==0 || r2==0)
node_to_node(n(1),n(2)) = 1;
node_to_node(n(2),n(1)) = 1;
end
end
edge_id = ones(Nedges,1);
for id = 1:Nedges
n(1:2) = edge_node(1:2,id);
if (node_to_node(n(1),n(2)) == 1)
edge_id(id) = 0;
end
end
ic = 0;
index = zeros(Nedges,1);
for id = 1:Nedges
if (edge_id(id) == 1)
ic = ic+1;
index(id) = ic;
end
end
```

```
Nunknowns = ic;
% figure;
% pdeplot(p,e,t);
% axis equal;
% axis tight;
% for id = 1:Nedges %
n(1:2) = edge_node(1:2,id);
% xm = sum(p(1,n(1:2)))/2;
% ym = sum(p(2,n(1:2)))/2;
% text(xm,ym,num2str(index(id)));
% end;
```

Παραπάνω δώσαμε με τη μορφή σχολίων, κώδικα και για την επαλήθευση των προπαρασκευαστηκών πινάκων. Με τη μορφή γραφήματος, όπου οι ακμές και τα τρίγωνα απεικονίζονται αριθμημένα πάνω στη μεταλλική μας πλάκα, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι παίρνουμε ως άγνωστες ακμές μόνο αυτές που ανήκουν στο πλέγμα μας, χωρίς τις εξωτερικές.

Παρακάτω, δίνεται ο κώδικας για τη διαδικασία γεμίσματος του πίνακα Z, της μεθόδου των ροπών, τόσο για τους μη ιδιάζοντες όρους όσο και για τους ιδιάζοντες, καθώς και του πίνακα Beta της διέγερσης.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Assembly
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%% Order of Gauss Quadrature Integration %%%%%%%%%%
Np_2D = 4; % Possible values: 1, 4, 6, 8, 13, 20, 41
Np_1D = 32;
%%% Gauss quadrature rule for non-singulartriangles %%%%%%%%%%
[Np,wt,Z,z1,z2,z3] = Gauss_2D(Np_2D); % Np = Np_2D*Np_2D
%%%%% Main body of assembly %%%%
Zeta = zeros(Nunknowns,Nunknowns);
Beta = zeros(Nunknowns,1);
edge_0 = zeros(3,1);
edge_s = zeros(3,1);
R_x = zeros(Np,Np);
R_y = zeros(Np,Np);
R_z = zeros(Np,Np);
for ie = 1:Ne
for ii = 1:3
edge_0(ii) = abs(element_edge(ii,ie));
end
```

```
% coordinates of nodes of the observation element
oen1_x = p(1,t(1,ie)); % obsevation element node 1 x coordinate
oen1_y = p(2,t(1,ie));
oen2_x = p(1,t(2,ie));
oen2_y = p(2,t(2,ie));
oen3_x = p(1,t(3,ie));
oen3_y = p(2,t(3,ie));
% vector of edges for the observation element e_of_0e=(edge1,edge2,edge3)
e_of_0e = [oen2_x-oen3_x oen3_x-oen1_x oen1_x-oen2_x oen2_y-oen3_y
oen3_y-oen1_y oen1_y-oen2_y]; % local edge 1 is opposite from nodes 2 and
3
%%%%%%%%%%%%% Filling Matrix Z %%%
%%%% Non-Singular Terms %%%%%%%%%%%%%
for je=(ie+1):Ne % for non-singular terms we take elements that they are not
coincident
for ii=1:3
edge_s(ii)=abs(element_edge(ii,je));
end;
% coordinates of nodes of the source element
sen1_x = p(1,t(1,je)); % source element node 1 x coordinate
sen1_y = p(2,t(1,je));
sen2_x = p(1,t(2,je));
sen2_y = p(2,t(2,je));
sen3_x = p(1,t(3,je));
sen3_y = p(2,t(3,je));
% vector of edges for the source element e_of_se=(edge1,edge2,edge3)
e_of_se = [sen2_x-sen3_x sen3_x-sen1_x sen1_x-sen2_x sen2_y-sen3_y
sen3_y-sen1_y sen1_y-sen2_y];
% vector r = z1*n1 + z2*n2 + z3*n3;
ro_x = z1*oen1_x+z2*oen2_x+z3*oen3_x;
rs_x = z1*sen1_x+z2*sen2_x+z3*sen3_x;
ro_y = z1*oen1_y+z2*oen2_y+z3*oen3_y;
rs_y = z1*sen1_y+z2*sen2_y+z3*sen3_y;
% Green's radius R = sqrt(R_x*R_x + R_y*R_y)
for ii=1:Np
R_x(ii,:) = ro_x(ii)-rs_x; % a Np*Np Matrix
R_y(ii,:) = ro_y(ii)-rs_y;
end
```

```
R = sqrt(R_x.^2+R_y.^2);
Green = exp(-1j*k0*R)./R;
% to wt pou vgainei apo thn Gauss_2D einai ta w1,w2
% pollaplasiasmena me th seira pou tha pollaplasiazontousan sthn arithmhtikh oloklhrwsh
W_GR = (wt'*wt).*Green; % opou gia 2o wt pairnoume thn sthlh tou wt gia na ginetai o pollaplasiasmos
for iii=1:3
for jj=1:3
if ((index(edge_0(iii)) ~= 0) && (index(edge_s(jj)) ~= 0))
sign_oe = sign(element_edge(iii,ie));
sign_se = sign(element_edge(jj,je));
p1 = second_node(iii); % pairnoun times opws tha epairnan apo ta modulo
p2 = first_node(iii);
q1 = second_node(jj);
q2 = first_node(jj);
% Lp_q = lp*lq =lpx*lpx + lpy*lqy
Lp1_q1 = e_of_0e(1,p1)*e_of_se(1,q1)+e_of_0e(2,p1)*e_of_se(2,q1);
Lp1_q2 = e_of_0e(1,p1)*e_of_se(1,q2)+e_of_0e(2,p1)*e_of_se(2,q2);
Lp2_q1 = e_of_0e(1,p2)*e_of_se(1,q1)+e_of_0e(2,p2)*e_of_se(2,q1);
Lp2_q2 = e_of_0e(1,p2)*e_of_se(1,q2)+e_of_0e(2,p2)*e_of_se(2,q2);
Len_p = sqrt(e_of_0e(1,iii)^2+e_of_0e(2,iii)^2); % Len_p = lp = n1-n2, opou n1, n2 oi 2 komvoi
Len_q = sqrt(e_of_se(1,jj)^2+e_of_se(2,jj)^2);
% ZZ = [?p2o(?q2s*Lp1,q1-?q1s*Lp1,q2)-?p1o(?q2s*Lp2,q1-?q1s*Lp2,q2)] % = ?p2o*?q2s*Lp1,q1-?p2o*?q1s*Lp1,q2-?p1o*?q2s*Lp2,q1 + ?p1o*?q1s*Lp2,q2
% (opou erwthmatiko to ellhniko gramma z)
Zp1_q1 = Z(:,p1)*Z(:,q1)'; % Zp1_q1 = ?p2o*?q2s
Zp1_q2 = Z(:,p1)*Z(:,q2)'; % Zp1_q2 = ?p2o*?q1s
Zp2_q1 = Z(:,p1)*Z(:,q1)'; % Zp2_q1 = ?p1o*?q2s
Zp2_q2 = Z(:,p2)*Z(:,q2)'; % Zp2_q2 = ?p1o*?q1s
ZZ = Lp1_q1*Zp2_q2 - Lp1_q2*Zp2_q1 - Lp2_q1*Zp1_q2 + Lp2_q2*Zp1_q1;
ZZf = Z1_const*ZZ+4*Z2_const*ones(Np,Np);
Zeta1 = sign_oe*sign_se*Len_p*Len_q*(sum(sum(W_GR.*ZZf)));
% we save computational time if we fill Z with this way ( symmetrical filling)
Zeta(index(edge_0(iii)),index(edge_s(jj)))=Zeta(index(edge_0(iii)), index(edge_s(jj)))+Zeta1;
Zeta(index(edge_s(jj)),index(edge_0(iii))) = Zeta(index(edge_s(jj)), index(edge_0(iii)))+Zeta1;
end
end
end
end
```

```
%%%%%%%%%% Singular Terms %%%%%%%%%%%%%%
NX = [oen1_x; oen2_x; oen3_x]; % oi 3 komvoi tou stoixeiou ie
NY = [oen1_y; oen2_y; oen3_y];
%———————————————————————
% Singular Integrals
% [I_Z1,I_Z2] = Rossi(NX,NY,Np,Np_1D,wt,Z,z1,z2,z3);
% upologismos idiazontwn oloklhrwmatwn me th methodo Rossi
% vgazei tous 2 orous me enswmatwmenh shn green
edge_s = edge_0;
e_of_se = e_of_0e;
for ii = 1:3
for jj = 1:3
if ((index(edge_0(ii)) ~= 0) && (index(edge_s(jj)) ~= 0))
sign_oe = sign(element_edge(ii,ie));
sign_se = sign(element_edge(jj,ie));
p1 = second_node(ii);
p2 = first_node(ii);
q1 = second_node(jj);
q2 = first_node(jj);
Lp1_q1 = e_of_0e(1,p1)*e_of_se(1,q1)+e_of_0e(2,p1)*e_of_se(2,q1);
Lp1_q2 = e_of_0e(1,p1)*e_of_se(1,q2)+e_of_0e(2,p1)*e_of_se(2,q2);
Lp2_q1 = e_of_0e(1,p2)*e_of_se(1,q1)+e_of_0e(2,p2)*e_of_se(2,q1);
Lp2_q2 = e_of_0e(1,p2)*e_of_se(1,q2)+e_of_0e(2,p2)*e_of_se(2,q2);
Len_p = sqrt(e_of_0e(1,ii)^2+e_of_0e(2,ii)^2);
Len_q = sqrt(e_of_se(1,jj)^2+e_of_se(2,jj)^2);
Sin_Int=Z1_const*(Lp1_q1*I_Z2(p2,q2)-Lp1_q2*I_Z2(p2,q1)-
Lp2_q1*I_Z2(p1,q2)+Lp2_q2*I_Z2(p1,q1))+4*Z2_const*I_Z1;
Zeta11 = sign_oe*sign_se*Len_p*Len_q*Sin_Int;
Zeta(index(edge_0(ii)),index(edge_s(jj))) = Zeta(index(edge_0(ii)),
index(edge_s(jj)))+Zeta11;
end
end
end
```

Συνεχίζουμε με τον πίνακα διέγερσης, ο οποίος τρέχει μέσα στην ίδια σάρωση τριγώνων για εξοικονόμηση υπολογιστικού κόστους, με παραλλαγές για την πόλωση και τις γωνίες πρόσπτωσης.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%        B-matrix        fill
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for ii = 1:3
if ((index(edge_0(ii)) ~= 0))
sign_oe = sign(element_edge(ii,ie)); p1 = second_node(ii); p2 = first_node(ii);
Lp1_x = e_of_0e(1,p1);
Lp1_y = e_of_0e(2,p1);
Lp2_x = e_of_0e(1,p2);
Lp2_y = e_of_0e(2,p2);
Len_p = sqrt(e_of_0e(1,ii)^2+e_of_0e(2,ii)^2);
sumBeta = 0;
for mm=1:Np
pox = Z(mm,p2)*Lp1_x-Z(mm,p1)*Lp2_x; % po_x = vertex_x - ro_x =
poy = Z(mm,p2)*Lp1_y-Z(mm,p1)*Lp2_y;
x = z1(mm)*oen1_x+z2(mm)*oen2_x+z3(mm)*oen3_x;
y = z1(mm)*oen1_y+z2(mm)*oen2_y+z3(mm)*oen3_y; % ?p2lp1_x-?p1lp2_x , h y sunistwsa den xreiazetai
%%%edw analoga me thn polwsh kai thn gwnia prosptwshs tou
%%%Einc kathorizetai h diegersh %%%%%%
% to hlektromagnhtiko kuma diadidetai kata z % 1h periptwsh-to E einai polwmeno kata x % h gwnia prosptwshs einai :
% a) 0 moires
theta = 0;
% b) 90 moires
% theta = pi/2;
% c) 270 moires
% theta = 3*pi/2;
% d) 180 moires
% theta = pi;
% e) 45 moires
% theta = pi/3;
% f) 30 moires
% theta = pi/6;
% g) 60 moires
```

```
% theta = pi/3;
% Einc_x = cos(theta)*exp(sqrt(-1)*k0*sin(theta)*x);
% Einc_y = 0;
% 2h periptwsh-to E einai polwmeno kata y
% a) 0 moires
% theta = 0;
% b) 90 moires
% theta = pi/2;
% c) 270 moires
% theta = 3*pi/2;
% d) 180 moires
% theta = pi;
% e) 45 moires
% theta = pi/4;
% f) 30 moires
% theta = pi/6;
% g) 60 moires
% theta = pi/3;
Einc_x = 0;
Einc_y = exp(sqrt(-1)*k0*sin(theta)*y);
sumBeta = sumBeta+wt(mm)*(pox*Einc_x+poy*Einc_y);%*exp(sqrt(-
1)*k0*sin(theta)*x);
end
Beta(index(edge_0(ii)),1) = Beta(index(edge_0(ii)),1)+
sign_oe*Len_p*sumBeta;
end
end
end
Beta = Einc_0*Beta; % h diegersh
I = Zeta\Beta; % migadiko dianusma reumatikhs katanomhs ston 2D metalliko
skedasth
```

Οι τελευταία γραμμή του κώδικα υπολογίζει τους συντελεστές της ρευματικής κατανομής για κάθε άγνωστη ακμή του πλέγματός μας (είναι ο πίνακας I της σχέσης (58)).

Από τη σχέση (58) υπολογίζουμε τη ρευματική κατανομή πάνω στα βαρύκεντρα των τριγώνων του πλέγματος και την απεικονίζουμε γραφικά πάνω στο σκεδαστή μας.

```
%%%%%%%%%%%% J-Field Formulation %%%%%%%%%%%%%%
% barycentric coordinates
xg = (1/3)*(p(1,t(1,:))+p(1,t(2,:))+p(1,t(3,:)));
yg = (1/3)*(p(2,t(1,:))+p(2,t(2,:))+p(2,t(3,:)));
Nx = 101;
Ny = 101;
ax = Lpatch1/(Nx-1); % to vhma
ay = Lpatch2/(Ny-1);
Jfx = zeros(Nx,Ny);
Jfy = zeros(Nx,Ny);
pl = zeros(Nx,Ny);
% o pinaka me grammh x_sunistwsa kai sthlh j_sunistwsa shmeiou pou
% mesa sto trigwno me global arithmish = pl(x,y)
for ii = 1:Nx % sarwnontas ola ta shmeia tou plegmatos vriskoume se poio trigwno eimaste
for jj = 1:Ny
xp = -Lpatch1/2 + (ii-1)*ax;
yp = -Lpatch2/2 + (jj-1)*ay; % h apostash apo ta varukentra mas dinei ta geitonika trigwna tou shmeiou
dis = sqrt((xp-xg).^2+(yp-yg).^2); % to dianusma indeces dinei tis arxikes theseis twn taksinomhmenwn stoixeiwn [indeces,sort_dis] = sort(dis);
ctr6 = 0;
for in = 1:5 % pairnoume ta 5 pio kontina sto shmeio trigwna kai vriskoume gia to
ie = sort_dis(in); % kathena ths simplex suntetagmenes tou apo tous komvous kai to emvadon tou
% node coordinates
sen1_x = p(1,t(1,ie));
sen1_y = p(2,t(1,ie));
sen2_x = p(1,t(2,ie));
sen2_y = p(2,t(2,ie));
sen3_x = p(1,t(3,ie));
sen3_y = p(2,t(3,ie));
% element area Ve
Ae1 = 1/2*det([1 sen1_x sen1_y 1 sen2_x sen2_y
% an to athroisma twn simplex suntetagmenwn tou trigwnou pou meletame 1 sen3_x sen3_y ]);
% sto shmeio pou eksetazoume den einai monada exoume lathos kwdika
Ae = abs(Ae1); % emvadon e1 xwris proshmo
% (giati o tupos me tis orizouses mporei n dwsei arnhtiko emvadon)
zs(1) = det([1 xp yp;1 sen2_x sen2_y;1 sen3_x sen3_y])/(2*Ae1);
zs(2) = det([1 sen1_x sen1_y;1 xp yp;1 sen3_x sen3_y])/(2*Ae1);
zs(3) = det([1 sen1_x sen1_y;1 sen2_x sen2_y;1 xp yp])/(2*Ae1);
ZS = zs(1)+zs(2)+zs(3);
if (abs(ZS-1)>1e-14)
fprintf('******** \nfatal error \n*********')
end
```

```
if ((zs(1) >= 0) && (zs(2) >= 0) && (zs(3) >= 0))
% an eimaste mesa sto trigwno ola ta z tha einai thetika
Jx = 0;
Jy = 0;
ctr6 = 1;
edge_e1 = zeros(3,1);
pl(ii,jj) = ie;
for iii = 1:3
edge_e1(iii) = abs(element_edge(iii,ie));
end
e_of_0e = [ sen2_x-sen3_x sen3_x-sen1_x sen1_x-sen2_x sen2_y-sen3_y
sen3_y-sen1_y sen1_y-sen2_y ];
for id = 1:3
if ((index(edge_e1(id)) ~= 0)) % epeidh theloume mono eswterikes akmes
func_sign = sign(element_edge(id,ie));
p1 = second_node(id);
p2 = first_node(id);
Len_p = sqrt(e_of_0e(1,id)^2+e_of_0e(2,id)^2);
Lp2_x = e_of_0e(1,p2);
Lp2_y = e_of_0e(2,p2);
Lp1_x = e_of_0e(1,p1);
Lp1_y = e_of_0e(2,p1);
% Oi sunistwses tou reumatos sthn epifaneia tou skedasth Jx kai Jy
% To reuma sto shmeio r ths epifaneias analuetai stis Jx kai Jy opou
% h kathemia einai to athroisma twn RWG_x_n*I_n kai
% RWG_y_n*I_n opou n o arithmos twn eswterikwn akmwn
Jx = Jx+(Len_p/(2*Ae))*(zs(p2)*Lp1_x-zs(p1)*Lp2_x)
*func_sign*I(index(edge_e1(id)),1);
Jy = Jy+(Len_p/(2*Ae))*(zs(p2)*Lp1_y-zs(p1)*Lp2_y)
*func_sign*I(index(edge_e1(id)),1);
end
end
Jfx(ii,jj) = Jx;
Jfy(ii,jj) = Jy;
end
if (ctr6 == 1)
break
end
end
end
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%% Plots %%
J = sqrt(abs(Jfx).^2+abs(Jfy).^2);
x = -(Lpatch1/2)/lamda : ax/lamda : (Lpatch1/2)/lamda;
y = -(Lpatch2/2)/lamda : ay/lamda : (Lpatch2/2)/lamda;
% % absJfxmax = max(max(abs(Jfx)));
% % absJfymax = max(max(abs(Jfy)));
% % % % % % % ola ta parakatw grafhata einai kanonikopoihmena ws pros H0
%
% % (kati to opoio megalo to platos)
% % % % %%%% J plots %%%%%%%% % %
% figure
% surf(x,y,abs(J)/abs(H0)); \
% axis tight
% xlabel('x')
% ylabel('y')
% title('|JComputational|/|H_0^i|')
%%%%%%% Jx plots %%%%%%%%%%%% %
% figure
% surf(x,y,abs(Jfx/H0));
% axis tight
% xlabel('x / \lambda')
% ylabel('y / \lambda')
% title('|Jx|/|H_0^i|')
% % %%%%%%%%%%%%% Re{Jx}/|H_0^i| %%%%%%%% %
% figure
% surf(x,y,real(Jfx/H0));
% axis tight
% xlabel('x / \lambda')
% ylabel('y / \lambda')
% title('Re\{Jx\}/|H_0^i|') %
% %%%%%%%%%%%%% Im{Jx}/|H_0^i| %%%%%%% %
% figure
% surf(x,y,imag(Jfx)/H0);
% axis tight
% xlabel('x / \lambda')
% ylabel('y / \lambda')
% title('Im\{Jx\}/|H_0^i|')
% % %%%%%%%%%%%%% Jy plots %%%%%%%%%%% %
% figure
% surf(x,y,abs(Jfy)/H0);
%axis tight
% xlabel('x / \lambda')
% ylabel('y / \lambda')
% title('|Jy|/|H_0^i|') %
```

```
% %%%%%%%%%%%%%%% Re{Jy}/|H_0^i| %%%%% %
% figure
% surf(x,y,real(Jfy)/H0);
% axis tight
% xlabel('x / \lambda')
% ylabel('y / \lambda')
% title('Re\{Jy\}/|H_0^i|') % %
%%%%%%%%%%%%% Im{Jy}/|H_0^i| %%%%%%% %
% figure
% surf(x,y,imag(Jfy)/H0);
axis tight
% xlabel('x / \lambda')
% ylabel('y / \lambda')
% title('Im\{Jy\}/|H_0^i|')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %
% figure
% plot(x,real(Jfx(51,:))/H0)
% hold on
% plot(x,imag(Jfx(51,:))/H0)
% hold on
% plot(x,abs(Jfx(51,:))/H0)
% hold off
% axis tight
% xlabel('x / \lambda')
% ylabel('J_x(x,y=0)/|H_0^i|') % %%%% %
% figure % plot(x,real(Jfx(:,51))/H0)
% hold on
% plot(x,imag(Jfx(:,51))/H0)
% hold on
% plot(x,abs(Jfx(:,51))/H0)
% hold off
% axis tight
% xlabel('x / \lambda')
% ylabel('J_x(x,y=0)/|H_0^i|')
```

Παρακάτω δίνουμε τον κώδικα που γράψαμε για την υλοποίηση των γραφημάτων της αναλυτικής λύσης, για να μπορούμε να συγκρίνουμε με την προσεγγιστική μας λύση.

```
%%%%% Benchmark plots %%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%
[Jfx_benchI,Jfx_benchII] = Benchmark();
figure
plot(x,abs(Jfx(51,:)))
hold on plot(x,Jfx_benchI,'r')
hold on
plot(x,abs(Jfx(:,51)))
hold on
plot(x,Jfx_benchII,'r')
hold off
axis tight
xlabel('x / \lambda')
ylabel('J_x(x,y=0)')
```

Τέλος, παραθέτουμε τον κώδικά μας για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού μακρινού πεδίου.

```
%% E_far fill %%
counter=0;
for s = 1:NoP
for ie = 1:Ne
for ii = 1:3
edge_s(ii) = abs(element_edge(ii,ie));
end
sen11_x = p(1,t(1,ie));
sen11_y = p(2,t(1,ie));
sen21_x = p(1,t(2,ie));
sen21_y = p(2,t(2,ie));
sen31_x = p(1,t(3,ie));
sen31_y = p(2,t(3,ie));
e_of_se = [sen21_x-sen31_x sen31_x-sen11_x sen11_x-sen21_x
sen21_y-sen31_y sen31_y-sen11_y sen11_y-sen21_y];
```

```
ro1_x = far*sin(theta_far(s));
rs_x = z1*sen11_x+z2*sen21_x+z3*sen31_x;
ro1_y = 0;
rs_y = z1*sen11_y+z2*sen21_y+z3*sen31_y;
ro1_z = far*cos(theta_far(s));
rs_z = 0;
for mm = 1:Np
r_x(mm,:) = ro1_x-rs_x(mm);
r_y(mm,:) = ro1_y-rs_y(mm);
r_z(mm,:) = ro1_z-rs_z;
end
R1 = sqrt(r_x.^2+r_y.^2+r_z.^2);
green = exp(-1j*k0*R1)./(4*pi*R1);
Green_far = wt'.*green;
for ii = 1:3
if ((index(edge_s(ii)) ~= 0))
sign_se = sign(element_edge(ii,ie));
p1 = second_node(ii);
p2 = first_node(ii);
Lp1_x = e_of_se(1,p1);
Lp1_y = e_of_se(2,p1);
Lp2_x = e_of_se(1,p2);
Lp2_y = e_of_se(2,p2);
Len_p = sqrt(e_of_se(1,ii)^2+e_of_se(2,ii)^2);
psx = Z(:,p2)*Lp1_x-Z(:,p1)*Lp2_x;
psy = Z(:,p2)*Lp1_y-Z(:,p1)*Lp2_y;
sumE_far_x = -1i*omega*m0*psx;
sumE_far_y = -1i*omega*m0*psy;
E_far_x(index(edge_s(ii)),1) = E_far_x(index(edge_s(ii)),1)+
I(index(edge_s(ii)),1)*sign_se*Len_p*sum(Green_far.*sumE_far_y(:,1));
E_far_y(index(edge_s(ii)),1) = E_far_y(index(edge_s(ii)),1)+
I(index(edge_s(ii)),1)*sign_se*Len_p*sum(Green_far.*sumE_far_x(:,1));
end
end
end
counter = counter+1;
Esc3 = [(sum(E_far_x(:,1))) (sum(E_far_y(:,1)))];
E_far(counter)=norm(Esc3);
BRCS(counter)=4*pi*far^2*E_far(counter)^2/E0^2/lamda^2;
E_far_x = zeros(Nunknowns,1);
E_far_y = zeros(Nunknowns,1);
end
```

Τέλος, δίνουμε τον κώδικα για τα γραφήματα της τρισδιάστατης διστατικής διατομής και του μακρινού ηλεκτρικού πεδίου.

```
%Plots for the bistatic RCS
theta2= -90:0.5:90;
figure(1)
plot(theta2,10*log10(BRCS))
axis tight
xlabel('theta')
ylabel('10log10(RCS/ \lambda^2)')
title('Bistatic RCS at \phi = 0 in dB')
figure(2)
plot(theta2,BRCS)
axis tight
xlabel('theta')
ylabel('RCS/ \lambda^2')
title('Bistatic RCS at \phi = 0')
figure(3)
plot(theta2,E_far)
axis tight
xlabel('theta')
ylabel('Escattered')
title('E scattered at \phi = 0')
```

Βιβλιογραφία

[1] Balanis A. Constantine, (2012), Advanced Engineering Electromagnetics, 2nd edition, John Wiley & Sons, INC, United States of America

[2] Cai W. , Yijun Yu and Yuan X. C. , (2002), Singularity treatment and high-order RWG basis functions for integral equations of electromagnetic scattering, International journal for numerical methods in engineering, p. 31-47

[3] Chew Cho Weng, Tong Song, Hu Bin, (2009), Integral equation methods for electromagnetic and elastic waves, first edition, Morgan & Claypool, United States of America

[4] Costabel Martin, (1986), Principles of boundary element methods, Lectures, Technische Hochshul Darmstadt, p. 1-28

[5] Gibson C. Walton, (2008), The method of moments in electromagnetics, Chapman & Hall/ CRC, Taylor & Francis group, United States of America

[6] Harrington F. Roger, (2001), Time-harmonic electromagnetic fields, John Wiley & Sons, INC, United States of America

[7] Jin Jian-Ming, Chew Weng Cho, (2005), Computational electromagnetics: The method of moments, Elsevier Academic Press, Boston

[8] Kiuttu F. Gerald, Ingber A. Jeanine, Ingber S. Marc, Smith T. Brian, (2012), Using the boundary element method to calculate 3-D magnetic fields and potentials, IEEE, p. 1-6

[9] Krommer A. Arnold, Ueberhuber W. Christoph, (1994), Numerical integration on advanced computer systems, Springer-Verlang, Germany

[10] Oijala Yla Pasi, Markkanen Johannes, Jarvenpaa Seppo, Kiminki P. Sami, (2014), Surface and volume integram equation methods for time-harmonic solutions of Maxwell's equations, Progress in electromagnetics research, vol 149, p. 15-44

[11] Volakis L. John, Sertel Kubilay, (2012), Integral equation methods for electromagnetics, Scitech publishing INC, United States of America

[12] Πολυμερίδης Γ. Αθανάσιος, (2008), Επίλυση προβλημάτων σκέδασης και ακτινοβολίας σε επίπεδα στρωματοποιημένα μέσα με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων, Διδακτορική Διατριβή, σελ. 33-57 & 175-183

Ιστότοποι

[1] math.uncc.edu, (2010), Quadrature formulas in two dimensions, Math 5172, Spring 2010

http://math2.uncc.edu/~shaodeng/TEACHING/math5172/Lectures/Lect_15.PDF

Παραρτήματα

A Κώδικας Benchmark

```
function [Jfx_I,Jfx_II] = Benchmark()
% clc
% format long
% clear all
j = 1i;
%
n    = 8; % order of current approximation
n_pp = n;
n_ss = n;
n_ps = n-1;
n_sp = n-1;
a_p = [ 0.412 + j*2.259  -0.365 - j*2.666   0.372 + j*1.657
        0.172 - j*1.931  -1.818 + j*4.995   0.911 - j*3.624
       -2.804 + j*2.101   6.718 - j*6.730  -3.823 + j*4.860
        2.217 - j*0.859  -5.085 + j*3.261   2.955 - j*2.391];

a_p = a_p/10^3;
a_s = [-9.622 + j*10.649   1.149 - j*14.536   6.534 + j*15.652  -5.763 - j*11.140
        7.492 - j*0.105    0.021 + j*5.201   -6.415 - j*9.338    5.686 + j*7.146
       -2.398 - j*1.720    1.509 - j*0.547   -0.545 + j*2.875   -0.502 - j*1.075
        0.265 + j*1.055   -1.003 + j*1.728    1.062 - j*5.947   -0.261 + j*3.714];
a_s = a_s/10^3;
%                         Jsp(p,s)                                  %
% tic
%  -0.95 <= s <= 0.95
s_min = -0.95;
s_max =  0.95;
%  -1    <= p <= 1
p_min = -1;
p_max =  1;
%
Ns = 101;
Np = 101;
%
as = (s_max-s_min)/(Ns-1);
ap = (p_max-p_min)/(Np-1);
%
Jsp = zeros(Np,Ns);
P   = zeros(1,Np);
S   = zeros(1,Ns);
%
for ii = 1:Np
    for jj = 1:Ns
        p = p_min + (ii-1)*ap;
        s = s_min + (jj-1)*as;
        P(1,ii) = p;
        S(1,jj) = s;

        RR = 0; J_SP = 0;
        for iii = 1 : 2 : n_sp
            CC = 0;
```

```
            RR = RR+1;
            for jjj = 3 : 2 : n_pp
                CC = CC+1;
                J_SP = J_SP + a_p(RR,CC) * (p^jjj-p) * s^iii/sqrt(1-s^2);
            end
        end
                Jsp(ii,jj) = J_SP;
    end
end
% Time_Jsp = toc
% figure
% surf(P,S,abs(Jsp));axis tight
% xlabel('p')
% ylabel('s')
% title('|Jsp|')
%                        Jss(p,s)                                %
% tic
%  -1 <= s <= 1
s_min = -1;
s_max =  1;
%  -0.95    <= p <= 0.95
p_min = -0.95;
p_max =  0.95;
Ns = 101;
Np = 101;
as = (s_max-s_min)/(Ns-1);
ap = (p_max-p_min)/(Np-1);
Jss = zeros(Np,Ns);
P   = zeros(1,Np);
S   = zeros(1,Ns);
for ii = 1:Np
    for jj = 1:Ns
        p = p_min + (ii-1)*ap;
        s = s_min + (jj-1)*as;
        P(1,ii) = p;
        S(1,jj) = s;
        RR = 0;
        J_SS = 0;
        for iii = 0 : 2 : n_ps
            CC = 0;
            RR = RR+1;
            for jjj = 2 : 2 : n_ss
                CC = CC+1;
                J_SS = J_SS + a_s(RR,CC) * (s^jjj-1) * p^iii/sqrt(1-p^2);
            end
        end
        Jss(ii,jj) = J_SS;
    end
end
```

```
% Time_Jsp = toc

% figure
% surf(P,S,abs(Jss));axis tight
% xlabel('p')
% ylabel('s')
% title('|Jss|')
%
% figure
% plot(abs(Jss(51,:)))
% hold on
% plot(abs(Jss(:,51)))
% hold off
% axis tight
% xlabel('p')
% ylabel('s')
% title('|Jss|')
lamda       = 1;
Lpatch      = 1*lamda;
E0          = 1;
e0          = 1/(36*pi)*10^-9;
m0          = 4*pi*10^-7;
eta0        = sqrt(m0/e0);
H0          = (1/eta0)*E0;
Nx = 101;
Ny = 101;
ax = Lpatch/(Nx-1);
ay = Lpatch/(Ny-1);
xx = -(Lpatch/2)/lamda : ax/lamda : (Lpatch/2)/lamda;
yy = -(Lpatch/2)/lamda : ay/lamda : (Lpatch/2)/lamda;
% Benchmark plot
Jfx_I  = abs(Jss(51,:));
Jfx_II = abs(Jss(:,51));
figure
surf(xx,yy,abs(Jss/H0));
axis tight
xlabel('x ')
ylabel('y ')
title('JBenchmark/|H_0^i|')
```

B Κώδικες για την αριθμητική ολοκλήρωση των μη ιδιάζοντων ολοκληρωμάτων

B.1 Κώδικας Gauss 1D

```
function [ weight , xtab ] = Gauss_1D ( order )
%
% LEGENDRE_SET sets abscissas and weights for Gauss-Legendre quadrature.
%
%  Discussion:
%
%    The integration interval is [ -1, 1 ].
%
%    The weight function w(x) = 1.0;
%
%    The integral to approximate:
%
%      Integral ( -1 <= X <= 1 ) F(X) dX
%
%    Quadrature rule:
%
%      Sum ( 1 <= I <= ORDER ) WEIGHT(I) * F ( XTAB(I) )
%
%    The quadrature rule will integrate exactly all polynomials up to
%    X**(2*ORDER-1).
%
%    The abscissas of the rule are the zeroes of the Legendre polynomial
%    P(ORDER)(X).
%
%    The integral produced by a Gauss-Legendre rule is equal to the
%    integral of the unique polynomial of degree ORDER-1 which
%    agrees with the function at the ORDER abscissas of the rule.
%
%  Modified:
%
%    26 April 2006
%
%  Author:
%
%    John Burkardt
%
%  Reference:
%    Milton Abramowitz and Irene Stegun,
%    Handbook of Mathematical Functions,
%    National Bureau of Standards, 1964.
%
%    Vladimir Krylov,
%    Approximate Calculation of Integrals,
%    MacMillan, 1962.
%
%    Arthur Stroud and Don Secrest,
%    Gaussian Quadrature Formulas,
%    Prentice Hall, 1966.
%    Daniel Zwillinger, editor,
%    Standard Mathematical Tables and Formulae,
%    30th Edition,
%    CRC Press, 1996.
%  Parameters:
```

```
%    Input, integer ORDER, the order of the rule.
%    ORDER must be between 1 and 32 and 64.
%    Output, real XTAB(ORDER), the abscissas of the rule.
%    Output, real WEIGHT(ORDER), the weights of the rule.
%    The weights are positive, symmetric and should sum to 2.
  if ( order == 1 )
    xtab(1) =   0.0;
    weight(1) = 2.0;
  elseif ( order == 2 )
    xtab(1) = - 0.577350269189625764509148780502;
    xtab(2) =   0.577350269189625764509148780502;
    weight(1) = 1.0;
    weight(2) = 1.0;
  elseif ( order == 3 )
    xtab(1) = - 0.774596669241483377035853079956;
    xtab(2) =   0.0;
    xtab(3) =   0.774596669241483377035853079956;
    weight(1) = 5.0 / 9.0;
    weight(2) = 8.0 / 9.0;
    weight(3) = 5.0 / 9.0;
  elseif ( order == 4 )
    xtab(1) = - 0.861136311594052575223946488893;
    xtab(2) = - 0.339981043584856264802665759103;
    xtab(3) =   0.339981043584856264802665759103;
    xtab(4) =   0.861136311594052575223946488893;
    weight(1) = 0.347854845137453857373063949222;
    weight(2) = 0.652145154862546142626936050778;
    weight(3) = 0.652145154862546142626936050778;
    weight(4) = 0.347854845137453857373063949222;
  elseif ( order == 5 )
    xtab(1) = - 0.906179845938663992797626878299;
    xtab(2) = - 0.538469310105683091036314420700;
    xtab(3) =   0.0;
    xtab(4) =   0.538469310105683091036314420700;
    xtab(5) =   0.906179845938663992797626878299;
    weight(1) = 0.236926885056189087514264040720;
    weight(2) = 0.478628670499366468041291514836;
    weight(3) = 0.568888888888888888888888888889;
    weight(4) = 0.478628670499366468041291514836;
    weight(5) = 0.236926885056189087514264040720;
  elseif ( order == 6 )
    xtab(1) = - 0.932469514203152027812301554494;
    xtab(2) = - 0.661209386466264513661399595020;
    xtab(3) = - 0.238619186083196908630501721681;
    xtab(4) =   0.238619186083196908630501721681;
    xtab(5) =   0.661209386466264513661399595020;
    xtab(6) =   0.932469514203152027812301554494;
     weight(1) = 0.171324492379170345040296142173;
    weight(2) = 0.360761573048138607569833513838;
    weight(3) = 0.467913934572691047389870343990;
    weight(4) = 0.467913934572691047389870343990;
    weight(5) = 0.360761573048138607569833513838;
    weight(6) = 0.171324492379170345040296142173;
   elseif ( order == 7 )
```

```
  xtab(1) = - 0.949107912342758524526189684048;
 xtab(2) = - 0.741531185599394439863864773281;
 xtab(3) = - 0.405845151377397166906606412077;
 xtab(4) =   0.0;
 xtab(5) =   0.405845151377397166906606412077;
 xtab(6) =   0.741531185599394439863864773281;
 xtab(7) =   0.949107912342758524526189684048;
 weight(1) = 0.129484966168869693270611432679;
 weight(2) = 0.279705391489276667901467771424;
 weight(3) = 0.381830050505118944950369775489;
 weight(4) = 0.417959183673469387755102040816;
 weight(5) = 0.381830050505118944950369775489;
 weight(6) = 0.279705391489276667901467771424;
 weight(7) = 0.129484966168869693270611432679;
elseif ( order == 8 )
 xtab(1) = - 0.960289856497536231683560868569;
 xtab(2) = - 0.796666477413626739591553936476;
 xtab(3) = - 0.525532409916328985817739049189;
 xtab(4) = - 0.183434642495649804939476142360;
 xtab(5) =   0.183434642495649804939476142360;
 xtab(6) =   0.525532409916328985817739049189;
 xtab(7) =   0.796666477413626739591553936476;
 xtab(8) =   0.960289856497536231683560868569;
 weight(1) = 0.101228536290376259152531354310;
 weight(2) = 0.222381034453374470544355994426;
 weight(3) = 0.313706645877887287337962201987;
 weight(4) = 0.362683783378361982965150449277;
 weight(5) = 0.362683783378361982965150449277;
 weight(6) = 0.313706645877887287337962201987;
 weight(7) = 0.222381034453374470544355994426;
 weight(8) = 0.101228536290376259152531354310;
elseif ( order == 9 )
 xtab(1) = - 0.968160239507626089835576202904;
 xtab(2) = - 0.836031107326635794299429788070;
 xtab(3) = - 0.613371432700590397308702039341;
 xtab(4) = - 0.324253423403808929038538014643;
 xtab(5) =   0.0;
 xtab(6) =   0.324253423403808929038538014643;
 xtab(7) =   0.613371432700590397308702039341;
 xtab(8) =   0.836031107326635794299429788070;
 xtab(9) =   0.968160239507626089835576202904;
 weight(1) = 0.812743883615744119718921581105E-01;
 weight(2) = 0.180648160694857404058472031243;
 weight(3) = 0.260610696402935462318742869419;
 weight(4) = 0.312347077040002840068630406584;
 weight(5) = 0.330239355001259763164525069287;
 weight(6) = 0.312347077040002840068630406584;
 weight(7) = 0.260610696402935462318742869419;
 weight(8) = 0.180648160694857404058472031243;
 weight(9) = 0.812743883615744119718921581105E-01;
elseif ( order == 10 )
 xtab(1) =  - 0.973906528517171720077964012084;
 xtab(2) =  - 0.865063366688984510732096688423;
 xtab(3) =  - 0.679409568299024406234327365115;
```

```
 xtab(4) =  - 0.433395394129247190799265943166;
 xtab(5) =  - 0.148874338981631210884826001130;
 xtab(6) =    0.148874338981631210884826001130;
 xtab(7) =    0.433395394129247190799265943166;
 xtab(8) =    0.679409568299024406234327365115;
 xtab(9) =    0.865063366688984510732096688423;
 xtab(10) =   0.973906528517171720077964012084;
 weight(1) =  0.666713443086881375935688098933E-01;
 weight(2) =  0.149451349150580593145776339658;
 weight(3) =  0.219086362515982043995534934228;
 weight(4) =  0.269266719309996355091226921569;
 weight(5) =  0.295524224714752870173892994651;
 weight(6) =  0.295524224714752870173892994651;
 weight(7) =  0.269266719309996355091226921569;
 weight(8) =  0.219086362515982043995534934228;
 weight(9) =  0.149451349150580593145776339658;
 weight(10) = 0.666713443086881375935688098933E-01;
elseif ( order == 11 )
 xtab(1) =  - 0.978228658146056992803938001123;
 xtab(2) =  - 0.887062599768095299075157769304;
 xtab(3) =  - 0.730152005574049324093416252031;
 xtab(4) =  - 0.519096129206811815925725669459;
 xtab(5) =  - 0.269543155952344972331531985401;
 xtab(6) =    0.0;
 xtab(7) =    0.269543155952344972331531985401;
 xtab(8) =    0.519096129206811815925725669459;
 xtab(9) =    0.730152005574049324093416252031;
 xtab(10) =   0.887062599768095299075157769304;
 xtab(11) =   0.978228658146056992803938001123;
  weight(1) =  0.556685671161736664827537204425E-01;
 weight(2) =  0.125580369464904624634694299224;
 weight(3) =  0.186290210927734251426097641432;
 weight(4) =  0.233193764591990479918523704843;
 weight(5) =  0.262804544510246662180688869891;
 weight(6) =  0.272925086777900630714483528336;
 weight(7) =  0.262804544510246662180688869891;
 weight(8) =  0.233193764591990479918523704843;
 weight(9) =  0.186290210927734251426097641432;
 weight(10) = 0.125580369464904624634694299224;
 weight(11) = 0.556685671161736664827537204425E-01;
elseif ( order == 12 )
 xtab(1) =  - 0.981560634246719250690549090149;
 xtab(2) =  - 0.904117256370474856678465866119;
 xtab(3) =  - 0.769902674194304687036893833213;
 xtab(4) =  - 0.587317954286617447296702418941;
 xtab(5) =  - 0.367831498998180193752691536644;
 xtab(6) =  - 0.125233408511468915472441369464;
 xtab(7) =    0.125233408511468915472441369464;
 xtab(8) =    0.367831498998180193752691536644;
 xtab(9) =    0.587317954286617447296702418941;
 xtab(10) =   0.769902674194304687036893833213;
 xtab(11) =   0.904117256370474856678465866119;
 xtab(12) =   0.981560634246719250690549090149;
 weight(1) =  0.471753363865118271946159614850E-01;
```

```
  weight(2) =  0.106939325995318430960254718194;
  weight(3) =  0.160078328543346226334652529543;
  weight(4) =  0.203167426723065921749064455810;
  weight(5) =  0.233492536538354808760849898925;
  weight(6) =  0.249147045813402785000562436043;
  weight(7) =  0.249147045813402785000562436043;
  weight(8) =  0.233492536538354808760849898925;
  weight(9) =  0.203167426723065921749064455810;
  weight(10) = 0.160078328543346226334652529543;
  weight(11) = 0.106939325995318430960254718194;
  weight(12) = 0.471753363865118271946159614850E-01;
 elseif ( order == 13 )
  xtab(1) =  - 0.984183054718588149472829448807;
  xtab(2) =  - 0.917598399222977965206547836501;
  xtab(3) =  - 0.801578090733309912794206489583;
  xtab(4) =  - 0.642349339440340220643984606996;
  xtab(5) =  - 0.448492751036446852877912852128;
  xtab(6) =  - 0.230458315955134794065528121098;
  xtab(7) =    0.0;
  xtab(8) =    0.230458315955134794065528121098;
  xtab(9) =    0.448492751036446852877912852128;
  xtab(10) =   0.642349339440340220643984606996;
  xtab(11) =   0.801578090733309912794206489583;
  xtab(12) =   0.917598399222977965206547836501;
  xtab(13) =   0.984183054718588149472829448807;
  weight(1) =  0.404840047653158795200215922010E-01;
  weight(2) =  0.921214998377284479144217759538E-01;
  weight(3) =  0.138873510219787238463601776869;
  weight(4) =  0.178145980761945738280046691996;
  weight(5) =  0.207816047536888502312523219306;
  weight(6) =  0.226283180262897238412090186040;
  weight(7) =  0.232551553230873910194589515269;
  weight(8) =  0.226283180262897238412090186040;
  weight(9) =  0.207816047536888502312523219306;
  weight(10) = 0.178145980761945738280046691996;
  weight(11) = 0.138873510219787238463601776869;
  weight(12) = 0.921214998377284479144217759538E-01;
  weight(13) = 0.404840047653158795200215922010E-01;
elseif ( order == 14 )
   xtab(1) =  - 0.986283808696812338841597266704;
  xtab(2) =  - 0.928434883663573517336391139378;
  xtab(3) =  - 0.827201315069764993189794742650;
  xtab(4) =  - 0.687292904811685470148019803019;
  xtab(5) =  - 0.515248636358154091965290718551;
  xtab(6) =  - 0.319112368927889760435671824168;
  xtab(7) =  - 0.108054948707343662066244650220;
  xtab(8) =    0.108054948707343662066244650220;
  xtab(9) =    0.319112368927889760435671824168;
  xtab(10) =   0.515248636358154091965290718551;
  xtab(11) =   0.687292904811685470148019803019;
  xtab(12) =   0.827201315069764993189794742650;
  xtab(13) =   0.928434883663573517336391139378;
  xtab(14) =   0.986283808696812338841597266704;
```

```
  weight(1) =  0.351194603317518630318328761382E-01;
  weight(2) =  0.801580871597602098056332770629E-01;
  weight(3) =  0.121518570687903184689414809072;
  weight(4) =  0.157203167158193534569601938624;
  weight(5) =  0.185538397477937813741716590125;
  weight(6) =  0.205198463721295603965924065661;
  weight(7) =  0.215263853463157790195876443316;
  weight(8) =  0.215263853463157790195876443316;
  weight(9) =  0.205198463721295603965924065661;
  weight(10) = 0.185538397477937813741716590125;
  weight(11) = 0.157203167158193534569601938624;
  weight(12) = 0.121518570687903184689414809072;
  weight(13) = 0.801580871597602098056332770629E-01;
  weight(14) = 0.351194603317518630318328761382E-01;
elseif ( order == 15 )
   xtab(1) =  - 0.987992518020485428489565718587;
  xtab(2) =  - 0.937273392400705904307758947710;
  xtab(3) =  - 0.848206583410427216200648320774;
  xtab(4) =  - 0.724417731360170047416186054614;
  xtab(5) =  - 0.570972172608538847537226737254;
  xtab(6) =  - 0.394151347077563369897207370981;
  xtab(7) =  - 0.201194093997434522300628303395;
  xtab(8) =    0.0;
  xtab(9) =    0.201194093997434522300628303395;
  xtab(10) =   0.394151347077563369897207370981;
  xtab(11) =   0.570972172608538847537226737254;
  xtab(12) =   0.724417731360170047416186054614;
  xtab(13) =   0.848206583410427216200648320774;
  xtab(14) =   0.937273392400705904307758947710;
  xtab(15) =   0.987992518020485428489565718587;
   weight(1) =  0.307532419961172683546283935772E-01;
  weight(2) =  0.703660474881081247092674164507E-01;
  weight(3) =  0.107159220467171935011869546686;
  weight(4) =  0.139570677926154314447804794511;
  weight(5) =  0.166269205816993933553200860481;
  weight(6) =  0.186161000015562211026800561866;
  weight(7) =  0.198431485327111576456118326444;
  weight(8) =  0.202578241925561272880620199968;
  weight(9) =  0.198431485327111576456118326444;
  weight(10) = 0.186161000015562211026800561866;
  weight(11) = 0.166269205816993933553200860481;
  weight(12) = 0.139570677926154314447804794511;
  weight(13) = 0.107159220467171935011869546686;
  weight(14) = 0.703660474881081247092674164507E-01;
  weight(15) = 0.307532419961172683546283935772E-01;
elseif ( order == 16 )
   xtab(1) =  - 0.989400934991649932596154173450;
  xtab(2) =  - 0.944575023073232576077988415535;
  xtab(3) =  - 0.865631202387831743880467897712;
  xtab(4) =  - 0.755404408355003033895101194847;
  xtab(5) =  - 0.617876244402643748446671764049;
  xtab(6) =  - 0.458016777657227386342419442984;
  xtab(7) =  - 0.281603550779258913230460501460;
  xtab(8) =  - 0.950125098376374401853193354250E-01;
  xtab(9) =    0.950125098376374401853193354250E-01;
```

```
  xtab(10) =   0.281603550779258913230460501460;
  xtab(11) =   0.458016777657227386342419442984;
  xtab(12) =   0.617876244402643748446671764049;
  xtab(13) =   0.755404408355003033895101194847;
  xtab(14) =   0.865631202387831743880467897712;
  xtab(15) =   0.944575023073232576077988415535;
  xtab(16) =   0.989400934991649932596154173450;
  weight(1) =  0.271524594117540948517805724560E-01;
  weight(2) =  0.622535239386478928628438369944E-01;
  weight(3) =  0.951585116824927848099251076022E-01;
  weight(4) =  0.124628971255533872052476282192;
  weight(5) =  0.149595988816576732081501730547;
  weight(6) =  0.169156519395002538189312079030;
  weight(7) =  0.182603415044923588866763667969;
  weight(8) =  0.189450610455068496285396723208;
  weight(9) =  0.189450610455068496285396723208;
  weight(10) = 0.182603415044923588866763667969;
  weight(11) = 0.169156519395002538189312079030;
  weight(12) = 0.149595988816576732081501730547;
  weight(13) = 0.124628971255533872052476282192;
  weight(14) = 0.951585116824927848099251076022E-01;
  weight(15) = 0.622535239386478928628438369944E-01;
  weight(16) = 0.271524594117540948517805724560E-01;
elseif ( order == 17 )
   xtab(1) =  - 0.990575475314417335675434019941;
  xtab(2) =  - 0.950675521768767761222716957896;
  xtab(3) =  - 0.880239153726985902122955694488;
  xtab(4) =  - 0.781514003896801406925230055520;
  xtab(5) =  - 0.657671159216690765850302216643;
  xtab(6) =  - 0.512690537086476967886246568630;
  xtab(7) =  - 0.351231763453876315297185517095;
  xtab(8) =  - 0.178484181495847855850677493654;
  xtab(9) =    0.0;
  xtab(10) =   0.178484181495847855850677493654;
  xtab(11) =   0.351231763453876315297185517095;
  xtab(12) =   0.512690537086476967886246568630;
  xtab(13) =   0.657671159216690765850302216643;
  xtab(14) =   0.781514003896801406925230055520;
  xtab(15) =   0.880239153726985902122955694488;
  xtab(16) =   0.950675521768767761222716957896;
  xtab(17) =   0.990575475314417335675434019941;
  weight(1) =  0.241483028685479319601100262876E-01;
  weight(2) =  0.554595293739872011294401653582E-01;
  weight(3) =  0.850361483171791808835353701911E-01;
  weight(4) =  0.111883847193403971094788385626;
  weight(5) =  0.135136368468525473286319981702;
  weight(6) =  0.154045761076810288081431594802;
  weight(7) =  0.168004102156450044509970663788;
  weight(8) =  0.176562705366992646325270990113;
  weight(9) =  0.179446470356206525458265644262;
  weight(10) = 0.176562705366992646325270990113;
  weight(11) = 0.168004102156450044509970663788;
  weight(12) = 0.154045761076810288081431594802;
  weight(13) = 0.135136368468525473286319981702;
```

```
  weight(14) = 0.111883847193403971094788385626;
  weight(15) = 0.850361483171791808835353701911E-01;
  weight(16) = 0.554595293739872011294401653582E-01;
  weight(17) = 0.241483028685479319601100262876E-01;
elseif ( order == 18 )
  xtab(1) =  - 0.991565168420930946730016004706;
  xtab(2) =  - 0.955823949571397755181195892930;
  xtab(3) =  - 0.892602466497555739206060591127;
  xtab(4) =  - 0.803704958972523115682417455015;
  xtab(5) =  - 0.691687043060353207874891081289;
  xtab(6) =  - 0.559770831073947534607871548525;
  xtab(7) =  - 0.411751161462842646035931793833;
  xtab(8) =  - 0.251886225691505509588972854878;
  xtab(9) =  - 0.847750130417353012422618529358E-01;
  xtab(10) =   0.847750130417353012422618529358E-01;
  xtab(11) =   0.251886225691505509588972854878;
  xtab(12) =   0.411751161462842646035931793833;
  xtab(13) =   0.559770831073947534607871548525;
  xtab(14) =   0.691687043060353207874891081289;
  xtab(15) =   0.803704958972523115682417455015;
  xtab(16) =   0.892602466497555739206060591127;
  xtab(17) =   0.955823949571397755181195892930;
  xtab(18) =   0.991565168420930946730016004706;
  weight(1) =  0.216160135264833103133427102665E-01;
  weight(2) =  0.497145488949697964533349462026E-01;
  weight(3) =  0.764257302548890565291296776166E-01;
  weight(4) =  0.100942044106287165562813984925;
  weight(5) =  0.122555206711478460184519126800;
  weight(6) =  0.140642914670650651204731303752;
  weight(7) =  0.154684675126265244925418003836;
  weight(8) =  0.164276483745832722986053776466;
  weight(9) =  0.169142382963143591840656470135;
  weight(10) = 0.169142382963143591840656470135;
  weight(11) = 0.164276483745832722986053776466;
  weight(12) = 0.154684675126265244925418003836;
  weight(13) = 0.140642914670650651204731303752;
  weight(14) = 0.122555206711478460184519126800;
  weight(15) = 0.100942044106287165562813984925;
  weight(16) = 0.764257302548890565291296776166E-01;
  weight(17) = 0.497145488949697964533349462026E-01;
  weight(18) = 0.216160135264833103133427102665E-01;
elseif ( order == 19 )
  xtab(1) =  - 0.992406843843584403189017670253;
  xtab(2) =  - 0.960208152134830030852778840688;
  xtab(3) =  - 0.903155903614817901642660928532;
  xtab(4) =  - 0.822714656537142824978922486713;
  xtab(5) =  - 0.720966177335229378617095860824;
  xtab(6) =  - 0.600545304661681023469638164946;
  xtab(7) =  - 0.464570741375960945717267148104;
  xtab(8) =  - 0.316564099963629831990117328850;
  xtab(9) =  - 0.160358645640225375868096115741;
  xtab(10) =   0.0;
  xtab(11) =   0.160358645640225375868096115741;
  xtab(12) =   0.316564099963629831990117328850;
```

```
  xtab(13) =   0.464570741375960945717267148104;
  xtab(14) =   0.600545304661681023469638164946;
  xtab(15) =   0.720966177335229378617095860824;
  xtab(16) =   0.822714656537142824978922486713;
  xtab(17) =   0.903155903614817901642660928532;
  xtab(18) =   0.960208152134830030852778840688;
  xtab(19) =   0.992406843843584403189017670253;
  weight(1) =  0.194617882297264770363120414644E-01;
  weight(2) =  0.448142267656996003328381574020E-01;
  weight(3) =  0.690445427376412265807082580060E-01;
  weight(4) =  0.914900216224499994644620941238E-01;
  weight(5) =  0.111566645547333994716023901682;
  weight(6) =  0.128753962539336227675515784857;
  weight(7) =  0.142606702173606611775746109442;
  weight(8) =  0.152766042065859666778855400898;
  weight(9) =  0.158968843393954347649956439465;
  weight(10) = 0.161054449848783695979163625321;
  weight(11) = 0.158968843393954347649956439465;
  weight(12) = 0.152766042065859666778855400898;
  weight(13) = 0.142606702173606611775746109442;
  weight(14) = 0.128753962539336227675515784857;
  weight(15) = 0.111566645547333994716023901682;
  weight(16) = 0.914900216224499994644620941238E-01;
  weight(17) = 0.690445427376412265807082580060E-01;
  weight(18) = 0.448142267656996003328381574020E-01;
  weight(19) = 0.194617882297264770363120414644E-01;
elseif ( order == 20 )
  xtab(1) =  - 0.993128599185094924786122388471;
  xtab(2) =  - 0.963971927277913791267666131197;
  xtab(3) =  - 0.912234428251325905867752441203;
  xtab(4) =  - 0.839116971822218823394529061702;
  xtab(5) =  - 0.746331906460150792614305070356;
  xtab(6) =  - 0.636053680726515025452836696226;
  xtab(7) =  - 0.510867001950827098004364050955;
  xtab(8) =  - 0.373706088715419560672548177025;
  xtab(9) =  - 0.227785851141645078080496195369;
  xtab(10) = - 0.765265211334973337546404093988E-01;
  xtab(11) =   0.765265211334973337546404093988E-01;
  xtab(12) =   0.227785851141645078080496195369;
  xtab(13) =   0.373706088715419560672548177025;
  xtab(14) =   0.510867001950827098004364050955;
  xtab(15) =   0.636053680726515025452836696226;
  xtab(16) =   0.746331906460150792614305070356;
  xtab(17) =   0.839116971822218823394529061702;
  xtab(18) =   0.912234428251325905867752441203;
  xtab(19) =   0.963971927277913791267666131197;
  xtab(20) =   0.993128599185094924786122388471;
  weight(1) =  0.176140071391521183118619623519E-01;
  weight(2) =  0.406014298003869413310399522749E-01;
  weight(3) =  0.626720483341090635695065351870E-01;
  weight(4) =  0.832767415767047487247581432220E-01;
  weight(5) =  0.101930119817240435036750135480;
  weight(6) =  0.118194531961518417312377377711;
  weight(7) =  0.131688638449176626898494499748;
```

```
 weight(8) =  0.142096109318382051329298325067;
 weight(9) =  0.149172986472603746787828737002;
 weight(10) = 0.152753387130725850698084331955;
 weight(11) = 0.152753387130725850698084331955;
 weight(12) = 0.149172986472603746787828737002;
 weight(13) = 0.142096109318382051329298325067;
 weight(14) = 0.131688638449176626898494499748;
 weight(15) = 0.118194531961518417312377377711;
 weight(16) = 0.101930119817240435036750135480;
 weight(17) = 0.832767415767047487247581432220E-01;
 weight(18) = 0.626720483341090635695065351870E-01;
 weight(19) = 0.406014298003869413310399522749E-01;
 weight(20) = 0.176140071391521183118619623519E-01;
elseif ( order == 21 )
 xtab( 1) =  -0.9937521706203896E+00;
 xtab( 2) =  -0.9672268385663063E+00;
 xtab( 3) =  -0.9200993341504008E+00;
 xtab( 4) =  -0.8533633645833173E+00;
 xtab( 5) =  -0.7684399634756779E+00;
 xtab( 6) =  -0.6671388041974123E+00;
 xtab( 7) =  -0.5516188358872198E+00;
 xtab( 8) =  -0.4243421202074388E+00;
 xtab( 9) =  -0.2880213168024011E+00;
 xtab(10) =  -0.1455618541608951E+00;
 xtab(11) =   0.0000000000000000E+00;
 xtab(12) =   0.1455618541608951E+00;
 xtab(13) =   0.2880213168024011E+00;
 xtab(14) =   0.4243421202074388E+00;
 xtab(15) =   0.5516188358872198E+00;
 xtab(16) =   0.6671388041974123E+00;
 xtab(17) =   0.7684399634756779E+00;
 xtab(18) =   0.8533633645833173E+00;
 xtab(19) =   0.9200993341504008E+00;
 xtab(20) =   0.9672268385663063E+00;
 xtab(21) =   0.9937521706203896E+00;
 weight( 1) =   0.1601722825777420E-01;
 weight( 2) =   0.3695378977085242E-01;
 weight( 3) =   0.5713442542685715E-01;
 weight( 4) =   0.7610011362837928E-01;
 weight( 5) =   0.9344442345603393E-01;
 weight( 6) =   0.1087972991671484E+00;
 weight( 7) =   0.1218314160537285E+00;
 weight( 8) =   0.1322689386333373E+00;
 weight( 9) =   0.1398873947910731E+00;
 weight(10) =   0.1445244039899700E+00;
 weight(11) =   0.1460811336496904E+00;
 weight(12) =   0.1445244039899700E+00;
 weight(13) =   0.1398873947910731E+00;
 weight(14) =   0.1322689386333373E+00;
 weight(15) =   0.1218314160537285E+00;
 weight(16) =   0.1087972991671484E+00;
 weight(17) =   0.9344442345603393E-01;
 weight(18) =   0.7610011362837928E-01;
 weight(19) =   0.5713442542685715E-01;
```

```
  weight(20) =   0.3695378977085242E-01;
  weight(21) =   0.1601722825777420E-01;
elseif ( order == 22 )
  xtab( 1) =  -0.9942945854823994E+00;
  xtab( 2) =  -0.9700604978354287E+00;
  xtab( 3) =  -0.9269567721871740E+00;
  xtab( 4) =  -0.8658125777203002E+00;
  xtab( 5) =  -0.7878168059792081E+00;
  xtab( 6) =  -0.6944872631866827E+00;
  xtab( 7) =  -0.5876404035069116E+00;
  xtab( 8) =  -0.4693558379867570E+00;
  xtab( 9) =  -0.3419358208920842E+00;
  xtab(10) =  -0.2078604266882213E+00;
  xtab(11) =  -0.6973927331972223E-01;
  xtab(12) =   0.6973927331972223E-01;
  xtab(13) =   0.2078604266882213E+00;
  xtab(14) =   0.3419358208920842E+00;
  xtab(15) =   0.4693558379867570E+00;
  xtab(16) =   0.5876404035069116E+00;
  xtab(17) =   0.6944872631866827E+00;
  xtab(18) =   0.7878168059792081E+00;
  xtab(19) =   0.8658125777203002E+00;
  xtab(20) =   0.9269567721871740E+00;
  xtab(21) =   0.9700604978354287E+00;
  xtab(22) =   0.9942945854823994E+00;
   weight( 1) =   0.1462799529827203E-01;
  weight( 2) =   0.3377490158481413E-01;
  weight( 3) =   0.5229333515268327E-01;
  weight( 4) =   0.6979646842452038E-01;
  weight( 5) =   0.8594160621706777E-01;
  weight( 6) =   0.1004141444428809E+00;
  weight( 7) =   0.1129322960805392E+00;
  weight( 8) =   0.1232523768105124E+00;
  weight( 9) =   0.1311735047870623E+00;
  weight(10) =   0.1365414983460152E+00;
  weight(11) =   0.1392518728556321E+00;
  weight(12) =   0.1392518728556321E+00;
  weight(13) =   0.1365414983460152E+00;
  weight(14) =   0.1311735047870623E+00;
  weight(15) =   0.1232523768105124E+00;
  weight(16) =   0.1129322960805392E+00;
  weight(17) =   0.1004141444428809E+00;
  weight(18) =   0.8594160621706777E-01;
  weight(19) =   0.6979646842452038E-01;
  weight(20) =   0.5229333515268327E-01;
  weight(21) =   0.3377490158481413E-01;
  weight(22) =   0.1462799529827203E-01;
elseif ( order == 23 )
  xtab( 1) =  -0.9947693349975522E+00;
  xtab( 2) =  -0.9725424712181152E+00;
  xtab( 3) =  -0.9329710868260161E+00;
  xtab( 4) =  -0.8767523582704416E+00;
  xtab( 5) =  -0.8048884016188399E+00;
  xtab( 6) =  -0.7186613631319502E+00;
```

```
  xtab( 7) =  -0.6196098757636461E+00;
  xtab( 8) =  -0.5095014778460075E+00;
  xtab( 9) =  -0.3903010380302908E+00;
  xtab(10) =  -0.2641356809703449E+00;
  xtab(11) =  -0.1332568242984661E+00;
  xtab(12) =   0.0000000000000000E+00;
  xtab(13) =   0.1332568242984661E+00;
  xtab(14) =   0.2641356809703449E+00;
  xtab(15) =   0.3903010380302908E+00;
  xtab(16) =   0.5095014778460075E+00;
  xtab(17) =   0.6196098757636461E+00;
  xtab(18) =   0.7186613631319502E+00;
  xtab(19) =   0.8048884016188399E+00;
  xtab(20) =   0.8767523582704416E+00;
  xtab(21) =   0.9329710868260161E+00;
  xtab(22) =   0.9725424712181152E+00;
  xtab(23) =   0.9947693349975522E+00;
   weight( 1) =   0.1341185948714167E-01;
  weight( 2) =   0.3098800585697944E-01;
  weight( 3) =   0.4803767173108464E-01;
  weight( 4) =   0.6423242140852586E-01;
  weight( 5) =   0.7928141177671895E-01;
  weight( 6) =   0.9291576606003514E-01;
  weight( 7) =   0.1048920914645414E+00;
  weight( 8) =   0.1149966402224114E+00;
  weight( 9) =   0.1230490843067295E+00;
  weight(10) =   0.1289057221880822E+00;
  weight(11) =   0.1324620394046967E+00;
  weight(12) =   0.1336545721861062E+00;
  weight(13) =   0.1324620394046967E+00;
  weight(14) =   0.1289057221880822E+00;
  weight(15) =   0.1230490843067295E+00;
  weight(16) =   0.1149966402224114E+00;
  weight(17) =   0.1048920914645414E+00;
  weight(18) =   0.9291576606003514E-01;
  weight(19) =   0.7928141177671895E-01;
  weight(20) =   0.6423242140852586E-01;
  weight(21) =   0.4803767173108464E-01;
  weight(22) =   0.3098800585697944E-01;
  weight(23) =   0.1341185948714167E-01;
elseif ( order == 24 )
  xtab( 1) =  -0.9951872199970213E+00;
  xtab( 2) =  -0.9747285559713095E+00;
  xtab( 3) =  -0.9382745520027327E+00;
  xtab( 4) =  -0.8864155270044011E+00;
  xtab( 5) =  -0.8200019859739029E+00;
  xtab( 6) =  -0.7401241915785544E+00;
  xtab( 7) =  -0.6480936519369755E+00;
  xtab( 8) =  -0.5454214713888396E+00;
  xtab( 9) =  -0.4337935076260451E+00;
  xtab(10) =  -0.3150426796961634E+00;
  xtab(11) =  -0.1911188674736163E+00;
  xtab(12) =  -0.6405689286260562E-01;
  xtab(13) =   0.6405689286260562E-01;
```

```
  xtab(14) =   0.1911188674736163E+00;
  xtab(15) =   0.3150426796961634E+00;
  xtab(16) =   0.4337935076260451E+00;
  xtab(17) =   0.5454214713888396E+00;
  xtab(18) =   0.6480936519369755E+00;
  xtab(19) =   0.7401241915785544E+00;
  xtab(20) =   0.8200019859739029E+00;
  xtab(21) =   0.8864155270044011E+00;
  xtab(22) =   0.9382745520027327E+00;
  xtab(23) =   0.9747285559713095E+00;
  xtab(24) =   0.9951872199970213E+00;
   weight( 1) =   0.1234122979998730E-01;
  weight( 2) =   0.2853138862893375E-01;
  weight( 3) =   0.4427743881741982E-01;
  weight( 4) =   0.5929858491543672E-01;
  weight( 5) =   0.7334648141108031E-01;
  weight( 6) =   0.8619016153195320E-01;
  weight( 7) =   0.9761865210411380E-01;
  weight( 8) =   0.1074442701159656E+00;
  weight( 9) =   0.1155056680537256E+00;
  weight(10) =   0.1216704729278035E+00;
  weight(11) =   0.1258374563468283E+00;
  weight(12) =   0.1279381953467521E+00;
  weight(13) =   0.1279381953467521E+00;
  weight(14) =   0.1258374563468283E+00;
  weight(15) =   0.1216704729278035E+00;
  weight(16) =   0.1155056680537256E+00;
  weight(17) =   0.1074442701159656E+00;
  weight(18) =   0.9761865210411380E-01;
  weight(19) =   0.8619016153195320E-01;
  weight(20) =   0.7334648141108031E-01;
  weight(21) =   0.5929858491543672E-01;
  weight(22) =   0.4427743881741982E-01;
  weight(23) =   0.2853138862893375E-01;
  weight(24) =   0.1234122979998730E-01;
elseif ( order == 25 )
   xtab( 1) =  -0.9955569697904981E+00;
  xtab( 2) =  -0.9766639214595175E+00;
  xtab( 3) =  -0.9429745712289743E+00;
  xtab( 4) =  -0.8949919978782754E+00;
  xtab( 5) =  -0.8334426287608340E+00;
  xtab( 6) =  -0.7592592630373577E+00;
  xtab( 7) =  -0.6735663684734684E+00;
  xtab( 8) =  -0.5776629302412229E+00;
  xtab( 9) =  -0.4730027314457150E+00;
  xtab(10) =  -0.3611723058093879E+00;
  xtab(11) =  -0.2438668837209884E+00;
  xtab(12) =  -0.1228646926107104E+00;
  xtab(13) =   0.0000000000000000E+00;
  xtab(14) =   0.1228646926107104E+00;
  xtab(15) =   0.2438668837209884E+00;
  xtab(16) =   0.3611723058093879E+00;
  xtab(17) =   0.4730027314457150E+00;
  xtab(18) =   0.5776629302412229E+00;
  xtab(19) =   0.6735663684734684E+00;
```

```
 xtab(20) =   0.7592592630373577E+00;
 xtab(21) =   0.8334426287608340E+00;
 xtab(22) =   0.8949919978782754E+00;
 xtab(23) =   0.9429745712289743E+00;
 xtab(24) =   0.9766639214595175E+00;
 xtab(25) =   0.9955569697904981E+00;
 weight( 1) =   0.1139379850102617E-01;
 weight( 2) =   0.2635498661503214E-01;
 weight( 3) =   0.4093915670130639E-01;
 weight( 4) =   0.5490469597583517E-01;
 weight( 5) =   0.6803833381235694E-01;
 weight( 6) =   0.8014070033500101E-01;
 weight( 7) =   0.9102826198296370E-01;
 weight( 8) =   0.1005359490670506E+00;
 weight( 9) =   0.1085196244742637E+00;
 weight(10) =   0.1148582591457116E+00;
 weight(11) =   0.1194557635357847E+00;
 weight(12) =   0.1222424429903101E+00;
 weight(13) =   0.1231760537267154E+00;
 weight(14) =   0.1222424429903101E+00;
 weight(15) =   0.1194557635357847E+00;
 weight(16) =   0.1148582591457116E+00;
 weight(17) =   0.1085196244742637E+00;
 weight(18) =   0.1005359490670506E+00;
 weight(19) =   0.9102826198296370E-01;
 weight(20) =   0.8014070033500101E-01;
 weight(21) =   0.6803833381235694E-01;
 weight(22) =   0.5490469597583517E-01;
 weight(23) =   0.4093915670130639E-01;
 weight(24) =   0.2635498661503214E-01;
 weight(25) =   0.1139379850102617E-01;
elseif ( order == 26 )
 xtab( 1) =  -0.9958857011456169E+00;
 xtab( 2) =  -0.9783854459564710E+00;
 xtab( 3) =  -0.9471590666617142E+00;
 xtab( 4) =  -0.9026378619843071E+00;
 xtab( 5) =  -0.8454459427884981E+00;
 xtab( 6) =  -0.7763859488206789E+00;
 xtab( 7) =  -0.6964272604199573E+00;
 xtab( 8) =  -0.6066922930176181E+00;
 xtab( 9) =  -0.5084407148245057E+00;
 xtab(10) =  -0.4030517551234863E+00;
 xtab(11) =  -0.2920048394859569E+00;
 xtab(12) =  -0.1768588203568902E+00;
 xtab(13) =  -0.5923009342931320E-01;
 xtab(14) =   0.5923009342931320E-01;
 xtab(15) =   0.1768588203568902E+00;
 xtab(16) =   0.2920048394859569E+00;
 xtab(17) =   0.4030517551234863E+00;
 xtab(18) =   0.5084407148245057E+00;
 xtab(19) =   0.6066922930176181E+00;
 xtab(20) =   0.6964272604199573E+00;
 xtab(21) =   0.7763859488206789E+00;
 xtab(22) =   0.8454459427884981E+00;
```

```
 xtab(23) =   0.9026378619843071E+00;
 xtab(24) =   0.9471590666617142E+00;
 xtab(25) =   0.9783854459564710E+00;
 xtab(26) =   0.9958857011456169E+00;
 weight( 1) =   0.1055137261734304E-01;
 weight( 2) =   0.2441785109263173E-01;
 weight( 3) =   0.3796238329436282E-01;
 weight( 4) =   0.5097582529714782E-01;
 weight( 5) =   0.6327404632957484E-01;
 weight( 6) =   0.7468414976565967E-01;
 weight( 7) =   0.8504589431348521E-01;
 weight( 8) =   0.9421380035591416E-01;
 weight( 9) =   0.1020591610944255E+00;
 weight(10) =   0.1084718405285765E+00;
 weight(11) =   0.1133618165463197E+00;
 weight(12) =   0.1166604434852967E+00;
 weight(13) =   0.1183214152792622E+00;
 weight(14) =   0.1183214152792622E+00;
 weight(15) =   0.1166604434852967E+00;
 weight(16) =   0.1133618165463197E+00;
 weight(17) =   0.1084718405285765E+00;
 weight(18) =   0.1020591610944255E+00;
 weight(19) =   0.9421380035591416E-01;
 weight(20) =   0.8504589431348521E-01;
 weight(21) =   0.7468414976565967E-01;
 weight(22) =   0.6327404632957484E-01;
 weight(23) =   0.5097582529714782E-01;
 weight(24) =   0.3796238329436282E-01;
 weight(25) =   0.2441785109263173E-01;
 weight(26) =   0.1055137261734304E-01;
elseif ( order == 27 )
  xtab( 1) =  -0.9961792628889886E+00;
 xtab( 2) =  -0.9799234759615012E+00;
 xtab( 3) =  -0.9509005578147051E+00;
 xtab( 4) =  -0.9094823206774911E+00;
 xtab( 5) =  -0.8562079080182945E+00;
 xtab( 6) =  -0.7917716390705082E+00;
 xtab( 7) =  -0.7170134737394237E+00;
 xtab( 8) =  -0.6329079719464952E+00;
 xtab( 9) =  -0.5405515645794569E+00;
 xtab(10) =  -0.4411482517500269E+00;
 xtab(11) =  -0.3359939036385089E+00;
 xtab(12) =  -0.2264593654395369E+00;
 xtab(13) =  -0.1139725856095300E+00;
 xtab(14) =   0.0000000000000000E+00;
 xtab(15) =   0.1139725856095300E+00;
 xtab(16) =   0.2264593654395369E+00;
 xtab(17) =   0.3359939036385089E+00;
 xtab(18) =   0.4411482517500269E+00;
 xtab(19) =   0.5405515645794569E+00;
 xtab(20) =   0.6329079719464952E+00;
 xtab(21) =   0.7170134737394237E+00;
 xtab(22) =   0.7917716390705082E+00;
```

```
  xtab(23) =   0.8562079080182945E+00;
  xtab(24) =   0.9094823206774911E+00;
  xtab(25) =   0.9509005578147051E+00;
  xtab(26) =   0.9799234759615012E+00;
  xtab(27) =   0.9961792628889886E+00;
  weight( 1) =   0.9798996051294232E-02;
  weight( 2) =   0.2268623159618062E-01;
  weight( 3) =   0.3529705375741969E-01;
  weight( 4) =   0.4744941252061504E-01;
  weight( 5) =   0.5898353685983366E-01;
  weight( 6) =   0.6974882376624561E-01;
  weight( 7) =   0.7960486777305781E-01;
  weight( 8) =   0.8842315854375689E-01;
  weight( 9) =   0.9608872737002842E-01;
  weight(10) =   0.1025016378177459E+00;
  weight(11) =   0.1075782857885332E+00;
  weight(12) =   0.1112524883568452E+00;
  weight(13) =   0.1134763461089651E+00;
  weight(14) =   0.1142208673789570E+00;
  weight(15) =   0.1134763461089651E+00;
  weight(16) =   0.1112524883568452E+00;
  weight(17) =   0.1075782857885332E+00;
  weight(18) =   0.1025016378177459E+00;
  weight(19) =   0.9608872737002842E-01;
  weight(20) =   0.8842315854375689E-01;
  weight(21) =   0.7960486777305781E-01;
  weight(22) =   0.6974882376624561E-01;
  weight(23) =   0.5898353685983366E-01;
  weight(24) =   0.4744941252061504E-01;
  weight(25) =   0.3529705375741969E-01;
  weight(26) =   0.2268623159618062E-01;
  weight(27) =   0.9798996051294232E-02;
elseif ( order == 28 )
   xtab( 1) =  -0.9964424975739544E+00;
  xtab( 2) =  -0.9813031653708728E+00;
  xtab( 3) =  -0.9542592806289382E+00;
  xtab( 4) =  -0.9156330263921321E+00;
  xtab( 5) =  -0.8658925225743951E+00;
  xtab( 6) =  -0.8056413709171791E+00;
  xtab( 7) =  -0.7356108780136318E+00;
  xtab( 8) =  -0.6566510940388650E+00;
  xtab( 9) =  -0.5697204718114017E+00;
  xtab(10) =  -0.4758742249551183E+00;
  xtab(11) =  -0.3762515160890787E+00;
  xtab(12) =  -0.2720616276351780E+00;
  xtab(13) =  -0.1645692821333808E+00;
  xtab(14) =  -0.5507928988403427E-01;
  xtab(15) =   0.5507928988403427E-01;
  xtab(16) =   0.1645692821333808E+00;
  xtab(17) =   0.2720616276351780E+00;
  xtab(18) =   0.3762515160890787E+00;
  xtab(19) =   0.4758742249551183E+00;
  xtab(20) =   0.5697204718114017E+00;
  xtab(21) =   0.6566510940388650E+00;
```

```
  xtab(22) =   0.7356108780136318E+00;
  xtab(23) =   0.8056413709171791E+00;
  xtab(24) =   0.8658925225743951E+00;
  xtab(25) =   0.9156330263921321E+00;
  xtab(26) =   0.9542592806289382E+00;
  xtab(27) =   0.9813031653708728E+00;
  xtab(28) =   0.9964424975739544E+00;
   weight( 1) =   0.9124282593094672E-02;
  weight( 2) =   0.2113211259277118E-01;
  weight( 3) =   0.3290142778230441E-01;
  weight( 4) =   0.4427293475900429E-01;
  weight( 5) =   0.5510734567571667E-01;
  weight( 6) =   0.6527292396699959E-01;
  weight( 7) =   0.7464621423456877E-01;
  weight( 8) =   0.8311341722890127E-01;
  weight( 9) =   0.9057174439303289E-01;
  weight(10) =   0.9693065799792999E-01;
  weight(11) =   0.1021129675780608E+00;
  weight(12) =   0.1060557659228464E+00;
  weight(13) =   0.1087111922582942E+00;
  weight(14) =   0.1100470130164752E+00;
  weight(15) =   0.1100470130164752E+00;
  weight(16) =   0.1087111922582942E+00;
  weight(17) =   0.1060557659228464E+00;
  weight(18) =   0.1021129675780608E+00;
  weight(19) =   0.9693065799792999E-01;
  weight(20) =   0.9057174439303289E-01;
  weight(21) =   0.8311341722890127E-01;
  weight(22) =   0.7464621423456877E-01;
  weight(23) =   0.6527292396699959E-01;
  weight(24) =   0.5510734567571667E-01;
  weight(25) =   0.4427293475900429E-01;
  weight(26) =   0.3290142778230441E-01;
  weight(27) =   0.2113211259277118E-01;
  weight(28) =   0.9124282593094672E-02;
elseif ( order == 29 )
  xtab( 1) =  -0.9966794422605966E+00;
  xtab( 2) =  -0.9825455052614132E+00;
  xtab( 3) =  -0.9572855957780877E+00;
  xtab( 4) =  -0.9211802329530588E+00;
  xtab( 5) =  -0.8746378049201028E+00;
  xtab( 6) =  -0.8181854876152524E+00;
  xtab( 7) =  -0.7524628517344771E+00;
  xtab( 8) =  -0.6782145376026865E+00;
  xtab( 9) =  -0.5962817971382278E+00;
  xtab(10) =  -0.5075929551242276E+00;
  xtab(11) =  -0.4131528881740087E+00;
  xtab(12) =  -0.3140316378676399E+00;
  xtab(13) =  -0.2113522861660011E+00;
  xtab(14) =  -0.1062782301326792E+00;
  xtab(15) =   0.0000000000000000E+00;
  xtab(16) =   0.1062782301326792E+00;
  xtab(17) =   0.2113522861660011E+00;
  xtab(18) =   0.3140316378676399E+00;
```

```
 xtab(19) =   0.4131528881740087E+00;
 xtab(20) =   0.5075929551242276E+00;
 xtab(21) =   0.5962817971382278E+00;
 xtab(22) =   0.6782145376026865E+00;
 xtab(23) =   0.7524628517344771E+00;
 xtab(24) =   0.8181854876152524E+00;
 xtab(25) =   0.8746378049201028E+00;
 xtab(26) =   0.9211802329530588E+00;
 xtab(27) =   0.9572855957780877E+00;
 xtab(28) =   0.9825455052614132E+00;
 xtab(29) =   0.9966794422605966E+00;
 weight( 1) =   0.8516903878746365E-02;
 weight( 2) =   0.1973208505612276E-01;
 weight( 3) =   0.3074049220209360E-01;
 weight( 4) =   0.4140206251868281E-01;
 weight( 5) =   0.5159482690249799E-01;
 weight( 6) =   0.6120309065707916E-01;
 weight( 7) =   0.7011793325505125E-01;
 weight( 8) =   0.7823832713576385E-01;
 weight( 9) =   0.8547225736617248E-01;
 weight(10) =   0.9173775713925882E-01;
 weight(11) =   0.9696383409440862E-01;
 weight(12) =   0.1010912737599150E+00;
 weight(13) =   0.1040733100777293E+00;
 weight(14) =   0.1058761550973210E+00;
 weight(15) =   0.1064793817183143E+00;
 weight(16) =   0.1058761550973210E+00;
 weight(17) =   0.1040733100777293E+00;
 weight(18) =   0.1010912737599150E+00;
 weight(19) =   0.9696383409440862E-01;
 weight(20) =   0.9173775713925882E-01;
 weight(21) =   0.8547225736617248E-01;
 weight(22) =   0.7823832713576385E-01;
 weight(23) =   0.7011793325505125E-01;
 weight(24) =   0.6120309065707916E-01;
 weight(25) =   0.5159482690249799E-01;
 weight(26) =   0.4140206251868281E-01;
 weight(27) =   0.3074049220209360E-01;
 weight(28) =   0.1973208505612276E-01;
 weight(29) =   0.8516903878746365E-02;
elseif ( order == 30 )
 xtab( 1) =  -0.9968934840746495E+00;
 xtab( 2) =  -0.9836681232797472E+00;
 xtab( 3) =  -0.9600218649683075E+00;
 xtab( 4) =  -0.9262000474292743E+00;
 xtab( 5) =  -0.8825605357920526E+00;
 xtab( 6) =  -0.8295657623827684E+00;
 xtab( 7) =  -0.7677774321048262E+00;
 xtab( 8) =  -0.6978504947933158E+00;
 xtab( 9) =  -0.6205261829892429E+00;
 xtab(10) =  -0.5366241481420199E+00;
 xtab(11) =  -0.4470337695380892E+00;
 xtab(12) =  -0.3527047255308781E+00;
 xtab(13) =  -0.2546369261678899E+00;
```

```
 xtab(14) =  -0.1538699136085835E+00;
 xtab(15) =  -0.5147184255531770E-01;
 xtab(16) =   0.5147184255531770E-01;
 xtab(17) =   0.1538699136085835E+00;
 xtab(18) =   0.2546369261678899E+00;
 xtab(19) =   0.3527047255308781E+00;
 xtab(20) =   0.4470337695380892E+00;
 xtab(21) =   0.5366241481420199E+00;
 xtab(22) =   0.6205261829892429E+00;
 xtab(23) =   0.6978504947933158E+00;
 xtab(24) =   0.7677774321048262E+00;
 xtab(25) =   0.8295657623827684E+00;
 xtab(26) =   0.8825605357920526E+00;
 xtab(27) =   0.9262000474292743E+00;
 xtab(28) =   0.9600218649683075E+00;
 xtab(29) =   0.9836681232797472E+00;
 xtab(30) =   0.9968934840746495E+00;
 weight( 1) =   0.7968192496166648E-02;
 weight( 2) =   0.1846646831109099E-01;
 weight( 3) =   0.2878470788332330E-01;
 weight( 4) =   0.3879919256962704E-01;
 weight( 5) =   0.4840267283059405E-01;
 weight( 6) =   0.5749315621761905E-01;
 weight( 7) =   0.6597422988218052E-01;
 weight( 8) =   0.7375597473770516E-01;
 weight( 9) =   0.8075589522942023E-01;
 weight(10) =   0.8689978720108314E-01;
 weight(11) =   0.9212252223778619E-01;
 weight(12) =   0.9636873717464424E-01;
 weight(13) =   0.9959342058679524E-01;
 weight(14) =   0.1017623897484056E+00;
 weight(15) =   0.1028526528935587E+00;
 weight(16) =   0.1028526528935587E+00;
 weight(17) =   0.1017623897484056E+00;
 weight(18) =   0.9959342058679524E-01;
 weight(19) =   0.9636873717464424E-01;
 weight(20) =   0.9212252223778619E-01;
 weight(21) =   0.8689978720108314E-01;
 weight(22) =   0.8075589522942023E-01;
 weight(23) =   0.7375597473770516E-01;
 weight(24) =   0.6597422988218052E-01;
 weight(25) =   0.5749315621761905E-01;
 weight(26) =   0.4840267283059405E-01;
 weight(27) =   0.3879919256962704E-01;
 weight(28) =   0.2878470788332330E-01;
 weight(29) =   0.1846646831109099E-01;
 weight(30) =   0.7968192496166648E-02;
elseif ( order == 31 )
  xtab( 1) =  -0.9970874818194770E+00;
 xtab( 2) =  -0.9846859096651525E+00;
 xtab( 3) =  -0.9625039250929497E+00;
 xtab( 4) =  -0.9307569978966481E+00;
 xtab( 5) =  -0.8897600299482711E+00;
 xtab( 6) =  -0.8399203201462674E+00;
```

```
xtab( 7) =  -0.7817331484166250E+00;
xtab( 8) =  -0.7157767845868533E+00;
xtab( 9) =  -0.6427067229242603E+00;
xtab(10) =  -0.5632491614071492E+00;
xtab(11) =  -0.4781937820449025E+00;
xtab(12) =  -0.3883859016082329E+00;
xtab(13) =  -0.2947180699817016E+00;
xtab(14) =  -0.1981211993355706E+00;
xtab(15) =  -0.9955531215234151E-01;
xtab(16) =   0.0000000000000000E+00;
xtab(17) =   0.9955531215234151E-01;
xtab(18) =   0.1981211993355706E+00;
xtab(19) =   0.2947180699817016E+00;
xtab(20) =   0.3883859016082329E+00;
xtab(21) =   0.4781937820449025E+00;
xtab(22) =   0.5632491614071492E+00;
xtab(23) =   0.6427067229242603E+00;
xtab(24) =   0.7157767845868533E+00;
xtab(25) =   0.7817331484166250E+00;
xtab(26) =   0.8399203201462674E+00;
xtab(27) =   0.8897600299482711E+00;
xtab(28) =   0.9307569978966481E+00;
xtab(29) =   0.9625039250929497E+00;
xtab(30) =   0.9846859096651525E+00;
xtab(31) =   0.9970874818194770E+00;
 weight( 1) =   0.7470831579248783E-02;
weight( 2) =   0.1731862079031058E-01;
weight( 3) =   0.2700901918497941E-01;
weight( 4) =   0.3643227391238550E-01;
weight( 5) =   0.4549370752720110E-01;
weight( 6) =   0.5410308242491679E-01;
weight( 7) =   0.6217478656102854E-01;
weight( 8) =   0.6962858323541037E-01;
weight( 9) =   0.7639038659877659E-01;
weight(10) =   0.8239299176158929E-01;
weight(11) =   0.8757674060847785E-01;
weight(12) =   0.9189011389364142E-01;
weight(13) =   0.9529024291231955E-01;
weight(14) =   0.9774333538632875E-01;
weight(15) =   0.9922501122667234E-01;
weight(16) =   0.9972054479342644E-01;
weight(17) =   0.9922501122667234E-01;
weight(18) =   0.9774333538632875E-01;
weight(19) =   0.9529024291231955E-01;
weight(20) =   0.9189011389364142E-01;
weight(21) =   0.8757674060847785E-01;
weight(22) =   0.8239299176158929E-01;
weight(23) =   0.7639038659877659E-01;
weight(24) =   0.6962858323541037E-01;
weight(25) =   0.6217478656102854E-01;
weight(26) =   0.5410308242491679E-01;
weight(27) =   0.4549370752720110E-01;
weight(28) =   0.3643227391238550E-01;
weight(29) =   0.2700901918497941E-01;
```

```
 weight(30) =   0.1731862079031058E-01;
 weight(31) =   0.7470831579248783E-02;
elseif ( order == 32 )
  xtab(1) =  - 0.997263861849481563544981128665;
 xtab(2) =  - 0.985611511545268335400175044631;
 xtab(3) =  - 0.964762255587506430773811928118;
 xtab(4) =  - 0.934906075937739689170919134835;
 xtab(5) =  - 0.896321155766052123965307243719;
 xtab(6) =  - 0.849367613732569970133693004968;
 xtab(7) =  - 0.794483795967942406963097298970;
 xtab(8) =  - 0.732182118740289680387426665091;
 xtab(9) =  - 0.663044266930215200975115168663;
 xtab(10) = - 0.587715757240762329040745476402;
 xtab(11) = - 0.506899908932229390023747474378;
 xtab(12) = - 0.421351276130635345364119436172;
 xtab(13) = - 0.331868602282127649779916805730;
 xtab(14) = - 0.239287362252137074544603209166;
 xtab(15) = - 0.144471961582796493485186373599;
 xtab(16) = - 0.483076656877383162348125704405E-01;
 xtab(17) =   0.483076656877383162348125704405E-01;
 xtab(18) =   0.144471961582796493485186373599;
 xtab(19) =   0.239287362252137074544603209166;
 xtab(20) =   0.331868602282127649779916805730;
 xtab(21) =   0.421351276130635345364119436172;
 xtab(22) =   0.506899908932229390023747474378;
 xtab(23) =   0.587715757240762329040745476402;
 xtab(24) =   0.663044266930215200975115168663;
 xtab(25) =   0.732182118740289680387426665091;
 xtab(26) =   0.794483795967942406963097298970;
 xtab(27) =   0.849367613732569970133693004968;
 xtab(28) =   0.896321155766052123965307243719;
 xtab(29) =   0.934906075937739689170919134835;
 xtab(30) =   0.964762255587506430773811928118;
 xtab(31) =   0.985611511545268335400175044631;
 xtab(32) =   0.997263861849481563544981128665;
  weight(1) =  0.701861000947009660040706373885E-02;
 weight(2) =  0.162743947309056706051705622064E-01;
 weight(3) =  0.253920653092620594557525897892E-01;
 weight(4) =  0.342738629130214331026877322524E-01;
 weight(5) =  0.428358980222266806568786466061E-01;
 weight(6) =  0.509980592623761761961632446895E-01;
 weight(7) =  0.586840934785355471452836373002E-01;
 weight(8) =  0.658222227763618468376500637069E-01;
 weight(9) =  0.723457941088485062253993564785E-01;
 weight(10) = 0.781938957870703064717409188283E-01;
 weight(11) = 0.833119242269467552221990746043E-01;
 weight(12) = 0.876520930044038111427714627518E-01;
 weight(13) = 0.911738786957638847128685771116E-01;
 weight(14) = 0.938443990808045656391802376681E-01;
 weight(15) = 0.956387200792748594190820022041E-01;
 weight(16) = 0.965400885147278005667648300636E-01;
 weight(17) = 0.965400885147278005667648300636E-01;
 weight(18) = 0.956387200792748594190820022041E-01;
 weight(19) = 0.938443990808045656391802376681E-01;
```

```
   weight(20) = 0.911738786957638847128685771116E-01;
   weight(21) = 0.876520930044038111427714627518E-01;
   weight(22) = 0.833119242269467552221990746043E-01;
   weight(23) = 0.781938957870703064717409188283E-01;
   weight(24) = 0.723457941088485062253993564785E-01;
   weight(25) = 0.658222227763618468376500637069E-01;
   weight(26) = 0.586840934785355471452836373002E-01;
   weight(27) = 0.509980592623761761961632446895E-01;
   weight(28) = 0.428358980222266806568786466061E-01;
   weight(29) = 0.342738629130214331026877322524E-01;
   weight(30) = 0.253920653092620594557525897892E-01;
   weight(31) = 0.162743947309056706051705622064E-01;
   weight(32) = 0.701861000947009660040706373885E-02;
 elseif ( order == 64 )
   xtab(1) =  - 0.999305041735772139456905624346;
   xtab(2) =  - 0.996340116771955279346924500676;
   xtab(3) =  - 0.991013371476744320739382383443;
   xtab(4) =  - 0.983336253884625956931299302157;
   xtab(5) =  - 0.973326827789910963741853507352;
   xtab(6) =  - 0.961008799652053718918614121897;
   xtab(7) =  - 0.946411374858402816062481491347;
   xtab(8) =  - 0.929569172131939575821490154559;
   xtab(9) =  - 0.910522137078502805756380668008;
   xtab(10) = - 0.889315445995114105853404038273;
   xtab(11) = - 0.865999398154092819760783385070;
   xtab(12) = - 0.840629296252580362751691544696;
   xtab(13) = - 0.813265315122797559741923338086;
   xtab(14) = - 0.783972358943341407610220525214;
   xtab(15) = - 0.752819907260531896611863774886;
   xtab(16) = - 0.719881850171610826848940217832;
   xtab(17) = - 0.685236313054233242563558371031;
   xtab(18) = - 0.648965471254657339857761231993;
   xtab(19) = - 0.611155355172393250248852971019;
   xtab(20) = - 0.571895646202634034283878116659;
   xtab(21) = - 0.531279464019894545658013903544;
   xtab(22) = - 0.489403145707052957478526307022;
   xtab(23) = - 0.446366017253464087984947714759;
   xtab(24) = - 0.402270157963991603695766771260;
   xtab(25) = - 0.357220158337668115950442615046;
   xtab(26) = - 0.311322871990210956157512698560;
   xtab(27) = - 0.264687162208767416373964172510;
   xtab(28) = - 0.217423643740007084149648748989;
   xtab(29) = - 0.169644420423992818037313629748;
   xtab(30) = - 0.121462819296120554470376463492;
   xtab(31) = - 0.729931217877990394495429419403E-01;
   xtab(32) = - 0.243502926634244325089558428537E-01;
   xtab(33) =   0.243502926634244325089558428537E-01;
   xtab(34) =   0.729931217877990394495429419403E-01;
   xtab(35) =   0.121462819296120554470376463492;
   xtab(36) =   0.169644420423992818037313629748;
   xtab(37) =   0.217423643740007084149648748989;
   xtab(38) =   0.264687162208767416373964172510;
   xtab(39) =   0.311322871990210956157512698560;
   xtab(40) =   0.357220158337668115950442615046;
```

```
xtab(41) =   0.402270157963991603695766771260;
xtab(42) =   0.446366017253464087984947714759;
xtab(43) =   0.489403145707052957478526307022;
xtab(44) =   0.531279464019894545658013903544;
xtab(45) =   0.571895646202634034283878116659;
xtab(46) =   0.611155355172393250248852971019;
xtab(47) =   0.648965471254657339857761231993;
xtab(48) =   0.685236313054233242563558371031;
xtab(49) =   0.719881850171610826848940217832;
xtab(50) =   0.752819907260531896611863774886;
xtab(51) =   0.783972358943341407610220525214;
xtab(52) =   0.813265315122797559741923338086;
xtab(53) =   0.840629296252580362751691544696;
xtab(54) =   0.865999398154092819760783385070;
xtab(55) =   0.889315445995114105853404038273;
xtab(56) =   0.910522137078502805756380668008;
xtab(57) =   0.929569172131939575821490154559;
xtab(58) =   0.946411374858402816062481491347;
xtab(59) =   0.961008799652053718918614121897;
xtab(60) =   0.973326827789910963741853507352;
xtab(61) =   0.983336253884625956931299302157;
xtab(62) =   0.991013371476744320739382383443;
xtab(63) =   0.996340116771955279346924500676;
xtab(64) =   0.999305041735772139456905624346;
 weight(1) =  0.178328072169643294729607914497E-02;
weight(2) =  0.414703326056246763528753572855E-02;
weight(3) =  0.650445796897836285611736039998E-02;
weight(4) =  0.884675982636394772303091465973E-02;
weight(5) =  0.111681394601311288185904930192E-01;
weight(6) =  0.134630478967186425980607666860E-01;
weight(7) =  0.157260304760247193219659952975E-01;
weight(8) =  0.179517157756973430850453020011E-01;
weight(9) =  0.201348231535302093723403167285E-01;
weight(10) = 0.222701738083832541592983303842E-01;
weight(11) = 0.243527025687108733381775504091E-01;
weight(12) = 0.263774697150546586716917926252E-01;
weight(13) = 0.283396726142594832275113052002E-01;
weight(14) = 0.302346570724024788679740598195E-01;
weight(15) = 0.320579283548515535854675043479E-01;
weight(16) = 0.338051618371416093915654821107E-01;
weight(17) = 0.354722132568823838106931467152E-01;
weight(18) = 0.370551285402400460404151018096E-01;
weight(19) = 0.385501531786156291289624969468E-01;
weight(20) = 0.399537411327203413866569261283E-01;
weight(21) = 0.412625632426235286101562974736E-01;
weight(22) = 0.424735151236535890073397679088E-01;
weight(23) = 0.435837245293234533768278609737E-01;
weight(24) = 0.445905581637565630601347100309E-01;
weight(25) = 0.454916279274181444797709969713E-01;
weight(26) = 0.462847965813144172959532492323E-01;
weight(27) = 0.469681828162100173253262857546E-01;
weight(28) = 0.475401657148303086622822069442E-01;
weight(29) = 0.479993885964583077281261798713E-01;
weight(30) = 0.483447622348029571697695271580E-01;
```

B.2 Gauss 2D

```
function [Npg,wt,Z,z1,z2,z3] = Gauss_2D(Np)
format long
 [w,z] = Gauss_1D (Np);
ctr=1;
for I=1:Np for J=1:Np
        W = w(I)*w(J);
        x = z(I);
        y = z(J);
        zi = (1-y)/8;
        Wi(I,J) = W*zi;
        Z2(I,J) = (1+y)/2;
        Z3(I,J) = (1-Z2(I,J))*(1+x)/2;
        Z1(I,J) = 1-Z2(I,J)-Z3(I,J);
        wt(ctr)=Wi(I,J);
        z1(ctr)=Z1(I,J);
        z2(ctr)=Z2(I,J);
        z3(ctr)=Z3(I,J);
        ctr=ctr+1;
end;  end
Ng=ctr-1;
Npg=Ng;
Z=[z1' z2' z3'];
```

Γ Κώδικας Rossi για τους ιδιάζοντες όρους

```
function [I_sing0,I_sing] = Rossi(XX,YY,Np,Npp,wt,Z,z1,z2,z3)
format long;
j = sqrt(-1);
global k0
%
xo1 = XX(1,1); yo1 = YY(1,1);
xo2 = XX(2,1); yo2 = YY(2,1);
xo3 = XX(3,1); yo3 = YY(3,1);
%%%%%%%%%%%
Asing0 = (xo2-xo1)^2+(yo2-yo1)^2;
Asing1 = 2*((xo2-xo1)*(xo3-xo1)+(yo2-yo1)*(yo3-yo1));
Asing2 = (xo3-xo1)^2+(yo3-yo1)^2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Ap = (1/2)*abs(det([xo1 yo1 1
                    xo2 yo2 1
                    xo3 yo3 1]));
Jp = 2*Ap;
% vertices of the master triangle
u1 = 0;  v1 = 0;
u2 = 1;  v2 = 0;
u3 = 0;  v3 = 1;
%
Integral_1=zeros(Np,1);
Integral_2=zeros(Np,1);
Integral_3=zeros(Np,1);
for ks=1:Np
% observation point
uo = z2(ks); vo = z3(ks);
%
p = zeros(2,3);
p(1,1) = u1;   p(2,1) = v1;
p(1,2) = u2;   p(2,2) = v2;
p(1,3) = u3;   p(2,3) = v3;
%coordinate system (ua,va)
pa = zeros(2,3);
pa(1,1) = u1-uo;   pa(2,1) = v1-vo;
pa(1,2) = u2-uo;   pa(2,2) = v2-vo;
pa(1,3) = u3-uo;   pa(2,3) = v3-vo;
%evaluation of mi, qi, ci
c = zeros(1,3);
mq = zeros(2,1);
m = zeros(1,3);
q = zeros(1,3);
for kk=1:3
    a = rem(kk,3)+1;
    b = rem(kk+1,3)+1;
    xa = pa(1,a); ya = pa(2,a);
    xb = pa(1,b); yb = pa(2,b);
```

```
    if  (xa~=xb)
        Z = [xa 1
             xb 1];
        B = [ya;yb];
        mq = Z\B;
        m(1,kk) = mq(1,1);
        q(1,kk) = mq(2,1);
    else
        c(1,kk) = xa;
    end
end

%     Gauss-Legendre Quadrature Rule       %
% Npp = 32;
[w,z] = Gauss_1D(Npp);
%--------------------------------------------
phi = zeros(1,3);
phid = zeros(1,3);

for kk=1:3
    phi(1,kk) = atan2(pa(2,kk),pa(1,kk));
end
% phi;
% phid = phi*180/pi;

Integral_1a = zeros(1,3);
Integral_2a = zeros(1,3);
Integral_3a = zeros(1,3);
for mm=1:3
    Int  = 0;
    Intu = 0;
    Intv = 0;
    a = rem(mm,3)+1;
    b = rem(mm+1,3)+1;
    phia = phi(1,a);
    phib = phi(1,b);
    if (mm==2) phib = 2*pi+phib; end
    for kk = 1:Npp  %gauss quadrature
        phik = ((phib-phia)*z(kk)+(phib+phia))/2;
        %%%%a(phi)
        aphik = sqrt(Asing0*cos(phik)^2+Asing1*cos(phik)*sin(phik)+Asing2*sin(phik)^2);
        %%%%
        if (c(1,mm)==0)
            rk = q(1,mm)/(sin(phik)-m(1,mm)*cos(phik));
        else
            rk = c(1,mm)/cos(phik);
        end
```

```
        buk = (j*k0*rk+1/aphik)*cos(phik)+j*k0*uo;
        avk = sin(phik)/aphik+j*k0*vo;
        bvk = (j*k0*rk+1/aphik)*sin(phik)+j*k0*vo;
        fk  = 1/(j*k0*aphik^2)*(1-exp(-j*k0*rk*aphik));
        fku = 1/(j*k0*aphik)^2*(auk-exp(-j*k0*rk*aphik)*buk);
        fkv = 1/(j*k0*aphik)^2*(avk-exp(-j*k0*rk*aphik)*bvk);

        Int  = Int+w(kk)*fk;
        Intu = Intu+w(kk)*fku;
        Intv = Intv+w(kk)*fkv;
    end%for kk=1:Npp
    Integral_1a(1,mm) = ((phib-phia)/2)*Int;
    Integral_2a(1,mm) = ((phib-phia)/2)*Intu;
    Integral_3a(1,mm) = ((phib-phia)/2)*Intv;
end
Integral_1(ks) = Integral_1a(1,1)+Integral_1a(1,2)+Integral_1a(1,3);
Integral_2(ks) = Integral_2a(1,1)+Integral_2a(1,2)+Integral_2a(1,3);
Integral_3(ks) = Integral_3a(1,1)+Integral_3a(1,2)+Integral_3a(1,3);
end%for ks=1:Np
 %
I_sing = zeros(3,3);
I_sing0 = 0;
Ising_0_1 = 0;
for kk=1:Np
    I_sing(1,1)=I_sing(1,1)+wt(kk)*z1(kk)*(Integral_1(kk)-Integral_2(kk)-Integral_3(kk));
    I_sing(1,2)=I_sing(1,2)+wt(kk)*z1(kk)*Integral_2(kk);
    I_sing(1,3)=I_sing(1,3)+wt(kk)*z1(kk)*Integral_3(kk);
    I_sing(2,1)=I_sing(2,1)+wt(kk)*z2(kk)*(Integral_1(kk)-Integral_2(kk)-Integral_3(kk));
    I_sing(2,2)=I_sing(2,2)+wt(kk)*z2(kk)*Integral_2(kk);
    I_sing(2,3)=I_sing(2,3)+wt(kk)*z2(kk)*Integral_3(kk);
    I_sing(3,1)=I_sing(3,1)+wt(kk)*z3(kk)*(Integral_1(kk)-Integral_2(kk)-Integral_3(kk));
    I_sing(3,2)=I_sing(3,2)+wt(kk)*z3(kk)*Integral_2(kk);
    I_sing(3,3)=I_sing(3,3)+wt(kk)*z3(kk)*Integral_3(kk);
    I_sing0=I_sing0+wt(kk)*Integral_1(kk);
        Ising_0_1 = Ising_0_1+wt(kk)*(Integral_1(kk)-Integral_2(kk)-Integral_3(kk));
end
```