ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

Επανατοποθέτηση πόλων συστημάτων στο χώρο των καταστάσεων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χαρίκλεια Θ. Παπαδοπούλου

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Επίκουρος Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2007

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

Επανατοποθέτηση πόλων συστημάτων στο χώρο των καταστάσεων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χαρίκλεια Θ. Παπαδοπούλου

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Επίκουρος Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή την…………………………………......................

…………………..	……………………	…………………..
Ν. Καραμπετάκης	Α.Ι. Βαρδουλάκης	Μ. Γουσίδου-Κουτίτα
Επ. Καθηγητής Α.Π.Θ.	Καθηγητής Α.Π.Θ.	Αν. Καθηγήτρια Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2007

…………………………………………..
Χαρίκλεια Θ. Παπαδοπούλου
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ανάδραση είναι ένας θεμελιώδης μηχανισμός που εμφανίζεται στη φύση σε αρκετές φυσικές διαδικασίες. Επίσης, είναι συχνή σε βιομηχανικά συστήματα και είναι ουσιώδης στον αυτόματο έλεγχο δυναμικών συστημάτων με αβεβαιότητα τόσο στην περιγραφή του μοντέλου τους καθώς και στις αλληλεπιδράσεις τους με το περιβάλλον.

Όταν χρησιμοποιείται η ανάδραση στα γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου, οι πραγματικές τιμές των μεταβλητών του συστήματος παρατηρούνται, εκτιμώνται και χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο του συστήματος. Ως εκ τούτου η διαδικασία λήψης αποφάσεων μέσω των νόμων ελέγχου στηρίζεται, όχι μόνο στις προβλέψεις για τη συμπεριφορά του συστήματος, όπως αυτές προκύπτουν από ένα μοντέλο (σύστημα ανοικτού βρόγχου), αλλά και από τις πληροφορίες για την αληθινή συμπεριφορά του (σύστημα κλειστού βρόγχου ανάδρασης κατάστασης).

Προκειμένου, λοιπόν, να αλλάξουμε την δυναμική απόκριση ενός γραμμικού συστήματος, η πιο διαδεδομένη μέθοδος είναι η επανατοποθέτηση πόλων, είτε μέσω ανάδρασης κατάστασης, είτε μέσω ανάδρασης εξόδου. Στην παρούσα μελέτη θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε κάποιες γενικές μεθόδους επανατοποθέτησης πόλων, μέσω ανάδρασης κατάστασης, τόσο για συστήματα μίας εισόδου, όσο και για συστήματα πολλών εισόδων.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Επανατοποθέτηση Πόλων, Ανάδραση Κατάστασης, Επιθυμητές Ιδιοτιμές, Ελεγξιμότητα, Κανονική μορφή.

ABSTRACT

Feedback is a fundamental mechanism arising in nature and is present in many natural processes. Feedback is also common in manufactured systems and is essential in automatic control of dynamic processes with uncertainties in their model descriptions and their interactions with the environment.

When feedback is used, the actual values of the system variables are sensed, fed back and used to control the system. Therefore a control law decision process is based not only on predictions about the system behavior derived from a process model(open-loop control system), but also on information about the actual behavior(closed- loop feedback control system).

In order to change the dynamic response of a linear system, the most usual technique is pole assignment by means of state feedback or output feedback. We will try to describe some of those pole assignment methods via state feedback, for single input systems and also for multi-input systems.

KEY WORDS

Pole Assignment Problem, State Feedback, Desired Eigenvalues, Controllability, Canonical Form.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας ήταν ιδιαίτερα σημαντική η συμβολή του επιβλέποντα επίκουρου καθηγητή κ. Νικόλαου Καραμπετάκη. Τον ευχαριστώ θερμά για τις υποδείξεις του και για την βοήθεια που πρόθυμα μου έδωσε, όποτε του την ζήτησα.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω, επίσης στα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον καθηγητή κ. Αντώνιο-Ιωάννη Βαρδουλάκη και την αναπληρώτρια καθηγήτρια κα. Μαρία Γουσίδου-Κουτίτα για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσαν στη μελέτη και την αξιολόγηση της εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να αφιερώσω τη μελέτη αυτή στο σύζυγό μου Σπύρο, για την αμέριστη συμπαράσταση του σε όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος, και ειδικά κατά τη διάρκεια συγγραφής της διπλωματικής εργασίας. Χωρίς τη δική του συνεχή παρότρυνση δε θα είχα καταφέρει να την ολοκληρώσω.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε κάποιες απλές εισαγωγικές έννοιες [2,11], οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 Ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα συνεχούς χρόνου με m εισόδους $u_i(t):\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, i=1,2,\dots,m$ και p εξόδους $y_j(t):\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, j=1,2,\dots,p$ περιγράφεται από ένα μαθηματικό πρότυπο της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad \text{Equation Section (Next)}(1.1)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n} \kappa\alpha\iota\ D \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Οι εξισώσεις (1.1) ονομάζονται **περιγραφή του συστήματος στο χώρο των καταστάσεων** (state space model).

Οι τιμές της εισόδου $u(t)$ και της εξόδου $y(t)$ θεωρούνται άμεσα μετρήσιμες, ενώ η τιμή της κατάστασης $x(t)$ θεωρείται ότι είναι προσιτή σε μετρήσεις έμμεσα μέσω της εισόδου και της εξόδου. Αν $m>1$ ή $p>1$, δηλαδή αν το σύστημα έχει περισσότερες από μία εισόδους ή εξόδους τότε θα ονομάζεται **πολυμεταβλητο.**

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 Ο πολυωνυμικός πίνακας

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(n+p)\times(m+m)}$$

ονομάζεται **πίνακας συστήματος του Rosenbrock.**

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό Laplace των σχέσεων (1.1) έχουμε

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Αν η αρχική κατάσταση $x(0) = 0$, τότε έχουμε $(sI - A)X(s) = BU(s)$, δηλαδή

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

και άρα

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D]U(s).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 Ο πίνακας

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

εκφράζει τη σχέση μεταξύ των μετασχηματισμών Laplace της εξόδου και της εισόδου κάτω από μηδενικές αρχικές συνθήκες και ονομάζεται (πίνακας) **συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4 Αν $p = m = 1$, δηλαδή η συνάρτηση μεταφοράς είναι βαθμωτή με

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

όπου $n(s), d(s)$ πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους με $\deg d(s) \geq \deg n(s)$, τότε καλούμε **πολυώνυμο πόλων** της $G(s)$ το πολυώνυμο $d(s)$ και **πόλους της συνάρτησης μεταφοράς** $G(s)$ τις ρίζες της εξίσωσης $d(s) = 0$.

Αν όμως $p > 1$ ή $m > 1$, πρόκειται δηλαδή για πολυμεταβλητό σύστημα, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι πίνακας και το **πολυώνυμο πόλων** ή **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της $G(s)$ ορίζεται ως το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών όλων των μη μηδενικών υπο-οριζουσών της $G(s)$ τάξης $1, 2, ..., q$ όπου $q = \min\{p, m\}$. Οι ρίζες του πολυωνύμου πόλων είναι οι **πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς.**

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5 Οι **πόλοι του συστήματος** είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A ή ισοδύναμα οι ρίζες της ορίζουσας $\det[sI - A]$, η οποία ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πινακα A.

Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι ένα υποσύνολο των πόλων του συστήματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6 Η **τάξη του συστήματος** είναι το πλήθος των ιδιοτιμών του πίνακα A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7 Ένας πίνακας θα λέγεται **ευσταθής**, όταν όλες οι ιδιοτιμές του περιέχονται στο ανοικτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8 Το σύνολο των ιδιοτιμών ενός πίνακα ονομάζεται **φάσμα** (spectrum{A} ή sp{A}).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9 Μια κατάσταση $x(t)$ θα λέγεται ελέγξιμη όταν υπάρχει είσοδος που μεταφέρει την κατάσταση από οποιαδήποτε αρχική τιμή x_0 στη μηδενική κατάσταση σε πεπερασμένο χρόνο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10 Ένα σύστημα (ή το ζεύγος (A, B) θα λέγεται **ελέγξιμο** όταν από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση x_0 μπορεί να οδηγηθεί στη μηδενική κατάσταση σε πεπερασμένο χρόνο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1

Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Αφού $\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t)$ παρατηρούμε ότι η είσοδος δεν επηρεάζει καθόλου το $x_2(t)$ με άλλα λόγια δεν ελέγχει το $x_2(t)$. Συνεπώς υπάρχει ένα μη ελέγξιμο μέρος, το $x_2(t)$ και το σύστημα λέγεται μη ελέγξιμο. Ένα σύστημα που δεν έχει μη ελέγξιμο μέρος, θα είναι ελέγξιμο. Προφανώς η ελεγξιμότητα του συστήματος είναι μια έννοια που εξαρτάται μόνο από το ζεύγος (A, B) και είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο που δημιουργείται η έξοδος. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11 Πίνακας ελεγξιμότητας του συστήματος, ονομάζεται ο πίνακας

$$\mathbb{C} \triangleq [B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times nm}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1 Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες :

- Ένα σύστημα (ή το ζεύγος (A, B)) είναι ελέγξιμο.
- Ο πίνακας ελεγξιμότητας του συστήματος έχει πλήρη τάξη γραμμών, δηλαδή
$$rank\mathbb{C} = rank[B, AB, ..., A^{n-1}B] = n.$$
- $rank[sI - A, B] = n$ για κάθε s.
- Το ζεύγος (A, B) δεν είναι όμοιο με κανένα ζεύγος της μορφής
$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12 Αν το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο, τότε υπάρχει ένας ομαλός πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε, αν ορίσουμε έναν μετασχηματισμό ομοιότητας

$$x(t) = P\tilde{x}(t)$$

τότε στην περιγραφή του συστήματος με διάνυσμα κατάστασης το $\tilde{x}(t)$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t)$$
$$y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t)$$

όπου $\tilde{A} = P^{-1}AP, \tilde{B} = P^{-1}B, \tilde{C} = CP, \tilde{D} = D$, οι πίνακες $\tilde{A}, \tilde{B}$ έχουν την **κανονική μορφή ελεγξιμότητας:**

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (uncompensated or open-loop system) στο χώρο των καταστάσεων που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du \qquad (2.1)$$

Equation Section (Next)

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

x το διάνυσμα κατάστασης και u το διάνυσμα εισόδου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1 Ο γραμμικός χρονικά αμετάβλητος νόμος ελέγχου ανάδρασης κατάστασης ορίζεται από τη σχέση

$$u = Fx + r \qquad (2.2)$$

όπου $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας πίνακας κέρδους (gain matrix) και $r(t) \in \mathbb{R}^m$ ένα εξωτερικό διάνυσμα εισόδου που παρέχεται στο κλειστό σύστημα.

Το κλειστό σύστημα (compensated or closed-loop system) θα δίνεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x} = (A + BF)x + Br, \quad y = (C + DF)x + Dr \qquad (2.3)$$

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: να προσδιορίσουμε έναν πραγματικό πίνακα ανάδρασης F έτσι ώστε το σύστημα (2.3) να έχει ένα αυθαίρετο σύνολο από επιθυμητούς πόλους $\{\lambda_i\}$.

Καθώς οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του κλειστού συστήματος αλλάζουν με την ανάδραση, η ιδέα του να σταθεροποιήσουμε ένα ασταθές σύστημα και να έχουμε επιθυμητή συμπεριφορά επιλέγοντας επιθυμητές ιδιοτιμές είναι πλέον δυνατή.

Οι απαρχές της επανατοποθέτησης πόλων συστημάτων αυτομάτου ελέγχου είναι πολύ παλιές. Οι πρώτες εργασίες στο τομέα αυτόν και επιπλέον με μοντέρνο συμβολισμό έγιναν από τους Porter και Crossley το 1969 [9] και λίγο αργότερα το 1972. Βέβαια υπήρχε ήδη από το 1966 μελέτη του Kalman για την εξέλιξη της περιγραφής ρητών πινάκων στη μορφή έρευνας (μέσω των αποσυζευγμένων μηδενικών εισόδου-εξόδου και της ελάχιστης πραγμάτωσης) της ελεγξιμότητας και παρατηρισιμότητας.

Αρκετές προσεγγίσεις στην επανατοποθέτηση ιδιοτιμών έγιναν στις δεκαετίες ‘60 και ‘70. Μία από τις πιο δημιουργικές είναι του Wonham το 1967 [13] ο οποίος συνέδεσε την επανατοποθέτηση του φάσματος των ιδιοτιμών με την ελεγξιμότητα του υπό μελέτη συστήματος. Αμέσως μετά ακολούθησαν εργασίες από επιστήμονες όπως οι Anderson και Luenberger (1967) και Simon και Mitter(1968) οι οποίοι έθεσαν το θεμέλιο λίθο για τη χρησιμοποίηση κανονικών μορφών καθώς και του πίνακα ελεγξιμότητας στην επανατοποθέτηση πόλων. Η εξέλιξη συνεχίστηκε μέχρι το 1972 με την ανάπτυξη αλγορίθμων σε σχέση με τις εξόδους [12] .

Ας θεωρήσουμε το κλειστό σύστημα (2.3). Θα αποδείξουμε ότι αν το ζεύγος (A,B) είναι πλήρως ελέγξιμο τότε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $A+BF$ μπορούν αυθαίρετα να προσδιορισθούν, επιλέγοντας τον κατάλληλο πίνακα F . Με άλλα λόγια, μπορούμε να «αλλάξουμε» τις ιδιοτιμές του αρχικού συστήματος. Η τελευταία πρόταση, παρά το γεγονός ότι χρησιμοποιείται συχνά στα επιστημονικά κείμενα, δεν παύει να προκαλεί μια μικρή σύγχυση! Στην πραγματικότητα, οι ιδιοτιμές του συστήματος $\dot{x}=Ax+Bu$ δεν αλλάζουν με τη χρήση της ανάδρασης, παραμένουν ίδιες όπως ήταν πριν την εισαγωγή της ανάδρασης. Ο νόμος της ανάδρασης $u=Fx+r, \quad r=0$ παράγει μία είσοδο $u(t)$ που όταν τροφοδοτηθεί το σύστημα με αυτήν, το κάνει να συμπεριφέρεται σαν ένα διαφορετικό σύστημα του οποίου οι ιδιοτιμές βρίσκονται σε διαφορετικές θέσεις. Η καινούρια συμπεριφορά θα είναι προτιμότερη από τη συμπεριφορά του αρχικού συστήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1 Έστω πίνακες $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ και $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$. Υπάρχει πίνακας $F\in\mathbb{R}^{m\times n}$ έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του πίνακα $A+BF$ να μπορούν να μεταφερθούν σε αυθαίρετες, πραγματικές ή συζυγείς μιγαδικές, θέσεις αν και μόνο αν το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Ας υποθέσουμε ότι οι ιδιοτιμές του $A+BF$ έχουν τοποθετηθεί αυθαίρετα, όμως το ζεύγος (A,B) δεν είναι ελέγξιμο. Θα υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας που θα ξεχωρίζει το ελέγξιμο κομμάτι από το μη ελέγξιμο. Συγκεκριμένα υπάρχει ένας ομαλός πίνακας Q έτσι ώστε

$$Q^{-1}(A+BF)Q = Q^{-1}AQ + (Q^{-1}B)(FQ) = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 + B_1F_1 & A_{12} + B_1F_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

όπου $[F_1, F_2] \triangleq FQ$ και (A_1, A_2) είναι ελέγξιμο. Οι ιδιοτιμές του $A+BF$ είναι ίδιες με τις ιδιοτιμές του $Q^{-1}(A+BF)Q$ πράγμα που σημαίνει ότι ο πίνακας $A+BF$ έχει συγκεκριμένες ιδιοτιμές, τις ιδιοτιμές του A_2 οι οποίες δεν αλλάζουν μέσω του πίνακα F. Αυτές είναι οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του συστήματος. Άρα οι ιδιοτιμές του $A+BF$ δεν μπορούν αυθαίρετα να επανατοποθετηθούν. Άτοπο. Οπότε το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο.

Αντίστροφα: Αν το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο, χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε από τους αλγορίθμους που θα παρουσιάσουμε στις επόμενες παραγράφους, μπορούμε να επανατοποθετήσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A+BF$. ■

Όπως προκύπτει από την προηγούμενη απόδειξη οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές δεν μπορούν να αλλάξουν μέσω της ανάδρασης κατάστασης αφού πρόκειται για τις ιδιοτιμές του A_2, που δεν επηρεάζονται από τον πίνακα F.

Το προηγούμενο θεώρημα είναι γνωστό από την δεκαετία του '60. Πρώτες πήγες αποτελούν οι Rissanen(1960), Popov(1964) και Wonham(1967) [13].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1

Ας θεωρήσουμε το μη ελέγξιμο ζεύγος (A,B), όπου $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

Μπορούμε να το μετασχηματίσουμε στην κανονική μορφή για μη ελέγξιμα συστήματα (standard form). Ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι ο $\mathbb{C}=\left[\mathrm{B},\mathrm{AB}\right]=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ο οποίος χάνει τάξη. Τότε ο Q επιλέγεται έτσι ώστε η πρώτη στήλη του να είναι μία στήλη του πίνακα $\mathbb{C}$ και η άλλη στήλη του να είναι τέτοια, ώστε ο πίνακας να είναι ομαλός.

π.χ. $Q=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ τότε $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ και $Q^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Όπως βλέπουμε το -1 είναι η μη ελέγξιμη ιδιοτιμή και το -2 είναι η ελέγξιμη.

Αν $F=\left[\,f_1 \quad f_2\,\right]$ τότε $\det(sI-(A+BF))=\det\begin{bmatrix}s+2-f_1 & 1+f_2\\ 0 & s+1\end{bmatrix}=(s+2-f_1)(s+1).$

Είναι τώρα ξεκάθαρο ότι η μη ελέγξιμη ιδιοτιμή -1 δεν επηρεάζεται από τον πίνακα F ενώ η ελέγξιμη ιδιοτιμή -2 μεταφέρεται στην τιμή $-2+f_1$. □

Έπειτα από τα παραπάνω είναι προφανές ότι ένα σύστημα μπορεί να γίνει ασυμπτωτικά ευσταθές, μέσω της ανάδρασης, μόνο όταν οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του βρίσκονται ήδη στο ανοικτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, αφού η ανάδραση επηρεάζει μόνο τις ελέγξιμες ιδιοτιμές του συστήματος.

Ορισμός 2.1 Το ζεύγος (A,B) ονομάζεται **σταθεροποιήσιμο,** όταν όλες οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του είναι ευσταθείς.

Πριν παρουσιάσουμε τις μεθόδους για την επιλογή του πίνακα F είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε πώς ο νόμος ανάδρασης κατάστασης $u = Fx + r$ επηρεάζει την ελεγξιμότητα.

$$\begin{bmatrix} sI - (A + BF) & B \\ -(C + DF) & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F & I \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$rank[\lambda I - (A + BF), B] = rank[\lambda I - A, B]$$

για όλους τους μιγαδικούς λ. Έτσι αν το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο, τότε και $(A + BF, B)$ είναι επίσης ελέγξιμο για κάθε πίνακα F.

Επιπλέον

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_F &= [B, (A + BF)B, (A + BF)^2 B, \ldots, (A + BF)^{n-1} B] \\ &= [B, AB, \ldots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} I & FB & F(A+BF)B & \ldots \\ 0 & I & FB & \ldots \\ 0 & 0 & I & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.5}$$

και R($\mathbb{C}_F$)=R($[B, AB, ..., A^{n-1}B]$)=R($\mathbb{C}$). Αυτό αποδεικνύει ότι ο πίνακας F δεν αλλάζει τον υποχώρο ελεγξιμότητας του συστήματος. Έχουμε αποδείξει λοιπόν το παρακάτω Λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 2.1 Οι υποχώροι ελεγξιμότητας των συστημάτων $\dot{x} = Ax + Bu$ και $\dot{x} = (A + BF) + Br$ είναι ίδιοι για κάθε πίνακα F.

Το πρόβλημα της επανατοποθέτησης ιδιοτιμών μπορεί τώρα να διατυπωθεί ως εξής: Όταν δίνεται ένα ελέγξιμο ζεύγος (A, B), ψάχνουμε πίνακα F ώστε οι n ιδιοτιμές του πίνακα $A + BF$ να μεταφερθούν σε αυθαίρετες επιθυμητές τοποθεσίες, πραγματικές ή/και συζυγείς μιγαδικές. Αυτό το πρόβλημα είναι επίσης γνωστό και ως πρόβλημα επανατοποθέτησης πόλων, όπου με τον όρο «πόλοι» εννοούμε «πόλοι του συστήματος» (ή ιδιοτιμές του πίνακα Α). Η τελευταία παρατήρηση γίνεται προκειμένου να αποφευχθεί η σύγχυση με τον όρο «πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς».

Όλοι οι πίνακες A, B και F είναι πραγματικοί, έτσι οι συντελεστές του πολυωνύμου $\det[sI-(A+BF)]$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Το γεγονός αυτό επιβάλει τον περιορισμό ότι οι μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου πρέπει να εμφανίζονται σε ζευγάρια συζυγών.

Στην περίπτωση που το ζεύγος (A, B) δεν είναι πλήρως ελέγξιμο τότε οι σχέσεις (2.4)

$$Q^{-1}(A+BF)Q = Q^{-1}AQ + (Q^{-1}B)(FQ) = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 + B_1F_1 & A_{12} + B_1F_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

μπορούν να χρησιμοποιηθούν μαζί με τις μεθόδους που θα παραθέσουμε προκειμένου να μεταφέρουμε όλες τις ελέγξιμες ιδιοτιμές. Οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές, ούτως ή άλλως παραμένουν σταθερές.

Στα επόμενα θα υποθέσουμε ότι ο πίνακας B έχει πλήρη τάξη, δηλαδή

$$rank\ B = m. \tag{2.6}$$

Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα $\dot{x} = Ax + Bu$ έχει m ανεξάρτητες εισόδους. Αν $rank\ B = r < m$, τότε μπορούμε να πετύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας μόνο r εισόδους, αντί για $m > r$. Για να κάνουμε επανατοποθέτηση ιδιοτιμών στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να γράψουμε τα εξής

$$A + BF = A + (BM)(M^{-1}F) = A + [B_1, O]\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = A + B_1F_1 \tag{2.7}$$

όπου ο M επιλέγεται έτσι ώστε $BM = [B_1, 0]$ όπου $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ και $rank\ B_1 = r$. Τότε ο πίνακας $F_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}$ μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τις επόμενες μεθόδους, προκειμένου να επανατοποθετήσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A + B_1F_1$.

3. ΕΥΘΕΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ (DIRECT METHOD)

Έστω ο πίνακας $F=[f_{ij}], i=1,\dots,m, j=1,\dots,n,$ και ας εκφράσουμε τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα $A+BF$ σε συνάρτηση των f_{ij}, δηλαδή

$$\det(sI-(A+BF))=s^n+g_{n-1}(f_{ij})s^{n-1}+\dots+g_0(f_{ij}).$$

Έστω επίσης $a_d(s)$ το επιθυμητό πολυώνυμο, δηλαδή το πολυώνυμο με ρίζες τις n επιθυμητές ιδιοτιμές

$$a_d(s)=s^n+d_{n-1}s^{n-1}+\dots+d_1 s+d_0$$

Τότε οι συντελεστές $f_{ij}, i=1,\dots,m, j=1,\dots,n$ θα βρεθούν έτσι ώστε

$$g_k(f_{ij})=d_k \quad k=0,1,\dots,n-1 \text{Equation Section (Next)} \tag{3.1}$$

Γενικά η σχέση (3.1) ορίζει ένα μη γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, ωστόσο είναι γραμμικό στην περίπτωση μιας εισόδου, $m=1$. Η μεγαλύτερη δυσκολία στη μέθοδο αυτή είναι όχι τόσο η εύρεση της αλγεβρικής λύσης του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων, όσο οι χειρισμοί των συμβόλων που χρειάζονται για να εκφράσουμε τους συντελεστές g_k σε συνάρτηση των f_{ij} στην σχέση (3.1). Αυτή η δυσκολία περιορίζει τη μέθοδο σε απλές περιπτώσεις όπως $n=2$ ή $n=3$ και $m=1$ ή $m=2$ που είναι οι συνήθεις περιπτώσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1

Έστω $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι $\det(sI-A)=s(s-\frac{5}{2})$ και οι ιδιοτιμές του είναι το 0 και το $\frac{5}{2}$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τον πίνακα F ώστε ο πίνακας $A+BF$ να έχει ιδιοτιμές τους συζυγείς μιγαδικούς $-1+j,-1-j$, δηλαδή το επιθυμητό πολυώνυμο είναι $a_d(s)=(s-(-1+j))(s-(-1-j))=s^2+2s+2$.

Αν $F=\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}$

τότε

$$\det(sI-(A+BF))=\det\left(\begin{bmatrix} s-\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix} s-\frac{1}{2}-f_1 & -1-f_2 \\ -1-f_1 & s-2-f_2 \end{bmatrix}=$$

$$s^2+(-\frac{5}{2}-f_1-f_2)s+f_1-\frac{1}{2}f_2$$

Εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές έχουμε ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους του οποίου η λύση είναι πολύ εύκολο να εξαχθεί, έτσι ο κατάλληλος πίνακας ανάδρασης είναι $F=\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}=[-\frac{1}{6},-\frac{13}{3}]$

□

4. ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΕΛΕΓΚΤΗ (THE USE OF CONTROLLER FORMS)

Όταν δίνεται ένα ελέγξιμο ζεύγος (A,B) υπάρχει ένας πίνακας μετασχηματισμού ομοιότητας P, ώστε το ζευγάρι $A_c = PAP^{-1}, B_c = PB$ να είναι σε ελέγξιμη μορφή. Οι πίνακες $A+BF$ $και$ $P(A+BF)P^{-1} = PAP^{-1} + (PB)(FP^{-1}) = A_c + B_cF_c$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Το πρόβλημα τώρα διατυπώνεται ως εξής: να προσδιορίσουμε τον πίνακα F_c ώστε ο $A_c + B_cF_c$ να έχει επιθυμητές ιδιοτιμές. Αυτό είναι ευκολότερο να λυθεί σε σχέση με το αρχικό λόγω της ιδιαίτερης δομής των A_c και B_c. Όταν βρούμε τον F_c τότε ο αρχικός πίνακας ανάδρασης δίνεται από τον τύπο

$$F = F_cP \qquad \text{Equation Section (Next)}(4.1)$$

Θα περιγράψουμε πρώτα τον τρόπο επιλογής του πίνακα μετασχηματισμού ομοιότητας P τόσο στα συστήματα μίας εισόδου, καθώς επίσης και στα συστήματα πολλών εισόδων.

ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ P ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ(m=1)

Ο πίνακας μετασχηματισμού ομοιότητας P βρίσκεται ως εξής: ο πίνακας ελεγξιμότητας $\mathbb{C}=[B, AB, ..., A^{n-1}B]$ είναι σε αυτήν την περίπτωση ένας ομαλός $n\times n$ πίνακας και $\mathbb{C}^{-1}=\begin{bmatrix}\times \\ q\end{bmatrix}$ όπου q είναι η n-οστή γραμμή του πίνακα $\mathbb{C}^{-1}$ και με $\times$ συμβολίζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα $\mathbb{C}^{-1}$. Τότε

$$P \triangleq \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Κι έτσι $PAP^{-1}=A_c=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ και $PB=B_c=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, αφού λόγω του ορισμού του διανύσματος q έχουμε $qA^{i-1}B=0 \quad , i=0,1,...,n-1$, $qA^{n-1}B=1 \quad , \quad q\mathbb{C}=[0,...,0,1]$.

$$P\mathbb{C}=P[B, AB, ..., A^{n-1}B]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \times \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}=\mathbb{C}_c .$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει $|P\mathbb{C}|=|P||\mathbb{C}|\neq 0$ που σημαίνει ότι $|P|\neq 0$, δηλαδή ο πίνακας P είναι ομαλός .

ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ P ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΕΙΣΟΔΩΝ (m>1)

Ο πίνακας ελεγξιμότητας $\mathbb{C} = [B, AB, ..., A^{n-1}B]$ δεν είναι σε αυτήν την περίπτωση ένας τετραγωνικός πίνακας, αλλά ένας $n \times mn$ πίνακας, οπότε υπάρχουν πολλά σύνολα από n στήλες που είναι γραμμικά ανεξάρτητες μιας και η τάξη του είναι n. Ανάλογα με το ποιές στήλες επιλέξουμε και με ποιά σειρά το κάνουμε αυτό, προκύπτουν διαφορετικές ελέγξιμες μορφές .

Ας θεωρήσουμε λοιπόν, τον πίνακα

$$\mathbb{C} = [B, AB, ..., A^{n-1}B] = [b_1, ..., b_m, Ab_1, ..., Ab_m, ..., A^{n-1}b_1, ..., A^{n-1}b_m]$$

όπου $b_1, \ldots, b_m$ είναι m στήλες του B. Επιλέγουμε ξεκινώντας από αριστερά προς τα δεξιά τις πρώτες n γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα ελεγξιμότητας, τις οποίες τοποθετούμε με διαφορετική σειρά, παίρνοντας πρώτα όσες περιέχουν το b_1 μέχρι να τελειώσουν, έπειτα όσες περιέχουν το b_2 κ.ο.κ. προκειμένου να κατασκευάσουμε τον

$$\overline{\mathbb{C}} \triangleq [b_1, Ab_1, ..., A^{\mu_1 - 1}b_1, ..., b_m, Ab_m, ..., A^{\mu_m - 1}b_m]$$

Ο ακέραιος μ_i δηλώνει το πλήθος των στηλών που περιέχουν το b_i στο σύνολο των πρώτων n γραμμικών ανεξάρτητων στηλών που επιλέξαμε.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1 Οι m ακέραιοι μ_i , i=1,…,m, όπου $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = n$ είναι οι δείκτες ελεγξιμότητας του συστήματος. Ορίζουμε επίσης

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^{j} \mu_i, \;\; j = 1, ..., m \qquad \text{και} \qquad P \triangleq \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_1 A^{\mu_1 - 1} \\ \vdots \\ q_m \\ \vdots \\ q_m A^{\mu_m - 1} \end{bmatrix}$$

όπου q_i είναι η σ_i-γραμμή του αντίστροφου του πίνακα

$$\overline{\mathbb{C}} \triangleq= [b_1, Ab_1, ..., A^{\mu_1 - 1}b_1, ..., b_m, Ab_m, ..., A^{\mu_m - 1}b_m].$$

4.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ(m=1)

Ας υποθέσουμε ότι το ζεύγος (A, B) έχει αναχθεί στο ζεύγος (A_c, B_c). Θα περιγράψουμε τώρα πως θα εξάγουμε τον πίνακα F_c για την επανατοποθέτηση πόλων .

Ας είναι

$$F_c = [\, f_0, f_1, ..., f_{n-1}] \tag{4.2}$$

Οι πίνακες A_c και B_c είναι σε ελέγξιμη μορφή, κι έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} A_{cF} &\triangleq A_c + B_c F_c \\ &\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\, f_0, f_1, ..., f_{n-1}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 - f_0) & -(a_1 - f_1) & \dots & -(a_{n-1} - f_{n-1}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

όπου $a_i, i = 0,1,...,n-1,$ είναι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα A_c, δηλαδή

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0. \tag{4.4}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A_{cF} είναι επίσης σε τέτοια μορφή και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να γραφεί απευθείας

$$\det(sI - A_{cF}) = s^n + (a_{n-1} - f_{n-1})s^{n-1} + ... + (a_0 - f_0). \tag{4.5}$$

Αν οι επιθυμητές ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$a_d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + ... + d_0, \tag{4.6}$$

τότε εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές τα $f_i, i = 0,1,...,n-1,$ πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις $d_i = a_i - f_i, i = 0,1,...,n-1,$ από όπου παίρνουμε

$$f_i = a_i - d_i, \quad i = 0,1,...,n-1. \tag{4.7}$$

Εναλλακτικά, αν ονομάσουμε A_d τον πίνακα σε ελέγξιμη μορφή, του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το (4.6), ένας άλλος τρόπος για να έχουμε τη σχέση (4.7) είναι να θέσουμε $A_{cF} = A_c + B_c F_c = A_d$, από την οποία παίρνουμε

$$F_c = B_m^{-1}[A_{d_m} - A_m], \tag{4.8}$$

όπου B_m, A_{d_m}, A_m είναι οι n-οστές γραμμές των αντίστοιχων πινάκων, δηλαδή

$$B_m = 1, \quad A_{d_m} = [-d_0, -d_1, ..., -d_{n-1}], \quad A_m = [-a_0, -a_1, ..., -a_{n-1}]$$

Ο τύπος (4.8) είναι άλλη έκφραση του τύπου (4.7), που όμως μας δίνει το πλεονέκτημα να τον γενικεύσουμε στην περίπτωση πολλών εισόδων.
Αφού έχουμε βρει τον πίνακα F_c, τότε ο πίνακας ανάδρασης θα δίνεται από τον τύπο

$$F = F_c P \tag{4.9}$$

Η χρήση της ελέγξιμης μορφής στην επανατοποθέτηση πόλων μέσω ανάδρασης κατάστασης οφείλεται στον Wolovich(1967) [2].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1

Έστω $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ του παραδείγματος (2.1). Θέλουμε να προσδιορίσουμε τον πίνακα F ώστε ο πίνακας $A + BF$ να έχει ιδιοτιμές τους συζυγείς μιγαδικούς $-1 + j, -1 - j$, δηλαδή το επιθυμητό πολυώνυμο να είναι $a_d(s) = (s - (-1 + j))(s - (-1 - j)) = s^2 + 2s + 2$.

Ο πίνακας ελεγξιμότητας του συστήματος θα είναι

$$\mathbb{C} = [B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{και}\, \mathbb{C}^{-1} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

από όπου $P = \begin{bmatrix} q \\ qA \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, αφού q είναι η τελευταία γραμμή του $\mathbb{C}^{-1}$ και $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$. Έτσι έχουμε

$$A_c = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \quad B_c = PB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Και άρα $A_m = [0, \frac{5}{2}]$ και $B_m = 1$, ενώ $A_{d_m} = [-2, -2]$ αφού το επιθυμητό πολυώνυμο είναι το $s^2 + 2s + 2$. Εφαρμόζοντας τον τύπο (4.8), έχουμε

$$F_c = B_m^{-1}[A_{d_m} - A_m] = [-2, -\frac{9}{2}].$$

Τέλος ο πίνακας ανάδρασης κατάστασης είναι

$$F = F_c P = [-\frac{1}{6}, -\frac{13}{3}].$$

Όπως ακριβώς είχαμε βρει και με την ευθεία μέθοδο στο παράδειγμα (2.1). □

4.1.1 ΦΟΡΜΟΥΛΑ ΤΟΥ ACKERMANN

Χρησιμοποιώντας τους τύπους αυτής της μεθόδου μπορούμε να αποδείξουμε έναν γενικό τύπο για τον υπολογισμό του πίνακα F σε συνάρτηση του ζεύγους $(A,B),\ A\in\mathbb{R}^{n\times m},\ B\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ και των συντελεστών του επιθυμητού πολυωνύμου $a_d(s)$ που είναι γνωστός ως φόρμουλα του Ackermann, ο οποίος και την δημιούργησε, όπως αυτή εμφανίζεται σε εργασία του το 1972 [1,2]. Ο πίνακας F είναι μοναδικός στην περίπτωση μιας εισόδου, αφού οι πίνακες F_c, P είναι μοναδικοί στην περίπτωση αυτή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1

Αν το ζεύγος $(A,B),\ A\in\mathbb{R}^{n\times m},\ B\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ είναι ελέγξιμο, τότε ο πίνακας ανάδρασης κατάστασης δίνεται απευθείας από τον τύπο

$$F=-e_n{}^T\mathbb{C}^{-1}a_d(A) \tag{4.10}$$

όπου και $\mathbb{C}=[B,AB,...,A^{n-1}B]$ ο πίνακας ελεγξιμότητας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Ας υποθέσουμε ότι το ζεύγος (A,B) έχει αναχθεί σε ελέγξιμη μορφή (A_c,B_c). Θα αποδείξουμε ότι ο πίνακας

$$F_c=-e_n{}^T\mathbb{C}_c{}^{-1}a_d(A_c) \tag{4.11}$$

όπου $\mathbb{C}_c=[B_c,A_cB_c,...,A_c^{n-1}B_c]$ ο πίνακας ελεγξιμότητας του (A_c,B_c) και $e_n=[0,0,...,1]^T$, επανατοποθετεί τις ιδιοτιμές του πίνακα $A_c+B_cF_c$ σε επιθυμητές θέσεις, δηλαδή στις ρίζες του επιθυμητού πολυωνύμου $a_d(s)$. Προκειμένου να το επιτύχουμε αυτό, έχουμε $a_d(A_c)=A_c^n+d_{n-1}A_c^{n-1}+...+d_0I$ και από το θεώρημα Cayley-Hamilton γνωρίζουμε $a(A_c)=A_c^n+a_{n-1}A_c^{n-1}+...+a_0I=0$, δηλαδή $A_c^n=-\sum_{i=0}^{n-1}a_iA_c^i$ τότε $a_d(A_c)=\sum_{i=0}^{n-1}(d_i-a_i)A_c^i$. Επίσης $e_1^T\mathbb{C}_c=e_n{}^T$ και άρα $e_n{}^T\mathbb{C}_c{}^{-1}=e_1^T$.

Έτσι

$$-e_n^T \mathbb{C}_c^{-1} a_d(A_c) = -e_1^T a_d(A_c) = -e_1^T[(d_0 - a_0)I + \ldots + (d_{n-1} - a_{n-1})A_c^{n-1}] =$$
$$(a_0 - d_0)e_1^T + (a_1 - d_1)e_2^T + \ldots + (a_{n-1} - d_{n-1})e_n^T = [a_0 - d_0, a_1 - d_1, \ldots, a_{n-1} - d_{n-1}] = F_c$$

Έπειτα από όλα αυτά η σχέση (4.9) γράφεται

$$\begin{aligned} F &= F_c P = \\ &= -e_n^T \mathbb{C}_c^{-1} a_d(A_c) P = \\ &= -e_n^T \mathbb{C}_c^{-1} a_d(PAP^{-1}) P = \\ &= -e_n^T \mathbb{C}_c^{-1} P a_d(A) = \\ &= -e_n^T \mathbb{C}^{-1} a_d(A) \end{aligned}$$

Κι έτσι αποδείχθηκε η φόρμουλα του Ackermann. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2

Εφαρμόζοντας τη φόρμουλα του Ackermann στο σύστημα του παραδείγματος (2.1) όπου

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας ελεγξιμότητας του συστήματος είναι

$$\mathbb{C} = [B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{και}\, \mathbb{C}^{-1} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

το επιθυμητό πολυώνυμο είναι $a_d(s) = (s - (-1 + j))(s - (-1 - j)) = s^2 + 2s + 2$

κι έτσι έχουμε τον ίδιο πίνακα ανάδρασης που βρήκαμε και με τις προηγούμενες μεθόδους

$$F = -e_2^T \mathbb{C}^{-1} a_d(A) =$$

$$= -\left[0,1\right]\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^2 + 2\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= [-\frac{1}{6}, -\frac{13}{3}]$$

□

Μειονέκτημα της φόρμουλας του Ackermann είναι το ότι δεν είναι αριθμητικά ευσταθής μιας και βασίζεται στην αντιστροφή ενός πίνακα που μπορεί να έχει ορίζουσα σχεδόν μηδενική.

4.2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΟΛΛΩΝ ΕΙΣΟΔΩΝ (m>1)

Θα εργαστούμε με εντελώς ανάλογο τρόπο με την περίπτωση μίας εισόδου. Ας υποθέσουμε ότι οι πίνακες A_c και B_c είναι σε ελέγξιμη μορφή, δηλαδή

$$A_c = [A_{ij}], \quad i, j = 1, \dots, m \text{ όπου}$$

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{\mu_i - 1} & \\ 0 & & & \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu_i \times \mu_i}, i = j,$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu_i \times \mu_j}, i \neq j$$

$$\text{και } B_c = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}, \text{όπου } B_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \times & \cdots & \times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu_i \times m},$$

όπου η μονάδα στην τελευταία γραμμή του πίνακα B_i βρίσκεται στην i στήλη και με $\times$ συμβολίζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία. Ο πίνακας $C_c = CP^{-1}$ δεν έχει ιδιαίτερη δομή.

Ο πίνακας $A_{cF} \triangleq A_c + B_c F_c$ είναι επίσης σε ελέγξιμη μορφή με εντελώς παρόμοια δομή με τον A_c για οποιοδήποτε F_c. Τα ζεύγη (A_c, B_c) και (A_{cF}, B_c) έχουν τους ίδιους δείκτες ελεγξιμότητας (controllability indices) $\mu_i \quad, i = 1, \dots, m$.

Οι πίνακες A_c, B_c μπορούν να εκφραστούν

$$A_c = \bar{A}_c + \bar{B}_c A_m, \quad B_c = \bar{B}_c B_m \tag{4.12}$$

όπου $\bar{A}_c = block\ diag[\bar{A}_{11}, \dots, \bar{A}_{mm}]$ με

$$\bar{A}_{ii}=\begin{bmatrix}0 & & & \\ \vdots & & I_{\mu_i-1} & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{\mu_i\times\mu_i},\ \bar{B}_c=block\ \ diag\left(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{\mu_i\times 1}, i=1,...,m\right).$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες $\bar{A}_c, \bar{B}_c$ ορίζονται πλήρως από τους m σε πλήθος δείκτες ελεγξιμότητας $\mu_i, i=1,...,m$ (Brunovski canonical form) και $A_m \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $B_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ είναι κάποιοι κατάλληλοι πίνακες με $\sum_{i=1}^{m}\mu_i = n$ που αποτελούνται από τις $\sigma_1,...,\sigma_m$ γραμμές των A_c, B_c (στοιχεία που δηλώνονται με $\times$) όπου $\sigma_j=\sum_{i=1}^{j}\mu_i,\ j=1,...,m$ και μάλιστα είναι το κομμάτι του ελέγξιμου συστήματος που μπορεί να αλλαχθεί με την ανάδραση κατάστασης.

Έτσι έχουμε

$$A_{cF}=A_c+B_cF_c=(\bar{A}_c+\bar{B}_cA_m)+(\bar{B}_cB_m)F_c=\bar{A}_c+\bar{B}_c(A_m+B_mF_c), \tag{4.13}$$

και μπορούμε τώρα να επιλέξουμε έναν $n\times n$ πίνακα A_d με επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\det(sI-A_d)=a_d(s)=s^n+d_{n-1}s^{n-1}+...+d_o \tag{4.14}$$

που σε ελέγξιμη μορφή έχει την ίδια δομή με τους A_c και A_{cF} δηλαδή

$$A_d=\bar{A}_c+\bar{B}_cA_{d_m} \tag{4.15}$$

Εξισώνοντας τώρα $A_{cF}=A_d$ από τις σχέσεις (4.13) και (4.15) παίρνουμε $A_{d_m}=A_m+B_mF_c$ και ισοδύναμα

$$F_c=B_m^{-1}(A_{d_m}-A_m) \tag{4.16}$$

όπου υπενθυμίζουμε B_m, A_{d_m}, A_m είναι οι m σ_j-οστές γραμμές των B_c, A_d, A_c, αντίστοιχα, ($\sigma_j=\sum_{i=1}^{j}\mu_i,\ j=1,...,m$).

Θα δούμε στη συνέχεια πώς μπορούμε να επιλέγουμε τον $n \times n$ πίνακα A_d ώστε να έχει το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Μια επιλογή είναι

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & \cdots & -d_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Στην περίπτωση αυτή ο $m \times n$ πίνακας A_{d_m} είναι

$$A_{d_m} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ -d_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -d_{n-1} \end{bmatrix}$$

Όπου η i-γραμμή είναι παντού μηδέν, εκτός από το στοιχείο της ($\sigma_i + 1$)-στήλης που είναι μονάδα.

Μια άλλη επιλογή είναι της μορφής

$A_d = [A_{ij}], i, j = 1,...,m$ με $A_{ij} = 0$ με $i = j$ και $A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \\ \times & \cdots & \cdots & \times \end{bmatrix}$, όπου η τελευταία γραμμή επιλέγεται έτσι ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο να έχει επιθυμητές ρίζες. Παρατηρούμε ότι $\det(sI - A_d) = \det(sI - A_{11}) \cdots \det(sI - A_{mm})$. Το μειονέκτημα αυτής της επιλογής είναι ότι επιβάλει περιορισμούς στο πλήθος των πραγματικών και των μιγαδικών ριζών, αφού αν για παράδειγμα $n = 4, m = 2$ και οι διαστάσεις των A_{11}, A_{22} οι οποίες είναι ανάλογες προς τους δείκτες ελεγξιμότητας, είναι $d_1 = 3, d_2 = 1$ αντίστοιχα, τότε οι ιδιοτιμές του πρώτου πίνακα πρέπει να είναι είτε και οι 3 πραγματικές, είτε μία πραγματική και δύο συζυγείς μιγαδικές, ενώ του δεύτερου πίνακα που είναι μοναδική, πρέπει να είναι αναγκαστικά πραγματική.

Είναι τώρα προφανές ότι ο πίνακας ανάδρασης δεν είναι μοναδικός, αφού για διαφορετικούς A_{d_m} διαφορετικοί F_c προκύπτουν, που όλοι επανατοποθετούν τις ιδιοτιμές του συστήματος στις ίδιες επιθυμητές τιμές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3

Ας θεωρήσουμε το ζεύγος (A,B), όπου

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&2&-1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\0&0\end{bmatrix}$$

Ο πίνακας ελεγξιμότητας του συστήματος είναι

$$\mathbb{C} = [B, AB, A^2B] = [b_1, b_2, Ab_1, Ab_2, A^2b_1, A^2b_2] = \begin{bmatrix}0&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&2&2\\0&0&2&2&-2&-2\end{bmatrix}$$

με $rank\mathbb{C}=3=n$, άρα το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο. Ξεκινώντας από τα αριστερά προς τα δεξιά οι πρώτες τρεις στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Κατασκευάζουμε τότε τον πίνακα $\overline{\mathbb{C}}$ που αποτελείται από τις τρεις αυτές στήλες ξεκινώντας πρώτα από όσες περιέχουν το b_1, που είναι 2 σε πλήθος, και έπειτα το b_2 που είναι 1, έτσι οι δείκτες ελεγξιμότητας είναι $\mu_1=2$ και $\mu_2=1$,

$$\overline{\mathbb{C}}=[b_1, Ab_1, b_2]=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&2&0\end{bmatrix} \text{ και άρα } \overline{\mathbb{C}}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\\1&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Από τον τελευταίο πίνακα θα επιλέξουμε την 2^{η} και 3^{η} γραμμή, μιας και $\sigma_1=\mu_1=2$ και $\sigma_2=\mu_1+\mu_2=2+1=3$, οι οποίες είναι οι $q_1=[0,0,\frac{1}{2}]$ και $q_2=[1,0,-\frac{1}{2}]$ αντίστοιχα. Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε τον πίνακα μετασχηματισμού ομοιότητας P που θα φέρει το σύστημα σε ελέγξιμη μορφή.

$$P = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_1 A^{\mu_1 - 1} \\ q_2 \\ \vdots \\ q_2 A^{\mu 2-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 A \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{και } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_c = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & -1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = \bar{A}_c + \bar{B}_c A_m =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$B_c = PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{B}_c B_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ας υποθέσουμε ότι οι επιθυμητές ιδιοτιμές του πίνακα $A+BF$ είναι οι $-2, -1+j, -1-j$ δηλαδή το επιθυμητό πολυώνυμο είναι $a_d(s) = (s+2)(s^2+2s+2) = s^3+4s^2+6s+4$.

A) Αν χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο τρόπο επιλογής που περιγράψαμε στα παραπάνω, δηλαδή

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & \cdots & -d_{n-1} \end{bmatrix} \text{και στη δική μας περίπτωση } A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Τότε ο $m \times n$ πίνακας A_{d_m} είναι

$$A_{d_m} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ -d_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -d_{n-1} \end{bmatrix}$$

όπου η i-γραμμή είναι παντού μηδέν, εκτός από το στοιχείο της $(\sigma_i + 1)$-στήλης που είναι μονάδα. Έτσι εδώ έχουμε τον 2×3 πίνακα όπου η 1$^{\eta}$γραμμή είναι παντού μηδέν εκτός από το στοιχείο της $\sigma_1 + 1 = 2 + 1 = 3$, 3$^{\eta\varsigma}$στήλης που είναι μονάδα, οπότε $A_{d_m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας $F_c = B_m^{-1}[A_{d_m} - A_m] = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ -5 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

και ο πίνακας ανάδρασης είναι $F = F_c P = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -\frac{9}{2} \\ -4 & -6 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

Β) Αν είχαμε επιλέξει τον πίνακα $A_d = [A_{ij}], i, j = 1, ..., m$ με $A_{ij} = 0$ με $, i = j$ και $A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \\ \times & \cdots & \cdots & \times \end{bmatrix}$, όπου η τελευταία γραμμή επιλέγεται έτσι ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο να έχει επιθυμητές ρίζες, δηλαδή στην περίπτωση μας

$$A_d = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 \\ -2 & -2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \text{και από όπου } A_{d_m} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $F_c = B_m^{-1}[A_{d_m} - A_m] = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

και ο πίνακας ανάδρασης είναι $F = F_c P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι οι διαφορετικοί πίνακες επανατοποθετούν τις ιδιοτιμές του $A + BF$ στις επιθυμητές τιμές $-2, -1 + j, -1 - j$. □

5. ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Η ταυτόχρονη επανατοποθέτηση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων για το σχεδιασμό γραμμικών χρονικά αμετάβλητων πολλών εισόδων-πολλών εξόδων (MIMO) συστημάτων αυτομάτου ελέγχου ονομάζεται και επανατοποθέτηση ιδιοδομής (eigenstructure assignment)[6]. Πρόκειται για τεχνικές σχεδιασμού συστημάτων αυτομάτου ελέγχου που έχουν αναπτυχθεί[12], προκειμένου να έχουμε ευσταθή συστήματα με επιθυμητά χαρακτηριστικά στην συμπεριφορά του κλειστού συστήματος μέσω επιθυμητών ιδιοτιμών και αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων.

Τα βασικά βήματα είναι τα επόμενα τέσσερα:

α) Η επιλογή ενός συνόλου επιθυμητών ιδιοτιμών (φάσμα).

β) Ο υποχώρος των «επιτρεπτών» ιδιοδιανυσμάτων και οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται.

γ) Η επιλογή κάποιων συγκεκριμένων ιδιοδιανυσμάτων, από όλα τα επιτρεπτά, ανάλογα με την στρατηγική του σχεδιασμού.

δ) Ο υπολογισμός του νόμου ελέγχου, δηλαδή του πίνακα ανάδρασης F .

Θα περιγράψουμε μία τέτοια τεχνική που ανέπτυξε αρχικά ο Moore το 1976 [6]. Η χρήση κανονικής ελέγξιμης μορφής καθώς και περιγραφών πολυωνυμικών πινάκων ώστε να έχουμε πιο εύκολους υπολογισμούς οφείλεται στον Antsaklis[2].

Ας υποθέσουμε ότι ο F έχει επιλεγεί έτσι ώστε ο $A+BF$ να έχει επιθυμητή ιδιοτιμή s_j με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα v_j . Τότε $[s_j I-(A+BF)]v_j=0$, που μπορεί να γραφεί

$$[s_j I-A, B]\begin{bmatrix} v_j \\ -Fv_j \end{bmatrix}=0 \quad \text{Equation Section (Next)}(5.1)$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε έναν πίνακα F που αναθέτει την ιδιοτιμή s_j σαν ιδιοτιμή ενός κλειστού συστήματος, πρώτα θα προσδιορίσουμε μια βάση του δεξιού πυρήνα (null space) του $[s_jI - A, B]$, δηλαδή θα μπορούσε κάποιος να προσδιορίσει μία βάση $\begin{bmatrix} M_j \\ -D_j \end{bmatrix}$ τέτοια ώστε

$$[s_jI - A, B]\begin{bmatrix} M_j \\ -D_j \end{bmatrix} = 0 \tag{5.2}$$

Παρατηρούμε ότι η διάσταση της βάσης αυτής είναι

$$(n+m) - rank[s_jI - A, B] = (n+m) - n = m$$

όπου $rank[s_jI - A, B] = n$ αφού το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο.

Αφού είναι βάση, υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $m \times 1$ a_j, έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} M_j \\ -D_j \end{bmatrix} a_j = \begin{bmatrix} v_j \\ -Fv_j \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις $-D_ja_j = -Fv_j$ και $M_ja_j = v_j$ έχουμε

$$FM_ja_j = D_ja_j \tag{5.4}$$

Η τελευταία σχέση είναι αυτή που πρέπει να ικανοποιεί κάθε πίνακας F ώστε η ιδιοτιμή s_j να είναι ιδιοτιμή του κλειστού συστήματος. Το μη μηδενικό διάνυσμα a_j μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα ώστε $M_ja_j = v_j$, δηλαδή ισούται με το ιδιοδιάνυσμα v_j που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή s_j. Οι παραπάνω συνθήκες για το μη μηδενικό $m \times 1$ διάνυσμα a_j μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διατύπωση του παρακάτω θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1

Το ζευγάρι (s_j, v_j) αποτελεί ένα ζεύγος (ιδιοτιμή, ιδιοδιάνυσμα) του πίνακα $A + BF$, αν και μόνον αν, ο F ικανοποιεί τη σχέση $FM_ja_j = D_ja_j$ για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα a_j τέτοιο ώστε $v_j = M_ja_j$, όπου $\begin{bmatrix} M_j \\ -D_j \end{bmatrix}$ μια βάση του κενού χώρου του $[s_jI - A, B]$ τέτοια ώστε $[s_jI - A, B]\begin{bmatrix} M_j \\ -D_j \end{bmatrix} = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Το γεγονός ότι είναι αναγκαία συνθήκη είναι προφανές λόγω της κατασκευής. Για να αποδείξουμε ότι είναι και ικανή συνθήκη, πολλαπλασιάζουμε από τα δεξιά τον πίνακα $s_j I-(A+BF)$ με $M_j a_j$ και έχουμε λόγω της σχέσης $FM_j a_j = D_j a_j$

$[s_j I-(A+BF)]M_j a_j = (s_j I - A)M_j a_j - BFM_j a_j = (s_j I - A)M_j a_j - BD_j a_j =$

$[s_j I - A, B]\begin{bmatrix} M_j \\ -D_j \end{bmatrix} a_j = 0a_j = 0$. Δηλαδή

$$[s_j I-(A+BF)]M_j a_j = 0,$$

σχέση που αποδεικνύει ότι το s_j έιναι ιδιοτιμή του πίνακα $A+BF$ και το διάνυσμα $v_j = M_j a_j$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. ■

Αν γράψουμε τη σχέση (5.4) για n επιθυμητές ιδιοτιμές, όπου τα a_j επιλέχθούν ώστε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v_j = M_j a_j$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε

$$FV = W \tag{5.5}$$

όπου $V \triangleq [M_1 a_1, M_2 a_2, ..., M_n a_n]$ και $W \triangleq [D_1 a_1, D_2 a_2, ..., D_n a_n]$ ορίζουν μοναδικά τον πίνακα F ως η λύση των n γραμμικά ανεξάρτητων αυτών εξισώσεων. Όταν οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, είναι πάντοτε δυνατόν να επιλέξουμε τα a_j ώστε ο V να έχει πλήρη τάξη. Στην πραγματικότητα οποιοδήποτε σύνολο μη μηδενικών διανυσμάτων επαρκεί, γιατί τα n διανύσματα $M_j a_j$ είναι πάντα γραμμικά ανεξάρτητα.

Ο πίνακας F που επανατοποθετεί όλες τις ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος δεν είναι μοναδικός. Όλοι οι πίνακες F είναι παραμετρικοί λόγω των διανυσμάτων a_j και αυτά με τη σειρά τους χαρακτηρίζουν τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Στην περίπτωση μίας εισόδου η σχέση $FM_j a_j = D_j a_j$ γίνεται $FM_j = D_j$ όπου $v_j = M_j$. Σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας F είναι μοναδικός.

Η επιλογή της βάσης $\begin{bmatrix} M_j \\ -D_j \end{bmatrix}$ μπορεί να γίνει με έναν διαφορετικό τρόπο, με απλούστερους υπολογισμούς όταν είναι γνωστή η ελέγξιμη μορφή του ζεύγους (A,B).

Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι $[sI-A,B]\begin{bmatrix} P^{-1}S(s) \\ D(s) \end{bmatrix}=0$ όπου ο $n\times m$ πίνακας $S(s)$ δίνεται από τη σχέση $S(s)=block\,diag(\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{\mu_i-1} \end{bmatrix}, i=1,...,m)$ και τα μ_i, $i=1,2,...,m$ είναι οι δείκτες ελεγξιμότητας του ζεύγους (A,B), πρόκειται δηλαδή για έναν $n\times m$ πολυωνυμικό πίνακα($n=\sum_{i=1}^{m}\mu_i$). Επίσης ο $m\times m$ πολυωνυμικός πίνακας $D(s)$ δίνεται από τη σχέση $D(s)=B_m^{-1}[diag[s^{\mu_1},...,s^{\mu_m}]-A_mS(s)]$. Ο πίνακας P είναι ο πίνακας μετασχηματισμού ομοιότητας που ανάγει το ζεύγος (A,B) σε ελέγξιμη μορφή $A_c=PAP^{-1}, B_c=PB$.

Αποδεικνύεται ότι

$$(sI-A_c)S(s)=B_cD(s) \tag{5.6}$$

Πράγματι, έχουμε

$$B_cD(s)=\bar{B}_cB_mB_m^{-1}[\Lambda(s)-A_mS(s)]=\bar{B}_c\Lambda(s)-\bar{B}_cA_mS(s)$$

καθώς επίσης

$$\begin{aligned}&(sI-A_c)S(s)=sS(s)-A_cS(s)=sS(s)-(\bar{A}_c+\bar{B}_cA_m)S(s)=\\&(sI-\bar{A}_c)S(s)-\bar{B}_cA_mS(s)=\bar{B}_c\Lambda(s)-\bar{B}_cA_mS(s)\end{aligned}$$

Από την (5.6) και από τις σχέσεις $A_c=PAP^{-1}, B_c=PB$ έχουμε

$$(sI-A)P^{-1}S(s)=BD(s)$$

Οι πίνακες $P^{-1}S(s),\ D(s)$ οι οποίοι έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών, αποδεικνύεται ότι είναι δεξιά πρώτοι πολυωνυμικοί πίνακες (right comprime), για τους οποίους γνωρίζουμε ότι $rank\begin{bmatrix} P^{-1}S(s_j) \\ D(s_j) \end{bmatrix}=m$ για κάθε s_j, κι έτσι ο $\begin{bmatrix} P^{-1}S(s_j) \\ D(s_j) \end{bmatrix}$ αποτελεί μία βάση του κενού χώρου του πίνακα $[sI-A,B]$ ($P=I$ όταν το σύστημα είναι σε ελέγξιμη μορφή).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1

Ας θεωρήσουμε το ζεύγος (A,B), όπου

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&2&-1\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\0&0\end{bmatrix}$$

Ας υποθέσουμε ότι οι επιθυμητές ιδιοτιμές του πίνακα $A+BF$ είναι οι $-2,-1+j,-1-j$ και έστω $s_1=-2, s_2=-1+j, s_3=-1-j$.

Στο παράδειγμα (4.3) είχαμε υπολογίσει τον πίνακα μετασχηματισμού P που φέρνει το σύστημα σε ελέγξιμη μορφή, καθώς και τον αντίστροφό του

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}$$

Οι δείκτες ελεγξιμότητας είναι $\mu_1=2$ και $\mu_2=1$ και άρα ο πίνακας

$$S(s)=block\,diag(\begin{bmatrix}1\\s\\\vdots\\s^{\mu_i-1}\end{bmatrix},i=1,...,m)=\begin{bmatrix}1&0\\s&0\\0&1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}S(s)=\begin{bmatrix}1&1\\s+1&0\\2&0\end{bmatrix}\qquad \text{και}$$

$$D(s)=B_m^{-1}[diag[s^{\mu_1},...,s^{\mu_m}]-A_mS(s)]=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}s^2&0\\0&s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-s+2&0\\1&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}s^2+s+1&-s\\-1&s\end{bmatrix}$$

Άρα

$$\begin{bmatrix}M(s)\\-D(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P^{-1}S(s)\\-D(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\s+1&0\\2&0\\\cdots&\cdots\\-(s^2+s-1)&s\\1&-s\end{bmatrix}$$

Για $s_1 = -2$ έχουμε $\begin{bmatrix} M_1 \\ -D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(-2) \\ -D(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Για $s_2 = -1 + j$ έχουμε $\begin{bmatrix} M_2 \\ -D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & 0 \\ 2 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 2+j & -1+j \\ 1 & 1-j \end{bmatrix}$ και τέλος για $s_3 = -1 - j = s_2^*$,

ο συζυγής μιγαδικός του του s_2 θα έχουμε $\begin{bmatrix} M_3 \\ -D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2^* \\ -D_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & 0 \\ 2 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 2-j & -1-j \\ 1 & 1+j \end{bmatrix}$.

Κάθε ιδιοδιάνυσμα $v_i = M_i a_i$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα $M_i, i = 1, 2$,. Παρατηρούμε, επίσης, ότι $v_3 = v_2^*$. Αν επιλέξουμε τα ιδιοδιανύσματα $V = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & j & -j \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ δηλαδή $a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

η σχέση (5.5) γίνεται

$$FV = W = [D_1 a_1, D_2 a_2, D_3 a_3] = \begin{bmatrix} 2 & -2-j & -2+j \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Πράγματι ο πίνακας

$A+BF=\begin{bmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ έχει τις επιθυμητές ιδιοτιμές καθώς και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. □

6. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Ας θεωρήσουμε δύο πίνακες A, B με διαστάσεις $n \times m, m \times n$ αντίστοιχα, και ας συμβολίσουμε με I_n, I_m τους μοναδιαίους πίνακες τάξης $n \times n, m \times m$ αντίστοιχα. Μία πολύ χρήσιμη ταυτότητα στις εφαρμογές της Θεωρίας Ελέγχου είναι η εξής:

$$|I_n \pm AB| = |I_m \pm BA| \qquad \text{Equation Section (Next)}(6.1)$$

Ο πρώτος που χρησιμοποίησε την σχέση αυτή στα προβλήματα της Θεωρίας Ελέγχου ήταν ο Plotkin (1964). Ο Kalman(1964) χρησιμοποίησε την ειδική περίπτωση $m=1$, ενώ ο Sain (1966) ασχολήθηκε λεπτομερώς τόσο με την ίδια την ταυτότητα, όσο και με διαφορετικές μορφές της και την εφάρμοσε προκειμένου να απλοποιήσει υπολογισμούς των ιδιοτιμών των πινάκων [12].

Το 1974 ο Brogan [3] χρησιμοποίησε την παρακάνω ταυτότητα σε μία παραμετρική προσέγγιση του προβλήματος της επανατοποθέτησης πόλων ενός κλειστού συστήματος. Οι Fahmy και O'Reilly(1982)[4,5,7] ανέπτυξαν μια πιο γενικευμένη και απλουστευμένη προσέγγιση από αυτήν του Brogan, την οποία και θα περιγράψουμε, που περιλαμβάνει και την περίπτωση επαναλαμβανόμενων ιδιοτιμών, δηλαδή ιδιοτιμών με πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας, καθώς επίσης επιχειρεί να υπολογίσει όλους τους ελεγκτές μελετώντας τις διαφορετικές Jordan μορφές του συστήματος .

Η μέθοδος αυτή θα μπορούσε να ανήκει στην προηγούμενη κατηγορία γιατί στην πραγματικότητα τα διανύσματα που χρησιμοποιούνται για την επανατοποθέτηση των επιθυμητών ιδιοτιμών γεννούν τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, ή αντίστροφα, η προηγούμενη μέθοδος θα μπορούσε να ονομασθεί και παραμετρική μιας και οι πίνακες F που υπολογίσαμε παραμετροποιούνται λόγω των διανυσμάτων a_j. Έτσι διαπιστώνουμε άλλη μια φορά ότι η ταξινόμηση των διαφόρων μεθόδων επανατοποθέτησης πόλων-ιδιοτιμών είναι υποκειμενική λόγω της αλληλοεπικάλυψης.

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα στο χώρο των καταστάσεων που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \; y = Cx + \; Du \tag{6.2}$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

x το διάνυσμα κατάστασης και u το διάνυσμα εισόδου και ας παραστήσουμε με

$$u = Fx \tag{6.3}$$

τον νόμο ανάδρασης κατάστασης . Το κλειστό σύστημα (compensated or closed-loop system) θα δίνεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x} = (A + BF)x \tag{6.4}$$

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: να προσδιορίσουμε έναν πραγματικό πίνακα ανάδρασης F έτσι ώστε το σύστημα (6.2) να έχει ένα αυθαίρετο σύνολο από ιδιοτιμές $\{\lambda_i\}$ μαζί με ένα σύνολο ιδιοδιανυσμάτων. Αυτό υπονοεί την χρήση του αντίστοιχου ελάχιστου πολυωνύμου και όλων των πιθανών Jordan μορφών του πίνακα $A + BF$ που αντιστοιχούν στο επιθυμητό σύνολο ιδιοτιμών. Υποθέτουμε ότι το $\{\lambda_i\}$ δεν περιέχει καμία από τις ιδιοτιμές του ανοικτού συστήματος.

Όπως προείπαμε ο Brogan[3] εξέφρασε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος

$$P(\lambda) = \left|\lambda I_n - A - BF\right| \tag{6.5}$$

ως γινόμενο δύο άλλων οριζουσών,

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \left|\lambda I_n - A - BF\right| = \left|\left[\lambda I_n - A\right]\left[I_n - (\lambda I_n - A)^{-1}BF\right]\right| = \left|\lambda I_n - A\right|\left|I_n - (\lambda I_n - A)^{-1}BF\right| = \\ &= P_0(\lambda)\left|I_n - (\lambda I_n - A)^{-1}BF\right| = P_0(\lambda)\left|I_n - S(\lambda)F\right| \end{aligned} \tag{6.6}$$

όπου $P_0(\lambda)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ανοικτού συστήματος, δηλαδή $P_0(\lambda) \triangleq \left|I_n - \lambda A\right|$ και $S(\lambda) \triangleq \varphi(\lambda)B$, όπου $\varphi(\lambda) \triangleq (\lambda I_n - A)^{-1}$.

6.1 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΕΝΩΝ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

Αν όλες οι ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος είναι διακεκριμένες $\{\lambda_i\}$ τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος παίρνει τη μορφή

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n) = 0 \tag{6.7}$$

Λόγω της σχέσης (6.1) και της παραδοχής ότι το $\{\lambda_i\}$ δεν περιέχει καμία από τις ιδιοτιμές του ανοικτού συστήματος έχουμε

$$\left| I_n - FS(\lambda_i) \right| = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{6.8}$$

Η ορίζουσα μηδενίζεται, αν και μονό αν, οι στήλες του πίνακα $[I_n - FS(\lambda_i)]$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Έτσι για κάποια μη μηδενικά διανύσματα n-διάστασης w_i έχουμε

$$\left[I_n - FS(\lambda_i) \right] w_i = 0 \quad \text{ή} \quad FS(\lambda_i) w_i = w_i \tag{6.9}$$

που μπορεί να γραφεί

$$F\left[S(\lambda_1) w_1 \quad S(\lambda_2) w_2 \quad \cdots \quad S(\lambda_{n'}) w_{n'} \right] = \left[w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_{n'} \right] \tag{6.10}$$

Τα διανύσματα w_i επιλέγονται αυθαίρετα υπό τη συνθήκη ότι τα n διανύσματα $S(\lambda_i) w_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε

$$F = \left[w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_3 \right] \left[S(\lambda_1) w_1 \quad S(\lambda_2) w_2 \quad \cdots \quad S(\lambda_{n'}) w_{n'} \right]^{-1}. \tag{6.11}$$

Αυτή είναι η παραμετρική έκφραση για τον πίνακα ανάδρασης F, με τα διανύσματα w_i να είναι οι ελεύθερες παράμετροι, πράγμα που δείχνει ότι η λύση του προβλήματος δεν είναι μοναδική.

Η παραπάνω σχέση είναι γενίκευση της προσέγγισης του Brogan. Συγκεκριμένα ο Brogan πρότεινε για να ικανοποιείται η σχέση (6.8) να μηδενίζεται μια από τις στήλες του πίνακα $\left[I_n - FS(\lambda_i) \right]$. Αυτή είναι προφανώς ικανή συνθήκη, αλλά όχι απαραίτητα αναγκαία. Η λύση του είναι η ειδική περίπτωση που τα w_i επιλέγονται να είναι στήλες του μοναδιαίου πίνακα και γι' αυτό είναι ένα υποσύνολο των πιθανών λύσεων.

Τα διανύσματα $S(\lambda_i)w_i$ είναι στην πραγματικότητα τα ιδιοδιανύσματα v_i που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές που επανατοποθετούνται και ικανοποιούν τη σχέση ιδιοτιμή-ιδιοδιάνυσμα

$$(A+BF)v_i = \lambda_i v_i \,. \tag{6.12}$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}
&(A+BF)S(\lambda_i)w_i = AS(\lambda_i)w_i + BFS(\lambda_i)w_i = \\
&A(\lambda_i \mathrm{I} - A)^{-1}Bw_i + Bw_i = A(\lambda_i \mathrm{I} - A)^{-1}Bw_i + (\lambda_i \mathrm{I} - A)(\lambda_i \mathrm{I} - A)^{-1}Bw_i = \\
&(A+\lambda_i \mathrm{I} - A)(\lambda_i \mathrm{I} - A)^{-1}Bw_i = \lambda_i(\lambda_i \mathrm{I} - A)^{-1}Bw_i = \lambda_i S(\lambda_i)w_i
\end{aligned}$$

Ας θυμηθούμε ότι για έναν πραγματικό πίνακα, το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε μία πραγματική ιδιοτιμή είναι πραγματικό και το ζεύγος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος συζυγών ιδιοτιμών είναι επίσης συζυγείς μιγαδικοί. Η προηγούμενη προσέγγιση επανατοποθέτησης πόλων χαρακτηρίζει το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων στην αυστηρή παραμετρική μορφή $[v_1 = S(\lambda_1)w_1 \,, v_2 = S(\lambda_2)w_2 \,, ..., \, v_{n'} = S(\lambda_{n'})w_{n'}] \triangleq V$. Η ελευθερία στην επιλογή των παραμετρικών ιδιοδιανυσμάτων, αντικατοπτρίζει την ελευθερία που προσφέρεται από την ανάδραση κατάστασης στην ανάθεση των ιδιοδιανυσμάτων, πέρα από την επανατοποθέτηση ιδιοτιμών [4].

6.2 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΩΝ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ (ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΊΠΤΩΣΗ)

Όταν μερικές (ή και όλες) από τις ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος που θέλουμε να επανατοποθετήσουμε είναι επαναλαμβανόμενες το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A+BF$ γράφεται

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}...(\lambda-\lambda_s)^{m_s}=0 \ \ , \ s\leq n \tag{6.13}$$

όπου m_i είναι οι αλγεβρικές πολλαπλότητες των s ιδιοτιμών λ_i με $i=1,2,...,s$ και $m_1+m_2+...+m_s=n$.

Για να αποτελεί το σύνολο $\{\lambda_i\}$, το σύνολο των ιδιοτιμών(φάσμα) του κλειστού συστήματος πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις:

$$P(\lambda_i)=0, \quad i=1,2,...,s \tag{6.14}$$

και

$$\frac{d^{\kappa}}{d\lambda^{\kappa}}P(\lambda_i)=0, \qquad \kappa=1,2,...,m_i-1. \tag{6.15}$$

Οι τελευταίες δύο σχέσεις χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουμε n' ανεξάρτητες διανυσματικές εξισώσεις έτσι ώστε ο κατάλληλος πίνακας ανάδρασης κατάστασης F να βρεθεί. Όπως και στην περίπτωση των διακεκριμένων ιδιοτιμών μπορούμε να γράψουμε για κάθε ιδιοτιμή λ_i, χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.14), ένα πλήθος εξισώσεων, ας πούμε q_i, της μορφής

$$FS(\lambda_i)w_{ij}=w_{ij}, \quad j=1,2,...,q_i \tag{6.16}$$

και προσθέτουμε m_i-q_i εξισώσεις της μορφής

$$F\frac{d^{\kappa}S(\lambda_i)}{d\lambda^{\kappa}}w_{ij}=0,\quad \kappa=1,2,...,p_{ij} \tag{6.17}$$

όπου το πλήθος των παραγώγων πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $p_{i1}+p_{i2}+...+p_{iq_i}=m_i$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε $p_{i1}\geq p_{i2}\geq ...\geq p_{iq_i}$

Συλλέγοντας τώρα τα τις n' διανυσματικές εξισώσεις που προκύπτουν από τις σχέσεις (6.16) και (6.17) έχουμε

$$F[D(\lambda_1)\quad D(\lambda_2)\,...\,D(\lambda_s)]=[W_1\quad W_2\,...\,W_s] \tag{6.18}$$

όπου

$$\begin{array}{c} W_i=\left[w_{i1}\ 0\,...\,0\,|\,w_{i2}\ 0\,...\,0\,|\,...\,|\,w_{iq_i}\ 0\,...\,0\right] \\ |\leftarrow p_{i1}\rightarrow\ |\leftarrow p_{i2}\rightarrow\ |\,...|\leftarrow p_{iq_i}\rightarrow\ | \end{array} \tag{6.19}$$

και

$$D(\lambda_i)\triangleq\left[S(\lambda_i)w_{i1}\quad \frac{d}{d\lambda}S(\lambda_i)w_{i1}...\frac{d^{p_i-1}}{d\lambda^{p_i-1}}S(\lambda_i)w_{i1}\,|\,...\,|\,S(\lambda_i)w_{iq_i}\quad \frac{d}{d\lambda}S(\lambda_i)w_{iq_i}...\frac{d^{p_i-1}}{d\lambda^{p_i-1}}S(\lambda_i)w_{iq_i}\right] \tag{6.20}$$

Όπως και στην περίπτωση των διακεκριμένων ιδιοτιμών, τα n-διάστατα παραμετρικά διανύσματα w_{ij} επιλέγονται αυθαίρετα υπό τη συνθήκη ότι οι στήλες του πίνακα $[D(\lambda_1)\quad D(\lambda_2)\,...\,D(\lambda_s)]$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητες και τότε ο πραγματικός πίνακας F εκφράζεται ως εξής:

$$F=[W_1\quad W_2\,...\,W_s][D(\lambda_1)\quad D(\lambda_2)\,...\,D(\lambda_s)]^{-1} \tag{6.21}$$

Έχοντας αναπτύξει την προηγούμενη έκφραση του πίνακα ανάδρασης, προκειμένου να επανατοποθετήσουμε ένα συγκεκριμένο σύνολο ιδιοτιμών $\{\lambda_i\}$ του κλειστού συστήματος, αναγνωρίζουμε στις στήλες των $D(\lambda_i)$ το αντίστοιχο σύνολο των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων. Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε τον πίνακα (6.20) με έναν διαφορετικό αλλά πιο εύχρηστο τρόπο, στον οποίο χρησιμοποιούνται τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα.

$$D(\lambda_i) = \left[{v^{(i)}}_{11}, {v^{(i)}}_{12}, \dots, {v^{(i)}}_{1p_{i1}} \mid \dots \mid {v^{(i)}}_{q_i 1}, {v^{(i)}}_{q_i 2}, \dots, {v^{(i)}}_{q_i p_{i q_i}} \right] \tag{6.22}$$

όπου τα διανύσματα στην πρώτη «αλυσίδα» υπολογίζονται με τις παρακάτω σχέσεις

$$\left.\begin{aligned} {v^{(i)}}_{11} &= \varphi(\lambda_i) B w_{i1} \\ {v^{(i)}}_{1j} &= (-1)^{j-1} \varphi^{j}(\lambda_i) B w_{i1}, \quad j = 2,3,\dots,p_{i1} \end{aligned}\right\} \tag{6.23}$$

Τώρα είμαστε σε θέση να εξηγήσουμε όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα. Το κλειστό σύστημα $\dot{x} = (A + BF)x$ έχει ένα αυθαίρετο σύνολο από ιδιοτιμές $\{\lambda_i\}$. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι m_i και η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι q_i (όταν έχουμε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι $m_i = q_i = 1$). Οι «αλυσίδες» των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων της σχέσης (6.22) περιγράφονται με αυστηρά παραμετρική μορφή με τα w_{ij} να είναι τα ελεύθερα παραμετρικά διανύσματα, που ο συνολικός αριθμός τους είναι $q_1 + q_2 + \dots + q_s$. Η Jordan κανονική μορφή του πίνακα $A + BF$ αποτελείται από q_i Jordan blocks για κάθε ιδιοτιμή λ_i, το πρώτο block είναι τάξης $p_{i1} \times p_{i1}$, το δεύτερο είναι τάξης $p_{i2} \times p_{i2}$ κ.ο.κ.

Η ελευθερία στην επιλογή των παραμετρικών διανυσμάτων αποδεικνύει πως η λύση δεν είναι μοναδική [4].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα συνεχούς χρόνου της μορφής $\dot{x} = Ax + Bu$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και έστω οι επιθυμητές ιδιοτιμές $\{-1,-1,-2\}$.

Η Jordan κανονική μορφή του πίνακα $A+BF$ του κλειστού συστήματος θα έχει μία από τις παρακάτω μορφές :

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Στην πρώτη περίπτωση στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ αντιστοιχούν $q_1 = 2$ Jordan blocks, το πρώτο τάξης $p_{11} \times p_{11} = 1\times 1$ και το δεύτερο τάξης $p_{12} \times p_{12} = 1\times 1$. Έτσι έχουμε

$$D(\lambda_1) = \left[v_{11}^{(1)} \,|\, v_{21}^{(1)} \right]$$

όπου

$$v_{11}^{(1)} = (\lambda_1 I - A)^{-1} B w_{11} = (-I - A)^{-1} B w_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{26} & -\frac{4}{13} \\ -\frac{7}{26} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{9}{26} & -\frac{10}{13} \end{bmatrix} w_{11}$$

και

$$v_{21}^{(1)} = (\lambda_1 I - A)^{-1} B w_{12} = (-I - A)^{-1} B w_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{26} & -\frac{4}{13} \\ -\frac{7}{26} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{9}{26} & -\frac{10}{13} \end{bmatrix} w_{12}$$

Ενώ στη δεύτερη ιδιοτιμή $\lambda_2 = -2$ αντιστοιχεί $q_2 = 1$ Jordan block τάξης

$p_{21} \times p_{21} = 1 \times 1$. Έτσι έχουμε $D(\lambda_2) = \left[v_{11}^{(2)} \right]$ όπου

$$v_{11}^{(2)} = (\lambda_2 I - A)^{-1} B w_{21} = (-2I - A)^{-1} B w_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} w_{21}$$

Επιλέγουμε, αυθαίρετα τα w_{11}, w_{12}, w_{21} ώστε οι στήλες του πίνακα $[D(\lambda_1) \;\; D(\lambda_2)]$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, έστω

$$w_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_{12} = w_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

κι έτσι
$$[D(\lambda_1) \;\; D(\lambda_2)] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{26} & -\frac{4}{13} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{7}{26} & -\frac{2}{13} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{9}{26} & -\frac{10}{13} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[D(\lambda_1) \;\; D(\lambda_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{26} & -\frac{4}{13} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{7}{26} & -\frac{2}{13} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{9}{26} & -\frac{10}{13} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & \frac{13}{4} & -\frac{11}{4} \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F = [w_{11} \;\; w_{12} \;\; w_{21}][D(\lambda_1) \;\; D(\lambda_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & \frac{13}{4} & -\frac{11}{4} \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Στη δεύτερη περίπτωση στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ αντιστοιχεί $q_1 = 1$ Jordan block, τάξης $p_{11} \times p_{11} = 2 \times 2$. Έτσι έχουμε

$$D(\lambda_1) = \left[v_{11}^{(1)} \mid v_{12}^{(1)} \right]$$

όπου

$$v_{11}^{(1)}=(\lambda_1 I-A)^{-1}Bw_{11}=(-I-A)^{-1}Bw_{11}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{26} & -\frac{4}{13}\\ -\frac{7}{26} & -\frac{2}{13}\\ -\frac{9}{26} & -\frac{10}{13}\end{bmatrix}w_{11}$$

και

$$v_{12}^{(1)}=(-1)^{2-1}((\lambda_1 I-A)^{-1})^2 Bw_{11}=-((-I-A)^{-1})^2 Bw_{11}=\begin{bmatrix}\frac{89}{676} & \frac{35}{169}\\ -\frac{1}{676} & \frac{11}{169}\\ -\frac{57}{676} & -\frac{49}{169}\end{bmatrix}w_{11}$$

Ενώ στη δεύτερη ιδιοτιμή $\lambda_2=-2$ αντιστοιχεί $q_2=1$ Jordan block τάξης $p_{21}\times p_{21}=1\times 1$. Έτσι έχουμε $D(\lambda_2)=\left[v_{11}^{(2)}\right]$ όπου

$$v_{11}^{(2)}=(\lambda_2 I-A)^{-1}Bw_{21}=(-2I-A)^{-1}Bw_{21}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & -\frac{5}{12}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}w_{21}$$

Επιλέγουμε, αυθαίρετα τα w_{11}, w_{21} ώστε οι στήλες του πίνακα $[D(\lambda_1)\;\; D(\lambda_2)]$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, έστω

$$w_{11}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, w_{21}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

τότε

$$[D(\lambda_1)\;\; D(\lambda_2)]=\begin{bmatrix}-\frac{4}{13} & \frac{35}{169} & -\frac{13}{24}\\ -\frac{2}{13} & \frac{11}{169} & -\frac{5}{12}\\ -\frac{10}{13} & -\frac{49}{169} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$[D(\lambda_1) \quad D(\lambda_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & \frac{35}{169} & -\frac{13}{24} \\ -\frac{2}{13} & \frac{11}{169} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{10}{13} & -\frac{49}{169} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$F = [w_{11} \;\; w_{11} \;\; w_{21}][D(\lambda_1) \quad D(\lambda_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & \frac{35}{169} & -\frac{13}{24} \\ -\frac{2}{13} & \frac{11}{169} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{10}{13} & -\frac{49}{169} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1}$$

για τον οποίο εύκολα διαπιστώνουμε ότι επανατοποθετεί τις ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος στις επιθυμητές θέσεις. □

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΝΤΟΛΕΣ ΣΤΟ MATHEMATICA ΚΑΙ ΣΤΟ MATLAB ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΝ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ

Η Wolfram Research εξέδωσε τον Ιούλιο του 2006 ένα καινούριο πακέτο εργαλειοθήκη για το Mathematica, το Polynomial Control System(PCS), που επεκτείνει τη λειτουργικότητα του προγενέστερου Control System Professional Suite (CSPS) (είχε πρωτοκυκλοφορήσει στα μέσα του 2003) το οποίο τώρα πια αποτελείται από το Control System Professional(CSP), το Advanced Numerical Methods(ANM) και το νέο Polynomial Control Systems.

Το PCS παρουσιάζει καινούρια εργαλεία για την μοντελοποίηση, την ανάλυση και το σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου που περιγράφονται από εξισώσεις πολυωνυμικών πινάκων ή ρητών πινάκων. Θα ασχοληθούμε εδώ με κάποιες νέες εντολές και θα τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες που είναι διαθέσιμες στο Matlab [10].

Το PCS παρέχει αρκετά εργαλεία σχεδιασμού και σύνθεσης προκειμένου να μας βοηθήσει στην διαδικασία σχεδιασμού του αυτομάτου ελέγχου, ειδικά στα συστήματα πολλών εισόδων, πολλών εξόδων (MIMO systems).

ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΠΟΛΩΝ ΜΕ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα στο χώρο των καταστάσεων που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \; y = Cx + \; Du$$

Έστω ότι δίνονται οι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, όπου n και m είναι το πλήθος των εισόδων και των εξόδων, αντίστοιχα. Το πρόβλημα της επανατοποθέτησης πόλων με ανάδραση κατάστασης είναι να βρούμε έναν σταθερό πίνακα ανάδρασης κατάστασης

$K \in \mathbb{R}^{m\times n}$, όπου $K = wk^{\mathrm{T}}$, ώστε οι ιδιοτιμές του πίνακα του κλειστού συστήματος $A_c = A - BK$ να βρίσκονται σε επιθυμητές τοποθεσίες .

Ορίζουμε πρώτα τους πίνακες A, B, C και έπειτα βρίσκουμε την περιγραφή στο χώρο των καταστάσεων. Όπως γνωρίζουμε μπορούμε να βρούμε τον πίνακα ανάδρασης αν και μόνον αν το σύστημα είναι ελέγξιμο. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τις επιθυμητές ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος.

```
<<PolynomialControlSystems`
<<LinearAlgebra`MatrixManipulation`
A={{0,1,0},{0,0,1},{0,2,-1}};
B={{0,1},{1,1},{0,0}};
aircraft=StateSpace[A,B]
Controllable[aircraft]
True
desiredCLSPoles={-1-i,-1+i,-2};
```

Το PCS επεκτείνει την εντολή StateFeedbackGains[ ] του CSP, εισάγοντας τρεις καινούριες μεθόδους: Mapping, Spectral, FullRank προκειμένου να υπολογίσουμε τον πίνακα ανάδρασης. Οι δύο πρώτες, όπως και η μέθοδος Ackermann του CSP, παράγουν πίνακες πρώτης τάξης. Η Spectral παράγει πιο ακριβή αποτελέσματα όσον αφορά τους αριθμητικούς υπολογισμούς, ενώ η Mapping πιο γρήγορα αποτελέσματα, όταν οι υπολογισμοί γίνονται με συμβολικό τρόπο.

Η εντολή Rationalize χρησιμοποιείται για να πάρουμε την ακριβή περιγραφή του συστήματος. Στις μεθόδους αυτές είναι απαραίτητη η επιλογή του διανύσματος (ControlInput) w που ορίζει τη βαρύτητα των εισόδων του συστήματος.

```
StateFeedbackGains[Rationalize[aircraft],desiredCLSPoles,
Method→Mapping,ControlInput→{0,1,0}]

StateFeedbackGains[Rationalize[aircraft],desiredCLSPoles,
Method→Spectral,ControlInput→{0,1,0}]
```

Τα ίδια ακριβώς αριθμητικά αποτελέσματα μπορούμε να έχουμε στο Matlab με την εντολή place. Όταν η τάξη του συστήματος είναι μικρή (μικρότερη του 10) δεν υπάρχει καμία σημαντική διαφορά ανάμεσα στα αριθμητικά αποτελέσματα και στους ακριβείς υπολογισμούς του Mathematica. Για συστήματα μεγαλύτερης τάξης έχουμε μεγάλες αποκλίσεις.

```
A=[0,1,0;0,0,1;0,2,-1]
B=[0,1;1,1;0,0]
desiredCLSPoles=[-1-i,-1+i,-2]
w=[0,1,1;1,0,0]
k1=place(A,B*w,desiredCLSPoles)
F=w*k1
eig(A-B*F)
```

Η μέθοδος FullRank χρησιμοποιεί την Luenberger ελέγξιμη κανονική μορφή για να υπολογίσει έναν πλήρης τάξης πίνακα ανάδρασης. Το πλεονέκτημα σε σχέση με την KNVD μέθοδο του CSP, που στηρίζεται στον αλγόριθμο των Kautsky-Nichols-Van Dooren είναι ότι επιτρέπει ακριβείς και συμβολικούς υπολογισμούς. Αν όμως οι υπολογισμοί είναι αριθμητικοί τότε η KNVD μέθοδος είναι πιο εύρωστη (robust) και για αυτό προτιμότερη. Ένα άλλο μειονέκτημα της μεθόδου FullRank είναι ότι οι επιθυμητοί συζυγείς πόλοι του κλειστού συστήματος πρέπει να είναι συμβατοί με τους δείκτες ελεγξιμότητας του συστήματος (ControllabilityIndices[2]). Έτσι για παράδειγμα αν οι δείκτες ελεγξιμότητας είναι {2,1,2} είναι δυνατό να επανατοποθετήσουμε μόνο δύο ζεύγη συζυγών μιγαδικών, ενώ αν οι δείκτες ελεγξιμότητας είναι {3,1,1} είναι δυνατό να επανατοποθετήσουμε μόνο ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών, λόγω της ιδιαίτερης δομής της Luenberger ελέγξιμηs κανονικήs μορφήs.

```
StateFeedbackGains[Rationalize[aircraft],desiredCLSPoles,
Method→FullRank]
```

Καμία από τις εντολές του Matlab που γνωρίζουμε δεν χρησιμοποιεί αλγόριθμο όπως της μεθόδου FullRank. Η πλησιέστερη είναι μάλλον η παρακάτω μορφή της εντολής place που παράγει έναν πλήρης τάξης πίνακα ανάδρασης κατάστασης χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο παρόμοιο με αυτόν της KNVD μεθόδου του CSP.

```
A=[0,1,0;0,0,1;0,2,-1]
B=[0,1;1,1;0,0]
desiredCLSPoles=[-1-i,-1+i,-2]
F=place(A,B,desiredCLSPoles)
eig(A-B*F)
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Ackermann, J. (1972). “Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum”, *Regelungs-technik und Prozessdatenverarbeitung*, Vol. 7, pp. 297-300.

[2] Antsaklis, P. J. and Michel, A.N. (1997). *Linear Systems*. McGraw-Hill,NY.

[3] Brogan, W.L. (1974). “Application of a determinantidentity to pole placement and observer problems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 19, pp.612-614.

[4] Fahmy, M.M. and O’Reilly, J. (1982). “On Eigenstructure Assignment in Linear Multivariable Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-27, NO 3, pp.690-693 .

[5] Fahmy, M.M. and O’Reilly, J. (1988)”Multistage parametric eigenstructure assignment by output feedback control”, *International Journal of Control*, 48, pp. 97-116.

[6] Liu, G. P. and Patton, R. J.(1998). *Eigenstructure Asignment for Control System Design.*Wiley, Chichester, UK.

[7] Moore, B.C. (1976). ”On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, October 1976, pp. 689-692.

[8] O'Reilly, J. and Fahmy, M.M. The minimum number of degrees of freedom in state feedback control, *International Journal of Control*, Vol. 41, No. 3, pp. 749-768.

[9] Porter, B. and Crossley, T. R. (1969).”Eigenvalues and Eigenvectors sensitivities in linear system theory”, *International Journal of Control*, Vol. 10, pp. 163-170

[10] Söylemez, M. T. and Üstoğlu, I. (2007). ”Polynomial Control Systems”, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 27, No. 4, pp. 124-137.

[11] Vardulakis, A. I. G. (1991). *Linear Multivariable Control*, John Wiley&SonsLtd., Chicester.

[12] White, B.A.(1995). Review Paper. “Eigenstructure assignment: a survey.” *Proc.Instn.Mech.Engrs*, Vol. 209, pp. 1-11.

[13] Wonham, W. M. (1967). “On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-12, No 6, pp.660-665.