ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΠΟΛΩΝ ΣΕ ΙΔΙΑΖΟΝΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παρασκευή Παπανικολάου

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Επ.Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2005

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΠΟΛΩΝ ΣΕ ΙΔΙΑΖΟΝΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παρασκευή Παπανικολάου

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Επ.Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή την.................................

....	....	....
Ν.Καραμπετάκης	Μ.Γουσίδου-Κουτίτα	Α.Ι.Βαρδουλάκης
Επ.Καθηγητής Α.Π.Θ.	Επ.Καθηγήτρια Α.Π.Θ.	Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2005

....

Παρασκευή Παπανικολάου
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου συναντώνται τόσο σε συνεχή όσο και σε διακριτό χρόνο σε πάρα πολλές περιπτώσεις μοντελοποίησης φυσικών, μηχανικών και οικονομικών διεργασιών. Η διαδικασία μοντελοποίησης ξεκινάει από την επιλογή κάποιων μεγεθών που θεωρούμε ότι επαρκούν για την πλήρη περιγραφή του συστήματος. Η γενική μορφή των εξισώσεων που καταλήγουμε από τη διαδικασία μοντελοποίησης, ονομάζεται περιγραφή στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων και τα συστήματα ονομάζονται ιδιάζοντα συστήματα.

Μια από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους για την αλλαγή της δυναμικής απόκρισης ενός γραμμικού συστήματος είναι η επανατοποθέτηση πόλων μέσω ανάδρασης κατάστασης. Σε αυτή τη μελέτη θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε κάποιους αλγόριθμους επανατοποθέτησης πόλων βασισμένοι στη θεωρία που αναπτύχθηκε στα εργασίες των Mahmoud M. Fahmy and J. O'Reilly, [Fahmy-O'Reilly, 1982-83] και Guang-Ren Duan και Ron J. Patton, [Duan - Patton, 1997]. Η θεωρητική περιγραφή των αλγορίθμων αυτών συνοδεύεται από την υλοποίησή τους σε Mathematica, χρησιμοποιώντας επιπλέον το πακέτο «Control Systems Professional», καθώς και μια σειρά αλγορίθμων που αναπτύχθηκαν από την ομάδα Control του τμήματος Μαθηματικών Α.Π.Θ., υπό την επίβλεψη του κ. Α. Βαρδουλάκη σε συνεργασία με την Wolfram Research. Εκτός από το γενικό πρόβλημα ανάδρασης κατάστασης, ασχολούμαστε και με κάποια επιμέρους προβλήματα ιδιαίτερης σημασίας όπως η ανάδραση κατάστασης αλλά και της παραγώγου του διανύσματος κατάστασης.

ABSTRACT

The modeling process of many physical, mechanical and economic processes leads to Linear Automatic Control Systems either in continuous or discrete time. The modeling begins by choosing the appropriate variables that are considered to fully describe the system. The general form of the equations is called generalized state space equations, and the underlying systems are called singular systems.

One of the most popular methods of modifying the dynamic response of a linear multivariable system is the placement, via linear state feedback, of the closed loop eigenvalues at arbitrary preassigned points in the complex plane. We will attempt to describe some pole placement algorithms based on the theory that was developed during the last decade. The theoretical description of the algorithms is accompanied with their implementation in Mathematica, using “Control Systems Professional” and several algorithms developed by the Control Group of the department of Mathematics AUTH, under the supervision of prof. A. Vardulakis. Except of the general pole-placement methods via state feedback, we also study some specific problems of crucial importance such as the constant ratio proportional plus derivative state feedback problem and the proportional and partial derivative state feedback problem.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας ήταν ιδιαίτερα σημαντική η συμβολή του επιβλέποντα επίκουρου καθηγητή κ. Καραμπετάκη Νικόλαο, τον οποίο ευχαριστώ θερμά τόσο για τις διαφωτιστικές και καίριες υποδείξεις του όσο και για την συνολική επίβλεψη της εργασίας.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω στα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον καθηγητή κ. Βαρδουλάκη Αντώνιο-Ιωάννη και την επίκουρη καθηγήτρια κα. Γουσίδου-Κουτίτα Μαρία για τον χρόνο που αφιέρωσαν στη μελέτη καθώς και την αξιολόγηση της εργασίας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 5

ABSTRACT 6

ΠΡΟΛΟΓΟΣ 7

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ 8

1. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΔΟΜΗ ΡΗΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΣΤΟ $\mathbb{C}$. 11

1.1 Πολυωνυμικοί πίνακες 11
Παράδειγμα 1.1 13
Παράδειγμα 1.2 14

1.2 Ρητοί πίνακες 16
Παράδειγμα 1.3 17
Παράδειγμα 1.4 18

1.3 Πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες 19

2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ. 21
Παράδειγμα 2.1 23

3. ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΠΟΛΩΝ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΜΕ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ 27

3.1 Αλγόριθμος επανατοποθέτησης πόλων 28
Παράδειγμα 3.1 29

4. ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΠΟΛΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΣΕ ΙΔΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ. 33

4.1 Αλγόριθμος επανατοποθέτησης πόλων 34
Παράδειγμα 4.1 36
Παράδειγμα 4.2 43

5. ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗΣ ΠΟΛΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΣΕ ΙΔΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 47

5.1 Αναλογική και διαφορική ανάδραση κατάστασης σταθερού λόγου 47
Παράδειγμα 5.1 48

5.2 Αναλογική και μερική διαφορική ανάδραση κατάστασης 50
Παράδειγμα 5.2 50

6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ **54**
Παράδειγμα 6.1 54
Παράδειγμα 6.2 62
Παράδειγμα 6.3 68
Παράδειγμα 6.3 69
Παράδειγμα 6.4 75
Παρατήρηση 82

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ **84**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ **86**

1. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΔΟΜΗ ΡΗΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΣΤΟ $\mathbb{C}$.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τις βασικές αλγεβρικές και γεωμετρικές έννοιες που απαιτούνται για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων. Το περιεχόμενο του κεφαλαίου αυτού περιλαμβάνει από απλές εισαγωγικές έννοιες ως εξειδικευμένα θέματα όπως η αλγεβρική δομή πολυωνυμικών και ρητών πινάκων.

1.1 Πολυωνυμικοί πίνακες

Έστω $\mathbb{R}$ το σώμα των πραγματικών αριθμών και $\mathbb{R}[s]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{R}$. Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}[s]$ συμβολίζεται με $\mathbb{R}[s]^{m\times n}$. Ας θεωρήσουμε τώρα τον πολυωνυμικό πίνακα

$$A(s) = A_q s^q + \cdots + A_1 s + A_0 \in \mathbb{R}[s]^{m\times n},$$

όπου $A_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $i = 1,\ldots,q$ και m όχι κατ' ανάγκη ίσο με n.

<u>Ορισμός 1.1</u> *Ένας πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$ ονομάζεται **κανονικός** (regular) αν-ν*

$$m = n$$

και

$$\det A(s) \neq 0$$

*για κάθε s εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημείων $s_i \in \mathbb{C}$. Σε αντίθετη περίπτωση ονομάζεται **μη κανονικός** ή **ιδιάζων** (singular).* □

<u>Ορισμός 1.2</u> ***Βαθμός*** *ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$ ονομάζεται ο μέγιστος βαθμός των πολυωνύμων του πίνακα $A(s)$.* □

Οι βαθμοί της κάθε στήλης του $A(s)$ θα συμβολίζονται με $\deg_{ci} A(s),\ i = 1,\ldots,n$.

Αντίστοιχα οι βαθμοί της κάθε γραμμής του $A(s)$ θα συμβολίζονται με $\deg_{ri} A(s),\ i = 1,\ldots,m$.

<u>Ορισμός 1.3</u> *Ένας κανονικός πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ ονομάζεται* **αντιστρέψιμος** *ή* **μονομετρικός** *(unimodular) στον δακτύλιο των πολυωνυμικών πινάκων, αν-ν ο αντίστροφός του είναι επίσης πολυωνυμικός πίνακας ή ισοδύναμα αν-ν*

$$\det A(s) = c \in \mathbb{R}, c \neq 0$$

□

Μια βασική ισοδυναμία πολυωνυμικών πινάκων είναι η μονομετρική ισοδυναμία, όπως ορίζεται πιο κάτω.

<u>Ορισμός 1.4</u> *[Gantmacher, 1959] Δύο πολυωνυμικοί πίνακες $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$ και $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$ ονομάζονται* **μονομετρικά ισοδύναμοι στο** $\mathbb{C}$ *(unimodular equivalent) αν-ν υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ και $V(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ τέτοιοι, ώστε*

$$B(s) = U(s)A(s)V(s).$$

Στην περίπτωση που $B(s) = U(s)A(s)$ (αντίστοιχα $B(s) = A(s)V(s)$) οι πίνακες ονομάζονται **αριστερά** (αντίστοιχα **δεξιά**) **μονομετρικά ισοδύναμοι**. □

Η προηγούμενη σχέση αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας πολυωνυμικών πινάκων, με κανονική μορφή τη λεγόμενη Smith μορφή

<u>Ορισμός 1.5</u> *[Vardulakis, 1991] Κάθε πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$ είναι* ***<u>μονομετρικά ισοδύναμος</u>*** *με ένα πολυωνυμικό πίνακα της μορφής*

$$S^{\mathbb{C}}_{A(s)}(s) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_r(s) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0_{m-r,n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$$

όπου $\varepsilon_i(s) \in \mathbb{R}[s],\ i = 1,\ldots,r$. Ο πίνακας $S^{\mathbb{C}}_{A(s)}(s)$ ονομάζεται ***Smith μορφή*** *του πίνακα $A(s)$ στο $\mathbb{C}$ και τα πολυώνυμα $\varepsilon_i(s)$ αναλλοίωτα πολυώνυμα του $A(s)$. Τα $\varepsilon_i(s)$ έχουν μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα και την εξής ιδιότητα*

$$\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s), i = 1,\ldots,r-1.$$

Επίσης ισχύει

$$\varepsilon_i(s) = \frac{\Delta_i(s)}{\Delta_{i-1}(s)},\ \ i = 1,\ldots,r$$

όπου

$$\Delta_0(s) := 1, \Delta_i(s) := \mu.\kappa.\delta.\ \{\text{ελλάσονες ορίζουσες τάξης i του } A(s)\},$$

($\mu.\kappa.\delta.$ δηλώνει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη).

□

<u>Ορισμός 1.6</u> ***Μηδενικά*** *του πίνακα* $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$ *ονομάζονται οι ρίζες των αναλλοίωτων πολυωνύμων* $\varepsilon_i(s), i = 1,2,\ldots,r$. *Αν* $\lambda_j \in \mathbb{C},\ j = 1,\ldots,v$ *είναι τα διαφορετικά μεταξύ τους μηδενικά του* $A(s)$ *, τότε τα πολυώνυμα* $\varepsilon_i(s)$ *μπορούν να γραφτούν*

$$\varepsilon_i(s) = \prod_{j=1}^{v}(s-\lambda_j)^{m_{ij}} \text{ όπου } i = 1,2,\ldots,r$$

και οι όροι $(s-\lambda_j)^{m_{ij}}$ *ονομάζονται* ***πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες*** *(finite elementary divisors) του πίνακα* $A(s)$. *Επίσης οι εκθέτες* m_{ij} *έχουν την ιδιότητα*

$$0 \le m_{1j} \le m_{2j} \le \cdots \le m_{rj},\ \ j = 1,\ldots,v.$$

□

Παράδειγμα 1.1

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας

$$A(s) = \begin{bmatrix} 2s^2+3s & s \\ 2s^2+2s & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2\times 2}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα $A(s)$ από αριστερά και δεξιά με τους μονομετρικούς πολυωνυμικούς πίνακες $U(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ και $V(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ αντίστοιχα, τότε θα προκύψει η *Smith μορφή* του $A(s)$ στο $\mathbb{C}$.

Πράγματι από τη σχέση $S(s) = U(s)A(s)V(s)$ προκύπτει ότι η *Smith μορφή* του είναι

$$S(s)=\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s(s+1) \end{bmatrix}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι έχει *πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες* τους $\varepsilon_1(s)=s$ και $\varepsilon_2(s)=s(s+1)$, ενώ έχει μ*ηδενικά 1^{ης} τάξης* στα σημεία $s=0$ και $s=-1$.

□

Παράδειγμα 1.2

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας

$$sE-A=\begin{bmatrix} 1.1s & -1 & 0 & 0 \\ -10000 & 0 & s & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Η *Smith μορφή* του πίνακα $sE-A$ στο $\mathbb{C}$ προκύπτει από τον τύπο

$$S(s)=U(s)(sE-A)V(s)$$

όπου οι πίνακες $U(s)$ και $V(s)$ είναι

$$U(s)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10000} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5000} & -1 & 0 \\ 9090.91 & s+1.81818 & 9090.91 & -9090.91 \end{bmatrix}$$

και

$$V(s)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{s}{10000} \\ 1 & 1.1s & 0 & 0.00011s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{s}{5000} \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς η S*mith μορφή* του πίνακα $sE-A$ στο $\mathbb{C}$ είναι

$$S(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^2+1.81818s+9090,91 \end{bmatrix}$$

και τα μηδενικά του πίνακα είναι στα σημεία $s=-0.909091-95.3419i$ και $s=-0.909091+95.3419i$

□

1.2 Ρητοί πίνακες

Έστω $\mathbb{R}[s]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και $\mathbb{R}(s)$ το σώμα των ρητών συναρτήσεων πάνω στο $\mathbb{R}[s]$ δηλαδή

$$\mathbb{R}(s) := \left\{ t(s) : t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, n(s) \in \mathbb{R}[s], d(s) \neq 0 \right\}$$

Οι $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{R}(s)$ ονομάζονται **ρητοί πίνακες** και το σύνολό τους συμβολίζεται με $\mathbb{R}(s)^{m \times n}$. Το σύνολο των πολυωνυμικών πινάκων περιέχεται προφανώς σε αυτό των ρητών πινάκων.

Αντίστοιχα με τους πολυωνυμικούς πίνακες, η μονομετρική ισοδυναμία μπορεί να επεκταθεί και στο σώμα των ρητών πινάκων ως εξής:

Ορισμός 1.8 *Δύο ρητοί πίνακες $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$ και $B(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$ ονομάζονται **μονομετρικά ισοδύναμοι (unimodular equivalent) στο** $\mathbb{C}$ αν-ν υπάρχουν μονομετρικοί πολυωνυμικοί πίνακες $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ και $V(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$ τέτοιοι, ώστε*

$$B(s) = U(s)A(s)V(s).$$

*Στην περίπτωση που $B(s) = U(s)A(s)$ (αντίστοιχα $B(s) = A(s)V(s)$) οι πίνακες ονομάζονται **αριστερά** (αντίστοιχα δεξιά) **μονομετρικά ισοδύναμοι**.*□

Η κανονική μορφή της μονομετρικής ισοδυναμίας στο σώμα των ρητών πινάκων είναι η Smith - McMillan μορφή.

Θεώρημα 1.1 *[Vardulakis, 1991] Κάθε ρητός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$ είναι μονομετρικά ισοδύναμος με ένα διαγώνιο ρητό πίνακα της μορφής*

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) := \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0_{m-r,n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$$

*όπου $\varepsilon_i(s),\ \psi_i(s) \in \mathbb{R}[s]$ για $i = 1, \ldots, r$. Ο πίνακας $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s)$ ονομάζεται **Smith-***

McMillan μορφή *του πίνακα* $A(s)$ *στο* $\mathbb{C}$*, ενώ τα* $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$ *ονομάζονται* ***αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις*** *του* $A(s)$*. Επιπλέον τα* $\varepsilon_i(s),\ \psi_i(s)$ *έχουν μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα, είναι πρώτα μεταξύ τους και έχουν την ιδιότητα* $\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s)$ *και* $\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s)$ *για κάθε* $i = 1,\ldots,r-1$ *. Οι ρίζες των* $\varepsilon_i(s),\ i = 1,\ldots,r$ *ονομάζονται* ***πεπερασμένα μηδενικά*** *του* $A(s)$*. Αντίστοιχα οι ρίζες των* $\psi_i(s),\ i = 1,\ldots,r$ *ονομάζονται* ***πεπερασμένοι πόλοι*** *του* $A(s)$*.*

Οι αναλλοίωτες συναρτήσεις απεικονίζουν πλήρως την πεπερασμένη αλγεβρική δομή ενός ρητού πίνακα. Αποδεικνύεται ότι η Smith - McMillan μορφή είναι μοναδική για κάθε πίνακα. Επίσης ισχύει ότι δύο πίνακες είναι μονομετρικά ισοδύναμοι αν και μόνο αν έχουν ίδια Smith - McMillan μορφή. Με βάση τα παραπάνω (και από τη βιβλιογραφία όπως *[Vardulakis, 1991]*), η Smith – McMillan αποτελεί μία κανονική μορφή της μονομετρικής ισοδυναμίας.

Παράδειγμα 1.3

Έστω ένας ρητός πολυωνυμικός πίνακας

$$A(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2+4s+3} - s - 2 & \dfrac{1}{s^2+4s+3} \\ \dfrac{s}{3s^3+6s^2+11s+6} & \dfrac{1}{3s^3+6s^2+11s+6} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{2\times 2}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα $A(s)$ από αριστερά και δεξιά με τους πίνακες $U(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$ και $V(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -s \end{bmatrix}$ αντίστοιχα, τότε θα προκύψει η *Smith-McMillan μορφή* του $A(s)$ στο $\mathbb{C}$.

Άρα από τη σχέση $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) = U(s)A(s)V(s)$ προκύπτει ότι η *Smith-McMillan μορφή* του $A(s)$ είναι η

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 \\ 0 & \dfrac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}.$$

Τα μηδενικά του πίνακα $A(s)$ στο $\mathbb{C}$ είναι τα μηδενικά των $\varepsilon_1(s) = 1$ και

$\varepsilon_2(s) = s+2$. Άρα ο $A(s)$ έχει ένα μηδενικό στο $\mathbb{C}$, το σημείο $s=-2$.

Οι πόλοι του $A(s)$ στο $\mathbb{C}$ είναι τα μηδενικά των $\psi_1(s) = (s+1)(s+2)(s+3)$ και $\psi_2(s) = 1$. Άρα ο $A(s)$ έχει τρεις πόλους στο $\mathbb{C}$, τα σημεία $s=-1, s=-2, s=-3$.

□

Παράδειγμα 1.4

Έστω ο ρητός πολυωνυμικός πίνακας

$$T(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{10000}{1.1s^2+2s+10000} \\ \dfrac{2s}{1.1s^2+2s+10000} \end{bmatrix}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα $T(s)$ από αριστερά και δεξιά με τους πίνακες $U(s) = \begin{bmatrix} 0.00011 & 0 \\ -0.0002 & 1 \end{bmatrix}$ και $V(s) = [1]$ αντίστοιχα τότε η *Smith-McMillan* μορφή του $T(s)$ στο $\mathbb{C}$ προκύπτει από τον τύπο

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) = U(s)T(s)V(s)$$

και είναι η εξής

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^2+1.81818s+9090.91} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ο ρητός πίνακας έχει πόλους στα σημεία $s=-0.909091-95.3419i$ και $s=-0.909091+95.3419i$ και δεν έχει μηδενικά.

□

1.3 Πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες

Η γενική μορφή ενός πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα είναι:

$$A(s) = sE - A \in \mathbb{R}^{m\times n}[s]$$

<u>Ορισμός 1.9</u> Δύο πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}[s]$ ονομάζονται αυστηρά ισοδύναμοι αν-ν:

$$\exists M \in \mathbb{R}^{m\times m}, N \in \mathbb{R}^{n\times n}, \det[M] \neq 0, \det[N] \neq 0 : A_2(s) = MA_1(s)N$$

□

Οι μονομετρικές ισοδυναμίες έχουν την ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτη τη δομή των ρητών πινάκων στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Η αυστηρή ισοδυναμία απαιτεί οι πίνακες M, N να είναι σταθεροί και αντιστρέψιμοι, δηλαδή μονομετρικοί στο $\mathbb{C}$ και στο $\{\infty\}$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η αυστηρή ισοδυναμία να διατηρεί τη δομή των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων σε όλο το $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Ωστόσο η αυστηρή ισοδυναμία δε μπορεί να απεικονίσει ταυτόχρονα τις *Smith-McMillan* μορφές στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Η πλήρης αλγεβρική δομή των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων μπορεί να απεικονιστεί μέσω μιας άλλης κανονικής μορφής που είναι γνωστή ως *Kronecker* μορφή, [Gantmacher, 1959]. Στην περίπτωση που έχουμε κανονικό πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα από τη γενική Kronecker μορφή προκύπτει η *Weierstrass* μορφή, [Gantmacher, 1959].

<u>Θεώρημα 1.2</u> Κάθε κανονικός πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $sE - A \in \mathbb{R}^{m\times n}[s]$ είναι αυστηρά ισοδύναμος με έναν επίσης πρωτοβάθμιο πίνακα της μορφής

$$W_{sE-A}(s) = \begin{bmatrix} sI - J & 0 \\ 0 & sJ_{\infty} - I \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας στο δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι η ***Weierstrass κανονική*** μορφή του αρχικού πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα. Το πρώτο block του διαγώνιου πίνακα προβάλει τα πεπερασμένα μηδενικά του $sE - A$ και ο πίνακας J είναι σε κανονική (πραγματική) *Jordan* μορφή. Αντίστοιχα δεύτερο block του διαγώνιου πίνακα προβάλει τα μηδενικά στο άπειρο του αρχικού πίνακα και ο πίνακας J_∞ είναι πίνακας σε Jordan μορφή με όλα του τα διαγώνια στοιχεία ίσα με μηδέν. Αν ο κανονικός πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας δεν έχει μηδενικά στο άπειρο, τότε η Weierstrass κανονική του μορφή γίνεται $W_{sE-A}(s) = sI - J$.

2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ.

Έστω ένα γραμμικά χρονικά αμετάβλητο σύστημα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

όπου $E, \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times p}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα κατάστασης, $u(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ το διάνυσμα εισόδου και $y(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ το διάνυσμα εξόδου.

Χωρίζουμε τα συστήματα αυτά σε δύο κατηγορίες, όπως διατυπώνουμε στους δύο παρακάτω ορισμούς:

<u>**Ορισμός 2.1**</u> ***Συστήματα στο χώρο των καταστάσεων*** *(explicit systems ή state-space systems) ονομάζονται τα συστήματα της μορφής* (2.1) *για τα οποία ισχύει* $m = n$ *και* $\det E \neq 0$.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, θεωρούμε ότι m=n και $E = I_n$. □

<u>**Ορισμός 2.2**</u> ***Ιδιόμορφα συστήματα*** *(singular systems* ή *generalized state-space systems* ή *descriptor state-space systems) ονομάζονται τα συστήματα για τα οποία ισχύει είτε* $m \neq n$ *είτε* $\det E = 0$. □

Παρακάτω θα ασχοληθούμε μόνο με ιδιόμορφα συστήματα, τα οποία περιγράφονται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

όπου $E, \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times r}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times r}$ και ο πίνακας E δεν είναι απαραίτητα αντιστρέψιμος, με $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα κατάστασης, $u(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r$ το διάνυσμα εισόδου και $y(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^p$ το διάνυσμα εξόδου.

<u>**Ορισμός 2.3**</u> ***Κανονικά*** *(regular) συστήματα ονομάζονται τα συστήματα της μορφής* (2.2)*, στα οποία η ορίζουσα* $\det(sE-A)$ *δεν είναι ταυτοτικά μηδέν.* □

<u>**Ορισμός 2.4**</u> ***Μη κανονικά ή ιδιάζοντα*** *(non-regular) συστήματα ονομάζονται τα συστήματα της μορφής* (2.2)*, στα οποία η ορίζουσα* $\det(sE-A)$ *είναι μηδέν.*

□

Πολλές από τις ιδιότητες των ιδιόμορφων συστημάτων στο πεδίο του χρόνου σχετίζονται άμεσα με την φασματική δομή ρητών - πολυωνυμικών πινάκων που προκύπτουν από την περιγραφή του συστήματος. Στη συνέχεια δίνουμε ορισμένα από τα χαρακτηριστικά των ιδιόμορφων συστημάτων.

<u>**Ορισμός 2.5**</u> *Ορίζουμε ως* ***πόλους*** *(systems poles) του συστήματος* (2.2) *τα πεπερασμένα μηδενικά του* $sE-A$. □

<u>**Ορισμός 2.6**</u> *Ορίζουμε ως* ***Rosenbrock περιγραφή*** *του συστήματος*

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

τον πολυωνυμικό πίνακα:

$$P(s)=\begin{bmatrix} sE-A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

□

<u>**Ορισμός 2.7**</u> *Ορίζουμε ως* ***μηδενικά*** *(systems zeros) του συστήματος* (2.2) *τα μηδενικά του πολυωνυμικού πίνακα* $P(s)$. □

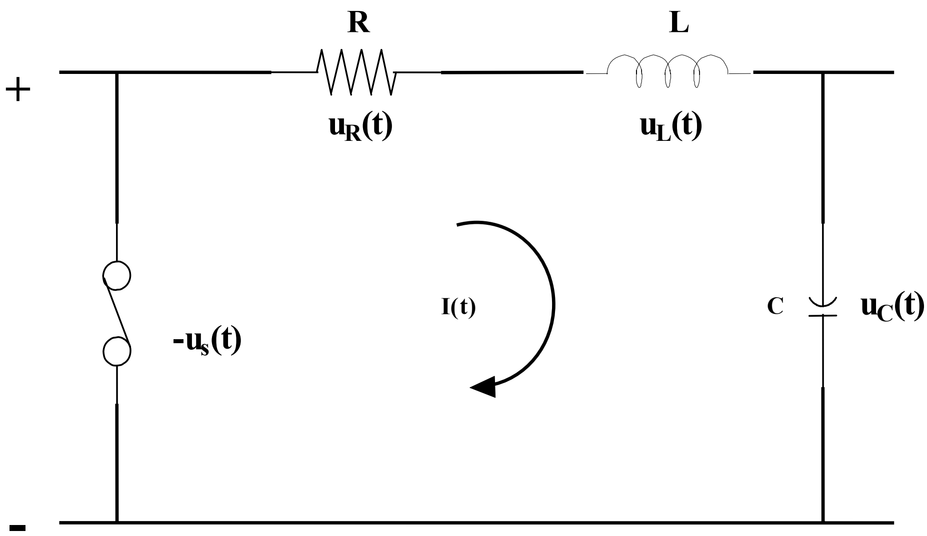
<u>**Ορισμός 2.8**</u> ***Μηδενικά μεταφοράς*** *(transmission zeros) και* ***πόλοι μεταφοράς*** *(transmission poles) ονομάζονται τα μηδενικά και οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς* $T(s)=C(sE-A)^{-1}B+D$ *του συστήματος.* □

Τα μηδενικά μετάδοσης (transmission zeros) του συστήματος, έχουν σχέση με την απόκριση του συστήματος για εισόδους της μορφής ξe^{zt}, όπου z είναι μηδενικό του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι, [Cal-Des, 1982], αν z είναι ένα μηδενικό της συνάρτησης μεταφοράς $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$ του συστήματος τότε μια είσοδος της μορφής $u(t) = \xi e^{zt}, \xi \in \mathbb{C}^n$ παράγει μία έξοδο η οποία δεν περιέχει εκθετικούς όρους που να εξαρτώνται από το z. Παρατηρούμε δηλαδή ότι η ύπαρξη μηδενικών στη συνάρτηση μεταφοράς έχει ως αποτέλεσμα να μη διεγείρεται το σύστημα από συγκεκριμένες εισόδους της παραπάνω μορφής.

Αντίθετα η έννοια των πόλων μετάδοσης (transmission poles) ενός συστήματος συνδέεται με την ύπαρξη κάποιων εκθετικών σημάτων στην έξοδο χωρίς αντίστοιχη διέγερση. Αποδεικνύεται ότι αν p ένας πόλος της συνάρτησης μεταφοράς $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$ του συστήματος τότε μια είσοδος της μορφής $u(t) = \sum_{k=0}^{l} u_k \delta^{(k)}(t), u_k \in \mathbb{C}^n$ παράγει μία έξοδο της μορφής $y(t) = \gamma e^{pt}$, [McF-Kark, 1976].

Παράδειγμα 2.1

Έστω το RLC κύκλωμα του παρακάτω σχήματος



Το κύκλωμα αυτό περιγράφεται μέσω του παρακάτω ιδιάζοντος συστήματος

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

όπου

$$E=\begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{C_p} & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ως κατάσταση του συστήματος έχουμε θεωρήσει το διάνυσμα

$$x=x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I \\ V_L \\ V_{C_p} \\ V_R \end{bmatrix}.$$

Στην παρακάτω μελέτη του συστήματος θεωρούμε ότι $L=1.1, C_p=10^{-4}, R=2$.

Είναι γνωστό ότι οι πόλοι του συστήματος είναι τα μηδενικά του πολυωνυμικού πίνακα $sE-A$ και άρα μπορούν να βρεθούν μέσω της Smith μορφής του

$$sE-A=s\begin{bmatrix} 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10000 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

η οποία έχει ήδη παρουσιαστεί στο παράδειγμα 1.2. Άρα το σύστημα έχει σαν πόλους τα $s_1=-0.909091-95.3419i$ και $s_2=-0.909091+95.3419i$.

Δημιουργούμε τώρα τον πίνακα συστήματος *P(s)* από τον τύπο

$$P(s)=\begin{bmatrix} sE-A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι ο εξής

$$P(s)=\begin{bmatrix} 1.1s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -10000 & 0 & s & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τα μηδενικά του *P(s)* είναι και τα μηδενικά του συστήματος. Άρα μας αρκεί να υπολογίσουμε την *Smith μορφή* $S_{P(s)}^{\mathbb{C}}(s)$ του πολυωνυμικού πίνακα *P(s).* Ισχύει ότι

$$S_{P(s)}^{\mathbb{C}}(s)=U(s)P(s)V(s)$$

απ' όπου προκύπτει ότι η *Smith μορφή* $S_{P(s)}^{\mathbb{C}}(s)$ του πολυωνυμικού πίνακα *P(s)* είναι

$$S_{P(s)}^{\mathbb{C}}(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου οι πίνακες $U(s)$ και $V(s)$ είναι αντίστοιχα:

$$U(s)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{10000} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{5000} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00011s+0.0002 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{5000} & 1 & 0 & -\dfrac{s}{5000} & 1 \end{bmatrix}$$

$$V(s)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{s}{10000} \\ 1 & 1.1s & 0 & 0 & 0.00011s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{s}{5000} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.00011s^2-0.0002s-1 \end{bmatrix}$$

Όπως παρατηρούμε από τη Smith μορφή, ο πολυωνυμικός πίνακας δεν έχει μηδενικά και άρα το ίδιο θα συμβαίνει και για το σύστημα.

Αν δοκιμάσουμε τώρα να υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος αυτή θα είναι η

$$T(s)=C(sE-A)^{-1}B=\begin{bmatrix} \dfrac{10000}{1.1s^2+2s+10000} \\ \dfrac{2s}{1.1s^2+2s+10000} \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζοντας την Smith McMillan μορφή της συνάρτησης μεταφοράς μπορώ επίσης να βρω τα μηδενικά και τους πόλους μετάδοσης (transmission zeros,transmission poles). Η *Smith- McMillan* του πολυωνυμικού πίνακα T(s) έχει υπολογιστεί στο παράδειγμα 1.4. Οι πόλοι μετάδοσης είναι $s_1 = -0.909091 - 95.3419i$ και $s_2 = -0.909091 + 95.3419i$, όπως βρέθηκαν και πιο πάνω. □

3. ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΠΟΛΩΝ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΜΕ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Μια από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους για την αλλαγή της δυναμικής απόκρισης ενός γραμμικού συστήματος είναι η επανατοποθέτηση πόλων μέσω ανάδρασης κατάστασης σε συγκεκριμένα σημεία του μιγαδικού επιπέδου. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη θεωρία που αναπτύχθηκε για γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα που περιγράφονται από εξισώσεις στο χώρο των καταστάσεων. Το αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού έχει σχέση με τα αποτελέσματα στις εργασίες των Mahmoud M. Fahmy and J. O’Reilly (1982-1983), [Fahmy-O’Reilly, 1982-83], δίνοντας έτσι την αφορμή να ακολουθήσει αργότερα και μια αντίστοιχη θεωρία για τα ιδιόμορφα συστήματα. Παρακάτω θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο στην εργασία των Mahmoud M. Fahmy and J. O’Reilly (1983), [Fahmy-O’Reilly, 1983].

Έστω ένα γραμμικά χρονικά αμετάβλητο σύστημα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{3.1}$$

όπου $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, με $x(t):\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα κατάστασης και $u(t):\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ το διάνυσμα εισόδου.

Το πρόβλημα της επανατοποθέτησης πόλων μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Όταν ένας ελεγκτής της μορφής $u = Kx + v$ με $K \in \mathbb{R}^{rxn}$ εφαρμόζεται στο σύστημα (3.1) τότε το κλειστό σύστημα έχει τη μορφή $\dot{x} = (A + BK)x + Bv$. Έστω $\Gamma = \{ s_i / s_i \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s_i) < 0, i = 1,2,...,n', 1 \le n' \le n \}$ με τα s_i συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα, να είναι οι επιθυμητοί πόλοι του κλειστού συστήματος με αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες m_i και q_i αντίστοιχα. Τότε η Jordan μορφή που αντιστοιχεί σ' αυτή τη δομή θα έχει q_i πλήθος Jordan blocks για την ιδιοτιμή s_i. Οι διαστάσεις αυτών των blocks θα είναι p_{ij}, όπου $j = 1, 2, ..., q_i$. Τότε προφανώς θα ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$m_i = \sum_{j=1}^{j=q_i} p_{ij} = p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{iq_i}$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το παραπάνω πρόβλημα να έχει λύση είναι να είναι ελέγξιμο το ανοιχτό σύστημα δηλαδή να ισχύει

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \tag{3.2}$$

ή ισοδύναμα

$$rank\begin{bmatrix} sI_n - A & B \end{bmatrix} = n \text{ για κάθε } s \in \mathbb{C}. \tag{3.3}$$

3.1 Αλγόριθμος επανατοποθέτησης πόλων

[Fahmy-O'Reilly, 1983]

<u>Βήμα 1</u>: Υπολογίζουμε τον πίνακα

$$S(s) = (sI_n - A)^{-1} B \tag{3.4}$$

<u>Βήμα 2</u>: Κατασκευάζουμε τον πίνακα

$$V = \begin{bmatrix} V_1(s_1) & V_2(s_2) & \cdots & V_{n'}(s_{n'}) \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

διαστάσεων $n \times n$, όπου

$$V_i(s_i) = \begin{bmatrix} V_{i1}(s_i) & V_{i2}(s_i) & \cdots & V_{iq_i}(s_i) \end{bmatrix}, i = 1, 2, \ldots, n'$$

και

$$V_{ij}(s_i) = \left[S(s_i) f_{ij}^{(0)} \mid \ \frac{d}{ds} S(s_i) f_{ij}^{(0)} + S(s_i) f_{ij}^{(1)} \mid \ \cdots \mid \ \frac{1}{(p_{ij}-1)!} \frac{d^{p_{ij}-1}}{ds^{p_{ij}-1}} S(s_i) f_{ij}^{(0)} + \cdots + S(s_i) f_{ij}^{(p_{ij}-1)} \right]$$

για $j = 1, 2, \ldots, q_i$ (3.6). Το σύνολο n διανυσμάτων $\left\{ f_{ij}^k \right\} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή s_i με πολλαπλότητα p_{ij}, πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες:

i) $f_{ij}^k = \overline{f}_{lj}^k$ αν-ν $s_i = \overline{s_l}$ (3.7)

ii) $\det(V) \neq 0$ (3.8)

Βήμα 3: Κατασκευάζουμε τον πίνακα

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & \cdots & F_{n'} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

όπου

$$F_i = \begin{bmatrix} F_{i1} & F_{i2} & \cdots & F_{iq_i} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \ldots, n'$$

και

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} f_{ij}^{(0)} & f_{ij}^{(1)} & \cdots & f_{ij}^{(p_{ij}-1)} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \ldots, q_i \,.$$

Βήμα 4: Ο ζητούμενος ελεγκτής είναι ο πίνακας

$$K = FV^{-1} \tag{3.10}$$

Παράδειγμα 3.1

Θεωρούμε το σύστημα $\dot{x} = Ax + Bu$, $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ για δοθέντες πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι για το σύστημα αυτό ισχύει $n = 3$ και $r = 2$. Θέλουμε να κάνουμε επανατοποθέτηση πόλων του συστήματος, θεωρώντας ως επιθυμητούς πόλους το σύνολο $\Gamma = \{s_1, s_2\}$ όπου $s_1 = -1$ και $s_2 = -2$. Η γεωμετρική πολλαπλότητα (δηλαδή το πλήθος των blocks στον πίνακα Jordan) του s_1 να είναι $q_1 = 1$ με $p_{11} = 2$ (διάστασης 2x2) και η γεωμετρική πολλαπλότητα του s_2 να είναι $q_2 = 1$ με $p_{21} = 1$ (διάστασης 1x1). Έτσι ο πίνακας Jordan $J \in \mathbb{R}^{3x3}$ που αντιστοιχεί στην παραπάνω δομή, θα είναι της μορφής:

$$J = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

Βήμα 1:

Υπολογίζουμε τον πίνακα $S(s) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ από τη σχέση $S(s) = (sI_n - A)^{-1} B$, οπότε προκύπτει:

$$S(s)=\begin{bmatrix} \frac{s^2-2s-2}{s^3-3s^2+6s-16} & \frac{2s^2-6s}{s^3-3s^2+6s-16} \\ \frac{s^2-2s+4}{s^3-3s^2+6s-16} & -\frac{4s}{s^3-3s^2+6s-16} \\ \frac{-3s+6}{s^3-3s^2+6s-16} & -\frac{4s-16}{s^3-3s^2+6s-16} \end{bmatrix}$$

__Βήμα 2__:

Επιλέγουμε τυχαία ένα σύνολο $n=3$ διανυσμάτων $\left\{f_{ij}^{k}\right\}\in\mathbb{R}^{r\times 1}$, ώστε από τη σχέση (3.6) να προκύψουν τα ιδιοανύσματα $\left\{v_{ij}^{k}\right\}\in\mathbb{R}^{3\times 1}$, τα οποία θα δημιουργήσουν τον πίνακα $V\in\mathbb{R}^{3x3}$

$$f_{11}^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, f_{11}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, f_{21}^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

για τα οποία προκύπτει ότι ισχύουν οι συνθήκες (3.7) και (3.8).

Κατασκευάζουμε τον πίνακα $V\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ από τη σχέση (3.5), απ' όπου προκύπτει:

$$V=\left[S(s_1)f_{11}^{(0)} \mid \frac{d}{ds}S(s_1)f_{11}^{(0)}+S(s_1)f_{11}^{(1)} \mid S(s_2)f_{21}^{(0)} \right]$$

και είναι ο εξής:

$$V=\begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & \frac{57}{338} & -\frac{13}{24} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{69}{338} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{10}{13} & -\frac{215}{338} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

__Βήμα 3:__

Κατασκευάζουμε τον πίνακα $F\in\mathbb{R}^{2\times 3}$ από τη σχέση (3.9) και τα διανύσματα $\left\{f_{ij}^{k}\right\}\in\mathbb{R}^{r\times 1}$ που επιλέξαμε παραπάνω. Άρα προκύπτει ο πίνακας

$$F=\begin{bmatrix} f_{11}^{(0)} & f_{11}^{(1)} & f_{21}^{(0)} \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Βήμα 4:

Επομένως είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον ελεγκτή πίνακα $K \in \mathbb{R}^{2x3}$ από τη σχέση $K = FV^{-1}$ και είναι ο ακόλουθος:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{296}{205} & -\frac{1037}{205} & \frac{89}{205} \\ -\frac{347}{205} & \frac{1181}{820} & -\frac{747}{820} \end{bmatrix}.$$

Το κλειστό σύστημα περιγράφεται από τη σχέση $\dot{x} = \underbrace{(A + BK)}_{A_C} x + Bv$ δηλαδή είναι της μορφής $\dot{x} = A_C x + Bv$ με πίνακα τον $A_C = \begin{bmatrix} -\frac{398}{205} & -\frac{483}{410} & \frac{251}{410} \\ -\frac{114}{205} & -\frac{422}{205} & \frac{89}{205} \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Οι πόλοι του παραπάνω συστήματος μπορούν να βρεθούν υπολογίζοντας τη Weierstrass μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $sI - A_C$ η οποία επαληθεύεται ότι είναι όπως μας ζητήθηκε δηλαδή

$$sI - J = \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix}.$$

Οι εντολές στο ***Mathematica*** με τη βοήθεια των οποίων πραγματοποιήθηκαν οι παραπάνω υπολογισμοί είναι οι εξής:

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
<< Rings`
<< ControlSystems`

ma = {{0, 1, 2}, {-2, 3, 0}, {-2, -1, 0}}
mb = {{1, 2}, {1, 0}, {0, 0}}

s1 = -1;
s2 = -2;
```

```
ss □ Inverse[s. IdentityMatrix[3] ~ ma .mb] Simplify
```

$$\begin{pmatrix} \frac{s^2\ 2s\ 2}{s^3\ 3s^2\ 6s\ 16} & \frac{2\ s\ 3}{s^3\ 3s^2\ 6s\ 16} \\ \frac{s^2\ 2s\ 4}{s^3\ 3s^2\ 6s\ 16} & -\frac{4s}{s^3\ 3s^2\ 6s\ 16} \\ \frac{6\ 3s}{s^3\ 3s^2\ 6s\ 16} & -\frac{4\ s\ 4}{s^3\ 3s^2\ 6s\ 16} \end{pmatrix}$$

```
f110 □ {{0}, {1}}
f111 □ {{1}, {0}}
f210 □ {{1}, {1}}

v110 □ ss /. s □ s1 .f110;
v111 □ D[ss, s] /. s □ s1 .f110 ss /. s □ s1 .f111;
v210 □ ss /. s □ s2 .f210;
V □ BlockMatrix[{{v110, v111, v210}}]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{13} & \frac{57}{338} & -\frac{13}{24} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{69}{338} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{10}{13} & -\frac{215}{338} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

```
F □ BlockMatrix[{{f110, f111, f210}}]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
K □ F.Inverse[V]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{296}{205} & -\frac{1037}{205} & \frac{89}{205} \\ -\frac{347}{205} & \frac{1181}{820} & -\frac{747}{820} \end{pmatrix}$$

```
Ac □ ma mb.K
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{398}{205} & -\frac{483}{410} & \frac{251}{410} \\ -\frac{114}{205} & -\frac{422}{205} & \frac{89}{205} \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΠΟΛΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΣΕ ΙΔΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.

Τα ιδιόμορφα συστήματα έχουν εφαρμογή σε πολλά πεδία, όπως στη θεωρία δικτύων, στη ρομποτική, στα οικονομικά κ.α. Κατά τη διάρκεια των δύο τελευταίων δεκαετιών η επανατοποθέτηση πόλων στα ιδιόμορφα συστήματα είναι ένα ιδιαίτερα σημαντικό πρόβλημα στη θεωρία των ιδιόμορφων συστημάτων και έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές όπως φαίνεται από το μεγάλο πλήθος των δημοσιεύσεων ([Fletcher, 1988], [Lewis-Ozcaldiran, 1989], [Fahmy-O'Reilly, 1982-83], [Sakr-Khalifa, 1990], [Georgiou-Krikelis, 1992], [Zag-Kuc-Lois, 1993], [Duan, 1996], [Duan - Patton, 1997], [Chen-Chang, 1993a, b]). Μια από τις συνηθέστερες μεθόδους αλλαγής των πόλων και συνεπώς της ασυμπτωτικής ευστάθειας ενός δυναμικού συστήματος της μορφής (2.1) είναι η χρήση ανάδρασης καταστάσεως (state feedback control) ή ανάδρασης εξόδου (static output feedback control). Είναι ευρέως γνωστό από την Κλασσική Θεωρία Ελέγχου, ότι και η διαφορική ανάδραση καταστάσεως είναι μία μέθοδος σχεδίασης για την επίτευξη των επιθυμητών στόχων ελέγχου. Πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να τροποποιήσει την απόδοση του συστήματος όποτε αυτό είναι εφικτό. Παρακάτω θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο στην εργασία των Guang-Ren Duan και Ron J. Patton, [Duan - Patton, 1997].

Σε αυτή τη μελέτη δεν θα ασχοληθούμε με ανάδραση εξόδου αλλά μόνο με διαφορική και αναλογική (proportional plus derivative) ανάδραση κατάστασης η γενική μορφή της οποίας περιγράφεται από την σχέση

$$u = -L\dot{x} + Kx + v \tag{4.1}$$

όπου $K, L \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Το κλειστό σύστημα, αυτό δηλαδή που προκύπτει αντικαθιστώντας στην (2.1) την (4.1), περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση

$$\left(E + BL\right)\dot{x} = \left(A + BK\right)x + Bv\,. \tag{4.2}$$

Ας θεωρήσουμε το ιδιόμορφο σύστημα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$E\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.3}$$

όπου $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ και ο πίνακας E δεν είναι απαραίτητα αντιστρέψιμος.

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας αναζητάμε πίνακες $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $L \in \mathbb{R}^{r\times n}$, έτσι ώστε το κλειστό σύστημα (4.2):

α) να μην έχει πόλους στο $s = \infty$,

β) να έχει ως πόλους το σύνολο $\Gamma = \{s_i / s_i \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s_i) < 0, i = 1,2,...,n', 1 \le n' \le m\}$ με τα s_i συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα και με αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες m_i και q_i αντίστοιχα. Τότε η Jordan μορφή που αντιστοιχεί σ' αυτή τη δομή θα έχει q_i πλήθος Jordan blocks για την ιδιοτιμή s_i. Οι διαστάσεις αυτών των blocks θα είναι p_{ij}, όπου $j = 1,2,...,q_i$. Τότε προφανώς θα ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$m_i = \sum_{j=1}^{j=q_i} p_{ij} = p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{iq_i}.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η κανονικότητα του συστήματος ($\det(sE - A) \ne 0$) δεν διατηρείται από την ανάδραση της κατάστασης.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το παραπάνω πρόβλημα να έχει λύση είναι, να είναι ελέγξιμο το ανοιχτό σύστημα δηλαδή να ισχύει

$$rank\begin{bmatrix} sE - A & B \end{bmatrix} = n \text{ για κάθε } s \in \mathbb{C} \tag{4.4}$$

και

$$rank\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = n. \tag{4.5}$$

4.1 Αλγόριθμος επανατοποθέτησης πόλων

<u>Βήμα 1</u>: Επιλύουμε την πολυωνυμική εξίσωση $(A - sE)N(s) + BD(s) = 0$ ως προς τους πολυωνυμικούς πίνακες $N(s) \in \mathbb{R}^{nxr}$ και $D(s) \in \mathbb{R}^{rxr}$, οι οποίοι μπορούν εύκολα να υπολογιστούν από τις σχέσεις

$$N(s) = adj(sE - A)B \text{ και } D(s) = \det(sE - A)I_r \text{ [Duan, 1996]} \tag{4.6}$$

<u>Βήμα 2</u>: Επιλέγουμε έναν πίνακα $L \in \mathbb{R}^{rxn}$ τέτοιον, ώστε να ικανοποιεί τη συνθήκη $\det\left[E + BL\right] \neq 0$. Τέτοιος πίνακας υπάρχει πάντα αν ισχύει η σχέση (4.5). Σε διαφορετική περίπτωση η επανατοποθέτηση πόλων δεν είναι εφικτή.

<u>Βήμα 3</u>: Επιλέγουμε ένα σύνολο n διανυσμάτων $\left\{f_{ij}^{k}\right\} \in \mathbb{R}^{r\times 1}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή s_i με πολλαπλότητα p_{ij}, τα οποία πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη:

Τα διανύσματα f_{ij}^{k} και f_{lj}^{k} τα οποία αντιστοιχούν σε συζυγείς πόλους s_i και s_l αντίστοιχα πρέπει και αυτά με τη σειρά τους να είναι συζυγή, δηλαδή

$$f_{ij}^{k} = \overline{f}_{lj}^{k} \text{ αν-ν } s_i = \overline{s_l} \tag{4.7}$$

<u>Βήμα 4</u>: Κατασκευάζουμε τα ιδιοανύσματα $\left\{v_{ij}^{k}\right\}$ και $\left\{w_{ij}^{k}\right\}$ σύμφωνα με τη σχέση

$$\begin{bmatrix} v_{ij}^{k} \\ w_{ij}^{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} f_{ij}^{k} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} f_{ij}^{1} \tag{4.8}$$

όπου $i = 1,2,...,n', 1 \leq n' \leq m$, $j = 1,2,...,q_i$ και $k = 1,2,...,p_{ij}$.

<u>Βήμα 5</u>: Υπολογίζουμε τους πίνακες $V \in \mathbb{R}^{nxn}$ και $W \in \mathbb{R}^{rxn}$, βασιζόμενοι στα ιδιοανύσματα $\left\{v_{ij}^{k}\right\}$ και $\left\{w_{ij}^{k}\right\}$, που κατασκευάσαμε πιο πάνω.

$$V = \begin{bmatrix} v_{11}^{1} & \cdots & v_{11}^{p_{11}} & \cdots & v_{1q_1}^{1} & \cdots & v_{1q_1}^{p_{1q_1}} & \cdots & v_{n1}^{1} & \cdots & v_{n1}^{p_{n1}} & \cdots & v_{nq_n}^{1} & \cdots & v_{nq_n}^{p_{nq_n}} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_{11}^{1} & \cdots & w_{11}^{p_{11}} & \cdots & w_{1q_1}^{1} & \cdots & w_{1q_1}^{p_{1q_1}} & \cdots & w_{n1}^{1} & \cdots & w_{n1}^{p_{n1}} & \cdots & w_{nq_n}^{1} & \cdots & w_{nq_n}^{p_{nq_n}} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Ο πίνακας V πρέπει να είναι αντιστρέψιμος δηλαδή

$$\det(V) \neq 0. \tag{4.11}$$

Αν δεν υπάρχουν διανύσματα $\left\{f_{ij}^{k}\right\} \in \mathbb{R}^{r\times 1}$ ώστε ο V να είναι αντιστρέψιμος, τότε η επανατοποθέτηση πόλων δεν είναι εφικτή.

<u>Βήμα 6</u>: Υπολογίζουμε τον πίνακα $K \in \mathbb{R}^{rxn}$ από τη σχέση

$$K = \left(W + LVJ\right)V^{-1} \tag{4.12}$$

όπου οι πίνακες W, L, V υπολογίστηκαν στα προηγούμενα βήματα και ο πίνακας J είναι η Jordan μορφή με τους επιθυμητούς πόλους.

Παράδειγμα 4.1

Θεωρούμε το σύστημα $E\dot{x} = Ax + Bu$, $E, \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ για δοθέντες πίνακες

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για το σύστημα αυτό ισχύει $rank\begin{bmatrix} sE - A & B \end{bmatrix} = 6$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$ και $rank\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = 6$. Άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο και έτσι είναι δυνατή η επανατοποθέτηση πόλων.

Επομένως ισχύει $n = 6$ και $r = 2$. Θέλουμε να κάνουμε επανατοποθέτηση πόλων του συστήματος, θεωρώντας ως επιθυμητούς πόλους το σύνολο $\Gamma = \{s_1, s_2\}$ αν επιλέξουμε ως $s_1 = -1$ και $s_2 = 0$. Η γεωμετρική πολλαπλότητα (δηλαδή το πλήθος των blocks στον πίνακα Jordan) του s_1 να είναι 2, $q_1 = 2$, με αλγεβρική πολλαπλότητα $m_1 = 4$ ώστε $p_{11} = 3, p_{12} = 1$, (δηλαδή το πρώτο block θα είναι διάστασης 3x3 και το δεύτερο 1x1). Η γεωμετρική πολλαπλότητα του s_2 να είναι 1, $q_2 = 1$, με αλγεβρική πολλαπλότητα $m_2 = 2$ ώστε $p_{21} = 2$ (ένα block διάστασης 2x2). Έτσι ο πίνακας Jordan $J \in \mathbb{R}^{6x6}$ που αντιστοιχεί στην παραπάνω δομή, θα είναι

$$J = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

Βήμα 1:

Υπολογίζουμε τους πίνακες $N(s)\in\mathbb{R}^{6x2}$, $D(s)\in\mathbb{R}^{2x2}$ από τις σχέσεις $N(s)=adj(sE-A)B$ και $D(s)=\det(sE-A)I_2$, οπότε προκύπτουν

$$N(s)=\begin{bmatrix} 0 & s^2 \\ 0 & s \\ s^3-1 & s^3 \\ s^4-s & s^4-s \\ s^3-1 & s^3-1 \\ 0 & s^3-s^2 \end{bmatrix}, \text{ και } D(s)=\begin{bmatrix} 1-s^3 & 0 \\ 0 & 1-s^3 \end{bmatrix}$$

Επαληθεύουμε την ορθότητα των τιμών των πινάκων που υπολογίσαμε κάνοντας αντικατάσταση στην εξίσωση $(A-sE)N(s)+BD(s)=0$ και πράγματι προκύπτει ο μηδενικός πίνακας.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2:

Στη γενική περίπτωση που η ανάδραση κατάστασης εμπεριέχει όχι μόνο το διάνυσμα κατάστασης αλλά και την παράγωγό του, ο πίνακας $L\in\mathbb{R}^{rxn}$ μπορεί να είναι ένας οποιοσδήποτε 2 x 6 πίνακας πραγματικών αριθμών, ο οποίος κάνει τον πίνακα $[E+BL]$ αντιστρέψιμο, δηλαδή $\det[E+BL]\neq 0$. Κατ' αυτόν τον τρόπο επιλέγουμε τον πίνακα $L\in\mathbb{R}^{2x6}$

$$L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 3:

Επιλέγουμε τυχαία ένα σύνολο $n=6$ διανυσμάτων $\{f_{ij}^k\}\in\mathbb{R}^{2\times 1}$, ώστε από τη σχέση (4.8) να προκύψουν τα ιδιοανύσματα $\{v_{ij}^k\}\in\mathbb{R}^{6\times 1}$, τα οποία θα δημιουργήσουν τον πίνακα $V\in\mathbb{R}^{6x6}$. Έτσι επιλέγουμε για το s_1 με πολλαπλότητα 3, το σύνολο των ιδιοανυσμάτων:

$$\left\{ f_{11}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, f_{11}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f_{11}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

για το s_1 με πολλαπλότητα 1, το ιδιοάνυσμα:

$$\left\{ f_{12}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

και για το ο s_2 με πολλαπλότητα 2, το σύνολο των ιδιοανυσμάτων:

$$\left\{ f_{21}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, f_{21}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

.για τα οποία προκύπτει ότι ισχύουν οι συνθήκες (4.7) και (4.11).

Βήμα 4:

Υπολογίζουμε τα ιδιοανύσματα $\left\{ v_{ij}^k \right\}$ από τη σχέση (4.8), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} v_{11}^1 &= N(s_1) f_{11}^1 \\ v_{11}^2 &= N(s_1) f_{11}^2 + N'(s_1) f_{11}^1 \\ v_{11}^3 &= N(s_1) f_{11}^3 + N'(s_1) f_{11}^2 + \frac{1}{2} N''(s_1) f_{11}^1 \end{aligned}$$

$$v_{12}^1 = N(s_1) f_{12}^1$$

$$\begin{aligned} v_{21}^1 &= N(s_2) f_{21}^1 \\ v_{21}^2 &= N(s_2) f_{21}^2 + N'(s_2) f_{21}^1 \end{aligned}$$

και προκύπτουν τα εξής:

$$\left\{ v_{11}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, v_{11}^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ -8 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, v_{11}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ 11 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ v_{12}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ v_{21}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, v_{21}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Υπολογίζουμε τα ιδιοανύσματα $\left\{ w_{ij}^k \right\}$ από τη σχέση (4.8), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$w_{11}^1 = D(s_1) f_{11}^1$$
$$w_{11}^2 = D(s_1) f_{11}^2 + D'(s_1) f_{11}^1$$
$$w_{11}^3 = D(s_1) f_{11}^3 + D'(s_1) f_{11}^2 + \frac{1}{2} D''(s_1) f_{11}^1$$

$$w_{12}^1 = D(s_1) f_{12}^1$$

$$w_{21}^1 = D(s_2) f_{21}^1$$
$$w_{21}^2 = D(s_2) f_{21}^2 + D'(s_2) f_{21}^1$$

και προκύπτουν τα εξής:

$$w_{11}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, w_{11}^2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, w_{11}^3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, w_{12}^1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, w_{21}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_{21}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 5:

Ο πίνακας $V \in \mathbb{R}^{6x6}$ που προκύπτει από την (4.9) είναι της μορφής $V = \begin{bmatrix} v_{11}^1 & v_{11}^2 & v_{11}^3 & v_{12}^1 & v_{21}^1 & v_{21}^2 \end{bmatrix}$ και είναι ο εξής:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -6 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 11 & 0 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & -7 & 0 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}..$$

Ο πίνακας $W \in \mathbb{R}^{2x6}$ που προκύπτει από την (4.10) είναι της μορφής $W = \begin{bmatrix} w_{11}^1 & w_{11}^2 & w_{11}^3 & w_{12}^1 & w_{21}^1 & w_{21}^2 \end{bmatrix}$ και είναι ο εξής:

$$W = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 6:

Επομένως είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον πίνακα $K \in \mathbb{R}^{2x6}$ από τη σχέση $K = (W + LVJ)V^{-1}$ και είναι ο ακόλουθος:

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{22}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{17}{13} \\ -\frac{61}{13} & -\frac{47}{13} & -\frac{20}{13} & -\frac{35}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{30}{13} \end{bmatrix}$$

Το κλειστό σύστημα περιγράφεται από τη σχέση $\underbrace{\left(E+BL\right)}_{E_C}\dot{x}=\underbrace{\left(A+BK\right)}_{A_C}x+Bv$

δηλαδή είναι της μορφής $E_C\dot{x}=A_Cx+Bv$ και είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{x}=\begin{bmatrix} -\frac{23}{13} & \frac{5}{13} & \frac{6}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{17}{13} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{83}{13} & -\frac{42}{13} & -\frac{27}{13} & -\frac{31}{13} & \frac{9}{13} & -\frac{47}{13} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι πόλοι του παραπάνω συστήματος μπορούν να βρεθούν υπολογίζοντας την Weierstrass μορφή του πολυωνυμικού πίνακα sE_C-A_C η οποία επαληθεύεται ότι είναι όπως μας ζητήθηκε δηλαδή

$$W_{\left(sE_C-A_C\right)}\left(s\right)=sI-J=\begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}.$$

Ο παραπάνω αλγόριθμος υλοποιήθηκε σε ***<u>Mathematica</u>*** και παρακάτω παρουσιάζονται οι εντολές με τη βοήθεια των οποίων πραγματοποιήθηκαν οι παραπάνω υπολογισμοί.

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
<< Rings`
<< ControlSystems`

me1 = {{1, 0, 0, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
   {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 1}, {1, 0, 0, 0, 0, 0}}
ma1 = {{0, 0, 1, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 1, 0, 0},
   {0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {1, 0, 0, 0, 0, 1}}
```

```
mb1 = {{1, 0}, {0, 0}, {0, 0}, {0, 0}, {1, 1}, {0, 0}}
```

(Υπολογίζουμε τους πίνακες $N(s) \in \mathbb{R}^{6x2}$, $D(s) \in \mathbb{R}^{2x2}$)

```
nnn = Inverse[s me1 - ma1].Det[s me1 - ma1].mb1
ddd = Det[s me1 - ma1] IdentityMatrix[2]
```

(Δοκιμή)

```
((s me1 - ma1).nnn - mb1.ddd) // FullSimplify
```

προκύπτει μηδενικός πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Δημιουργούμε τα $\{f_{ij}^k\}$, $\{v_{ij}^k\}$, $\{w_{ij}^k\}$ και τους πίνακες $V \in \mathbb{R}^{6x6}$ και $W \in \mathbb{R}^{2x6}$)

```
f111 = {{1}, {1}};
f112 = {{0}, {1}};
f113 = {{1}, {1}};
f121 = {{-1}, {1}};
f211 = {{1}, {2}};
f212 = {{0}, {1}};

s1 = -1;
s2 = 0;

v111 = (nnn /. s -> s1).f111;
v112 = (nnn /. s -> s1).f112 + (D[nnn, s] /. s -> s1).f111;
v113 = (nnn /. s -> s1).f113 + (D[nnn, s] /. s -> s1).f112 +
       1/2 (D[nnn, {s, 2}] /. s -> s1).f111;
v121 = (nnn /. s -> s1).f121;
v211 = (nnn /. s -> s2).f211;
v212 = (nnn /. s -> s2).f212 + (D[nnn, s] /. s -> s2).f211;
```

```
V = BlockMatrix[{{v111, v112, v113, v121, v211, v212}}]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 11 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 7 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
w111 = ddd[s - s1, f111];
w112 = ddd[s - s1, f112] D[ddd[s, {s - s1, f111}]];
w113 = ddd[s - s1, f113] D[ddd[s, {s - s1, f112}]]
       1/2 D[ddd[s, {s, 2}], {s - s1, f111}];
w121 = ddd[s - s1, f121];
w211 = ddd[s - s2, f211];
w212 = ddd[s - s2, f212] D[ddd[s, {s - s2, f211}]];

W = BlockMatrix[{{w111, w112, w113, w121, w211, w212}}]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
L = {{0, 0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 1, 0, 0}}
J = {{s1, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, s1, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, s1, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, s1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, s2, 1}, {0, 0, 0, 0, 0, s2}}

K = (W - L.V.J).Inverse[V]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{22}{13} & \frac{5}{13} & \frac{7}{13} & \frac{4}{13} & \frac{2}{13} & \frac{17}{13} \\ \frac{61}{13} & \frac{47}{13} & \frac{20}{13} & \frac{35}{13} & \frac{2}{13} & \frac{30}{13} \end{pmatrix}$$

```
clo = s (me1 - mb1.L) - (ma1 - mb1.K) // Simplify
```

$$\begin{pmatrix} s\ \frac{22}{13} & \frac{5}{13} & \frac{6}{13} & \frac{4}{13} & \frac{2}{13} & s\ \frac{17}{13} \\ 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s & 0 \\ \frac{83}{13} & \frac{42}{13} & \frac{27}{13} & s\ \frac{31}{13} & \frac{9}{13} & s\ \frac{47}{13} \\ s\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
SmithDecomposition[clo, s][[1]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s^2 (s+1)^3 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 4.2

Προκειμένου να μελετήσουμε τη γενική μορφή του ελεγκτή στο παραπάνω παράδειγμα ας πάρουμε ως L το γενικό πίνακα:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} & l_{16} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & l_{25} & l_{26} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 6}.$$

Για να μπορέσει να πραγματοποιηθεί η επανατοποθέτηση πόλων πρέπει να ισχύει, όπως προαναφέρθηκε η σχέση $\det[E+BL] \neq 0$. Η ορίζουσα του πίνακα $[E+BL]$ προκύπτει ότι είναι: $\det[E+BL] = l_{16}l_{24} - l_{14}l_{26}$. Επομένως αν επιλέξουμε τέτοιες τιμές για τα $l_{14}, l_{16}, l_{24}, l_{26}$ ώστε να ισχύει

$$l_{16}l_{24} - l_{14}l_{26} \neq 0$$

τότε η επανατοποθέτηση πόλων είναι εφικτή.

Ο πίνακας $K \in \mathbb{R}^{2x6}$ που προκύπτει από τη σχέση $K = (W + LVF)V^{-1}$ είναι ο ακόλουθος:

$$\begin{bmatrix} l_{11}+l_{12}-\frac{48l_{14}}{13}-\frac{35l_{16}}{13}+1 & l_{13}+\frac{1}{13}(5l_{16}-47l_{14}) & \frac{1}{13}(-33l_{14}+6l_{16}-13) & l_{13}-\frac{35l_{14}}{13}+l_{15}+\frac{4l_{16}}{13} & \frac{1}{13}(11l_{14}-2l_{16}) & l_{11}-\frac{17l_{214}}{13}-\frac{30l_{16}}{13}+1 \\ l_{21}+l_{22}-\frac{48l_{24}}{13}-\frac{35l_{26}}{13}-1 & l_{23}+\frac{1}{13}(5l_{26}-47l_{24}) & \frac{1}{13}(-33l_{24}+6l_{16}+13) & l_{23}-\frac{35l_{24}}{13}+l_{25}+\frac{4l_{26}}{13} & \frac{1}{13}(11l_{24}-2l_{26}-13) & l_{21}-\frac{17l_{24}}{13}-\frac{30l_{26}}{13}-1 \end{bmatrix}$$

Τις παραμέτρους $l_{ij}, i, j = 1, 2, ..., 6$ και άρα τον ελεγκτή K, μπορούμε να τις επιλέξουμε με διάφορα άλλα κριτήρια, όπως το να έχει το κλειστό μας σύστημα καλύτερη απόκριση ή να κάνει λιγότερες ταλαντώσεις μέχρι να ηρεμήσει γύρω από μια τιμή.

<u>Ειδική περίπτωση:</u>

Αν στο παραπάνω παράδειγμα επιλέξουμε έναν διαφορετικό πίνακα $L \in \mathbb{R}^{2x6}$ πραγματικών αριθμών, για τον οποίο ισχύει ότι $\det\left[E+BL\right]\neq 0$, τότε η επανατοποθέτηση πόλων που επιθυμούμε μπορεί και πάλι να επιτευχθεί και να προκύψει ένας πίνακας $K \in \mathbb{R}^{2x6}$ που να το επιτυγχάνει. Κατ' αυτόν τον τρόπο επιλέγουμε τον πίνακα $L \in \mathbb{R}^{2x6}$ και ας υποθέσουμε ότι

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο ισχύει $l_{16}l_{24}-l_{14}l_{26}=1\cdot 1-0\cdot 1=1\neq 0$. Άρα ο πίνακας $K \in \mathbb{R}^{2x6}$ που προκύπτει από τη σχέση $K=\left(W+LVJ\right)V^{-1}$ είναι ο ακόλουθος:

$$K=\begin{bmatrix} -\frac{9}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{17}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{4}{13} \\ -\frac{83}{13} & -\frac{29}{13} & -\frac{14}{13} & -\frac{18}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{47}{13} \end{bmatrix}$$

ο οποίος πραγματοποιεί την επιθυμητή επανατοποθέτηση πόλων του συστήματος. Επομένως δεν παίζει ρόλο η επιλογή συγκεκριμένου πίνακα L, αρκεί να ισχύει η συνθήκη $\det\left[E+BL\right]\neq 0$.

Οι εντολές στο ***<u>Mathematica</u>*** με τη βοήθεια των οποίων πραγματοποιήθηκαν οι παραπάνω υπολογισμοί είναι οι εξής:

```
□□ LinearAlgebra`MatrixManipulation`
□□ Rings`
□□ ControlSystems`

L □ l11, l12, l13, l14, l15, l16 , l21, l22, l23, l24, l25, l26 □
```

$$\begin{matrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} & l_{16} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & l_{25} & l_{26} \end{matrix}$$

```
K □ W L.V.J .Inverse V FullSimplify
```

$$\Big\{\Big\{l_{11} - l_{12} - \frac{48\,l_{14}}{13} - \frac{35\,l_{16}}{13},\; 1 - l_{13} - \frac{1}{13}\left(5\,l_{16} - 47\,l_{14}\right),\; -\frac{1}{13}\left(33\,l_{14} - 6\,l_{16} - 13\right), \ldots\Big\},$$
$$\Big\{l_{21} - l_{22} - \frac{48\,l_{24}}{13} - \frac{35\,l_{26}}{13},\; 1 - l_{23} - \frac{1}{13}\left(5\,l_{26} - 47\,l_{24}\right),\; -\frac{1}{13}\left(33\,l_{24} - 6\,l_{26} - 13\right), \ldots\Big\}$$
$$l_{13} - \frac{35\,l_{14}}{13},\; l_{15} - \frac{4\,l_{16}}{13},\; \frac{1}{13}\left(11\,l_{14} - 2\,l_{16}\right),\; l_{11} - \frac{17\,l_{14}}{13} - \frac{30\,l_{16}}{13},\; 1$$
$$l_{23} - \frac{35\,l_{24}}{13},\; l_{25} - \frac{4\,l_{26}}{13},\; \frac{1}{13}\left(11\,l_{24} - 2\,l_{26} - 13\right),\; l_{21} - \frac{17\,l_{24}}{13} - \frac{30\,l_{26}}{13},\; 1\Big\}$$

Det[me1 - mb1.L]

$l_{16}\,l_{24} - l_{14}\,l_{26}$

clo = s (me1 - mb1.L) - (ma1 - mb1.K) // Simplify

Det[clo] // FullSimplify // Factor

$s^2\,(s - 1)^4\,(l_{16}\,l_{24} - l_{14}\,l_{26})$

Ειδική περίπτωση:

L1 = {{1, 0, 0, 0, 1, 1}, {1, 0, 1, 1, 0, 1}}

K1 = (W - L1.V.J).Inverse[V]

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{17}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{4}{13} \\ -\frac{83}{13} & -\frac{29}{13} & -\frac{14}{13} & -\frac{18}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{47}{13} \end{pmatrix}$$

clo1 = s (me1 - mb1.L1) - (ma1 - mb1.K1) // Simplify

$$\begin{pmatrix} 2s - \frac{9}{13} & -\frac{5}{13} & -\frac{6}{13} & -\frac{17}{13} & s - \frac{2}{13} & s - \frac{4}{13} \\ -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & s & 0 \\ 2s - \frac{92}{13} & \frac{24}{13} & s - \frac{21}{13} & s - \frac{1}{13} & -s - \frac{7}{13} & 2s - \frac{51}{13} \\ -s - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

smdc = SmithDecomposition[clo1, s];
smdc

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s^2+s+1 \end{bmatrix}$$

5. ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗΣ ΠΟΛΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΣΕ ΙΔΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

5.1 Αναλογική και διαφορική ανάδραση κατάστασης σταθερού λόγου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την επανατοποθέτηση πόλων όταν η ανάδραση της κατάστασης είναι της μορφής

$$u = \mu L x - L\dot{x} \tag{5.1}$$

όπου *μ* είναι ένας πραγματικός αριθμός. Με το παραπάνω πρόβλημα έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές (Chen and Chang 1993 a, Jin 1994, Shayman and Zhou 1987 a, b) . Προφανώς το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί με τον αλγόριθμο της γενικής περίπτωσης, που αναπτύξαμε παραπάνω, αν θέσουμε $K = \mu L$. Αποδεικνύεται τότε ότι ο πίνακας L δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$L = W(\mu I - J)^{-1} V^{-1} \tag{5.2}$$

όταν ο *μ* δεν συμπίπτει με κάποιον από τους επιθυμητούς πόλους. Σε διαφορετική περίπτωση ο πίνακας $(\mu I - F)$ δεν θα ήταν αντιστρέψιμος. Αν επιπλέον ισχύει $\det(\mu E - A) \neq 0$ τότε το κλειστό σύστημα που προκύπτει είναι κανονικό αν-ν το ανοιχτό σύστημα είναι και αυτό κανονικό.

Παράδειγμα 5.1

Αν στο σύστημα του παραδείγματος 4.1 επιθυμούμε να κάνουμε επανατοποθέτηση πόλων όταν η ανάδραση της κατάστασης είναι της μορφής (5.1) μπορούμε να επιλέξουμε ως πραγματικό αριθμό *μ=2*, ο οποίος είναι διαφορετικός των επιθυμητών πόλων -1 και 0. Τότε ικανοποιείται η συνθήκη $\det(\mu E - A) \neq 0$ και ο πίνακας $L \in \mathbb{R}^{2x6}$ που προκύπτει από τη σχέση (5.2) είναι ο εξής:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{121}{351} & \frac{7}{1404} & -\frac{161}{468} & -\frac{22}{351} & -\frac{73}{1404} & \frac{155}{468} \\ -\frac{20}{351} & \frac{79}{351} & \frac{55}{117} & -\frac{7}{351} & -\frac{172}{351} & -\frac{28}{117} \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω αλγόριθμος υλοποιήθηκε σε ***Mathematica*** και παρακάτω παρουσιάζονται οι εντολές με τη βοήθεια των οποίων πραγματοποιήθηκαν οι παραπάνω υπολογισμοί.

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
<< Rings`
<< ControlSystems`

mi = 2;
L = W.Inverse[mi IdentityMatrix[6] - J].Inverse[V]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{121}{351} & \frac{7}{1404} & -\frac{161}{468} & -\frac{22}{351} & -\frac{73}{1404} & \frac{155}{468} \\ -\frac{20}{351} & \frac{79}{351} & \frac{55}{117} & -\frac{7}{351} & -\frac{172}{351} & -\frac{28}{117} \end{pmatrix}$$

```
clo = s (me1 - mb1.L) - (ma1 - mb1.L mi) // Simplify // Expand
```

$$\begin{pmatrix} \frac{472 s}{351} - \frac{242}{351} & \frac{7 s}{1404} - \frac{7}{702} & -\frac{161 s}{468} - \frac{73}{234} & \frac{44}{351} - \frac{22 s}{351} & \frac{73}{702} - \frac{73 s}{1404} & \frac{155 s}{468} - \frac{155}{234} \\ -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & s & 0 \\ \frac{101 s}{351} - \frac{202}{351} & \frac{323 s}{1404} - \frac{323}{702} & \frac{59 s}{468} - \frac{59}{234} & \frac{58}{351} - \frac{29 s}{351} & \frac{59}{702} - \frac{761 s}{1404} & \frac{43 s}{468} - \frac{43}{234} \\ -s\;1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
smdc = SmithDecomposition[clo, s];
smdc[[1]]
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s^2 & s \quad 1^{3} \end{bmatrix}$$

5.2 Αναλογική και μερική διαφορική ανάδραση κατάστασης

Στην πράξη οι παράγωγοι των καταστάσεων ενός συστήματος δεν είναι μετρήσιμες, τουλάχιστον όχι όλες από αυτές. Επιπλέον ο υπολογισμός των παραγώγων των σημάτων είναι υπερβολικά ευαίσθητος και κατά συνέπεια είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί με ακρίβεια. Σε αυτές τις περιπτώσεις, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ανάδραση κατάστασης της μορφής (5.1) Αντί για αυτήν χρησιμοποιούμε ανάδραση της μορφής

$$u = Kx + L'z \tag{5.3}$$

όπου z είναι το μέρος των καταστάσεων που είναι δυνατόν να μετρηθούν και ισούται με $z = C\dot{x}$ όπου $C \in \mathbb{R}^{m'xn}, rankC = m'$.

Χρησιμοποιούμε πάλι τον αλγόριθμο της γενικής περίπτωσης, που αναπτύξαμε παραπάνω, όπου θέτουμε αυτή τη φορά $L = L'C$. Έτσι αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$K = (W - L'CVJ)V^{-1}. \tag{5.4}$$

Όταν δεν είναι επιθυμητή η κανονικότητα του κλειστού συστήματος, μπορούμε να διαλέξουμε σαν L' οποιονδήποτε πραγματικό πίνακα διαστάσεων $r \times m$. Αν όμως η κανονικότητα του κλειστού συστήματος είναι επιβεβλημένη, αρκεί να διαλέξουμε L' τέτοιον ώστε να ισχύει $\det(E + BL'C) \neq 0$. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτή την περίπτωση υπάρχει τέτοιος L' αν $rank\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = n$ ή $rank\begin{bmatrix} E^T & C^T \end{bmatrix} = n$.

Παράδειγμα 5.2

Αν στο σύστημα του παραδείγματος 4.1 επιθυμούμε να κάνουμε επανατοποθέτηση πόλων όταν η ανάδραση της κατάστασης είναι της μορφής (5.3) μπορούμε να επιλέξουμε ως πίνακα $C \in \mathbb{R}^{2x6}$ τον εξής

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος μας επιτρέπει να γνωρίζουμε τις καταστάσεις $\dot{x}_4$ και $\dot{x}_6$.

Αν ως πίνακα $L' \in \mathbb{R}^{2x2}$ επιλέξουμε τον πίνακα

$$L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε ο πίνακας $K \in \mathbb{R}^{2x6}$ που προκύπτει από τη σχέση (5.4) είναι ο εξής:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{61}{13} & \frac{47}{13} & \frac{20}{13} & \frac{35}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{30}{13} \\ \frac{22}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{17}{13} \end{bmatrix}$$

ο οποίος όταν εφαρμοστεί στο κλειστό σύστημα πραγματοποιεί την επιθυμητή επανατοποθέτηση πόλων του συστήματος.

Το κλειστό σύστημα περιγράφεται από τη σχέση $\underbrace{\left(E - BL'C\right)}_{E_C}\dot{x} = \underbrace{\left(A + BK\right)}_{A_C}x + Bv$ δηλαδή είναι της μορφής $E_C\dot{x} = A_C x + Bv$ και είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{61}{13} & \frac{47}{13} & \frac{33}{13} & \frac{35}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{30}{13} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{83}{13} & \frac{42}{13} & \frac{27}{13} & \frac{31}{13} & -\frac{9}{13} & \frac{47}{13} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι πόλοι του παραπάνω συστήματος μπορούν να βρεθούν υπολογίζοντας τη Weierstrass μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $sE_C - A_C$ η οποία επαληθεύεται ότι είναι όπως μας ζητήθηκε δηλαδή

$$sI - J = \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}.$$

<u>Γενική περίπτωση:</u>

Για να μελετήσουμε τη γενική περίπτωση του παραπάνω παραδείγματος ας πάρουμε ως $L' \in \mathbb{R}^{2x2}$ το γενικό πίνακα:

$$L' = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

τότε ο πίνακας $K \in \mathbb{R}^{2x6}$ που προκύπτει από τη σχέση (5.4) είναι ο εξής:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{48l_{11}}{13}+\frac{35l_{12}}{13}+1 & \frac{47l_{11}}{13}-\frac{5l_{12}}{13} & \frac{33l_{11}}{13}-\frac{6l_{12}}{13}-1 & \frac{35l_{11}}{13}-\frac{4l_{12}}{13} & \frac{2l_{12}}{13}-\frac{11l_{11}}{13} & \frac{17l_{11}}{13}+\frac{30l_{12}}{13}+1 \\ \frac{48l_{21}}{13}+\frac{35l_{22}}{13}-1 & \frac{47l_{21}}{13}-\frac{5l_{22}}{13} & \frac{33l_{21}}{13}-\frac{6l_{22}}{13}+1 & \frac{35l_{21}}{13}-\frac{4l_{22}}{13} & -\frac{11l_{21}}{13}+\frac{2l_{22}}{13}-1 & \frac{17l_{21}}{13}+\frac{30l_{22}}{13}-1 \end{bmatrix}$$

Από την ορίζουσα του κλειστού συστήματος η οποία είναι:

$$s^2\left(s+1\right)^4\left(l_{12}l_{21}-l_{11}l_{22}\right)$$

προκύπτει ότι για να είναι εφικτή η επανατοποθέτηση πόλων πρέπει να επιλέξουμε $l_{12}, l_{21}, l_{11}, l_{22}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $l_{12}l_{21}-l_{11}l_{22}\neq 0$, δηλαδή ο πίνακας L' να έχει πλήρη τάξη.

Οι εντολές στο ***Mathematica*** με τη βοήθεια των οποίων πραγματοποιήθηκαν οι παραπάνω υπολογισμοί είναι οι εξής:

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
<< Rings`
<< ControlSystems`

Cm = {{0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}}
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Ldot = IdentityMatrix[2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
K = (W - Ldot.Cm.V.J).Inverse[V]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{61}{13} & \frac{47}{13} & \frac{20}{13} & \frac{35}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{30}{13} \\ \frac{22}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{17}{13} \end{pmatrix}$$

```
clo = s me1 - mb1.Ldot.Cm - (ma1 - mb1.K) // Simplify // Factor
```

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{13}(13s-61) & \frac{47}{13} & -\frac{33}{13} & -\frac{1}{13}(13s-35) & \frac{11}{13} & -\frac{30}{13} \\
-1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & s & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & s & 0 \\
-\frac{83}{13} & -\frac{42}{13} & -\frac{27}{13} & -\frac{1}{13}(13s-31) & \frac{9}{13} & -\frac{1}{13}(13s-47) \\
-s+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}$$

```
smdc = SmithDecomposition[clo, s];
smdc[[1]]
```

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & s-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s^2(s-1)^3
\end{pmatrix}$$

6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε εφαρμογές των αλγορίθμων που γράψαμε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Παράδειγμα 6.1

[Liu- Patton, 1998]

Θεωρούμε το σύστημα $E\dot{x} = Ax + Bu$, $E, \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{5\times 5}, B \in \mathbb{R}^{5\times 2}$ για δοθέντες πίνακες

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -9 & -6 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 8 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \\ 0 & -1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Για το σύστημα αυτό ισχύει $rank\begin{bmatrix} sE - A & B \end{bmatrix} = 5$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$ και $rank\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = 5$. Άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο και έτσι είναι δυνατή η επανατοποθέτηση πόλων.

Θέλουμε να κάνουμε επανατοποθέτηση πόλων του συστήματος, θεωρώντας ως επιθυμητούς πόλους το σύνολο $\Gamma = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ αν επιλέξουμε ως $s_1 = -0.5$, $s_2 = -1$, $s_3 = -1.5$ και $s_3 = -2$. Οι γεωμετρικές πολλαπλότητες (δηλαδή το πλήθος των blocks στον πίνακα Jordan) των s_1, s_2, s_3, s_4 να είναι 1, δηλαδή $q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 1, q_4 = 1$, με αλγεβρικές πολλαπλότητες $m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1$ ώστε $p_{11} = 2, p_{21} = 1, p_{31} = 1, p_{41} = 1$, (δηλαδή το πρώτο block θα είναι διάστασης 2x2 και τα υπόλοιπα 1x1). Έτσι ο πίνακας Jordan $J \in \mathbb{R}^{5x5}$ που αντιστοιχεί στην παραπάνω δομή θα είναι

$$J=\begin{bmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_4 \end{bmatrix}$$

<u>Βήμα 1</u>:

Υπολογίζουμε τους πίνακες $N(s)\in\mathbb{R}^{5x2}$, $D(s)\in\mathbb{R}^{2x2}$ από τις σχέσεις $N(s)=adj(sE-A)B$ και $D(s)=\det(sE-A)I_2$, οπότε προκύπτουν

$$N(s)=\begin{bmatrix} 1680s^4-30019s^3+6036s^2+8719s-4008 & -171s^4+23635s^3+21391s^2-14471s-7800 \\ -3360s^4-2174s^3+184s^2+3832s+1482 & 342s^4-1478s^3-2588s^2+390s+694 \\ 6989s^3+2827s^2-6183s-405 & -2880s^3-4042s^2+2822s+1496 \\ -3515s^3+1120s^2+1417s+2526 & 3\left(207s^3-633s^2-985s+391\right) \\ 1585s^3+1645s^2+1435s-1623 & 4\left(69s^2-188s-391\right) \end{bmatrix}$$

και

$$D(s)=\begin{bmatrix} -2853s^4-4822s^3-700s^2+4916s+1047 & 0 \\ 0 & -2853s^4-4822s^3-700s^2+4916s+1047 \end{bmatrix}$$

Επαληθεύουμε την ορθότητα των τιμών των πινάκων που υπολογίσαμε κάνοντας αντικατάσταση στην εξίσωση $(A-sE)N(s)+BD(s)=0$ και πράγματι προκύπτει ο μηδενικός πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

<u>Βήμα 2</u>:

Επιλέγουμε έναν 2 x 5 πίνακα πραγματικών αριθμών, ο οποίος κάνει τον πίνακα $[E+BL]$ αντιστρέψιμο, δηλαδή $\det[E+BL]\neq 0$. Κατ' αυτόν τον τρόπο επιλέγουμε τον πίνακα $L\in\mathbb{R}^{2x5}$

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο ισχύει ότι $\det[E+BL]=2957\neq 0$

Βήμα 3:

Επιλέγουμε ένα σύνολο $n=5$ διανυσμάτων $\left\{f_{ij}^{k}\right\}\in\mathbb{R}^{2\times1}$, ώστε από τη σχέση (4.8) να προκύψουν τα ιδιοανύσματα $\left\{v_{ij}^{k}\right\}\in\mathbb{R}^{5\times1}$, τα οποία θα δημιουργήσουν τον πίνακα $V\in\mathbb{R}^{5x5}$. Έτσι επιλέγουμε για το s_1 με πολλαπλότητα 2 και για τα s_2,s_3,s_4 με πολλαπλότητα 1, τα σύνολα των αντίστοιχων ιδιοανυσμάτων:

$$\left\{f_{11}^{1}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},f_{11}^{2}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\},\ \left\{f_{21}^{1}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\},\ \left\{f_{31}^{1}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\},\ \left\{f_{41}^{1}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

για τα οποία προκύπτει ότι ισχύουν οι συνθήκες (4.7) και (4.11).

Βήμα 4:

Υπολογίζουμε τα ιδιοανύσματα $\left\{v_{ij}^{k}\right\}$ από τη σχέση (4.8), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$v_{11}^{1}=N\left(s_1\right)f_{11}^{1}$$
$$v_{11}^{2}=N\left(s_1\right)f_{11}^{2}+N'\left(s_1\right)f_{11}^{1}$$
$$v_{21}^{1}=N\left(s_2\right)f_{21}^{1}$$
$$v_{31}^{1}=N\left(s_3\right)f_{31}^{1}$$
$$v_{41}^{1}=N\left(s_4\right)f_{41}^{1}$$

και προκύπτουν τα εξής:

$$\left\{v_{11}^{1}=\begin{bmatrix}-1182.94\\-268.125\\1954.13\\4635\\-3246.38\end{bmatrix},v_{11}^{2}=\begin{bmatrix}-36903.3\\5454.13\\370.25\\-831.375\\-1168.25\end{bmatrix}\right\},$$

$$\left\{v_{21}^{1}=\begin{bmatrix}29264\\-3816\\-872\\7352\\-3534\end{bmatrix}\right\},\ \left\{v_{31}^{1}=\begin{bmatrix}-124911\\14530.4\\6246.13\\-15546.8\\5608.63\end{bmatrix}\right\},\ \left\{v_{41}^{1}=\begin{bmatrix}99510\\-28098\\-27195\\21330\\-8505\end{bmatrix}\right\}$$

Υπολογίζουμε τα ιδιοανύσματα $\left\{w_{ij}^{k}\right\}$ από τη σχέση (4.8), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$w_{11}^1 = D(s_1) f_{11}^1$$
$$w_{11}^2 = D(s_1) f_{11}^2 + D'(s_1) f_{11}^1$$
$$w_{21}^1 = D(s_2) f_{21}^1$$
$$w_{31}^1 = D(s_3) f_{31}^1$$
$$w_{41}^1 = D(s_4) f_{41}^1$$

και προκύπτουν τα εξής:

$$\left\{ w_{11}^1 = \begin{bmatrix} -1161.56 \\ -1161.56 \end{bmatrix}, w_{11}^2 = \begin{bmatrix} 3426 \\ 2264.44 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\left\{ w_{21}^1 = \begin{bmatrix} -2600 \\ -2600 \end{bmatrix} \right\},\ \left\{ w_{31}^1 = \begin{bmatrix} 6071.06 \\ -6071.06 \end{bmatrix} \right\},\ \left\{ w_{41}^1 = \begin{bmatrix} -18657 \\ -37314 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>Βήμα 5</u>:

Ο πίνακας $V \in \mathbb{R}^{5x5}$ που προκύπτει από την (4.9) είναι της μορφής $V = \begin{bmatrix} v_{11}^1 & v_{11}^2 & v_{21}^1 & v_{31}^1 & v_{41}^1 \end{bmatrix}$ και είναι ο εξής:

$$V = \begin{bmatrix} -1182.94 & -36903.3 & 29264 & -124911 & 99510 \\ -268.125 & 5454.13 & -3816 & 14530.4 & -28098 \\ 1954.13 & 370.25 & -872 & 6246.13 & -27195 \\ 4635 & -831.375 & 7352 & -15546.8 & 21330 \\ -3246.38 & -1168.25 & -3534 & 5608.63 & -8505 \end{bmatrix}..$$

Ο πίνακας $W \in \mathbb{R}^{2x5}$ που προκύπτει από την (4.10) είναι της μορφής $W = \begin{bmatrix} w_{11}^1 & w_{11}^2 & w_{21}^1 & w_{31}^1 & w_{41}^1 \end{bmatrix}$ και είναι ο εξής:

$$W = \begin{bmatrix} -1161.56 & 3426 & -2600 & 6071.06 & -18657 \\ -1161.56 & 2264.44 & -2600 & -6071.06 & -37314 \end{bmatrix}$$

<u>Βήμα 6</u>:

Επομένως είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον πίνακα $K \in \mathbb{R}^{2x5}$ από τη σχέση $K = (W + LVJ)V^{-1}$ και είναι ο ακόλουθος:

$$K = \begin{bmatrix} -3.37097 & 0.197377 & 7.25303 & 41.6079 & 64.659 \\ 0.690688 & 0.463436 & -1.94742 & -10.7136 & -16.0997 \end{bmatrix}.$$

Το κλειστό σύστημα περιγράφεται από τη σχέση $\underbrace{(E + BL)}_{E_C}\dot{x} = \underbrace{(A + BK)}_{A_C}x + Bv$

δηλαδή είναι της μορφής $E_C\dot{x} = A_C x + Bv$.

Οι πόλοι του παραπάνω συστήματος μπορούν να βρεθούν υπολογίζοντας τη Weierstrass μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $sE_C - A_C$ η οποία επαληθεύεται ότι είναι όπως μας ζητήθηκε δηλαδή

$$sI - J = \begin{bmatrix} s+0.5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix}.$$

Οι εντολές στο ***Mathematica*** με τη βοήθεια των οποίων πραγματοποιήθηκαν οι παραπάνω υπολογισμοί είναι οι εξής:

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
<< Rings`
<< ControlSystems`

me1 = {{2, 1, 7, 2, 9}, {0, 0, 5, 5, 6}, {0, 0, 2, 9, 5},
      {0, 0, 0, 9, 3}, {0, 0, 0, 0, 9}}
ma1 = {{-1, 3, 1, -3, -1}, {-2, -9, -6, 5, 6}, {-1, -1, 1, 2, 7},
      {0, 8, 3, -1, 5}, {0, 0, 0, 4, 3}}
mb1 = {{2, -9}, {0, 3}, {4, 0}, {0, -1}, {-5, 0}}
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -9 & -6 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 8 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \\ 0 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
nnn = Inverse[s. me1 - ma1].Det[s. me1 - ma1].mb1 // Simplify
```

1680 s^4 30019 s^3 6036 s^2 8719 s 4008 ~ 171 s^4 23635 s^3 21391 s^2 14471 s 7800
~ 3360 s^4 2174 s^3 184 s^2 3832 s 1482 342 s^4 1478 s^3 2588 s^2 390 s 694
6989 s^3 2827 s^2 6183 s 405 ~ 2880 s^3 4042 s^2 2822 s 1496
~ 3515 s^3 1120 s^2 1417 s 2526 3 207 s^3 633 s^2 985 s 391
1585 s^3 1645 s^2 1435 s 1623 4 69 s^2 188 s 391

```
ddd = Det[s. me1 - ma1].IdentityMatrix[2] // Simplify
```

~ 2853 s^4 4822 s^3 700 s^2 4916 s 1047 0
0 ~ 2853 s^4 4822 s^3 700 s^2 4916 s 1047

(επαλήθευση)

```
~(s. me1 - ma1).nnn - mb1.ddd // FullSimplify
```

0 0
0 0
0 0
0 0
0 0

```
L = {{1, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0, 0}}
```

1 0 0 0 1
0 0 1 0 0

```
Det[me1 + mb1.L]
```

2957

```
s1 = 0.5;
s2 = 1;
s3 = 1.5;
s4 = 2;
v111 = nnn /. s -> s1 .f111;
v112 = nnn /. s -> s1 .f112 + D[nnn, s] /. s -> s1 .f111;
v211 = nnn /. s -> s2 .f211;
v311 = nnn /. s -> s3 .f311;
v411 = nnn /. s -> s4 .f411;

V = BlockMatrix[{{v111, v112, v211, v311, v411}}]
```

1182.94	36903.3	29264	124911.	99510
268.125	5454.13	3816	14530.4	28098
1954.13	370.25	872	6246.13	27195
4635.	831.375	7352	15546.8	21330
3246.38	1168.25	3534	5608.63	8505

```
w111  ddd  s  s1  f111;
w112  ddd  s  s1  f112   D ddd, s    s  s1  f111;
w211  ddd  s  s2  f211;
w311  ddd  s  s3  f311;
w411  ddd  s  s4  f411;
```

```
W  BlockMatrix   w111, w112, w211, w311, w411
```

1161.56	3426.	2600	6071.06	18657
1161.56	2264.44	2600	6071.06	37314

```
J   s1, 1, 0, 0, 0 ,  0, s1, 0, 0, 0 ,  0, 0, s2, 0, 0 ,  0, 0, 0, s3, 0 ,
   0, 0, 0, 0, s4
```

0.5	1	0	0	0
0	0.5	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1.5	0
0	0	0	0	2

```
K   W  L.V.J .Inverse V
```

3.37097	0.197377	7.25303	41.6079	64.659
0.690688	0.463436	1.94742	10.7136	16.0997

```
clo  s   me1  mb1.L   ma1  mb1.K   Simplify
```

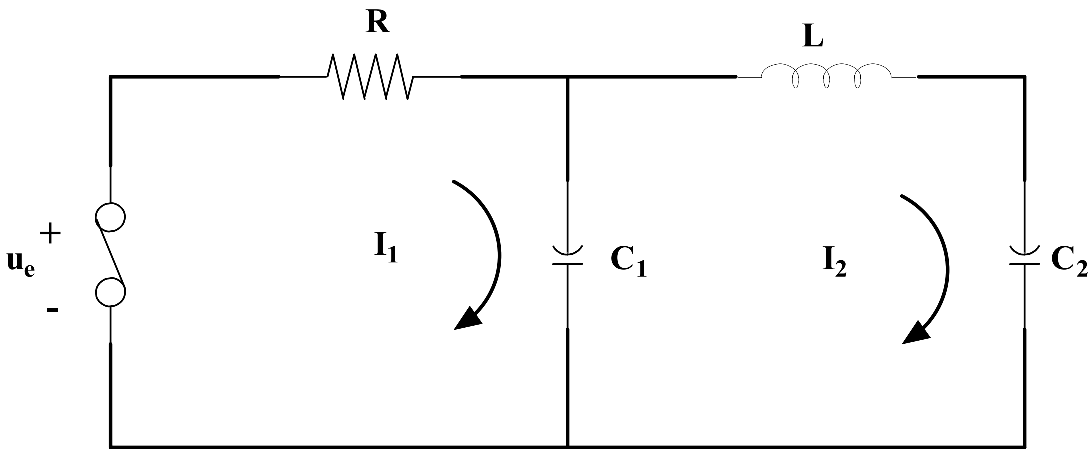
0.474239	s 1.56568	2 s 4.02076	2 s 10.2066	7 s 14.5793
0.0720627	7.60969	8 s 11.8423	5 s 27.1408	6 s 42.2991
4 s 14.4839	0.210493	2 s 30.0121	9 s 168.431	9 s 265.636
0.690688	7.53656	s 4.94742	9 s 9.71359	3 s 21.0997
5 s 16.8549	0.986883	36.2651	204.039	4 s 320.295

```
smdc  SmithDecomposition clo, s ;
smdc  1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.\,(s\;0.499993)(s\;0.500007)(s\;1.)(s\;1.5)(s\;2.) \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 6.2

Θεωρούμε το σύστημα του κυκλώματος που φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



στο οποίο η τάση στα άκρα της πηγής u_e είναι το σήμα εισόδου. Επιλέγουμε ως διάνυσμα κατάστασης $x=\begin{bmatrix} u_{C_1} & u_{C_2} & I_2 & I_1 \end{bmatrix}$, όπου u_{C_1}, u_{C_2} είναι οι τάσεις στα άκρα των πυκνωτών C_1, C_2 και I_1, I_2 είναι οι εντάσεις των ρευμάτων που τους διαρρέουν. Σύμφωνα με το 2ο κανόνα του Kirchoff το κύκλωμα αυτό περιγράφεται μέσω του παρακάτω ιδιάζοντος συστήματος

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu \\ \quad y = Cx \end{cases}$$

όπου

$$E=\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στην παρακάτω μελέτη του συστήματος θεωρούμε ότι

$$C_1=\frac{1}{10000}, C_2=\frac{1}{1000}, L=\frac{11}{10}, R=2.$$

Για το σύστημα αυτό ισχύει $rank\begin{bmatrix} sE-A & B \end{bmatrix}=4$ για κάθε $s\in\mathbb{C}$ και $rank\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix}=4$. Άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο και έτσι είναι δυνατή η επανατοποθέτηση πόλων.

Θέλουμε να κάνουμε επανατοποθέτηση πόλων του συστήματος, θεωρώντας ως επιθυμητούς πόλους το σύνολο $\Gamma = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, επιλέγουμε ως $s_1 = -5000, s_2 = -100, s_3 = -200$ και $s_4 = -300$. Οι γεωμετρικές πολλαπλότητες (δηλαδή το πλήθος των blocks για τον κάθε πόλο στον πίνακα Jordan) των s_1, s_2, s_3, s_4 να είναι 1, δηλαδή $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$, με αλγεβρικές πολλαπλότητες $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ ώστε $p_{11} = p_{21} = p_{31} = p_{41} = 1$, (δηλαδή τα blocks θα είναι διάστασης 1x1). Έτσι ο πίνακας Jordan $J \in \mathbb{R}^{4x4}$ που αντιστοιχεί στην παραπάνω δομή θα είναι

$$J = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 \end{bmatrix}$$

<u>Βήμα 1</u>:

Υπολογίζουμε τους πίνακες $N(s) \in \mathbb{R}^{4x1}$, $D(s) \in \mathbb{R}^{1x1}$ από τις σχέσεις (4.6), οπότε προκύπτουν

$$N(s) = \begin{bmatrix} \frac{11s^2}{10000} + 1 \\ 1 \\ \frac{s}{1000} \\ \frac{11s^3}{100000000} + \frac{s}{10000} \end{bmatrix}$$

και

$$D(s) = \left[\frac{11s^3}{50000000} + \frac{11s^2}{10000} + \frac{s}{5000} + 1 \right].$$

Επαληθεύουμε την ορθότητα των τιμών των πινάκων που υπολογίσαμε κάνοντας αντικατάσταση στην εξίσωση

$$(A - sE)N(s) + BD(s) = 0$$

και πράγματι προκύπτει ο μηδενικός πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

<u>Βήμα 2</u>:

Επιλέγουμε έναν 1 x 4 πίνακα πραγματικών αριθμών, ο οποίος κάνει τον πίνακα $\left[E+BL\right]$ αντιστρέψιμο, δηλαδή $\det\left[E+BL\right]\neq 0$. Κατ' αυτόν τον τρόπο επιλέγουμε τον πίνακα $L\in\mathbb{R}^{1x4}$

$$L=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

για τον οποίο ισχύει ότι $\det\left[E+BL\right]=\dfrac{33}{100000000}\neq 0$.

<u>Βήμα 3</u>:

Επιλέγουμε τυχαία ένα σύνολο $n=4$ διανυσμάτων $\left\{f_{ij}^{k}\right\}\in\mathbb{R}^{1\times 1}$, ώστε από τη σχέση (4.8) να προκύψουν τα ιδιοανύσματα $\left\{v_{ij}^{k}\right\}\in\mathbb{R}^{4\times 1}$, τα οποία θα δημιουργήσουν τον πίνακα $V\in\mathbb{R}^{4x4}$. Έτσι επιλέγουμε για τα s_1,s_2,s_3,s_4 με πολλαπλότητες 1 τα ιδιοανύσματα:

$$\left\{f_{11}^{1}=\left[1\right]\right\},\left\{f_{21}^{1}=\left[3\right]\right\},\left\{f_{31}^{1}=\left[-1\right]\right\},\left\{f_{41}^{1}=\left[2\right]\right\},$$

για τα οποία προκύπτει ότι ισχύουν οι συνθήκες (4.7) και (4.11).

<u>Βήμα 4</u>:

Υπολογίζουμε τα ιδιοανύσματα $\left\{v_{ij}^{k}\right\}$ από τη σχέση (4.8), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$v_{11}^{1}=N\left(s_1\right)f_{11}^{1}$$

$$v_{21}^{1}=N\left(s_2\right)f_{21}^{1}$$

$$v_{31}^{1}=N\left(s_3\right)f_{31}^{1}$$

$$v_{41}^{1}=N\left(s_4\right)f_{41}^{1}$$

και προκύπτουν τα εξής:

$$\left\{v_{11}^{1}=\begin{bmatrix}27501\\1\\-5\\-\dfrac{27501}{2}\end{bmatrix}\right\},\left\{v_{21}^{1}=\begin{bmatrix}36\\3\\-\dfrac{3}{10}\\-\dfrac{9}{25}\end{bmatrix}\right\},\left\{v_{31}^{1}=\begin{bmatrix}-45\\-1\\\dfrac{1}{5}\\\dfrac{9}{10}\end{bmatrix}\right\},\left\{v_{41}^{1}=\begin{bmatrix}200\\2\\-\dfrac{3}{5}\\-6\end{bmatrix}\right\}.$$

Υπολογίζουμε τα ιδιοανύσματα $\left\{w_{ij}^{k}\right\}$ από τη σχέση (4.8), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$w_{11}^{1} = D(s_1) f_{11}^{1}$$

$$w_{21}^{1} = D(s_2) f_{21}^{1}$$

$$w_{31}^{1} = D(s_3) f_{31}^{1}$$

$$w_{41}^{1} = D(s_4) f_{41}^{1}$$

και προκύπτουν τα εξής:

$$\left\{w_{11}^{1} = [0]\right\}, \left\{w_{21}^{1} = \left[\frac{882}{25}\right]\right\}, \left\{w_{31}^{1} = \left[-\frac{216}{5}\right]\right\}, \left\{w_{41}^{1} = [188]\right\}.$$

<u>*Βήμα 5*</u>:

Ο πίνακας $V \in \mathbb{R}^{4x4}$ που προκύπτει από την (4.9) είναι της μορφής $V = \begin{bmatrix} v_{11}^{1} & v_{21}^{1} & v_{31}^{1} & v_{41}^{1} \end{bmatrix}$ και είναι ο εξής:

$$V = \begin{bmatrix} 27501 & 36 & -45 & 200 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -5 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{27501}{2} & -\frac{9}{25} & \frac{9}{10} & -6 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $W \in \mathbb{R}^{1x4}$ που προκύπτει από την (4.10) είναι της μορφής $W = \begin{bmatrix} w_{11}^{1} & w_{21}^{1} & w_{31}^{1} & w_{41}^{1} \end{bmatrix}$ και είναι ο εξής:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \frac{882}{25} & -\frac{216}{5} & 188 \end{bmatrix}$$

<u>*Βήμα 6*</u>:

Επομένως είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον πίνακα $K \in \mathbb{R}^{1x4}$ από τη σχέση $K = (W + LVJ)V^{-1}$ και είναι ο ακόλουθος:

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{10239}{11} & -\frac{98650}{11} & -182800 & -6798 \end{bmatrix}.$$

Το κλειστό σύστημα περιγράφεται από τη σχέση $\underbrace{(E + BL)}_{E_C}\dot{x} = \underbrace{(A + BK)}_{A_C}x + Bv$

δηλαδή είναι της μορφής $E_C\dot{x} = A_C x + Bv$ και είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10000} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{10} & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{10250}{11} & \frac{98650}{11} & 182800 & 6800 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} v .$$

Οι πόλοι του παραπάνω συστήματος μπορούν να βρεθούν υπολογίζοντας τη Weierstrass μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $sE_C - A_C$ η οποία επαληθεύεται ότι είναι όπως μας ζητήθηκε δηλαδή

$$sI - J = \begin{bmatrix} s+5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+300 \end{bmatrix}.$$

Οι εντολές στο ***Mathematica*** με τη βοήθεια των οποίων πραγματοποιήθηκαν οι παραπάνω υπολογισμοί είναι οι εξής:

```
LinearAlgebra`MatrixManipulation`
Rings`
ControlSystems`

me1  C1, 0, 0, 0 , 0, C2, 0, 0 , 0, 0, ~ L, 0 ,
      0, 0, 0, 0  . C1  1 10000, C2  1 1000, L  11 10 ;
ma1  0, 0, 0, 1 , 0, 0, 1, 0 , ~ 1, 1, 0, 0 , 1, 0, 0, R  . R  2;
mb1  0 , 0 , 0 , ~ 1 ;
mc1  0, 1, 0, 0 ;

SmithDecomposition s. me1 ~ ma1, s  1
```

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^3 . \; 5000 s^2 . \; \frac{10000\,s}{11} . \; \frac{50000000}{11} \end{array}$$

```
Solve[s^3 + 5000 s^2 + 10000 s/11 + 50000000/11 == 0, s]
```

$$\left\{\{s\to -5000\},\left\{s\to -\frac{100\,i}{\sqrt{11}}\right\},\left\{s\to \frac{100\,i}{\sqrt{11}}\right\}\right\}$$

```
nnn = Inverse[s*me1 - ma1]*Det[s*me1 - ma1].mb1
```

$$\left(\begin{array}{c} 1+\frac{11 s^2}{10000} \\ 1 \\ \frac{s}{1000} \\ \frac{11 s^3}{100000000}+\frac{s}{10000} \end{array}\right)$$

```
ddd = Det[s*me1 - ma1]*IdentityMatrix[1]
```

$$\left(\frac{11 s^3}{50000000}+\frac{11 s^2}{10000}+\frac{s}{5000}+1\right)$$

```
f111 = {{1}};
f121 = {{3}};
f131 = {{-1}};
f141 = {{2}};

s1 = -5000;
s2 = -100;
s3 = -200;
s4 = -300;

v111 = (nnn /. s -> s1).f111;
v121 = (nnn /. s -> s2).f121;
v131 = (nnn /. s -> s3).f131;
v141 = (nnn /. s -> s4).f141;
V = BlockMatrix[{{v111, v121, v131, v141}}]
```

$$\left(\begin{array}{cccc} 27501 & 36 & -45 & 200 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -5 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{27501}{2} & -\frac{9}{25} & \frac{9}{10} & -6 \end{array}\right)$$

```
w111 = (ddd /. s -> s1).f111;
w121 = (ddd /. s -> s2).f121;
w131 = (ddd /. s -> s3).f131;
w141 = (ddd /. s -> s4).f141;
W = BlockMatrix[{{w111, w121, w131, w141}}]
```

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & \frac{882}{25} & -\frac{216}{5} & 188 \end{array}\right)$$

```
L1 = {{1, -1, 1, 3}}
```

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

```
J = DiagonalMatrix[{s1, s2, s3, s4}]
```

$$\begin{pmatrix} 5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -300 \end{pmatrix}$$

```
K1 = -(W - L1.V.J).Inverse[V] // FullSimplify
```

$$\left\{-\frac{10239}{11}, -\frac{98650}{11}, -182800, -6798\right\}$$

```
clo1 = s.(me1 - mb1.L1) - (ma1 - mb1.K1) // Simplify
```

$$\begin{pmatrix} \frac{s}{10000} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{s}{1000} & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{11 s}{10} & 0 \\ -s-\frac{10250}{11} & -s-\frac{98650}{11} & -s-182800 & -3s-6800 \end{pmatrix}$$

```
SmithDecomposition[clo1, s][[1]]
```

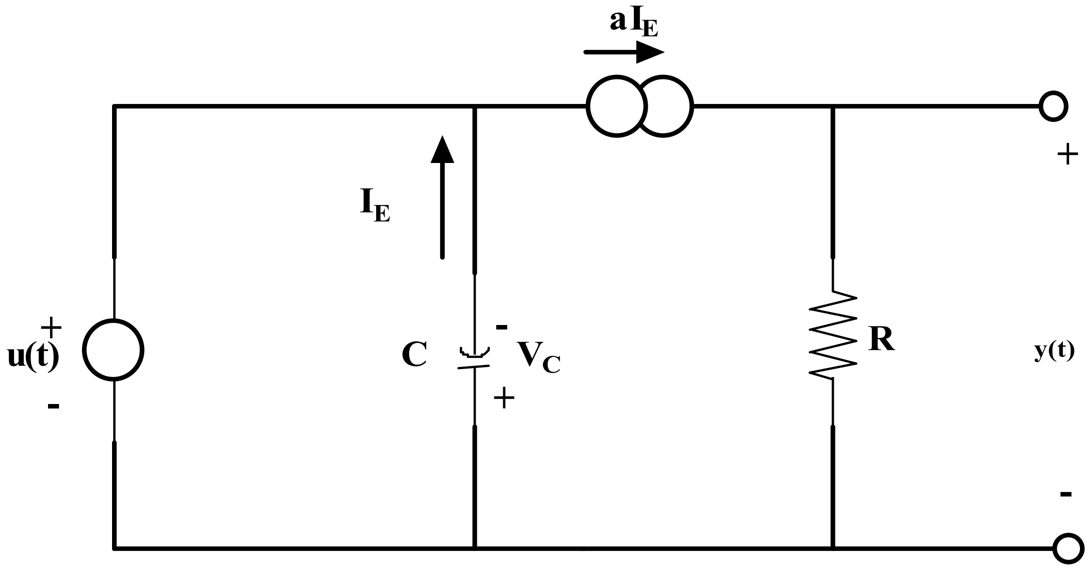
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^4+5600 s^3+3110000 s^2+556000000 s+30000000000 \end{pmatrix}$$

```
Solve[s^4 + 5600 s^3 + 3110000 s^2 + 556000000 s + 30000000000 == 0, s]
```

$$\{\{s \to -5000\}, \{s \to -300\}, \{s \to -200\}, \{s \to -100\}\}$$

Παράδειγμα 6.3

Η μαθηματική περιγραφή του κυκλώματος τρανζίστορ του σχήματος που ακολουθεί



γίνεται μέσω του παρακάτω ιδιάζοντος συστήματος

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

όπου

$$E = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & a*R \end{bmatrix}.$$

Στο σύστημα αυτό η τάση στα άκρα της πηγής $u(t)$ είναι το σήμα εισόδου. Επιλέγουμε ως διάνυσμα ψευδοκατάστασης $x = \begin{bmatrix} V_C & I_E \end{bmatrix}^T$, όπου V_C είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή C και I_E η ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει.

Στην παρακάτω μελέτη του συστήματος θεωρούμε ότι

$$C = \frac{1}{1000}, R = 2, a = 1.$$

Για το σύστημα αυτό ισχύει $rank\begin{bmatrix} sE - A & B \end{bmatrix} = 2$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$ και $rank\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = 2$. Άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο και έτσι είναι δυνατή η επανατοποθέτηση πόλων.

Θέλουμε να κάνουμε επανατοποθέτηση πόλων του συστήματος, θεωρώντας ως επιθυμητούς πόλους το σύνολο $\Gamma = \{s_1, s_2\}$ αν επιλέξουμε ως $s_1 = -10$ και $s_2 = 3$. Οι γεωμετρικές πολλαπλότητες (δηλαδή το πλήθος των blocks στον πίνακα Jordan) των s_1, s_2 να είναι 1, δηλαδή $q_1 = 1$ και $q_2 = 1$ με αλγεβρικές πολλαπλότητες $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ ώστε $p_{11} = 1$ και $p_{21} = 1$ (δηλαδή τα blocks θα είναι διάστασης 1x1). Έτσι ο πίνακας Jordan $J \in \mathbb{R}^{5x5}$ που αντιστοιχεί στην παραπάνω δομή θα είναι

$$J = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

<u>Βήμα 1</u>:

Υπολογίζουμε τους πίνακες $N(s) \in \mathbb{R}^{2x1}$, $D(s) \in \mathbb{R}^{1x1}$ από τις σχέσεις (4.6), οπότε προκύπτουν

$$N(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{s}{10000} \end{bmatrix}$$

και

$$D(s) = [-1].$$

Επαληθεύουμε την ορθότητα των τιμών των πινάκων που υπολογίσαμε κάνοντας αντικατάσταση στην εξίσωση

$$(A - sE)N(s) + BD(s) = 0$$

και πράγματι προκύπτει ο μηδενικός πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

<u>Βήμα 2</u>:

Επιλέγουμε έναν 1 x 2 πίνακα πραγματικών αριθμών, ο οποίος κάνει τον πίνακα $[E + BL]$ αντιστρέψιμο, δηλαδή $\det[E + BL] \neq 0$. Κατ' αυτόν τον τρόπο επιλέγουμε τον πίνακα $L \in \mathbb{R}^{1x2}$

$$L = [1 \quad -1].$$

<u>Βήμα 3</u>:

Επιλέγουμε τυχαία ένα σύνολο $n = 2$ διανυσμάτων $\{f_{ij}^k\} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, ώστε από τη σχέση (4.8) να προκύψουν τα ιδιοανύσματα $\left\{v_{ij}^{k}\right\} \in \mathbb{R}^{2\times1}$, τα οποία θα δημιουργήσουν τον πίνακα $V \in \mathbb{R}^{2x2}$. Έτσι επιλέγουμε για τα s_1, s_2 το καθένα πολλαπλότητας 1 τα ιδιοανύσματα:

$$\left\{f_{11}^{1} = [1]\right\},\ \left\{f_{21}^{1} = [3]\right\}$$

για τα οποία προκύπτει ότι ισχύουν οι συνθήκες (4.7) και (4.11).

<u>*Βήμα 4*</u>:

Υπολογίζουμε τα ιδιοανύσματα $\left\{v_{ij}^{k}\right\}$ από τη σχέση (4.8), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$v_{11}^{1} = N(s_1) f_{11}^{1}$$

$$v_{21}^{1} = N(s_2) f_{21}^{1}$$

και προκύπτουν τα εξής:

$$\left\{v_{11}^{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{1000} \end{bmatrix}\right\},\ \left\{v_{21}^{1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\dfrac{9}{10000} \end{bmatrix}\right\}.$$

Υπολογίζουμε τα ιδιοανύσματα $\left\{w_{ij}^{k}\right\}$ από τη σχέση (4.8), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$w_{11}^{1} = D(s_1) f_{11}^{1}$$

$$w_{21}^{1} = D(s_2) f_{21}^{1}$$

και προκύπτουν τα εξής:

$$\left\{w_{11}^{1} = [-1]\right\},\ \left\{w_{21}^{1} = [-3]\right\}.$$

<u>*Βήμα 5*</u>:

Ο πίνακας $V \in \mathbb{R}^{2x2}$ που προκύπτει από την (4.9) είναι της μορφής $V = \begin{bmatrix} v_{11}^{1} & v_{21}^{1} \end{bmatrix}$ και είναι ο εξής:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -\dfrac{1}{1000} & -\dfrac{9}{10000} \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $W \in \mathbb{R}^{1x2}$ που προκύπτει από την (4.10) είναι της μορφής $W = \begin{bmatrix} w_{11}^{1} & w_{21}^{1} \end{bmatrix}$ και είναι ο εξής:

$$W = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

<u>Βήμα 6</u>:

Επομένως είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον πίνακα $K \in \mathbb{R}^{2x5}$ από τη σχέση $K = \left(W + LVJ\right)V^{-1}$ και είναι ο ακόλουθος:

$$K = \begin{bmatrix} -\dfrac{997}{1000} & 10013 \end{bmatrix}.$$

Το κλειστό σύστημα περιγράφεται από τη σχέση $\underbrace{\left(E + BL\right)}_{E_C}\dot{x} = \underbrace{\left(A + BK\right)}_{A_C}x + Bv$

δηλαδή είναι της μορφής $E_C\dot{x} = A_C x + Bv$ και είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\dot{x} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{10000} & 1 \\ \dfrac{3}{1000} & 10013 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}v.$$

Οι πόλοι του παραπάνω συστήματος μπορούν να βρεθούν υπολογίζοντας τη Weierstrass μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $sE_C - A_C$ η οποία επαληθεύεται ότι είναι όπως μας ζητήθηκε δηλαδή

$$sI - J = \begin{bmatrix} s+10 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}.$$

Οι εντολές στο ***<u>Mathematica</u>*** με τη βοήθεια των οποίων πραγματοποιήθηκαν οι παραπάνω υπολογισμοί είναι οι εξής:

```
LinearAlgebra`MatrixManipulation`
Rings`
ControlSystems`

me1  C, 0 , 0, 0  . C  1 10000;
ma1  0, 1 , 1, 0 ;
mb1  0 , 1 ;
mc1  0, a R  . R  2, a  1 ;
```

```
nnn = Inverse[s me1 - ma1] Det[s me1 - ma1].mb1
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{s}{10000} \end{pmatrix}$$

```
ddd = Det[s me1 - ma1] IdentityMatrix[1]
```

{{-1}}

```
f111 = {{1}};
f121 = {{3}};
s1 = -10;
s2 = -3;
v111 = (nnn /. s -> s1).f111;
v121 = (nnn /. s -> s2).f121;
V = BlockMatrix[{{v111, v121}}]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -\frac{1}{1000} & -\frac{9}{10000} \end{pmatrix}$$

```
w111 = (ddd /. s -> s1).f111;
w121 = (ddd /. s -> s2).f121;
W = BlockMatrix[{{w111, w121}}]
```

{{-1, -3}}

```
L1 = {{1, -1}}
```

{{1, -1}}

```
J = DiagonalMatrix[{s1, s2}]
```

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

```
K1 = (W - L1.V.J).Inverse[V] // FullSimplify
```

$$\left\{\left\{-\frac{997}{1000}, 10013\right\}\right\}$$

```
clo1 = (s (me1 - mb1.L1) - (ma1 + mb1.K1)) // Simplify
```

$$\begin{pmatrix} \frac{s}{10000} & -1 \\ s - \frac{3}{1000} & -s - 10013 \end{pmatrix}$$

SmithDecomposition clo1, s 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 \quad 13\,s \quad 30 \end{pmatrix}$$

Solve s2 13 s 30 0, s

s 10 , s 3

Παράδειγμα 6.4

Θεωρούμε το σύστημα $E\dot{x} = Ax + Bu$, $E, \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{5\times 5}, B \in \mathbb{R}^{5\times 2}$ για δοθέντες πίνακες

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για το σύστημα αυτό ισχύει $rank\begin{bmatrix} sE - A & B \end{bmatrix} = 6$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$ και $rank\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = 6$. Άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο και έτσι είναι δυνατή η επανατοποθέτηση πόλων.

Θέλουμε να κάνουμε επανατοποθέτηση πόλων του συστήματος, θεωρώντας ως επιθυμητούς πόλους το σύνολο $\Gamma = \{s_1, s_2\}$ αν επιλέξουμε ως $s_1 = -1$ και $s_2 = 0$. Η γεωμετρική πολλαπλότητα (δηλαδή το πλήθος των blocks στον πίνακα Jordan) του s_1 να είναι 1, δηλαδή $q_1 = 1$, με αλγεβρική πολλαπλότητα $m_1 = 2$ ώστε $p_{11} = 2$, (δηλαδή το block θα είναι διάστασης 2x2). Η γεωμετρική πολλαπλότητα (δηλαδή το πλήθος των blocks στον πίνακα Jordan) του s_2 να είναι 2, δηλαδή $q_2 = 2$, με αλγεβρική πολλαπλότητα $m_2 = 3$ ώστε $p_{21} = 1, p_{22} = 2$, (δηλαδή το πρώτο block θα είναι διάστασης 1x1 και το δεύτερο 2x2). Έτσι ο πίνακας Jordan $J \in \mathbb{R}^{5x5}$ που αντιστοιχεί στην παραπάνω δομή θα είναι

$$J = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

<u>*Βήμα 1*</u>*:*

Υπολογίζουμε τους πίνακες $N(s) \in \mathbb{R}^{5x2}$, $D(s) \in \mathbb{R}^{2x2}$ από τις σχέσεις $N(s) = adj(sE - A)B$ και $D(s) = \det(sE - A)I_2$, οπότε προκύπτουν

$$N(s)=\begin{bmatrix} s\left(s^2-s+1\right) & -2s^4+3s^3-4s^2+s+1 \\ -s^2 & s^2-2s-1 \\ -s^2 & 2s^3-s^2+2s+1 \\ -s & s^2 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

και

$$D(s)=\begin{bmatrix} -s^3+s^2-2s-1 & 0 \\ 0 & -s^3+s^2-2s-1 \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύουμε την ορθότητα των τιμών των πινάκων που υπολογίσαμε κάνοντας αντικατάσταση στην εξίσωση

$$\left(A-sE\right)N\left(s\right)+BD\left(s\right)=0$$

και πράγματι προκύπτει ο μηδενικός πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

<u>Βήμα 2</u>:

Επιλέγουμε έναν 2 x 5 πίνακα πραγματικών αριθμών, ο οποίος κάνει τον πίνακα $\left[E+BL\right]$ αντιστρέψιμο, δηλαδή $\det\left[E+BL\right]\neq 0$. Κατ' αυτόν τον τρόπο επιλέγουμε τον πίνακα $L\in\mathbb{R}^{2x5}$

$$L=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο ισχύει ότι $\det\left[E+BL\right]=2957\neq 0$

<u>Βήμα 3</u>:

Επιλέγουμε τυχαία ένα σύνολο $n=5$ διανυσμάτων $\left\{f_{ij}^k\right\}\in\mathbb{R}^{2\times 1}$, ώστε από τη σχέση (4.8) να προκύψουν τα ιδιοανύσματα $\left\{v_{ij}^k\right\}\in\mathbb{R}^{5\times 1}$, τα οποία θα δημιουργήσουν τον πίνακα $V\in\mathbb{R}^{5x5}$. Έτσι επιλέγουμε για το s_1 με πολλαπλότητα 2 το σύνολο των ιδιοανυσμάτων:

$$\left\{ f_{11}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, f_{11}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

και για το s_2 με πολλαπλότητα 1 και με πολλαπλότητα 2, τα σύνολα των ιδιοανυσμάτων, αντίστοιχα:

$$\left\{ f_{21}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},\ \left\{ f_{22}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, f_{22}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

.για τα οποία προκύπτει ότι ισχύουν οι συνθήκες (4.7) και (4.11).

<u>Βήμα 4</u>:

Υπολογίζουμε τα ιδιοανύσματα $\left\{ v_{ij}^k \right\}$ από τη σχέση (4.8), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} v_{11}^1 &= N\left(s_1\right) f_{11}^1 \\ v_{11}^2 &= N\left(s_1\right) f_{11}^2 + N'\left(s_1\right) f_{11}^1 \end{aligned}$$

$$v_{21}^1 = N\left(s_2\right) f_{21}^1$$

$$\begin{aligned} v_{22}^1 &= N\left(s_2\right) f_{22}^1 \\ v_{22}^2 &= N\left(s_2\right) f_{22}^2 + N'\left(s_2\right) f_{22}^1 \end{aligned}$$

και προκύπτουν τα εξής:

$$\left\{ v_{11}^1 = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_{11}^2 = \begin{bmatrix} -35 \\ 6 \\ -14 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\},\ \left\{ v_{21}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},\ \left\{ v_{22}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_{22}^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Υπολογίζουμε τα ιδιοανύσματα $\left\{ w_{ij}^k \right\}$ από τη σχέση (4.8), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} w_{11}^1 &= D\left(s_1\right) f_{11}^1 \\ w_{11}^2 &= D\left(s_1\right) f_{11}^2 + D'\left(s_1\right) f_{11}^1 \end{aligned}$$

$$w_{21}^1 = D\left(s_2\right) f_{21}^1$$

$$\begin{aligned} w_{22}^1 &= D\left(s_2\right) f_{22}^1 \\ w_{22}^2 &= D\left(s_2\right) f_{22}^2 + D'\left(s_2\right) f_{22}^1 \end{aligned}$$

και προκύπτουν τα εξής:

$$\left\{ w_{11}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}, w_{11}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \right\},\ \left\{ w_{21}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},\ \left\{ w_{22}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_{22}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

<u>Βήμα 5</u>:

Ο πίνακας $V \in \mathbb{R}^{5x5}$ που προκύπτει από την (4.9) είναι της μορφής $V = \begin{bmatrix} v_{11}^1 & v_{11}^2 & v_{21}^1 & v_{22}^1 & v_{22}^2 \end{bmatrix}$ και είναι ο εξής:

$$V = \begin{bmatrix} 9 & -35 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -14 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $W \in \mathbb{R}^{2x5}$ που προκύπτει από την (4.10) είναι της μορφής $W = \begin{bmatrix} w_{11}^1 & w_{11}^2 & w_{21}^1 & w_{22}^1 & w_{22}^2 \end{bmatrix}$ και είναι ο εξής:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 10 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Βήμα 6</u>:

Επομένως είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον πίνακα $K \in \mathbb{R}^{2x5}$ από τη σχέση $K = \left(W + LVJ\right)V^{-1}$ και είναι ο ακόλουθος:

$$K = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το κλειστό σύστημα περιγράφεται από τη σχέση $\underbrace{\left(E + BL\right)}_{E_C} \dot{x} = \underbrace{\left(A + BK\right)}_{A_C} x + Bv$

δηλαδή είναι της μορφής $E_C \dot{x} = A_C x + Bv$ και είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & \frac{11}{2} & \frac{23}{2} & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 8 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v.$$

Οι πόλοι του παραπάνω συστήματος μπορούν να βρεθούν υπολογίζοντας τη Weierstrass μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $sE_C - A_C$ η οποία επαληθεύεται ότι είναι όπως μας ζητήθηκε δηλαδή

$$sI - J = \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}.$$

Οι εντολές στο ***Mathematica*** με τη βοήθεια των οποίων πραγματοποιήθηκαν οι παραπάνω υπολογισμοί είναι οι εξής:

```
<< [illegible]gebra`M[illegible]ipulation[illegible]
me1[illegible], 0, [illegible] 1, [illegible] 0 , [illegible] 1, 0, 1 ,
[illegible] 1, 0 , [illegible] 1
ma1[illegible], 1, [illegible] 0 [illegible] -0 1, 0, 0 ,
[illegible]
mb1 = [illegible]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & [illegible] & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ [illegible] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [illegible] & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ [illegible] & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Rings`
```

nnn = Inverse[s me1 − ma1] Det[s me1 − ma1] // Simplify

$s^2 - s - 1 \quad 2s^4 + 3s^3 - 4s^2 + s + 1$

$$\begin{pmatrix} -s^2 & s^2 - 2s - 1 \\ -s^2 & 2s^3 - s^2 + 2s + 1 \\ -s & s^2 \\ -1 & s \end{pmatrix}$$

ddd = Det[s me1 − ma1] IdentityMatrix[2] // Simplify

$$\begin{pmatrix} -s^3 + s^2 - 2s - 1 & 0 \\ 0 & -s^3 + s^2 - 2s - 1 \end{pmatrix}$$

(επαλήθευση)

(s me1 + ma1).nnn + mb1.ddd // FullSimplify

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L = {{0, 1, 1, 0, 0}, {1, 0, 1, 0, 1}}

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Det[{me1, mb1.L}]

-4

f111 =
f112 =
f211 =
f221 =
f222 =

s1 = -1;
s2 = 0;
v111 = nnn /. s → s1 . f111;
v112 = nnn /. s → s1 . f112 + D[nnn, s] /. s → s1 . f111;
v211 = nnn /. s → s2 . f211;
v221 = nnn /. s → s2 . f221;
v222 = nnn /. s → s2 . f222 + D[nnn, s] /. s → s2 . f221;

V = BlockMatrix[{{v111, v112, v211, v221, v222}}]

$$\begin{pmatrix} 9 & -35 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -14 & -1 & 0 & 0 \\ & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
w111 = dd s ® s1 ;
w112 = dd s ® s1 + dd, ® s1 ;
w211 = dd s ® s2 ;
w221 = dd s ® s2 ;
w222 = dd s ® + dd, ® s2

W = BlockMatrix , w112, w211, w221, w222
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 10 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
J  s1, 1, 0, 0, 0 , 0, s1, 0, 0, 0 , 0, 0, s2, 0, 0 , 0, 0, 0, s2, 1 ,
   0, 0, 0, 0, s2
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
K  W L.V.J Inverse V
```

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

```
clo = s* e1 mb1.L a1 mb1.K Simplify
```

$$\begin{pmatrix} s\ 6 & 2s\ \frac{11}{2} & 2s\ \frac{23}{2} & 4 & 2s \\ s\ 4 & 4 & 8 & s\ 3 & s \\ 1 & 0 & s\ 1 & 0 & s \\ s\ 5 & 3 & 8\ s & s\ 4 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s \end{pmatrix}$$

```
smdc  SmithDecomposition clo, s ;
smdc 1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^2\ s\ 1^2 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση

Ο πίνακας K ο οποίος υπολογίζεται μέσα από τον αλγόριθμο, εξαρτάται από την τυχαία αρχική επιλογή του πίνακα L και των διανυσμάτων $\left\{f_{ij}^{k}\right\}$. Επειδή χρησιμοποιούμε μια συμβολική γλώσσα όπως η Mathematica για την υλοποίηση των αλγορίθμων, είναι δυνατόν να θέσουμε τον πίνακα L και τα διανύσματα $\left\{f_{ij}^{k}\right\}$ να έχουν στοιχεία της γενικής μορφής l_{ij} και f_{ij}^{k} με την προϋπόθεση ο πίνακας V να είναι αντιστρέψιμος. Οι τιμές των l_{ij} και f_{ij}^{k} για τις οποίες ο πίνακας V είναι αντιστρέψιμος μπορούν εύκολα να βρεθούν λύνοντας τη σχέση $\det V \neq 0$. Με τον τρόπο αυτό παράγουμε μια οικογένεια πινάκων K τα στοιχεία της οποίας μπορούν όλα να πραγματοποιήσουν την επιθυμητή επανατοποθέτηση πόλων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το πρόβλημα επανατοποθέτησης πόλων στα γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου είναι στενά συνδεδεμένο με βασικές έννοιες της θεωρίας ελέγχου όπως η ελεγξιμότητα, οι πόλοι και τα μηδενικά του συστήματος κλπ. Σε αυτή τη μελέτη ασχοληθήκαμε με το γενικό πρόβλημα επανατοποθέτησης πόλων κανονικών ιδιαζόντων συστημάτων σε πεπερασμένα σημεία του μιγαδικού επιπέδου μέσω ανάδρασης του διανύσματος της κατάστασης και της παραγώγου του. Περιγράψαμε κάποιους αλγορίθμους έτσι, ώστε να επιτευχθεί η επανατοποθέτηση και ταυτόχρονα παρουσιάσαμε και την υλοποίησή τους σε Mathematica. Επικεντρωθήκαμε στην όσο το δυνατόν πιο ξεκάθαρη περιγραφή των αλγορίθμων αυτών, προσπαθώντας να δώσουμε μια σαφή εικόνα των τελευταίων εξελίξεων σε αυτό το σημαντικό πρόβλημα αυτομάτου ελέγχου. Ταυτόχρονα με τη θεωρητική παρουσίαση των μεθόδων, δώσαμε και αρκετά παραδείγματα, ώστε αυτές να γίνονται εύκολα αντιληπτές.

Όπως τονίσαμε και προηγούμενα, οι μέθοδοι αυτοί έχουν σαν αποτέλεσμα την εξάλειψη των πόλων στο άπειρο και την επανατοποθέτησή τους σε πεπερασμένα σημεία. Εκτός από τους συγκεκριμένους αλγόριθμους υπάρχουν και κάποιοι που κάνουν δυνατή την επανατοποθέτηση πόλων στο άπειρο με συγκεκριμένες πολλαπλότητες. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η [Zag-Kuc-Lois, 1993] όπου αναλύεται ένας γενικότερος αλγόριθμος επανατοποθέτησης πόλων με ανάδραση κατάστασης. Σαν συνέχεια αυτής της εργασίας θα μπορούσε να γίνει μια μελέτη αυτού του αλγορίθμου και η ανάπτυξή του σε μια συμβολική γλώσσα προγραμματισμού όπως η Mathematica.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[Cal-Des, 1982] F. M. Callier and C. A. Desoer, 1982, *Multivariable Feedback Systems,* Dowden & Culver, Inc., Stroudsburg, Pensylvania, U.S.A..

[Chen-Chang, 1993a] H. C. Chen and F. R. Chang, 1993a, *Chained eigenstructure assignment for constraint-ratio proportional and derivative (CRPD) control law in controllable singular systems*, Systems and Control Letters, 21, 405-411.

[Chen-Chang, 1993b] H. C. Chen and F. R. Chang, 1993a, *Chained eigenstructure assignment for strongly controllable singular systems*, *Circuits* Systems and Signal Processing, 12, 391-407.

[Dai, 1989] L. Dai, 1989, *Lecture Notes in Control and Information Sciences,* Springer – Verlag Berlin, Heidelberg.

[Duan, 1996] Guang-Ren Duan, April 1996, *On the Solution to the Sylvester Matrix Equation AV+BW=EVF,* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, NO 4.

[Duan - Patton, 1997] Guang-Ren Duan and Ron J. Patton, 1997, *Eigenstructure assignment in descriptor systems via proportional plus derivative state feedback,* INT. J. Control, Vol. 68, NO 5, 1147-1162.

[Fahmy-O'Reilly, 1982] Mahmoud. M. Fahmy and J. O'Reilly, June 1982, *On Eigenstructure Assignment in Linear Multivariable Systems,* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-27, NO 3.

[Fahmy-O'Reilly, 1983] Mahmoud. M. Fahmy and J. O'Reilly, October 1983, *On*

Eigenstructure Assignment in Linear Multivariable Systems – A Parametric Solution, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-28, NO 10.

[Fletcher, 1988] L. R. Fletcher, *1988, Eigenstructure assignment by output feedback in descriptor systems,* Proceedings of the Institute of Electrical Engineers, Pt D, 135, 302-308.

[Gantmacher, 1959] F. R. Gantmacher, 1959, *The theory of matrices*, Vols. 1, 2, translated by K. A. Hirch, Chelsea Publishing Co., New York.

[Georgiou-Krikelis, 1992] C. Georgiou and N. J. Krikelis, 1992, *Eigenstructure assignment for descriptor systems via state variable feedback,* International Journal of Systems Science, 23, 99-108.

[GLR, 1982] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, 1982, *Matrix polynomials*, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanivich Publishers], New York, Computer Science and Applied Mathematics.

[Lewis-Ozcaldiran, 1989] F. L. Lewis and K. Ozcaldiran, 1989, *Geometric structure and feedback in singular systems,* IEEE Transactions on Automatic Control, 34, 450-455.

[Liu-Patton, 1998] G. P. Liu and R. J. Patton, 1998, *Eigenstructure Assignment for Control System Design,* John Wiley & Sons Ltd., Chichester.

[McF-Karc, 1976] A. G. MacFarlane and N. Karcanias, 1976, *Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex – variable theory*, INT. J. CONTROL, Vol. 24, No 1, 33-74.

[Sakr-Khalifa, 1990] A. F. Sakr and I. Khalifa, 1990, *Eigenstructure* *assignment for descriptor systems by output-feedback compensation,* Systems and Control Letters, 14, 139-144.

[Vardulakis, 1991] A. I. G. Vardulakis, 1991, *Linear Multivariable Control*, Algebraic analysis and synthesis methods, John Wiley & Sons Ltd., Chichester.

[Zag-Kuc-Lois, 1993] P. Zagalak, V. Kucera, J.J. Loiseau, 1993, *EigenStructure Assignment in Linear Systems by State Feedback*, Polynomial Methods in optimal Control and filtering.