ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ "ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΘΕΜΑ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ SMITH-MCMILLAN ΜΟΡΦΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ MATLAB

Μεταπτυχιακός Φοιτητής

ΝΙΚΟΛΑΟΣ Γ. ΠΑΠΑΖΗΣΗΣ

Επιβλέπων: Αντώνιος-Ιωάννης Βαρδουλάκης

Καθηγητής Μαθηματικών Α.Π.Θ

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2014

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ "ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΘΕΜΑ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ SMITH-MCMILLAN ΜΟΡΦΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ MATLAB

Μεταπτυχιακός Φοιτητής

ΝΙΚΟΛΑΟΣ Γ. ΠΑΠΑΖΗΣΗΣ

Επιβλέπων: Αντώνιος-Ιωάννης Βαρδουλάκης

Καθηγητής Μαθηματικών Α.Π.Θ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την

……………………….	……………………….	……………………….
Α. Ι. Βαρδουλάκης	Ν. Καραμπετάκης	Ε. Αντωνίου
Καθηγητής Α.Π.Θ	Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ	Επίκ. Καθηγητής Γεν. Τμήμα Α.Τ.Ε.Ι. Θεσσαλονίκης

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2014

……………………….

ΠΑΠΑΖΗΣΗΣ Γ. ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

Στους γονείς μου,

Γιώργο, Μάρθα

και στα αδέλφια μου,

Ευάγγελο και Ευτυχία.

≪Να μην

προσπαθείς να

γίνεις άνθρωπος

επιτυχίας,

αλλά άνθρωπος

αξίας.≫

Albert Einstein

Πρόλογος

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών στην ειδίκευση “ Θεωρητική Πληροφορική και Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου ” κατά το ακαδημαϊκό έτος 2013-2014 του τμήματος Μαθηματικών Α.Π.Θ. Υπεύθυνος κατά την εκπόνηση της μεταπτυχιακής εργασίας ήταν ο καθηγητής κ. Α. Ι. Βαρδουλάκης, στον οποίο οφείλω ιδιαίτερες ευχαριστίες για την ανάθεσή της και την όλη συμβολή του σε αυτή.

Οφείλω ακόμη να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κ. Ν. Καραμπετάκη και τον κ. Ε. Αντωνίου για το χρόνο που αφιέρωσαν στη μελέτη και αξιολόγηση της εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόκληρη την οικογένειά μου για την αμέριστη συμπαράσταση και οικονομική υποστήριξη καθ’ όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Ήταν οι άνθρωποι που με την αγάπη τους, την υπομονή τους και την διαρκή υποστήριξή τους έκαναν τις δύσκολες στιγμές να μοιάζουν ευκολότερες. Ιδιαίτερα θα ήθελα να αναφερθώ στην μικρή μου αδερφή Ευτυχία, που με ανέχτηκε και ανέχεται όλα αυτά τα χρόνια σπουδών.

Αναμφισβήτητα, ο προγραμματισμός έχει εισχωρήσει στην καθημερινότητά μας καθώς αποτελεί σημαντικό εργαλείο έρευνας και για άλλη μια φορά μας αποδεικνύει την λειτουργικότητα του, την χρησιμότητά του και την αναγκαιότητά του. Μέσω αυτής της εργασίας, μου δόθηκε η ευκαιρία να βάλω και εγώ με την σειρά μου ένα λιθαράκι στο μεγαλειώδες οικοδόμημα που λέγεται Επιστήμη. Η χαρά βέβαια, γίνεται διπλή όταν τελικά μια θεωρία, ένας αλγόριθμος, ‘’τρέξει’’ προγραμματίζοντάς τον και όλα ξάφνου αποκτούν νόημα. Ο χρόνος υπολογισμού πλέον εκμηδενίζεται με την άμεση εμφάνιση των αποτελεσμάτων.

Μου δόθηκε η ευκαιρία στο να κατανοήσω βαθύτερα ότι τελικά με τον προγραμματισμό μπορείς να δημιουργήσεις και να βλέπεις πολυπρισματικά, ότι κάποιες ‘’άψυχες’’ γραμμές κώδικα λαμβάνουν κατά κάποιο τρόπο ‘’σάρκα’’ και ‘’οστά’’ και τελικά να υπάρχει ‘’ζωή’’ σε αυτές.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2014

ΠΑΠΑΖΗΣΗΣ Γ. ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είναι η ανάλυση της Smith-McMillan μορφής στο άπειρο και πιο συγκεκριμένα η ακριβής εύρεσή της, ενός πίνακα πραγματικών ρητών συναρτήσεων. Με τη χρήση κάποιων αναλλοίωτων ρητών συναρτήσεων $f_i(s)$, δηλώνεται ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό της Smith-McMillan μορφής του πολυωνυμικού πίνακα $T(s)$ στο $s=\infty$, $S_{T(s)}^{\infty}$. Η υλοποίηση αυτού του αλγορίθμου έγινε στο ευρέως γνωστό μαθηματικό εργαλείο προγραμματισμού MATLAB.

Στο πρώτο κεφάλαιο, γίνεται μια εισαγωγή σε βασικές μαθηματικές έννοιες όπως ορισμός και χαρακτηριστικά ενός πίνακα, σχέσεις ισοδυναμίας, αναλλοίωτες και πλήρεις αναλλοίωτες μορφές αυτών. Επίσης γίνεται αναφορά σε κανονικές απεικονίσεις, κανονικές μορφές και μια εισαγωγή στους δακτυλίους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, παραθέτονται ο ορισμός ενός πολυωνυμικού πίνακα καθώς και τα χαρακτηριστικά του, όπως βαθμός, βαθμίδα (rank) ενός πολυωνυμικού πίνακα, unimodular πίνακας και ρητός πολυωνυμικός πίνακας. Επιπρόσθετα, ορίζεται η γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία ρητών πολυωνυμικών πινάκων αλλά και η πολυπλοκότητα γραμμών ή στηλών ενός πολυωνυμικού πίνακα.

Στο τρίτο κεφάλαιο, γίνεται αναφορά στις έννοιες των proper και non-proper rational functions, των strictly proper rational functions και των biproper rational functions. Επιπλέον, ορίζεται η απεικόνιση $\delta_{\infty}(.)$ και κάποιες αξιοσημείωτες ιδιότητές της. Παράλληλα, γίνεται μια σύντομη αναφορά στην ισοδυναμία πινάκων καθώς και στην κλάση αυτών. Τέλος, παρουσιάζεται το βασικό Θεώρημα και η απόδειξή του, μέσα στο οποίο ορίζονται κάποιες ρητές συναρτήσεις $f_i(s)$, οι οποίες στοιχειώνουν έναν αλγόριθμο υπολογισμού της Smith-McMillan μορφής στο άπειρο.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και επεξηγούνται τα βήματα του αλγορίθμου για να είναι πιο κατανοητό στον αναγνώστη.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, αναλύονται διεξοδικά και εξηγούνται με λεπτομερή τρόπο μέσω παραδειγμάτων, οι εντολές και οι συναρτήσεις που χρειάστηκαν στην αποκρυστάλλωση του κώδικα.

Στο έκτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται ολόκληρος ο κώδικας σε περιβάλλον του MATLAB. Αξίζει να σημειωθεί ότι, μέσα στον κύριο κορμό του κώδικα έχουμε δημιουργήσει συναρτήσεις που λέγονται function m-files, οι οποίες εκτελούν συγκεκριμένους υπολογισμούς και όταν τις καλούμε στο κύριο μέρος του κώδικα, ενσωματώνονται αυτόματα τα αποτελέσματά τους σ΄αυτόν και έτσι, ελαττώνεται ακόμα περισσότερο ο υπολογιστικός χρόνος στην εξέλιξη της ροής του κώδικα.

Στο έβδομο κεφάλαιο, εκτελείται ο κώδικας σε πληθώρα παραδειγμάτων ρητών (και μη) πολυωνυμικών τετραγωνικών αλλά και μη τετραγωνικών πινάκων που συντελεί στην εύρεση της Smith-McMillan μορφής στο άπειρο.

Τέλος, στο όγδοο κεφάλαιο, παραθέτουμε έναν οδηγό χρήσης για την εκτέλεση του κώδικα στο MATLAB.

ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ

Smith-McMillan Μορφή, Άπειρο, Ρητοί Πολυωνυμικοί Πίνακες, Βαθμός Πολυωνυμικού Πίνακα, Unimodular Πίνακας, Αναλλοίωτη, Πλήρης Αναλλοίωτη, Κανονική Απεικόνιση, Proper Rational Function, Non-proper Rational Function, Strictly Proper Rational Function, Biproper Rational Function, Πόλοι, Μηδενικά.

ABSTRACT

The purpose of this thesis is the analysis of the Smith-McMillan form at infinity and more specifically its exact calculation, of an array of real rational functions. By using some invariant rational functions $f_i(s)$, an algorithm is declared for the calculation of the Smith-McMillan form of the polynomial matrix $T(s)$ in $s = \infty$, $S^{\infty}_{T(s)}$. The implementation of this algorithm is done using the widely known mathematical programming tool Matlab.

In the first chapter, there is an introduction to the basic mathematical concepts such as, the definition and characteristics of a matrix, equivalence relations, invariants and complete invariant forms. Also, there is a reference to normal representations, canonical forms and an introduction to rings.

In the second chapter, the definition of a polynomial matrix and its characteristics is given, such as the degree, rank of a polynomial matrix, unimodular matrix and polynomial rational matrix. Additionally, the linear dependence and independence of polynomial matrices and the complexity of rows or columns of a polynomial matrix are defined as well.

In the third chapter, a reference to the concepts of proper and non-proper rational functions, the strictly proper rational functions and the biproper rational functions is denoted. We also, define the map $\delta_{\infty}(.)$ and some of its remarkable properties. Also, there is a brief reference to the equivalence matrices as well as to their class. Finally, we declare and establish the main theorem, in which some rational functions $f_i(s)$ are defined and constitute an algorithm for calculating the Smith-McMillan form at infinity.

In the fourth section, the steps of the algorithm are being presented and explained in for them order to be made understood to the reader.

In the fifth chapter, the commands and the functions that were utilized to crystallize the code into the final form are thoroughly analyzed and explained in a detailed way by examples.

In the sixth chapter, the whole code is presented in the MATLAB environment. It is worth mentioning that, within the main body of code we have constructed some functions that are called m-file functions, which perform specific calculations and whenever we call them to the main part of the code, their results

are incorporated automatically. Thus, the computational time required for the execution of the code decreases even further.

In the seventh chapter, the code has been executed in numerous examples of rational (and non) polynomial square and non-square matrices which contributes in finding the Smith-McMillan form at infinity.

Finally, in the eighth chapter, we present a guide of the code in MATLAB for its implementation.

KEYWORDS

Smith-McMillan Form, Infinity, Rational Polynomial Matrices, Matrix Polynomial Degree, Unimodular Matrix, Invariant, Complete Invariant, Canonical Map, Proper Rational Function, Non-proper Rational Function, Strictly Proper Rational Function, Biproper Rational Function, Poles, Zeros.

Πίνακας περιεχομένων

Πρόλογος *7*

Περίληψη *9*

1. Βασικές Έννοιες *15*

1.1 Ορισμός Πίνακα [1] 15

1.2 Ορίζουσα Πίνακα [1,2] 15

1.3 Βαθμίδα ενός πίνακα [1] 17

1.4 Σχέσεις ισοδυναμίας (Equivalence relations) [3,4,7] 18

1.5 Αναλλοίωτες της $\mathcal{R}$ [3] 21

1.6 Πλήρεις αναλλοίωτες της $\mathcal{R}$ [3] 21

1.7 Κανονικές απεικονίσεις και κανονικές μορφές [3] 21

1.8 Εισαγωγή στους δακτυλίους [5] 22

2. Πολυώνυμα και πολυωνυμικοί πίνακες *25*

2.1 Ο Ευκλείδειος δακτύλιος των πολυωνύμων [6] 25

2.2 Βαθμός πολυωνυμικού πίνακα [6] 27

2.3 Ρητοί πολυωνυμικοί πίνακες [6] 29

2.4 Γραμμική εξάρτηση k στοιχείων [6] 30

3. Κατασκευή της Smith-McMillan μορφής στο σημείο $s = \infty$, ενός πίνακα πραγματικών ρητών συναρτήσεων και εύρεση της δομής των πόλων και των μηδενικών *35*

3.1 Εισαγωγή [7] 35

3.2 Διακριτές εκτιμήσεις Πόλων-Μηδενικών ρητών συναρτήσεων στο άπειρο [7] 36

3.3 Ισοδυναμία ρητών πινάκων στο άπειρο [7,13] 38

4. Βήματα του αλγορίθμου *43*

5. Εξήγηση κώδικα *44*

6. Ο κώδικας στο MATLAB *62*

7. Παραδείγματα πινάκων πραγματικών ρητών συναρτήσεων, υπολογίζοντας την Smith-McMillan μορφή στο άπειρο τρέχοντας τον κώδικα στο MATLAB *64*

8. Οδηγός χρήσης για την εκτέλεση του κώδικα στο MATLAB..................**67**

Βιβλιογραφία..**69**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Βασικές Έννοιες

1.1 Ορισμός Πίνακα [1]

Ένας ***πίνακας*** A είναι μια ορθογώνια διάταξη από στοιχεία a_{ij} $(i = 1,2,\dots,n, j = 1,2,\dots,m)$ ενός σώματος F, δηλ.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Λέμε ότι ο παραπάνω πίνακας είναι διάστασης $n \times m$, ή τύπου $n \times m$, δηλαδή έχει n γραμμές και m στήλες. Συμβολίζουμε με $M_{n,m}(F)$ το σύνολο των $n \times m$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα F. Το σύνολο $M_{n,m}(F)$ το γράφουμε συντετμημένα ως $M_n(F)$. Ειδικότερα, θα συμβολίζουμε με M_n το $M_{n,n}(\mathbb{C})$, όπου $\mathbb{C}$ το σώμα των μιγαδικών αριθμών.

1.2 Ορίζουσα Πίνακα [1,2]

Αν $A \in M_n$ θα συμβολίζουμε με $\det(A_{ij})$ την ***ορίζουσα*** του πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την i γραμμή και την j στήλη του. Έχουμε ότι,

$$\det(A) = \sum_j (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \,.$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται ανάπτυγμα της ορίζουσας A κατά την i-γραμμή. Ο αριθμός $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ ονομάζεται ***συμπαράγοντας (cofactor)*** του στοιχείου α_{ij}.

Εάν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ τότε ορίζουμε την ορίζουσα του πίνακα ως τον αριθμό

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Συμβολίζουμε την ορίζουσα του πίνακα και ως $|A|$.

Αν $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ τότε η ορίζουσα του πίνακα ισούται με,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\det\left(\mathrm{M}_{11}\right) - a_{12}\det\left(\mathrm{M}_{12}\right) + a_{13}\det\left(\mathrm{M}_{13}\right)$$

Για το στοιχείο a_{ij} η M_{ij} ***(ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου)*** είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει, αν από τον A αφαιρέσουμε την i γραμμή και την j στήλη.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα 1.2.1

Εάν$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 15 + 150$$
$$= 165$$

Εδώ αναπτύξαμε την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή. Θα μπορούσαμε να την αναπτύξουμε ως προς οποιαδήποτε άλλη γραμμή ή στήλη. Με παρόμοιο τρόπο αναπτύσσουμε τις ορίζουσες πινάκων 4×4 χρησιμοποιώντας τις ελάσσονες ορίζουσες τους (που είναι ορίζουσες 3×3) αλλά και τις ορίζουσες τετραγωνικών πινάκων μεγαλύτερης διάστασης.

- Μια αξιοσημείωτη ιδιότητα της ορίζουσας ενός πίνακα είναι η ακόλουθη: Αν ο πίνακας έχει δύο γραμμές ή (στήλες) ίδιες ή ανάλογες (δηλαδή, ένα προς ένα τα στοιχεία της μίας προς τα στοιχεία της άλλης δίνουν ως πηλίκο τον ίδιο αριθμό ή ισοδύναμα, η μία είναι πολλαπλάσιο της άλλης) δηλαδή είναι ***γραμμικά εξαρτημένες***, τότε $det(A) = 0$. Σε αντίθετη περίπτωση είναι ***γραμμικά ανεξάρτητες.***

1.3 Βαθμίδα ενός πίνακα [1]

Ορισμός 1.3.1

Βαθμίδα $(rank)$ ενός πίνακα A ονομάζεται ο μέγιστος αριθμός των ***γραμμικά ανεξάρτητων*** γραμμών ή στηλών του πίνακα. Αν $rank(A) = k$, όπου $k \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει ένας $k \times k$ υπό-πίνακας του A με μη μηδενική ορίζουσα και όλοι οι υπό-πίνακες του A με διάσταση μεγαλύτερη του k έχουν μηδενική ορίζουσα.

Παράδειγμα 1.3.2

- Εάν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

Παρατηρούμε ότι στον παραπάνω 3×3 πίνακα και οι γραμμές και οι στήλες είναι ***γραμμικά ανεξάρτητες*** μεταξύ τους καθώς $\det(A) = 8 \neq 0$.Συνεπώς $rank(B) = 3$.

- Εάν $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

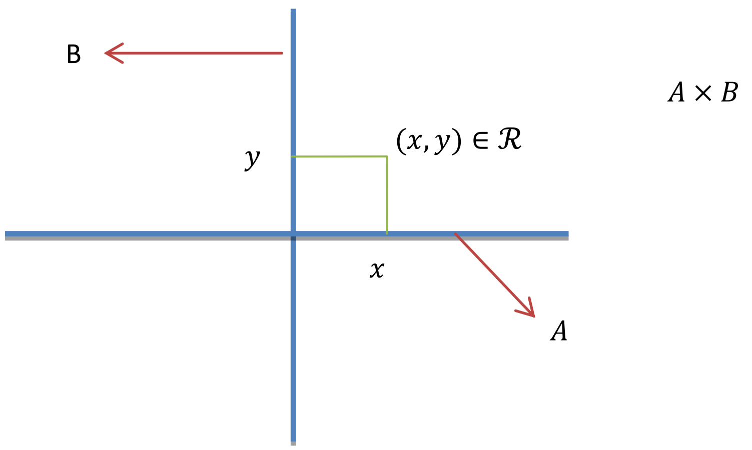
Στον πίνακα B οι δύο πρώτες στήλες του είναι ***γραμμικά εξαρτημένες*** καθώς η μία είναι πολλαπλάσια της άλλης, η $det(B)$ είναι μηδέν. Συνεπώς $rank(B) = 2 \neq 3$ γιατί η πρώτη και η τρίτη στήλη του πίνακα είναι ***γραμμικά ανεξάρτητες***.

1.4 Σχέσεις ισοδυναμίας (Equivalence relations) [3,4,7]

Ορισμός 1.4.1

Σχέση. Έστω A, B δύο αυθαίρετα σύνολα.

Ένα υποσύνολο $\mathcal{R}$ του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$ ονομάζεται ***σχέση*** από το A στο B.



Σχήμα 1.4.1 Σημείο στο χώρο
$A \times B$

- Αν $A = B$ τότε το $\mathcal{R}$ ονομάζεται ***σχέση*** επάνω στο A.
- Αν $x \in A, y \in B$ και $(x, y) \in \mathcal{R}$ τότε λέμε ότι:

το x ***σχετίζεται με το*** y μέσω του (της) $\mathcal{R}$ ή ότι $\mathcal{R}$ είναι η σχέση μεταξύ $x \in A$ *και* $y \in B$ ή ότι το $x \in A$ ***σχετίζεται με το*** $y \in B$ μέσω της $\mathcal{R}$.

- Το ***πεδίο ορισμού*** της $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο:

$$\{x \in A/(x,y) \in R\}$$

- Το ***πεδίο τιμών*** της $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο:

$$\{y \in B/(x,y) \in R\}$$

Ορισμός 1.4.2

Μια ***σχέση*** $\mathcal{R}$ πάνω σε ένα σύνολο A, δηλαδή ένα υποσύνολο $\mathcal{R}$ του καρτεσιανού γινομένου $A \times A$ ονομάζεται ***σχέση ισοδυναμίας*** αν και μόνο αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- ***Ανακλαστική ιδιότητα:*** για κάθε $x \in A$ έχουμε $(x,x) \in \mathcal{R}$
  Δηλαδή κάθε στοιχείο $x \in A$ είναι ισοδύναμο με τον εαυτό του.
- ***Συμμετρική ιδιότητα:*** $(x,y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$
  Δηλαδή το $x \in A$ είναι ισοδύναμο με το $y \in B$ συνεπάγεται ότι το $y \in B$ είναι ισοδύναμο με το $x \in A$.
- ***Μεταβατική ιδιότητα:*** $(x,y) \in \mathcal{R}$ *και* $(y,z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x,z) \in \mathcal{R}$
  Δηλαδή αν το στοιχείο $x \in A$ είναι ισοδύναμο με το $y \in B$ και το στοιχείο $y \in B$ είναι ισοδύναμο με το $z \in Z$ τότε και το στοιχείο $x \in A$ είναι ισοδύναμο με το $z \in Z$.

Πολλές φορές αντί $(x,y) \in \mathcal{R}$ γράφουμε $x \sim_{\mathcal{R}} y$. Αν $\mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας επάνω στο A τότε η $\mathcal{R}$ διαμελίζει το A σε ***ξεχωριστές κλάσεις*** ή ***$\mathcal{R}$-κλάσεις ισοδυναμίας***.

Πιο συγκεκριμένα, οι κλάσεις των διαφόρων στοιχείων του A (για τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$), είναι μη-κενά υποσύνολα του A που η ένωση τους καλύπτει ολόκληρο το A, ενώ δύο διαφορετικές κλάσεις δεν τέμνονται. Κατά συνέπεια αποτελούν ένα ***διαμελισμό*** του συνόλου A.

Πρόταση 1.4.3

Κάθε σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ πάνω σε ένα σύνολο A, ορίζει ένα διαμελισμό του A αλλά και αντίστροφα, κάθε διαμελισμός του A προέρχεται από μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στο A.

- ✓ Για κάθε $x \in A$ ή $\mathcal{R}$-***κλάση ισοδυναμίας*** του x είναι το σύνολο:

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{x \in A/(x,y) \in R\} = \{x \in A/x \sim_{\mathcal{R}} y\} \subset A$$

Δηλαδή, αν $x \in A$ τότε η $\mathcal{R}$-***κλάση ισοδυναμίας*** του x στην οποία το x ανήκει, αποτελείται από όλα τα στοιχεία $y \in A$ με τα οποία το x είναι ισοδύναμο μέσω της $\mathcal{R}$.

- ✓ Για κάθε σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ επάνω σε ένα σύνολο A ισχύει ότι:

Αν δύο κλάσεις ισοδυναμίας συναντώνται τότε συμπίπτουν, δηλαδή

$$[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset \Rightarrow [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$$

ή γράφεται αλλιώτικα

$$[x]_{\mathcal{R}} \neq [y]_{\mathcal{R}} \Rightarrow [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset$$

δηλαδή δύο διαφορετικές κλάσεις είναι ξένες μεταξύ τους.

Πρόταση 1.4.4

Αν $\mathcal{R}$ είναι μία ισοδυναμία πάνω σε ένα σύνολο A, τότε

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$$

ή ισοδύναμα,

$$[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset \text{ αν και μόνο αν } x \nsim_{\mathcal{R}} y.$$

1.5 Αναλλοίωτες της $\mathcal{R}$ [3]

Ορισμός 1.5.1

Αν Τ κάποιο σύνολο τότε μια απεικόνιση $f: A \to \mathrm{T}$ ονομάζεται ***αναλλοίωτη*** της $\mathcal{R}$ αν,

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

δηλαδή, η απεικόνιση $f: A \to \mathrm{T}$ είναι αναλλοίωτη της $\mathcal{R}$ αν όλα τα y στην κλάση ισοδυναμίας $[x]_{\mathcal{R}}$ έχουν την ίδια εικόνα κάτω από την f, αν δηλαδή $f(x) = f(y)$.

Οι εικόνες $f(x), f(y)$ ονομάζονται αναλλοίωτες της $\mathcal{R}$.

1.6 Πλήρεις αναλλοίωτες της $\mathcal{R}$ [3]

Ορισμός 1.6.1

Αν Τ κάποιο σύνολο τότε μια απεικόνιση $f: A \to \mathrm{T}$ ονομάζεται ***πλήρης αναλλοίωτη*** της $\mathcal{R}$ αν,

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Οι εικόνες $f(x), f(y)$ ονομάζονται πλήρης αναλλοίωτες της $\mathcal{R}$.

1.7 Κανονικές απεικονίσεις και κανονικές μορφές [3]

Ορισμός 1.7.1

Μια απεικόνιση

$$g: A \to A$$

ονομάζεται ***κανονική απεικόνιση*** για μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ επάνω στο σύνολο A όταν:

1. $x \sim_{\mathcal{R}} g(x) \quad \forall x \in A$
2. $x \sim_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow g(x) = g(y)$

Αν $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επάνω σε ένα σύνολο A και $g: A \to A$ είναι μια ***κανονική απεικόνιση***, τότε την εικόνα $g(x) \in A$ ενός στοιχείου $x \in A$ ονομάζουμε ***κανονική μορφή*** του $x \in A$. Το σύνολο των εικόνων $g(x)$ για κάθε $x \in A$, το οποίο συμβολίζουμε $Im\, g$, ονομάζουμε σύνολο ***κανονικών μορφών*** της $\mathcal{R}$ επάνω στο σύνολο A ή σύνολο $\mathcal{R}$-κανονικών μορφών.

1.8 Εισαγωγή στους δακτυλίους [5]

Ορισμός 1.8.1

Δακτύλιος, είναι ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{R}$ με δύο πράξεις, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, οι οποίες ικανοποιούν τα αξιώματα:

Δ_1: $a + (b + c) = (a + b) + c$,

Δ_2: υπάρχει 0 στο $\mathcal{R}$ τέτοιο ώστε $a + 0 = a = 0 + a$,

Δ_3: για κάθε $a \in \mathcal{R}$ υπάρχει $-a \in \mathcal{R}$ έτσι ώστε $a + (-a) = 0 = (-a) + (a)$,

Δ_4: $a + b = b + a$,

Δ_5: $a(bc) = (ab)c$,

Δ_6: $a(b + c) = ab + ac$ *και* $(a + b)c = ac + bc$,

Για όλα τα στοιχεία $a, b, c \in \mathcal{R}$.

Αν επιπλέον ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή αν ισχύει $ab = ba$, για κάθε $a, b \in \mathcal{R}$, τότε ο ***δακτύλιος*** $\mathcal{R}$ λέγεται ***αντιμεταθετικός***.

Επίσης, αν ο δακτύλιος $\mathcal{R}$ περιέχει μοναδιαίο στοιχείο για τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή, αν υπάρχει ένα στοιχείο $1 \in \mathcal{R}$, τέτοιο ώστε, να ισχύει $a * 1 = a = 1 * a$, για κάθε $a \in \mathcal{R}$, τότε ο δακτύλιος $\mathcal{R}$ λέγεται ***δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο***. Αν σε κάποιο δακτύλιο ικανοποιείται μόνον η ισότητα $1 * a = a$

για όλα τα στοιχεία a, τότε μιλάμε για ***αριστερό μοναδιαίο*** στοιχείο. Ανάλογα, αν ισχύει μόνον η σχέση $a * 1 = a$ για όλα τα στοιχεία a, τότε έχουμε ***δεξιό μοναδιαίο*** στοιχείο.

Οι ιδιότητες $\Delta_1 - \Delta_4$ δείχνουν απλά ότι το σύνολο $\mathcal{R}$ είναι μια ***προσθετική αντιμεταθετική ομάδα***. Την ομάδα αυτή ονομάζουμε ***προσθετική ομάδα του δακτυλίου*** $\mathcal{R}$.

Ορισμός 1.8.2

Ένα στοιχείο a ενός δακτυλίου $\mathcal{R}$ θα λέγεται ***διαιρέτης του μηδενός***, αν υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο $b \in \mathcal{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $a * b = 0$, ή μη μηδενικό στοιχείο $c \in \mathcal{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $c * a = 0$.

Ορισμός 1.8.3

Ένας δακτύλιος $\mathcal{R}$ ***<u>δεν έχει διαιρέτες του μηδενός</u>*** αν και μόνον αν οι νόμοι απαλοιφής ως προς τον πολλαπλασιασμό ισχύουν στον $\mathcal{R}$, δηλαδή για κάθε $a, b, c \in \mathcal{R}$ με $a \neq 0$ ισχύουν:

- $a * b = a * c \; και \; a \neq 0 \Rightarrow b = c$ ή $b * a = c * a \; και \; a \neq 0 \Rightarrow b = c$

Ορισμός 1.8.4

Ακεραία περιοχή, είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος, με μοναδιαίο στοιχείο και χωρίς διαιρέτες του μηδενός.

Παράδειγμα 1.8.5

Ένα τυπικό παράδειγμα ακεραίας περιοχής είναι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών. Αντίθετα ο αντιμεταθετικός δακτύλιος $2\mathbb{Z}$ ενώ δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, δεν είναι ακεραία περιοχή, γιατί στερείται μοναδιαίου στοιχείου ($1 \notin 2\mathbb{Z}$). Επίσης, ο αντιμεταθετικός δακτύλιος $\mathbb{Z}_6$, ενώ έχει μοναδιαίο στοιχείο, δεν είναι ακεραία περιοχή γιατί ισχύει η σχέση $\bar{2} * \bar{3} = \bar{0}$, δηλαδή ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_6$ έχει διαιρέτες του μηδενός.

Ορισμός 1.8.6

Ένα στοιχείο a ενός δακτυλίου $\mathcal{R}$ με μοναδιαίο στοιχείο λέγεται ***αντιστρέψιμο*** ή ***μονάδα***, αν υπάρχει στοιχείο b του $\mathcal{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει, $a * b = 1 = b * a$. Το στοιχείο b λέγεται ***αντίστροφο*** του a και συμβολίζεται με a^{-1}.

Ένα αντιστρέψιμο στοιχείο δεν είναι ποτέ διαιρέτης του μηδενός. Πράγματι, αν a είναι αντιστρέψιμο και υπάρχει στοιχείο $x \neq 0$ ώστε να ισχύει $a * x = 0$, τότε θα έχουμε $x = a^{-1}(a * x) = a^{-1} * 0 = 0$, άτοπο.

Ορισμός 1.8.7

Ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο λέγεται ***δακτύλιος με διαίρεση***, αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του είναι ***αντιστρέψιμο***. Ειδικότερα, ένας ***αντιμεταθετικός δακτύλιος με διαίρεση λέγεται σώμα***.

Από τον ορισμό του σώματος προκύπτει ότι κάθε σώμα $\mathcal{R}$ περιέχει δύο τουλάχιστο στοιχεία, το μηδενικό στοιχείο 0, που πρέπει να υπάρχει στην προσθετική ομάδα του δακτυλίου $\mathcal{R}$ και το μοναδιαίο στοιχείο 1, που πρέπει να υπάρχει στο δακτύλιο με διαίρεση $\mathcal{R}$.

Ορισμός 1.8.8

Ευκλείδιος δακτύλιος είναι μια ακεραία περιοχή $\mathcal{R}$, εφοδιασμένη με μια συνάρτηση $\varphi: \mathcal{R} - \{0\} \to \mathbb{N}$, τέτοια ώστε να ισχύουν:

i. $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$, για οποιαδήποτε μη μηδενικά στοιχεία $a, b \in \mathcal{R}$ και

ii. για κάθε $a \in \mathcal{R}$ και κάθε $b \in \mathcal{R} - \{0\}$ υπάρχουν στοιχεία π και υ του δακτυλίου $\mathcal{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $a = b\pi + \upsilon$, όπου $\upsilon = 0$ ή $\varphi(\upsilon) < \varphi(b)$.

Παράδειγμα 1.8.9

Είναι προφανές ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι ένας Ευκλείδειος δακτύλιος. Στο δακτύλιο $\mathbb{Z}$ μπορούμε να ορίσουμε σαν Ευκλείδεια συνάρτηση τη $\varphi(a) = |a|$, για κάθε μη μηδενικό $a \in \mathbb{Z}$. Μπορούμε, επίσης, να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(a) = |a|^n$, για κάποιο θετικό ακέραιο n.

Έστω F τυχόν σώμα. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi: F \rightarrow \mathbb{N}$, με τη σχέση $\varphi(a) = 1$, για κάθε $a \in F - \{0\}$. Τότε θα έχουμε , προφανώς, τη σχέση $\varphi(ab) = 1 \geq 1 = \varphi(a)$, για κάθε $a, b \in F$. Επίσης, για οποιοδήποτε $a \in F$ και κάθε $b \in F - \{0\}$, θα υπάρχουν τα στοιχεία $\pi = b^{-1}a \in F$ και $\upsilon = 0$ τέτοια ώστε να ισχύει $a = b\pi + \upsilon$. Άρα ***κάθε σώμα είναι ένας Ευκλείδειος δακτύλιος***.

2. Πολυώνυμα και πολυωνυμικοί πίνακες

2.1 Ο Ευκλείδειος δακτύλιος των πολυωνύμων [6]

Έστω $\mathbb{R}$ το σώμα των πραγματικών αριθμών. Έστω $\mathbb{R}[s]$ το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και ανεξάρτητη μεταβλητή το s. Το $\mathbb{R}[s]$ εφοδιασμένο με τις πράξεις :

- Πρόσθεση $+ : \ \mathbb{R}[s] \times \mathbb{R}[s] \rightarrow \mathbb{R}[s]$
- Πολλαπλασιασμό $*: \ \mathbb{R}[s] \times \mathbb{R}[s] \rightarrow \mathbb{R}[s]$

είναι ***δακτύλιος (ring)***.

Το $\mathbb{R}[s]$ είναι ***Ευκλείδειος δακτύλιος (Euclidean ring)***

Δηλαδή, υπάρχει μια συνάρτηση,

$$\partial: \mathbb{R}[s] \rightarrow \mathbb{N}$$

$(\mathbb{N} = \mu\eta\ \alpha\rho\nu\eta\tau\iota\kappa o\acute{\iota}\ \alpha\kappa\acute{\varepsilon}\rho\alpha\iota o\iota : 0,1,2, \dots)$

Τέτοια ώστε για κάθε $a(s) \in \mathbb{R}[s], a(s) \neq 0$ γράφουμε :

$$\partial a(s) = deg\, a(s) \in \mathbb{N}$$

και το ονομάζουμε ***βαθμό (degree)*** του $a(s)$ και για κάθε:

i. $a(s), b(s) \in \mathbb{R}[s]$, έτσι ώστε $a(s)b(s) \neq 0$, $deg[\,a(s)b(s)] \geq dega(s)$

ii. $a(s), b(s) \in \mathbb{R}[s], b(s) \neq 0$, υπάρχουν δύο στοιχεία $q(s), r(s) \in \mathbb{R}[s]$ έτσι ώστε $a(s) = b(s)q(s) + r(s)$ και ή $r(s) = 0$ ή $deg\ r(s) < deg\, b(s)$.

- Ένας $p \times q$ πολυωνυμικός πίνακας $A(s)$ είναι ένας $p \times q$ πίνακας τα στοιχεία του οποίου είναι πολυώνυμα.
- Κάθε πολυωνυμικός πίνακας $A(s)$ γράφεται σαν πολυώνυμο πινάκων, δηλαδή,

$$A(s) = A_q s^q + A_{q-1} s^{q-1} + \cdots + A_1 s + A_0$$

Το σύνολο των $p \times q$ πολυωνυμικών πινάκων το συμβολίζουμε με $\mathbb{R}[s]^{p \times q}$.

Παράδειγμα 2.1.1

Έστω ο ακόλουθος πολυωνυμικός πίνακας

$$A(s) = \begin{bmatrix} -2s^3 + 3s^2 & s^2 - 2 \\ 3s^3 + s & 2s^2 + s \\ 2s + 2 & -s^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} s^3 + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\in \mathbb{R}[s]^{3 \times 2}$$

Πόρισμα 2.1.2

Αν $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ και $\det T(s) \neq 0$ τότε ο αντίστροφος του $T(s)$ δεν είναι πάντα πολυωνυμικός.

- Αν

$$|T(s)| = c \in \mathbb{R}, c \neq 0$$

Τότε ο αντίστροφος θα είναι:

$$T(s)^{-1} = \frac{1}{|T(s)|} Adj\, T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$$

2.2 Βαθμός πολυωνυμικού πίνακα [6]

Ορισμός 2.2.1

Βαθμός (*degree*) ενός πολυωνυμικού πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$, $\deg T(s)$, είναι ο μέγιστος βαθμός όλων των μέγιστης τάξης (μη μηδενικών) υπό-οριζουσών του $T(s)$.

Παράδειγμα 2.2.2

Αν $T(s) = \begin{bmatrix} 1 & s+2 \\ s^2+1 & 0 \\ s & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{3\times 2}$

Παίρνουμε όλες τις 2×2 υπό-ορίζουσες δηλαδή,

$$m_{12}(s) = \begin{vmatrix} 1 & s+2 \\ s^2+1 & 0 \end{vmatrix} = -s^3 - 2s^2 - s - 2,$$

$$m_{13}(s) = \begin{vmatrix} 1 & s+2 \\ s & 2 \end{vmatrix} = -s^2 - 2s + 2,$$

$$m_{23}(s) = \begin{vmatrix} s^2+1 & 0 \\ s & 2 \end{vmatrix} = 2s^2 + 2$$

Από όπου βρίσκουμε τον βαθμό του πολυωνυμικού πίνακα $T(s)$ δηλαδή,

$$\deg T(s) = \max\{3,2,2\} = 3$$

Πόρισμα 2.2.3

Αν $T(s)$ είναι τετράγωνος δηλαδή, $p=q$ και $\det \mathrm{T(s)} \neq 0$ τότε: $\deg T(s) = \deg[\det(T(s))]$.

Παράδειγμα 2.2.4

Αν $T(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 2s^3-1 \\ -s & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2\times 2}$

$\deg T(s) = \deg\left[\det\left(T(s)\right)\right] = \deg(2s^4 - s) = 4$

Ορισμός 2.2.5

Ένας (τετράγωνος) πολυωνυμικός πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ονομάζεται $\mathbb{R}[s]$ −***unimodular*** ή απλώς ***unimodular*** αν υπάρχει πολυωνυμικός πίνακας $\hat{T}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ τέτοιος ώστε:

$$T(s)\hat{T}(s) = I_p \Leftrightarrow |T(s)| = c \in \mathbb{R}, c \neq 0.$$

Παράδειγμα 2.2.6

Αν $T(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2\times 2}$,

$|T(s)| = -6$ είναι ***unimodular***.

Πόρισμα 2.2.7

Αν $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ είναι ***unimodular*** αν-ν $\deg T(s) = 0$.

Πόρισμα 2.2.8

Αν $p=1$ ή $q=1$ αν δηλαδή, ο πίνακας είναι πολυωνυμικό άνυσμα γραμμής ή στήλης,

$$t(s) = \begin{bmatrix} t_1(s) & t_2(s) & \dots & t_q(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{1\times q}$$

$$\deg t(s) = \max_{i=1,2,\dots,q} \{t_i(s)\}$$

$$t(s) = \begin{bmatrix} t_1(s) \\ t_2(s) \\ \vdots \\ t_p(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^p$$

$$\deg t(s) = \max_{i=1,2,\dots,p} \{t_i(s)\}$$

Παράδειγμα 2.2.9

Αν $t(s) = \begin{bmatrix} 2s^3 - s + 1 \\ s - 2 \\ s^2 \\ s^4 - 3s - 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{4\times 1}, \deg t(s) = \max\{3,1,2,4\} = 4.$

2.3 Ρητοί πολυωνυμικοί πίνακες [6]

- Το σώμα τον πραγματικών ρητών συναρτήσεων είναι το σύνολο:

$$\mathbb{R}(s) = \left\{ t(s) / t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s], d(s) \neq 0 \right\}$$

- Το σύνολο $\mathbb{R}(s)^p$ των διατεταγμένων p-άδων ρητών συναρτήσεων (ανύσματα στήλης) είναι το σύνολο:

$$\mathbb{R}(s)^p = \left\{ t(s) / t(s) = \begin{bmatrix} t_1(s) \\ t_2(s) \\ \vdots \\ t_p(s) \end{bmatrix}, t_i(s) \in \mathbb{R}(s) \right\}$$

και αποτελεί γραμμικό ανυσματικό χώρο με πρόσθεση δύο στοιχείων:

$$t(s)=\begin{bmatrix} t_1(s) \\ t_2(s) \\ \vdots \\ t_p(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^p, u(s)=\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_p(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^p$$

την

$$t(s)+u(s)=\begin{bmatrix} t_1(s)+u_1(s) \\ t_2(s)+u_2(s) \\ \vdots \\ t_p(s)+u_p(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^p$$

και πολλαπλασιασμό ενός στοιχείου:

$$t(s)=\begin{bmatrix} t_1(s) \\ t_2(s) \\ \vdots \\ t_p(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^p$$

με ένα στοιχείο $q(s) \in \mathbb{R}(s)$ (ρητή συνάρτηση) την

$$q(s)t(s)=\begin{bmatrix} q(s)t_1(s) \\ q(s)t_2(s) \\ \vdots \\ q(s)t_p(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^p$$

- ✓ Ο $\mathbb{R}(s)^p$ ονομάζεται ***πραγματικός ανυσματικός χώρος ρητών συναρτήσεων (real rational vector space).***
- ✓ Τα στοιχεία $t(s) \in \mathbb{R}(s)^p$ ονομάζονται ***ανύσματα πραγματικών ρητών συναρτήσεων.***

2.4 Γραμμική εξάρτηση *k* στοιχείων [6]

Ορισμός 2.4.1

Αν $t_i(s) \in \mathbb{R}(s)^p, i=1,2,\dots,k$

k στοιχεία $t_i(s) \in \mathbb{R}(s)^p, i = 1,2,\ldots,k$ είναι $\mathbb{R}(s)$-***<u>γραμμικώς εξαρτημένα</u>*** αν υπάρχουν k ρητές συναρτήσεις $a_1(s), a_2(s), \ldots, a_k(s) \in \mathbb{R}(s)$ (με $a_i(s) \neq 0$ για τουλάχιστο ένα $i = 1,2,\ldots,k$) έτσι ώστε:

$$a_1(s)t_1(s) + a_2(s)t_2(s) + \ldots + a_k(s)t_k(s) = 0_{p,1} \tag{2.1}$$

Αντιθέτως αν, η (2.1) συνεπάγεται ότι $a_i(s) = 0, \forall\, i = 1,2,\ldots,k$ τότε τα k στοιχεία $t_i(s) \in \mathbb{R}(s)^p, i = 1,2,\ldots,k$ είναι $\mathbb{R}(s)$-***<u>γραμμικώς ανεξάρτητα</u>***.

- ✓ Με $\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ συμβολίζουμε το σύνολο των $p \times m$ πινάκων ρητών συναρτήσεων.

- ✓ Αν $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ τότε ο πίνακας $T(s)$ ονομάζεται πίνακας πραγματικών ρητών συναρτήσεων.

Ορισμός 2.4.2

Το ***rank*** ενός $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ επάνω από το σώμα $\mathbb{R}(s)$ το οποίο συμβολίζουμε με,

$$rank_{\mathbb{R}(s)} T(s)$$

είναι ο αριθμός των γραμμικώς $\mathbb{R}(s)$-ανεξαρτήτων γραμμών ή στηλών του $T(s)$.

Πρόταση 2.4.3

Έστω

$$T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p$$

$$T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p$$

και

$$\bar{T}(s) := T_L(s)T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

τότε

$$\deg \bar{T}(s) = \deg T_L(s) + \deg T(s)$$

$$\deg \bar{T}(s) \geq \deg T(s)$$

και

$$\deg \bar{T}(s) = \deg T(s) \text{ αν-ν } T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p} \text{ είναι } \boldsymbol{unimodular}.$$

Επίσης αν

$$T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = m$$

$$T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = m$$

$$\bar{T}(s) \coloneqq T(s) T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

τότε

$$\deg \bar{T}(s) = \deg T(s) + \deg T_R(s)$$

$$\deg \bar{T}(s) \geq \deg T(s)$$

και

$$\deg \bar{T}(s) = \deg T(s) \text{ αν-ν } T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m} \text{ είναι } \boldsymbol{unimodular}.$$

Έστω

$$T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m},\ rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = \min(p, m)$$

και

$$T(s) = \begin{bmatrix} \bar{t}_1(s)^\tau \\ \bar{t}_2(s)^\tau \\ \vdots \\ \bar{t}_p(s)^\tau \end{bmatrix} = [t_1(s) \quad t_2(s) \quad \dots \quad t_m(s)]$$

$\bar{t}_i(s)^\tau \in \mathbb{R}[s]^{1\times m}, i = 1,2,\dots,p$ οι γραμμές του $T(s)$

$t_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times 1}, j = 1,2,\dots,m$ οι στήλες του $T(s)$

Ορισμός 2.4.4

Η ***πολυπλοκότητα των γραμμών*** $c_r(T)$ ***(των στηλών*** $c_c(T)$ ***)*** του $T(s)$ ***(column (row) complexity)*** είναι το ***άθροισμα των βαθμών των γραμμών (στηλών)*** του $T(s)$.

$$c_r(T) = \sum_{i=1}^{p} \deg \bar{t}_i(s)^\tau \quad \left(c_c(T) = \sum_{j=1}^{m} \deg t_j(s) \right)$$

Αν $p \leq m$ $(p \geq m)$, και εφόσον κάθε ορίζουσα $p - \tau\acute{\alpha}\xi\varepsilon\omega\varsigma$ $(m - \tau\acute{\alpha}\xi\varepsilon\omega\varsigma)$ είναι αλγεβρικό άθροισμα γινομένων πολυωνύμων, ένα από κάθε στήλη (γραμμή) του $T(s)$, ο μέγιστος βαθμός μεταξύ των βαθμών όλων των οριζουσών τάξης p (m) του $T(s)$ δηλαδή, ο βαθμός $\deg T(s)$ του $T(s)$ δεν μπορεί να υπερβαίνει την ***πολυπλοκότητα των γραμμών*** $c_r(T)$ (***των στηλών*** $c_c(T)$) του $T(s)$.

Δηλαδή, είναι πάντα

$$c_r(T) \geq \deg T(s) \;\; (\kappa\alpha\iota\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha\ \gamma\iota\alpha\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\tau\acute{\eta}\lambda\varepsilon\varsigma\text{: } c_c(T) \geq \deg T(s))$$

Παράδειγμα 2.4.5

Αν $T(s) = \begin{bmatrix} 1 & s+2 \\ s^2+1 & 0 \\ s & 2 \end{bmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} 1 & s+2 \\ s^2+1 & 0 \end{vmatrix} = -s^3 - 2s^2 - s - 2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & s+2 \\ s & 2 \end{vmatrix} = -s^2 - 2s + 2,$$

$$\begin{vmatrix} s^2+1 & 0 \\ s & 2 \end{vmatrix} = 2s^2 + 2$$

$$\Rightarrow \deg T(s) = \max\{3,2,2\} = 3$$

$$c_1 = \max\{\deg(1), \deg(s^2+1), \deg(s)\} = \max\{0,2,1\} = 2$$

$$c_2 = \max\{\deg(s+2), \deg(0), \deg(2)\} = \max\{1,0,0\} = 1$$

$$C_c = 2 + 1 = 3 = \deg T(s)$$

$$r_1 = \max\{\deg(1), \deg(s+2)\} = \max\{0,1\} = 1$$

$$r_2 = \max\{\deg(s^2+1), \deg(0)\} = \max\{2,0\} = 2$$

$$r_3 = \max\{\deg(s), \deg(2)\} = \max\{1,0\} = 1$$

$$C_r(T) = 1 + 2 + 1 = 4 > \deg T(s)$$

Παράδειγμα 2.4.6

Αν $T(s) = \begin{bmatrix} 2s^2+3s+1 & s^2+2 & s \\ 4s^3 & s^3+4s & 3s^2+3 \end{bmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} 2s^2+3s+1 & s^2+2 \\ 4s^3 & s^3+4s \end{vmatrix} = -2s^5 + 3s^4 + s^3 + 12s^2 + 4s,$$

$$\begin{vmatrix} 2s^2+3s+1 & s \\ 4s^3 & 3s^2+3 \end{vmatrix} = 2s^4 + 9s^3 + 9s^2 + 9s + 3,$$

$$\begin{vmatrix} s^2+2 & s \\ s^3+4s & 3s^2+3 \end{vmatrix} = 2s^4 + 5s^2 + 6,$$

$$\Rightarrow \deg T(s) = \max\{5,4,4\} = 5$$

$$c_1 = \max\{deg(2s^2+3s+1), \deg(4s^3)\} = \max\{2,3\} = 3$$

$$c_2 = \max\{deg(s^2+2), \deg(s^3+4s)\} = \max\{2,3\} = 3$$

$$c_3 = \max\{\deg(s), \deg(3s^2+3)\} = \max\{1,2\} = 2$$

$$C_c(T) = 3 + 3 + 2 = 8 > \deg T(s)$$

$$r_1 = \max\{deg(2s^2+3s+1), \deg(s^2+2), \deg(s)\} = \max\{2,2,1\} = 2$$

$$r_2 = \max\{\deg(4s^3), \deg(s^3+4s), \deg(s), \deg(3s^2+3)\} = \max\{3,3,2\} = 3$$

$$C_r(T) = 2 + 3 = 5 = \deg T(s)$$

3. Κατασκευή της Smith-McMillan μορφής στο σημείο $s = \infty$, ενός πίνακα πραγματικών ρητών συναρτήσεων και εύρεση της δομής των πόλων και των μηδενικών

3.1 Εισαγωγή [7]

Κάθε μη μηδενική ρητή συνάρτηση t(s) μπορεί να αναπαρασταθεί ως έναν λόγο πρώτων πολυωνύμων $n(s), d(s), t(s) = n(s)/d(s)$ όπου οι πόλοι και τα μηδενικά του $t(s)$ ανήκουν στο $\mathbb{C}$ δηλαδή, τα πεπερασμένα μηδενικά (ρίζες αριθμητή $n(s)$) και οι πόλοι (ρίζες παρονομαστή $d(s)$) του t(s) δίνονται από τα πεπερασμένα μηδενικά του n(s) και των πόλων του d(s) αντίστοιχα. Εκτός από τα πεπερασμένα μηδενικά και τους πόλους μιας ρητής συνάρτησης όπως θα δούμε παρακάτω έχουμε μηδενικά και πόλους στο άπειρο δηλαδή, για το σημείο $s = \infty$. Έτσι δεδομένου μιας ρητής συνάρτησης $t(s) \in \mathbb{R}(s)$ έχουμε:

- $\lim_{s\to\infty} t(s) = \infty$ η οποία σε αυτήν την περίπτωση καλείται ***μη-κανονική ρητή συνάρτηση (non-proper rational function)***.

- $\lim_{s\to\infty} t(s) = a \in \mathbb{R}$ η οποία σε αυτήν την περίπτωση καλείται ***κανονική ρητή συνάρτηση (proper rational function***).

- Στην περίπτωση που το $a = 0$ τότε η t(s) καλείται ***αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση (strictly proper rational function)*** και λέμε ότι η t(s) έχει ένα μηδενικό στο $s = \infty$ ενώ αν η t(s) είναι ***μη κανονική (non-proper)*** λέμε ότι t(s) έχει έναν πόλο στο $s = \infty$. Εμείς θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό της ***Smith-McMillan*** μορφής στο άπειρο $S_{T(s)}^{\infty}$ για γνωστό ρητό (και μη) πολυωνυμικό πίνακα T(s).

3.2 Διακριτές εκτιμήσεις Πόλων-Μηδενικών ρητών συναρτήσεων στο άπειρο [7]

Έστω K ένα χωρίο. Μια διακριτή εκτίμηση (discrete valuation) του K είναι μια απεικόνιση $\delta: K \to \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$: ο δακτύλιος των ακεραίων) έτσι ώστε για όλα τα μη μηδενικά στοιχεία $x, y \in K$:

$$\delta(xy) = \delta(x) + \delta(y) \tag{3.1}$$

$$\delta(x + y) \geq \min\{\delta(x), \delta(y)\} \tag{3.2}$$

Αν $t(s) = n(s)/d(s) \in \mathbb{R}(s)$ όπου $n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s]$, $d(s) \neq 0$ ορίζουμε την απεικόνιση $\delta_\infty(.) : \mathbb{R}(s) \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ μέσω:

$$\delta_\infty\big(t(s)\big) \coloneqq \deg \mathrm{d}(s) - \deg \mathrm{n}(s) \qquad t(s) \neq 0 \tag{3.3}$$

$$\delta_\infty\big(t(s)\big) \coloneqq +\infty \qquad\qquad t(s) = 0 \tag{3.4}$$

είναι ξεκάθαρο ότι η απεικόνιση $\delta_\infty(.)$ πληροί τις (3.1) και (3.2) (όπου ορίζουμε: $\deg(0) := -\infty$) και άρα διατηρείται ως μια διακριτή εκτίμηση στο $\mathbb{R}(s)$.

Έτσι έχουμε ότι για κάθε $t_1(s), t_2(s) \in \mathbb{R}(s)$ όπου $t_1(s), t_2(s) \neq 0$

$$\delta_\infty\big(t_1(s)t_2(s)\big) = \delta_\infty\big(t_1(s)\big) + \delta_\infty\big(t_2(s)\big) \tag{3.5}$$

$$\delta_\infty\big(t_1(s)+t_2(s)\big) \geq \min\{\delta_\infty\big(t_1(s)\big), \delta_\infty\big(t_2(s)\big)\} \tag{3.6}$$

και σύμφωνα με την σχέση (3.3) έχουμε ότι:

$$\delta_\infty(1) = \delta_\infty(-1) = 0 \tag{3.7}$$

$$\delta_\infty(t(s)) = \delta_\infty(-t(s)) \tag{3.8}$$

λόγω της (3.6) προκύπτει ότι:

$$\delta_\infty\big(t_1(s) - t_2(s)\big) \geq \min\{\delta_\infty\big(t_1(s)\big), \delta_\infty\big(t_2(s)\big)\} \tag{3.9}$$

Λήμμα 3.2.1

Κάθε $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \in \mathbb{R}(s), n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s]$ μπορεί να γραφτεί ως:

$$t(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^{q_\infty} \frac{n_1(s)}{d_1(s)} \tag{3.10}$$

Όπου $q_\infty \coloneqq \delta_\infty(t(s))$ και $n_1(s), d_1(s) \in \mathbb{R}[s]$ με $deg\, n_1(s) = deg\, d_1(s)$

Απόδειξη

Γράφουμε:

$$t(s) = \frac{n(s)}{d(s)} s^{q_\infty} s^{-q_\infty} = u(s) s^{-q_\infty}$$

Όπου $u(s) \coloneqq \frac{n_1(s)}{d_1(s)} = \frac{n(s)}{d(s)} s^{q_\infty}, \delta_\infty\big(u(s)\big) = \deg \mathrm{d(s)} - \deg \mathrm{n(s)} - q_\infty = 0$ □

Παράδειγμα 3.2.2

- Ας είναι $t(s) = \frac{(s+1)(s+4)}{s(s+2)(s+3)}$, τότε $\delta_\infty(t(s)) = 3 - 2 = 1 = q_\infty$ και $t(s)$ μπορεί να γραφτεί ως: $t(s) = \left[\frac{(s+1)(s+4)}{(s+2)(s+3)}\right]\left(\frac{1}{s}\right)$.

- Αν $t(s) = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)}$, τότε $\delta_\infty\big(t(s)\big) = 1 - 3 = -2 = q_\infty$ και $t(s)$ μπορεί να γραφτεί ως : $t(s) = \left[\frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{s^2(s+1)}\right] s^2$.

Ορισμός 3.2.3

Αν $q_\infty > 0$ λέμε ότι $t(s)$ έχει ένα μηδενικό στο $s = \infty$ βαθμού q_∞ και αν $q_\infty < 0$, τότε λέμε ότι $t(s)$έχει έναν πόλο στο $s = \infty$ βαθμού $|q_\infty|$.

- Αν $\delta_\infty(t(s)) \geq 0$ τότε η $t(s)$ καλείται κανονική ρητή συνάρτηση ***(proper rational function)*** και αν η ανισότητα είναι αυστηρή, τότε καλείται αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση ***(strictly proper rational function)***. Έτσι οι κανονικές ρητές συναρτήσεις δεν έχουν πόλους στο $s = \infty$.

Είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι το σύνολο των κανονικών ρητών συναρτήσεων ***(proper rational functions)*** το οποίο το δηλώνουμε με $\mathbb{R}_{pr}(s)$, εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, είναι ένας ***αντιμεταθετικός δακτύλιος*** με μοναδιαίο στοιχείο (τον πραγματικό αριθμό 1) και ***χωρίς διαιρέτες του μηδενός***. Άρα $\mathbb{R}_{pr}(s)$ είναι μια ***ακεραία περιοχή***. Οι μονάδες $u(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ είναι εκείνες οι ***proper rational συναρτήσεις*** για τις οποίες υπάρχει ένα $u'(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ έτσι ώστε $u(s)u'(s) = 1$. Αυτό συνεπάγει ότι $u(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ είναι μονάδα αν-ν $\deg n(s) = \deg d(s)$ και άρα αν-ν $\delta_\infty(u(s)) = 0$. Έτσι οι μονάδες στο $\mathbb{R}_{pr}(s)$ δεν έχουν μηδενικά στο $s = \infty$. Τις μονάδες στο $\mathbb{R}_{pr}(s)$ τις καλούμε ***biproper rational functions***.

3.3 Ισοδυναμία ρητών πινάκων στο άπειρο[7,13]

Δηλώνουμε με $\mathbb{R}_{pr}^{p\times m}(s)$ το σύνολο των $p \times m$ πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}_{pr}(s)$. Τέτοιοι πίνακες καλούνται ***proper rational matrices***.

Ο $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{p\times p}(s)$ καλείται $\mathbb{R}_{pr}(s)$ - ***unimodular*** ή ***biproper rational matrix*** αν υπάρχει ένας $\tilde{T}(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{p\times p}(s)$ έτσι ώστε $T(s)\tilde{T}(s) = I_p$ ή ισοδύναμα αν το $\lim_{s\to\infty} T(s) = E \in \mathbb{R}^{p\times p}$ με $rank_{\mathbb{R}} E = p$.

Ορισμός 3.3.1

Αν $T_1(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s), T_2(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s)$. Τότε $T_1(s)$ και $T_2(s)$ καλούνται ισοδύναμοι στο άπειρο αν υπάρχουν ***biproper rational matrices*** $T_L(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{p\times p}(s)$ και $T_R(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{m\times m}(s)$ έτσι ώστε:

$$T_L(s)T_1(s)T_R(s) = T_2(s). \tag{3.11}$$

Αν $T_1(s)$ και $T_2(s)$ είναι ισοδύναμοι στο άπειρο τότε αυτό το συμβολίζουμε γράφοντας:

$$(T_1(s), T_2(s)) \in E^\infty \quad \text{ή} \quad \text{με} \quad T_1(s) \sim T_2(s)(E^\infty) \tag{3.12}$$

Η κλάση ισοδυναμίας της E^∞ ορίζεται ως:

$[T(s)]_{E^\infty}$ ή η τροχιά ενός καθορισμένου $T(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s)$ είναι το σύνολο:

$$[T(s)]_{E^\infty} = \begin{Bmatrix} T_i(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s) | T_i(s) = T_L(s)T(s)T_R(s) \text{όπου} \\ T_L(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{p\times p}(s), T_R(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{m\times m}(s) \text{είναι } biproper \end{Bmatrix} \tag{3.13}$$

Παρατήρηση 3.3.2

Αν $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{p\times m}(s)$ τότε $q_i \leq 0, i \in \boldsymbol{r}$, δηλαδή η $S_{T(s)}^\infty \in \mathbb{R}_{pr}^{p\times m}(s)$ και σε αυτήν την περίπτωση καλείται η ***Smith form*** του $T(s)$ στο $s = \infty$.

Διαφορετικά, αν δηλαδή ο $T(s)$ είναι ***non-proper***, τότε μερικά από τα q_i ικανοποιούν $q_i > 0, i = 1,2,\ldots,k \leq r$, δηλαδή η $S_{T(s)}^\infty$ είναι επίσης ***non-proper*** και σε αυτήν την περίπτωση καλείται ***McMillan form*** του $T(s)$ στο $s = \infty$. Έτσι γενικά ένας ρητός πίνακας μπορεί να έχει πόλους και μηδενικά στο $s = \infty$ και προκειμένου να τονίσουμε αυτό το γεγονός δηλώνουμε την ***Smith-McMillan form*** στο $s = \infty$ του $T(s)$ ως:

$$S_{T(s)}^\infty = block\ diag\left[s^{q_1}, s^{q_2}, \ldots, s^{q_k}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+1}}}, \ldots, \frac{1}{s^{\hat{q}_r}}, 0_{p-r,m-r}\right] \tag{3.14}$$

Όπου $1 \leq k \leq r$ και $\hat{q}_i = -q_i$ αν $q_i < 0$ ώστε:

$$q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_k \geq 0 \tag{3.15}$$

$$\hat{q}_r \geq \hat{q}_{r-1} \geq \ldots \geq \hat{q}_{k+1} \geq 0 \tag{3.16}$$

Αν $p_\infty \in \mathbb{Z}^+$ είναι ο αριθμός του q_i στην (3.14) ικανοποιώντας: $q_i > 0, i \in p_\infty$, τότε λέμε ότι ο $T(s)$ έχει p_∞ πόλους στο $s = \infty$ κάθε ένας βαθμού q_i και αν $z_\infty \in \mathbb{Z}^+$

είναι ο αριθμός του $\hat{q}_i$ στην (3.14) ικανοποιώντας: $\hat{q}_i > 0, i \in z_\infty$, τότε λέμε ότι ο $T(s)$ έχει z_∞ μηδενικά στο $s = \infty$ κάθε ένα βαθμού $\hat{q}_i$.

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s)$ με $rank_{\mathbb{R}(s)}T(s) = r > 0$ και θεωρούμε τον λόγο στο $\mathbb{R}^{p\times m}(s)$ με E^∞ δηλαδή, το σύνολο (που συμβολίζεται με) $\mathbb{R}^{p\times m}(s)/E^\infty$ της E^∞-ισοδυναμίας κλάσεων: $[T(s)]_{E^\infty}$ όταν $T(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s)$. Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε αυτές τις ισοδυναμίες κλάσεων προσδιορίζοντας πλήρες σύνολα αναλλοίωτων και κανονικών μορφών. Έχουμε:

Θεώρημα 3.3.3

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s)$, με $rank_{\mathbb{R}(s)}T(s) = r > 0$. Έστω $T(s) \sim S^\infty_{T(s)}(E^\infty)$. Τότε η απεικόνιση $g: \mathbb{R}^{p\times m}(s) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cdots \times \mathbb{Z}; T(s) \to (q_1, q_2, \dots, q_r)$ είναι ***πλήρης αναλλοίωτη*** για E^∞, δηλαδή οι δείκτες q_i, $i \in \boldsymbol{r}$, (ως ένα διατεταγμένο σύνολο) αποτελούν ένα ***πλήρες αναλλοίωτο σύνολο*** για E^∞. Επίσης η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^{p\times m}(s) \to \mathbb{R}^{p\times m}(s)$; $T(s) \to S^\infty_{T(s)}$ είναι μια ***κανονική απεικόνιση*** για E^∞ επί του $\mathbb{R}^{p\times m}(s)$ και $S^\infty_{T(s)}$ είναι μια ***κανονική μορφή*** για E^∞ επί του $\mathbb{R}^{p\times m}(s)$.

Απόδειξη

Ας δηλώσουμε με $\xi_\kappa(t) \in \mathbb{Z}$ το ελάχιστο $\delta_\infty(.)$ μεταξύ των $\delta_\infty(.)$ όλων των οριζουσών των υπό-πινάκων του $T(s)$ βαθμού κ, $\kappa \in \boldsymbol{r}$ και ορίζουμε τις ρητές συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} f_1(s) &= s^{\xi_0(T)-\xi_1(T)} \\ f_2(s) &= s^{\xi_1(T)-\xi_2(T)} \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad (\xi_0(T) \coloneqq 0) \qquad (3.17) \\ f_r(s) &= s^{\xi_{r-1}(T)-\xi_r(T)} \end{aligned}$$

Ας είναι $\bar{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s)$ ένας άλλος ρητός πίνακας εντός του $E^\infty -$ ισοδυναμίας κλάσεων $[T(s)]_{E^\infty}$ του $T(s)$. Από τον ορισμό υπάρχουν ***biproper*** ρητοί πίνακες $T_L(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{p\times p}(s)$, $T_R(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{m\times m}(s)$ έτσι ώστε $T_L(s)T(s)T_R(s) = \bar{T}(s)$. Αν με

$$T(s)_{j_1,j_2,\cdots,j_k}^{i_1,i_2,\cdots,i_k} \tag{3.18}$$

δηλώσουμε τον $k-o\sigma\tau ó$ βαθμό της ορίζουσας του υπό-πίνακα του $T(s)$ ο οποίος αποτελείται από γραμμές $i_1, i_2, \cdots, i_k$ και στήλες $j_1, j_2, \cdots, j_k$; $\kappa \in \boldsymbol{r}$ τότε από την φόρμουλα Binet-Cauchy έχουμε:

$$\bar{T}(s)_{j_1,j_2,\cdots,j_k}^{i_1,i_2,\cdots,i_k} = \sum T_L(s)_{a_1,a_2,\cdots,a_k}^{i_1,i_2,\cdots,i_k} T(s)_{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k}^{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k} T_R(s)_{j_1,j_2,\cdots,j_k}^{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k} \tag{3.19}$$

$$1 \le a_1 \le \cdots \le a_\kappa \le p \qquad 1 \le \beta_1 \le \cdots \le \beta_\kappa \le m \qquad \kappa \in \boldsymbol{r}.$$

Όλα τα στοιχεία και οι ορίζουσες των υπό-πινάκων του $T_L(s)$ και $T_R(s)$ έχουν μη αρνητικά $\delta_\infty(.)$, προκύπτει ότι:

$$\xi_\kappa(\bar{T}) \ge \xi_\kappa(T) \quad \kappa \in \boldsymbol{r}. \tag{3.20}$$

Από την ιδιότητα της συμμετρίας της σχέσης ισοδυναμίας E^∞, προκύπτει ότι:

$$\xi_\kappa(T) \ge \xi_\kappa(\bar{T}) \quad \kappa \in \boldsymbol{r}$$

και άρα (3.21)

$$\xi_\kappa(\bar{T}) = \xi_\kappa(T) \quad \kappa \in \boldsymbol{r}$$

Άρα έχουμε ότι,

$$\bar{T}(s) \sim T(s)(E^{\infty}) \Rightarrow \xi_{\kappa}(\bar{T}) = \xi_{\kappa}(T) \qquad \kappa \in \boldsymbol{r}. \tag{3.22}$$

Έτσι $\bar{T}(s)$ *και* $T(s)$ έχουν το ίδιο σύνολο ρητών συναρτήσεων $f_i(s), i \in \boldsymbol{r}$ που ορίστηκαν στην (3.17). Από υπόθεση: $T(s) \sim S^{\infty}_{T(s)}(E^{\infty})$ και άρα από την (3.22) $\xi_{\kappa}(\bar{T}) = \xi_{\kappa}(T) = \xi_{\kappa}(S^{\infty}_{T(s)}),\ \kappa \in \boldsymbol{r}$ και λόγω της $S^{\infty}_{T(s)} = block\ diag(s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_r}, 0, \dots, 0)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \xi_1(T) &= -q_1 \\ \xi_2(T) &= -(q_1 + q_2) \\ &\vdots \\ \xi_{\boldsymbol{r}}(T) &= -(q_1 + q_2 + \dots + q_{\boldsymbol{r}}) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} q_1 &= -\xi_1(T) = \xi_0(T) - \xi_1(T) \\ q_2 &= \xi_1(T) - \xi_2(T) \\ &\vdots \\ q_{\boldsymbol{r}} &= \xi_{\boldsymbol{r}-1}(T) - \xi_{\boldsymbol{r}}(T). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Έτσι η απεικόνιση g: $\mathbb{R}^{p\times m}(s) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cdots \times \mathbb{Z}$ είναι ***αναλλοίωτη*** για E^{∞}.

Θα δείξουμε τώρα ότι η g είναι ***πλήρως αναλλοίωτη (complete invariant)*** δηλαδή, $g(T) = g(\bar{T})$ συνεπάγεται ότι $T(s) \sim \bar{T}(s)(E^{\infty})$. Ας είναι $g(T) = g(\bar{T}) = (q_1, q_2, \dots, q_r)$ ως ένα διατεταγμένο σύνολο στο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cdots \times \mathbb{Z}$. Τότε $T(s) \sim S^{\infty}_{T(s)}(E^{\infty})$ και $\bar{T}(s) \sim S^{\infty}_{\bar{T}(s)}$ όπου:

$$S^{\infty}_{T(s)} = S^{\infty}_{\bar{T}(s)} = block\ diag(s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_r}, 0_{p-\boldsymbol{r}, m-\boldsymbol{r}}) \tag{3.25}$$

και άρα $T(s) \sim \bar{T}(s)(E^{\infty})$. Τα παραπάνω συνεπάγουν επίσης ότι η απεικόνιση $f: T(s) \to S_{T(s)}^{\infty}$ είναι μια ***κανονική απεικόνιση*** και ότι $S_{T(s)}^{\infty}$ είναι μια ***κανονική μορφή (canonical form)*** για E^{∞} επί του $\mathbb{R}^{p\times m}(s)$.

□

Ορισμός 3.3.4

Οι ρητές συναρτήσεις $f_i(s), i \in \boldsymbol{r}$, στην (3.17) καλούνται ***αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις (invariant rational functions)*** του $T(s)$ στο $s = \infty$.

Παρατήρηση 3.3.5

Παρατηρούμε ότι οι ρητές συναρτήσεις $f_i(s)$, $i \in \boldsymbol{r}$, στην (3.17) δηλώνουν έναν ***αλγόριθμο*** για τον υπολογισμό της ***Smith-McMillan*** μορφής του $T(s)$ στο $s = \infty$, $S_{T(s)}^{\infty}$.

4. Βήματα του αλγορίθμου

1. Αρχικά για τον πίνακα πραγματικών ρητών συναρτήσεων, υπολογίζουμε τα $\xi_{\kappa}(t) \in \mathbb{Z}$ με $\kappa \in \boldsymbol{r}$ όπου $\boldsymbol{r} = 1,2,...,r$ και r η βαθμίδα του πίνακα. Για τον υπολογισμό των $\xi_{\kappa}(t)$ βρίσκουμε το ελάχιστο $\delta_{\infty}(.)$ μεταξύ των $\delta_{\infty}(.)$ όλων των οριζουσών των υπό-πινάκων του $T(s)$. Δηλαδή, αν ο πίνακας μας είναι 2×3 και οι γραμμές-στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες, η βαθμίδα είναι 2. Τότε εμείς θα υπολογίσουμε αρχικά το ξ_1 και έπειτα το ξ_2, όπου για το ξ_1 παίρνουμε όλους τους υποπίνακες 1×1, βρίσκουμε τις ορίζουσες τους και έπειτα υπολογίζουμε και κρατάμε το ελάχιστο $\delta_{\infty}(.)$ =βαθμός παρονομαστή−βαθμός αριθμητή. Όμοια για το ξ_2 παίρνουμε όλους τους υποπίνακες 2×2, βρίσκουμε τις ορίζουσες τους και έπειτα υπολογίζουμε και κρατάμε το αντίστοιχο ελάχιστο $\delta_{\infty}(.)$.

2. Στην συνέχεια έχοντας βρει τα $\xi_1(T), \xi_2(T)$ και θέτοντας $\xi_0(T) = 0$ από την (3.24) βρίσκουμε τα q_1 και q_2 και από την (3.17) τα $f_1(s)$ και $f_2(s)$.

3. Η ***Smith-McMillan form*** του πίνακα μας στο άπειρο θα είναι της παρακάτω μορφής:

$$S^{\infty}_{T(s)} = \begin{bmatrix} f_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(s) & 0 \end{bmatrix}$$

Η υλοποίηση του αλγορίθμου αυτού έγινε στο ***MATLAB***. Θα εξηγήσουμε στην συνέχεια με όσο το δυνατό απλούστατο τρόπο τον κώδικα που χρησιμοποιήθηκε για αυτόν το σκοπό.

5. Εξήγηση κώδικα

```
x = input('Δώσε τον αριθμό των γραμμών p:');
```

Η συνάρτηση input εμφανίζει στην οθόνη ότι υπάρχει ανάμεσα στα '. . .' και περιμένει από τον χρήστη να εισάγει τον συγκεκριμένο αριθμό από το πληκτρολόγιο που είναι ο αριθμός των γραμμών.

```
y = input('Δώσε τον αριθμό των στηλών m:');
```

Ομοίως και για τις στήλες.

```
A = sym('A%d%d', [x y]);
```

Αρχικοποιούμε τον πίνακα με δεδομένα συμβολικής μορφής δηλαδή, δεσμεύουμε τον κατάλληλο χώρο στη μνήμη για τα πολυώνυμα που θα εισάγει ο χρήστης.

Παράδειγμα 5.1

Έστω ο πίνακας $T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & s^3 & \frac{1}{s^2} \\ s & -\frac{s+1}{s} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}(s)$, στο ***παράθυρο εντολών (Command Window)*** του ***MATLAB*** θα τον γράψουμε με τον ακόλουθο τρόπο και μας εμφανίζει τα εξής:

```
Command Window
>> A=sym('[1/s,s^3,1/s^2;s,-(s+1)/s,1/(s+2)]')

A =

[ 1/s,          s^3,      1/s^2]
[   s,  -(s + 1)/s,  1/(s + 2)]
```

Σχήμα 5.1 Εισαγωγή του $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s})$ στο MATLAB

Συνεχίζουμε με τον κώδικα,

```
for i = 1: x
```

Βάζουμε έναν βρόχο for για να τρέχουν οι γραμμές του πίνακα μας και στην συνέχεια κάνουμε το ίδιο και για τις στήλες.

```
    for j = 1: y
        a = input(['Δώσε το  ' int2str(i) ', ' int2str(j) ' στοιχείο του πίνακα:  '], 's');
```

Η συνάρτηση int2str μετατρέπει τον ακέραιο i και j σε μορφή χαρακτήρα έτσι ώστε να τυπώνεται στην οθόνη ο αριθμός αυτός.

```
        A(i,j) = sym( a );
```

Εισάγουμε στον πίνακά μας με συμβολικό τρόπο τα στοιχεία που δίνει ο χρήστης.

```
    end
end
```

```
function final_ksi = calculateFinalKsi( A )
```

Ορίζουμε συνάρτηση με όνομα calculateFinalKsi(A) η οποία θα μας υπολογίζει τα τελικά $\xi_i(T)$, τα οποία εξηγήσαμε προηγουμένως στην θεωρία.

```
    l1 = size( A,1 );
```

Η συνάρτηση size μας επιστρέφει γενικά τις διαστάσεις του πίνακα μας, όμως εμείς θέλουμε να μας επιστρέψει τις γραμμές του για αυτό γράφουμε size(A,1).

Δηλαδή, για τον πίνακα $T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & s^3 & \frac{1}{s^2} \\ s & -\frac{s+1}{s} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}(s)$ αν γράψουμε στο ***παράθυρο εντολών (Command Window)*** του ***MATLAB*** l1 = size(A,1) θα μας εμφανίσει:

```
>> l1 = size( A,1 )

l1 =

     2
```

Όπου 2 είναι ο αριθμός των γραμμών.

l2 = size(A,2);

Ομοίως και για τις στήλες του πίνακα μας.

Αν γράψουμε στο ***παράθυρο εντολών (Command Window)*** του ***MATLAB*** l2 = size(A,2) θα μας εμφανίσει:

```
>> l2 = size( A,2 )

l2 =

     3
```

Όπου 3 ο αριθμός των στηλών του πίνακα μας.

Συνεχίζουμε με τον κώδικα της συνάρτησης calculateFinalKsi(A).

r = min(l1, l2);

Ορίζουμε r να είναι το ελάχιστο πλήθος των γραμμών, στηλών.

final_ksi = zeros(r+1,1);

Η συνάρτηση zeros δημιουργεί έναν μηδενικό πίνακα. Για παράδειγμα, αν θέλω να μου εμφανίσει έναν 2×2 μηδενικό πίνακα τότε γράφουμε zeros(2) ή zeros(2,2) και μας επιστρέφει τα ακόλουθα:

```
>> zeros(2)

ans =

     0     0
     0     0
```

zeros(2

```
>> zeros(2,2)

ans =

     0     0
     0     0
```

zeros(2,2)

Στην περίπτωση μας όμως, θέλουμε στο τέλος του προγράμματος να μας εμφανίζονται όλα τα τελικά $\xi_i(T)$ σε μορφή διανύσματος στήλης, για αυτό γράφουμε zeros(r+1,1). Αυτό το κάνουμε διότι αρχικά γεμίζουμε ένα διάνυσμα με μηδενικά και έπειτα τρέχοντας τον κώδικα βρίσκουμε τα τελικά $\xi_i(T)$ και τα γεμίζουμε στο διάνυσμα στήλης που ορίσαμε προηγουμένως .

Συνεχίζουμε με τον κώδικα,

```
final_ksi(1) = 0;
```

Ορίζουμε το $\xi_0(T) \coloneqq 0$

```
for i = 1 : r
```

Βάζουμε έναν βρόγχο να τρέχει όλες τις δυνατές τιμές από το r το οποίο ορίσαμε προηγουμένως.

```
min_ksi = Inf;
```

Αρχικά, το ελάχιστο $\xi_i(T)$ το θέτουμε με άπειρο και αυτό διότι πάλι από κάπου πρέπει να ξεκινήσει η διαδικασία. Όπως θα δούμε και παρακάτω θα υπάρχει σύγκριση των $\xi_i(T)$ και θα κρατείται το μικρότερο.

```
comb1 = nchoosek( 1:l1, i );
```

Η ***συνάρτηση nchoosek***, μας επιστρέφει τον διωνυμικό συντελεστή που ορίζεται ως $\binom{n}{k}$, δηλαδή, όλους τους συνδυασμούς n αντικειμένων ανά k. Δηλαδή, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ όπου είναι ο αριθμός των συνδυασμών n στοιχείων που λαμβάνονται κ σε μια στιγμή . Όπως θα δούμε και στην συνέχεια η ***nchoosek*** θα μας βοηθήσει να καλούμε όλους τους δυνατούς υπό-πίνακες, να υπολογίζουμε τις ορίζουσες τους και έπειτα να βρίσκουμε τα ξ_i.

Αρχικά, με την comb1 βρίσκουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των γραμμών δηλαδή, αν έχουμε 3 γραμμές και θέλουμε να τις πάρουμε ανά 2, πόσοι είναι αυτοί οι συνδυασμοί ; Γράφουμε στο ***παράθυρο εντολών (Command Window)*** του ***MATLAB*** nchoosek(3, 2) και μας βγάζει σαν αποτέλεσμα:

```
>> nchoosek( 3, 2 )

ans =

     3
```

$\binom{3}{2}$

Δηλαδή, όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί 3 στοιχείων ανά 2, όπου τα στοιχεία μας 1,2,3 τα βλέπουμε σαν $1^{η}$ γραμμή, $2^{η}$ γραμμή και $3^{η}$ γραμμή που μπορούμε να πάρουμε είναι 3. Να πάρουμε αρχικά την $1^{η}$ και $2^{η}$ γραμμή, έπειτα την $1^{η}$ και $3^{η}$ γραμμή και τέλος την $2^{η}$ και $3^{η}$ γραμμή.

Αν έχουμε 3 γραμμές και θέλουμε να τις πάρουμε ανά 1, πόσοι είναι αυτοί οι συνδυασμοί ; Γράφουμε στο ***παράθυρο εντολών (Command Window)*** του ***MATLAB*** nchoosek(3, 1) και μας βγάζει σαν αποτέλεσμα:

```
>> nchoosek( 3, 1 )

ans =

     3
```

$\binom{3}{1}$

Δηλαδή, όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί 3 στοιχείων ανά 1, όπου τα στοιχεία μας 1,2,3 τα βλέπουμε σαν $1^{η}$ γραμμή, $2^{η}$ γραμμή και $3^{η}$ γραμμή που μπορούμε να πάρουμε είναι 3. Να πάρουμε μόνο την $1^{η}$ μόνο την $2^{η}$ γραμμή και μόνο την $3^{η}$ γραμμή.

Αν έχουμε 3 γραμμές και θέλουμε να τις πάρουμε ανά 3, πόσοι είναι αυτοί οι συνδυασμοί ; Γράφουμε στο ***παράθυρο εντολών (Command Window)*** του ***MATLAB*** nchoosek(3, 3) και μας βγάζει σαν αποτέλεσμα:

```
>> nchoosek( 3, 3 )

ans =

     1
```

$\leftarrow \binom{3}{3}$

Δηλαδή, όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί 3 στοιχείων ανά 3, όπου τα στοιχεία μας 1,2,3 τα βλέπουμε σαν $1^{η}$ γραμμή, $2^{η}$ γραμμή και $3^{η}$ γραμμή που μπορούμε να πάρουμε είναι 1. Να πάρουμε την $1^{η}$ $2^{η}$ και $3^{η}$ γραμμή.

Συνεχίζουμε με τον κώδικα,

```
comb2 = nchoosek( 1:l2, i );
```

Ομοίως, όπως εξηγήσαμε προηγουμένως για τις γραμμές του πίνακα, υπολογίζουμε όλους τους συνδυασμούς των στηλών.

Θα δούμε τώρα ένα ***παράδειγμα*** για έναν πίνακα πραγματικό, να κατανοήσουμε τα προηγούμενα που αναφέραμε για την ***nchoosek*** γράφοντας τα στο ***παράθυρο εντολών (Command Window)*** του ***MATLAB***.

Παράδειγμα 5.2

Έστω ότι έχουμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 22 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ με $rank(A) = 3$. Τότε

for i = 1 : r όπου το $r = \min\{3,3\} = 3$.

Γράφουμε στο ***παράθυρο εντολών (Command Window)*** του ***MATLAB*** και μας εμφανίζει τα παρακάτω:

```
Command Window
>> for i=1:3
comb1=nchoosek(1:3,i)
end

comb1 =

     1
     2
     3
```

$\binom{3}{1}$

```
comb1 =

     1     2
     1     3
     2     3
```

$\binom{3}{2}$

```
comb1 =

     1     2     3
```

$\binom{3}{3}$

Σχήμα 5.2 Η συνάρτηση nchoosek στο MATLAB

Όπου είναι αντίστοιχα οι συνδυασμοί $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ & $\binom{3}{3}$.

Ομοίως για τις στήλες:

Command Window

```
>> for i=1:3
comb2 = nchoosek( 1:3, i )
end

comb2 =

     1
     2
     3
```

$\binom{3}{1}$

```
comb2 =

     1     2
     1     3
     2     3
```

$\binom{3}{2}$

```
comb2 =

     1     2     3
```

$\binom{3}{3}$

Όπου πάλι είναι αντίστοιχα οι συνδυασμοί $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ & $\binom{3}{3}$.

Συνεχίζουμε με τον κώδικα,

```
for j = 1 : size( comb1, 1)
```

Βάζουμε έναν βρόχο να τρέχει όλες τις θέσεις του comb1.

```
for k = 1 : size( comb2, 1)
```

Ομοίως βάζουμε έναν βρόχο να τρέχει όλες τις θέσεις του comb2.

```
At = A(comb1(j,:),comb2(k,:));
```

At: Είναι ένας υπό-πίνακας του πίνακα μας του *A* τον οποίο θα τον εξηγήσουμε στην συνέχεια.

Για παράδειγμα:

- αν το $i = 1$ δηλαδή, οι συνδυασμοί $\binom{3}{1}$ παίρνουμε από τα αποτελέσματα που είδαμε προηγουμένως των comb1 και comb2 τα ακόλουθα:

```
comb1 =                 comb2 =

     1                       1
     2          &            2
     3                       3
```

Τους 2 βρόχους for που βάλαμε προηγουμένως να τρέχουν, είναι για τις θέσεις των comb1 και comb2, δηλαδή για j = 1 είναι η 1η γραμμή, j = 2 είναι η 2η γραμμή και για j = 3 είναι η 3η γραμμή. Αντίστοιχα, και για τις τιμές του k=1,2,3 είναι η 1η στήλη, 2η στήλη και η 3η στήλη του πίνακα. Δηλαδή,

αν j = 1 και k = 1 τότε από τα comb1 και comb2 πηγαίνουμε στην θέση 1 αντίστοιχα και για τα δύο όπου για το comb1 είναι η 1η γραμμή και για το comb2 είναι η 1η στήλη όπου με τη χρήση At = A(comb1(j,:),comb2(k,:)) παίρνουμε το στοιχείο (1,1) του πίνακα μας $A = \begin{bmatrix} 1 & 22 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ δηλαδή, το 1.

```
Command Window
>> A=[1 22 3;4 5 6;7 8 9];
l1 = size( A,1 );
l2 = size( A,2 );
r = min(l1, l2);
for i = 1 : r
comb1 = nchoosek( 1:l1, i );
comb2 = nchoosek( 1:l2, i );
for j = 1 : size( comb1, 1)
for k = 1 : size( comb2, 1)
At = A(comb1(1,:),comb2(1,:))
end
end
end

At =

     1
```

Σχήμα 5.3 Εφαρμογή του κώδικα στο MATLAB

Ομοίως για διαφορετικές τιμές των j και k παίρνουμε και διαφορετικά στοιχεία του πίνακα μας, δηλαδή αν j = 2 και k = 1 τότε από τα comb1 και comb2 πηγαίνουμε στην θέση 2 για το comb1 και στην θέση 1 για το comb2 όπου είναι η 2^{η} γραμμή και η 1^{η} στήλη δηλαδή, το στοιχείο (2,1) του πίνακα μας, το 4.

Command Window

```
>> A=[1 22 3;4 5 6;7 8 9];
l1 = size( A,1 );
l2 = size( A,2 );
r = min(l1, l2);
for i = 1 : r
comb1 = nchoosek( 1:l1, i );
comb2 = nchoosek( 1:l2, i );
for j = 1 : size( comb1, 1)
for k = 1 : size( comb2, 1)
At = A(comb1(2,:),comb2(1,:))
end
end
end

At =

     4
```

Σχήμα 5.4 Εφαρμογή του κώδικα στο MATLAB

- Αν το $i = 2$, παίρνουμε τους συνδυασμούς $\binom{3}{2}$ τα αποτελέσματα των comb1 και comb2 τα ακόλουθα:

```
comb1 =

     1     2
     1     3
     2     3
```

$\boxed{\&}$

```
comb2 =

     1     2
     1     3
     2     3
```

Παρατηρούμε πάλι για:

j = 1 είναι η 1^{η} θέση του comb1 και βλέπουμε ότι είναι η 1^{η} και 2^{η} γραμμή.
k = 1 είναι η 1^{η} θέση του comb2 και βλέπουμε ότι είναι η 1^{η} και 2^{η} στήλη.

Άρα, πηγαίνουμε στον πίνακα μας τον $A = \begin{bmatrix} 1 & 22 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ και με τη χρήση του At = A(comb1(j,:),comb2(k,:)) παίρνουμε τον υπό-πίνακα 1^{η} και 2^{η} γραμμή και 1^{η} και 2^{η} στήλη δηλαδή, τον $At = \begin{bmatrix} 1 & 22 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

```
Command Window
>> A=[1 22 3;4 5 6;7 8 9];
l1 = size( A,1 );
l2 = size( A,2 );
r = min(l1, l2);
for i = 1 : r
comb1 = nchoosek( 1:l1, i );
comb2 = nchoosek( 1:l2, i );
for j = 1 : size( comb1, 1)
for k = 1 : size( comb2, 1)
At = A(comb1(1:2,:),comb2(1:2,:))
end
end
end

At =

     1    22
     4     5
```

Σχήμα 5.5 Εφαρμογή του κώδικα στο MATLAB

Ομοίως, για διαφορετικές τιμές των j και k παίρνουμε και διαφορετικούς υπό-πίνακες του πίνακα μας δηλαδή, αν j = 3 και k = 2 τότε από τα comb1 και comb2 πηγαίνουμε στην θέση 3 για το comb1 και στην θέση 2 για το comb2 όπου είναι 2^{η} και 3^{η} γραμμή και 1^{η} και 3^{η} στήλη δηλαδή, τον $At = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$.

```
Command Window
>> A=[1 22 3;4 5 6;7 8 9];
l1 = size( A,1 );
l2 = size( A,2 );
r = min(l1, l2);
for i = 1 : r
comb1 = nchoosek( 1:l1, i );
comb2 = nchoosek( 1:l2, i );
for j = 1 : size( comb1, 1)
for k = 1 : size( comb2, 1)
At = A(comb1(2:3,:),comb2(1:2:3,:))
end
end
end

At =

     4     6
     7     9
```

Σχήμα 5.6 Εφαρμογή του κώδικα στο MATLAB

- Αν το $i = 3$, παίρνουμε τους συνδυασμούς $\binom{3}{3}$ τα αποτελέσματα των comb1 και comb2 τα ακόλουθα:

Έχουμε από τα comb1 και comb2 ότι:

```
comb1 =

     1     2     3
```

$\boxed{\&}$

```
comb2 =

     1     2     3
```

Στην περίπτωση αυτή, ο At είναι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 22 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Command Window

```
>> A=[1 22 3;4 5 6;7 8 9];
l1 = size( A,1 );
l2 = size( A,2 );
r = min(l1, l2);
for i = 1 : r
comb1 = nchoosek( 1:l1, i );
comb2 = nchoosek( 1:l2, i );
for j = 1 : size( comb1, 1)
for k = 1 : size( comb2, 1)
At = A(comb1(1:3,:),comb2(1:3,:))
end
end
end

At =

     1    22     3
     4     5     6
     7     8     9
```

Σχήμα 5.7 Εφαρμογή του κώδικα στο MATLAB

Συνεχίζουμε με τον κώδικα,

```
function ksi = calculateKsi( Amat )
```

Ορίζουμε συνάρτηση με όνομα calculateKsi(Amat) η οποία θα μας υπολογίζει τα $\xi_i(T)$ από τον πίνακα μας, όπου Amat είναι όλοι οι δυνατοί υπό-πίνακες δηλαδή, οι At.

Προηγουμένως εξηγήσαμε την διαδικασία για τον πραγματικό πίνακα,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 22 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ για να είναι πιο κατανοητό για τον αναγνώστη.

Τώρα όμως θα συνεχίσουμε με τον πίνακα πραγματικών ρητών συναρτήσεων,

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & s^3 & \frac{1}{s^2} \\ s & -\frac{s+1}{s} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}(s).$$

Συνεχίζουμε με τον κώδικα της συνάρτησης calculateKsi(Amat).

D=det(Amat);

Υπολογισμός της ορίζουσας.

Θα δούμε τη διαδικασία υπολογισμού ενός $\xi_i(T)$. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του Amat δηλαδή, αν έχουμε τον $Amat = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & s^3 \\ s & -\frac{s+1}{s} \end{bmatrix}$ τον γράφουμε στο ***παράθυρο εντολών (Command Window)*** ως εξής:

```
Command Window
>> Amat=sym('[ 1/s, s^3; s, -(s+1)/s ]')

Amat =

[ 1/s,         s^3]
[   s, -(s + 1)/s]

>> D=det(Amat)

D =

-(s^6 + s + 1)/s^2
```

Σχήμα 5.8 Εφαρμογή του κώδικα στο MATLAB

[NUM, DEN] = numden(D);

Με την συνάρτηση numden διαχωρίζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή, όπου NUM είναι αριθμητής του D και DEN είναι ο παρονομαστής αντίστοιχα δηλαδή,

```
>> [NUM, DEN] = numden(D)

NUM =

- s^6 - s - 1


DEN =

s^2
```

NUM_POLY = sym2poly(NUM);

Η συνάρτηση sym2poly επιστρέφει ένα διάνυσμα γραμμή που περιέχει τους αριθμητικούς συντελεστές του συμβολικού πολυωνύμου. Οι συντελεστές διατάσσονται κατά φθίνουσα σειρά. Με άλλα λόγια, η πρώτη είσοδος του φορέα περιέχει τον συντελεστή με τον υψηλότερο βαθμό του πολυωνύμου, η δεύτερη είσοδος τον συντελεστή με τον δεύτερο υψηλότερο βαθμό και ούτω καθεξής, δηλαδή:

```
>> NUM_POLY = sym2poly( NUM )

NUM_POLY =

    -1     0     0     0     0    -1    -1
```

DEN_POLY = sym2poly(DEN);

Ομοίως για τον παρονομαστή.

```
>> DEN_POLY = sym2poly( DEN )

DEN_POLY =

     1     0     0
```

ksi = length(DEN_POLY) - length(NUM_POLY);

Η συνάρτηση length βρίσκει τον αριθμό των στοιχείων κατά μήκος του διανύσματος γραμμής μας, άρα το βαθμό του πολυωνύμου αυξημένο κατά ένα καθώς συνυπολογίζει την σταθερά του πολυωνύμου. Έτσι, παίρνοντας τη διαφορά των length των δυο πολυωνύμων παίρνουμε και τη διαφορά βαθμών του παρονομαστή μείον του αριθμητή, άρα το $\xi_i(T)$.

```
>> length( DEN_POLY )

ans =

     3

>> length( NUM_POLY )

ans =

     7

>> ksi = length( DEN_POLY ) - length( NUM_POLY )

ksi =

    -4
```

Να θυμίσουμε ότι ξ_i = βαθμός παρονομαστή−βαθμός αριθμητή. Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζουμε όλα τα δυνατά ξ_i από όλους τους δυνατούς υπό-πίνακες (που εξηγήσαμε προηγουμένως πως τους βρίσκουμε), παίρνοντας τις ορίζουσες των υπό-πινάκων και έπειτα την διαφορά βαθμών αριθμητή, παρονομαστή. Στην συνέχεια, θα δούμε πως από όλα αυτά τα ξ_i κρατάμε το μικρότερο.

end

Εδώ σε αυτό το σημείο, με χρήση της end ορίσαμε την συνάρτηση μας με όνομα calculateKsi(Amat), η οποία μας υπολογίζει τα $\xi_i(T)$ όταν θα την καλούμε στον κεντρικό μας κώδικα, από τον πίνακα μας, με Amat να είναι όλοι οι δυνατοί υπό-πίνακες δηλαδή, οι At.

Στον κώδικα της συνάρτησης calculateFinalKsi(A) καλούμε την συνάρτηση calculateKsi(Amat), η οποία υπολογίζει τα $\xi_i(T)$, τα οποία ενσωματώνονται στον κώδικα της συνάρτησης calculateFinalKsi(A), που θα μας εμφανίζει το ελάχιστο για κάθε $\xi_i(T)$. Συνεχίζουμε με τον κώδικα της συνάρτησης calculateFinalKsi(A).

```
ksi = calculateKsi( At );
```

```
if( min_ksi > ksi )
```

Με την συνθήκη if, ζητάμε να μας κρατάει το μικρότερο $\xi_i(T)$. Αρχικά είχαμε θέσει min_ksi = Inf και τώρα εδώ λέμε αν το min_ksi > ksi τότε ως νέο min_ksi θα είναι το μικρότερο εκ των δύο.

```
            min_ksi = ksi;
          end
        end
      end
      final_ksi(i+1) = min_ksi;
```

Εδώ λέμε ότι το τελικό $\xi_i(T)$ είναι το min_ksi δηλαδή, προηγουμένως που ορίσαμε τον $T(s) \in \mathbb{R}^{2\times3}(s)$ η βαθμίδα είναι 2, άρα θα βρεθούν όλα τα δυνατά $\xi_1(T)\ \kappa\alpha\iota\ \xi_2(T)$ όμως, εμείς θα κρατήσουμε το ελάχιστο $\xi_i(T)\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau\alpha\ \xi_1(T)\ \kappa\alpha\iota\ \xi_2(T)$ αντίστοιχα.

```
  end
end
```

Εδώ σε αυτό το σημείο με χρήση της end ορίσαμε την συνάρτηση μας με όνομα calculateFinalKsi(A).

```
function [ S, q ] = createSmithInfForm( A )
```

Ορίζουμε συνάρτηση με όνομα createSmithInfForm(A)η οποία θα μας υπολογίζει την ***Smith-McMillan*** μορφή του πίνακά μας στο άπειρο, $S^{\infty}_{T(s)}$.

```
ksi = calculateFinalKsi(A);
```

Καλούμε την συνάρτησή μας calculateFinalKsi(A), η οποία έχει υπολογίσει τα τελικά $\xi_i(T)$, ώστε να συμπεριληφθούν στον κώδικα της συνάρτησης που ορίσαμε, createSmithInfForm(A).

Συνεχίζουμε με τον κώδικα της συνάρτησης,

```
r = min(size(A,1), size(A,2));
```

Ορίζουμε r να είναι το ελάχιστο πλήθος των γραμμών, στηλών του πίνακα A.

```
f = sym('d%d%d', [r 1]);
```

Αρχικοποιούμε τα διανύσματα f με δεδομένα συμβολικής μορφής.

```
q = zeros( r, 1 );
```

Είναι ένα διάνυσμα στήλης το οποίο στο τέλος τρέχοντας ο αλγόριθμος θα μας εμφανίζει τα q_i, γεμίζοντας το αρχικά με μηδέν.

```
syms s;
```

Δημιουργία συμβολικών μεταβλητών s, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση syms.

```
S = sym(zeros( size(A,1), size(A,2) ));
```

Γράφοντας έτσι δίνουμε να "καταλάβει" το πρόγραμμα, στο τέλος να μας εμφανίσει την ***Smith-McMillan*** μορφή με συμβολικό τρόπο, γεμίζοντας αρχικά τον πίνακα με μηδενικά.

```
rr = int64( rank( A ) );
```

Το rr αντιπροσωπεύει την τιμή της βαθμίδος του πίνακα Α, όμως χρησιμοποιούμε την συνάρτηση int64 επειδή τον πίνακά μας Α τον έχουμε εισαγάγει με δεδομένα συμβολικής μορφής (καθώς είναι πίνακας πραγματικών ρητών συναρτήσεων), μέσω της οποίας γίνεται η μετατροπή του μηδενικού πολυωνύμου η οποία αποτελεί μια μορφή πολυωνύμου 'ακέραιου φαινομενικά' σε ακέραιο αριθμό.

```
for i = 1 : rr
```

Χρησιμοποιούμε έναν βρόχο να τρέχει τις τιμές της βαθμίδος και στην συνέχεια ορίζουμε τον υπολογισμό των q_i, $i \in \boldsymbol{r}$ (βλέπε 3.24) όπου $\boldsymbol{r}$ παίρνει τις τιμές της βαθμίδος.

```
q(i) = ( ksi( i ) - ksi( i + 1 ) );

f(i) = sym(s ^ q(i));
```

Μετά τον υπολογισμό των q_i βρίσκουμε πολύ εύκολα τα f(i), τα οποία είναι οι ρητές συναρτήσεις που τις ορίσαμε στο Θεώρημα 3.3.3, (βλέπε 3.17).

```
S(i,i)= f(i);
```

Στην διαγώνιό του ζητούμε να μας εμφανίσει τα f(i) τα οποία προηγουμένως τα υπολογίσαμε.

```
end
```

Στην περίπτωση γραμμικής εξάρτησης των στοιχείων του πίνακα, χρησιμοποιούμε τον εξής βρόχο:

```
for i = rr + 1 : r
    q(i) = 0;
    f(i) = 0;
    S(i,i) = 0;
end
end
```

Εδώ σε αυτό το σημείο με χρήση της end ορίσαμε την συνάρτηση μας με όνομα createSmithInfForm(A).

Συνεχίζουμε με τον κεντρικό μας κώδικα:

```
disp('Ta q einai: ')
disp(q)
disp('H Smith Mc Millan μορφή στο άπειρο είναι: ')
disp(S)
```

Η συνάρτηση disp εμφανίζει τα περιεχόμενα ανάμεσα στους τόνους (' ') δηλαδή, μηνύματα.

```
disp(S)
```

Εμφανίζει τον ζητούμενο πίνακα S ο οποίος είναι η ***Smith-McMillan*** μορφή στο άπειρο.

6. Ο κώδικας στο *MATLAB*

```
x = input('Δώσε τον αριθμό των γραμμών p:');
y = input('Δώσε τον αριθμό των στηλών m:');

A = sym('A%d%d', [x y]);
for i = 1: x
    for j = 1: y
        a = input(['Δώσε το  ' int2str(i) ', ' int2str(j) ' στοιχείο του πίνακα:  '], 's');
        A(i,j) = sym( a );
    end
end

final_ksi = calculateFinalKsi(A)

[S, q]=createSmithInfForm( A );

disp('Ta q einai: ')

disp(q)

disp('H Smith Mc Millan μορφή στο άπειρο είναι: ')

disp(S)
```

```
function final_ksi = calculateFinalKsi( A )
    l1 = size( A,1 );
    l2 = size( A,2 );
    r = min(l1, l2);
    final_ksi = zeros(r+1,1);
    final_ksi(1) = 0;

    for i = 1 : r
        min_ksi = Inf;
        comb1 = nchoosek( 1:l1, i );
        comb2 = nchoosek( 1:l2, i );
        for j = 1 : size( comb1, 1)
            for k = 1 : size( comb2, 1)
            At = A(comb1(j,:),comb2(k,:));
            ksi = calculateKsi( At );
                if( min_ksi > ksi )
                    min_ksi = ksi;
                end
            end
        end
        final_ksi(i+1) = min_ksi;
    end
end
```

```
function ksi = calculateKsi( Amat )
    D=det(Amat);
    [NUM, DEN] = numden(D);
    NUM_POLY = sym2poly( NUM );
    DEN_POLY = sym2poly( DEN );
    ksi = length( DEN_POLY ) - length( NUM_POLY );
end
```

```
function [ S, q ] = createSmithInfForm( A )
    ksi = calculateFinalKsi(A);
    r = min(size(A,1), size(A,2));
    f = sym('d%d%d', [r 1]);
    q = zeros( r, 1 );
    syms s;
    S = sym(zeros( size(A,1), size(A,2) ));
    rr = int64( rank( A ) );
    for i = 1 : rr
        q(i) = ( ksi( i ) - ksi( i + 1 ) );
        f(i) = sym(s ^ q(i));
        S(i,i)= f(i);
    end
    for i = rr + 1 : r
        q(i) = 0;
        f(i) = 0;
        S(i,i) = 0;
    end
end
```

7. Παραδείγματα πινάκων πραγματικών ρητών συναρτήσεων, υπολογίζοντας την Smith-McMillan μορφή στο άπειρο τρέχοντας τον κώδικα στο MATLAB

Παράδειγμα 7.1

Για τον πίνακα $T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & s^3 & \frac{1}{s^2} \\ s & -\frac{s+1}{s} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}(s)$ η ***Smith-McMillan*** μορφή του στο άπειρο είναι:

```
Command Window
>> main
Δώσε τον αριθμό των γραμμών p:2
Δώσε τον αριθμό των στηλών m:3
Δώσε το  1, 1 στοιχείο του πίνακα:  1/s
Δώσε το  1, 2 στοιχείο του πίνακα:  s^3
Δώσε το  1, 3 στοιχείο του πίνακα:  1/s^2
Δώσε το  2, 1 στοιχείο του πίνακα:  s
Δώσε το  2, 2 στοιχείο του πίνακα:  -(s+1)/s
Δώσε το  2, 3 στοιχείο του πίνακα:  1/(s+2)

final_ksi =

       0
      -3
      -4

Ta q einai:
       3
       1

H Smith Mc Millan μορφή στο άπειρο είναι:
[ s^3, 0, 0]
[   0, s, 0]
```

Σχήμα 7.1 Αποτελέσματα του παραδείγματος

- Όπου ο $T(s)$ έχει δύο πόλους στο $s = \infty$ βαθμού 3 και βαθμού 1 αντίστοιχα.

Παράδειγμα 7.2

Για τον πίνακα $T(s) = \begin{bmatrix} 1 & -s^2 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{3\times3}$ τρέχουμε τον κώδικα στο ***MATLAB*** και μας εμφανίζονται τα παρακάτω:

```
Command Window
>> main
Δώσε τον αριθμό των γραμμών p:3
Δώσε τον αριθμό των στηλών m:3
Δώσε το  1, 1 στοιχείο του πίνακα:  1
Δώσε το  1, 2 στοιχείο του πίνακα:  -s^2
Δώσε το  1, 3 στοιχείο του πίνακα:  s
Δώσε το  2, 1 στοιχείο του πίνακα:  0
Δώσε το  2, 2 στοιχείο του πίνακα:  1
Δώσε το  2, 3 στοιχείο του πίνακα:  0
Δώσε το  3, 1 στοιχείο του πίνακα:  0
Δώσε το  3, 2 στοιχείο του πίνακα:  0
Δώσε το  3, 3 στοιχείο του πίνακα:  0

final_ksi =

       0
      -2
      -1
       0

Ta q einai:
       2
      -1
       0

H Smith Mc Millan μορφή στο άπειρο είναι:
[ s^2,    0, 0]
[    0, 1/s, 0]
[    0,    0, 0]
```

Σχήμα 7.2 Αποτελέσματα του παραδείγματος

- Όπου ο $\mathrm{T}(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = \infty$ βαθμού 2 και ένα μηδενικό στο $s = \infty$ βαθμού 1.

Παράδειγμα 7.3

Για τον πίνακα $T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & s^2 & \frac{(s+1)}{s^3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}(s)$,

```
Command Window
>> main
Δώσε τον αριθμό των γραμμών p:3
Δώσε τον αριθμό των στηλών m:3
Δώσε το  1, 1 στοιχείο του πίνακα:  1/s
Δώσε το  1, 2 στοιχείο του πίνακα:  s^2
Δώσε το  1, 3 στοιχείο του πίνακα:  (s+1)/s^3
Δώσε το  2, 1 στοιχείο του πίνακα:  0
Δώσε το  2, 2 στοιχείο του πίνακα:  1
Δώσε το  2, 3 στοιχείο του πίνακα:  0
Δώσε το  3, 1 στοιχείο του πίνακα:  0
Δώσε το  3, 2 στοιχείο του πίνακα:  0
Δώσε το  3, 3 στοιχείο του πίνακα:  0

final_ksi =

      0
     -2
      0
      0

Ta q einai:
      2
     -2
      0

H Smith Mc Millan μορφή στο άπειρο είναι:
[ s^2,      0, 0]
[   0, 1/s^2, 0]
[   0,      0, 0]
```

Σχήμα 7.3 Αποτελέσματα του παραδείγματος

- Όπου ο $T(s)$ έχει έναν πόλο και ένα μηδενικό στο $s = \infty$ βαθμού 2 αντίστοιχα.

8. Οδηγός χρήσης για την εκτέλεση του κώδικα στο MATLAB

Ο κώδικας του προγράμματος έχει δημιουργηθεί με την έκδοση **R2011a** του ***MATLAB.*** Η εφαρμογή έχει δοκιμαστεί και λειτουργεί και με τις επόμενες έως και την τρέχουσα έκδοση (**R2013a**).

Για την εκτέλεση του κώδικα ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1) Ανοίγουμε το ***MATLAB***. Μέσα από το περιβάλλον του ***MATLAB*** επιλέγουμε ***browse for folder*** και αναζητούμε τον φάκελο μας, που υπάρχει ο κώδικάς μας, δηλαδή τα m files, main.m, calculatefinalksi.m, calculateKsi.m, createSmithInfForm.m και τον επιλέγουμε.

2) Μέσα από το περιβάλλον του ***MATLAB***, βλέπουμε τώρα στο ***Current Folder*** τα αρχεία μας που υπάρχουν στον φάκελο που επιλέξαμε.

3) Γράφουμε στο ***Command Window*** του ***MATLAB*** main και πατάμε Enter.

4) Πατώντας Enter ο κώδικας τρέχει. Δίνουμε στο ***Command Window*** του ***MATLAB*** τους αριθμούς των γραμμών, στηλών του πίνακά μας και εισάγουμε ένα-ένα τα στοιχεία του πίνακα.

5) Δίνοντας και το τελευταίο στοιχείο του πίνακα, εμφανίζονται τα αποτελέσματα των τελικών $\xi_i(T)$, q_i και η ***Smith-McMillan*** μορφή στο άπειρο, $S_{T(s)}^{\infty}$ (βλέπε σχήμα 7.3.1).

Βιβλιογραφία

[1] Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Εφαρμοσμένη Θεωρία Πινάκων, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2003, Κεφ. 1 Χρήσιμες Έννοιες και Αποτελέσματα.

[2] http://users.teiath.gr/ifamelis/downloads/teiathdnld/kef3orizouses.pdf

[3] http://eclass.auth.gr/modules/document/file.php/MATH109/Lecture2.pdf

[4] Σ. Μποζαπαλίδη, Εισαγωγή στη Σύγχρονη Άλγεβρα, Θεσσαλονίκη 2004, Κεφ. 4 Σχέσεις Ισοδυναμίας.

[5] Ε. Ψωμόπουλος, Αλγεβρικές Δομές ΙΙ, Θεσσαλονίκη 2009, Κεφ. 1 Εισαγωγή στη Θεωρία Δακτυλίων, Κεφ. 4.2 Ευκλείδειοι δακτύλιοι.

[6] http://eclass.auth.gr/modules/document/file.php/MATH109/Lecture4.pdf

[7] A.I.G. Vardulakis, Linear Multivariable Control - Algebraic Analysis and Synthesis Methods, John Wiley & Sons, Greece (1991), Chapter 3, Pole and Zero Structure of Rational Matrices at Infinity.

[8] Σ. Κουνιάς – Χ. Μωυσιάδης, Θεωρία Πιθανοτήτων Ι, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1999, Κεφ. 2.4 Συνδυασμοί, διατάξεις, μεταθέσεις, διαταράξεις.

[9] www.mathworks.com

[10] http://www.youtube.com/user/MATLAB

[11] Γ. Γεωργίου – Χ. Ξενοφώντος, Εισαγωγή στη MATLAB, Λευκωσία 2007

[12] http://www.math.utah.edu/lab/ms/matlab/matlab.html

[13] A.I.G. Vardulakis, D.J.N. Limebeer and N. Karcanias, Structure and Smith-McMillan form of a rational matrix at infinity, International Journal of Control, Vol. 35, No. 4, pp. 701-725, 1982.