

Το γενικευμένο πρόβλημα της επανατοποθέτησης πόλων

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Παχή Ελένη, Επιβλέπων: Ν.Καραμπετάκης, Καθηγητής Α.Π.Θ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

May 29, 2016

Το θέμα

- **Το γενικευμένο πρόβλημα της επανατοποθέτησης πόλων** : φάχνουμε να βρούμε έναν ελεγκτή, κανονικό που θα συνδεθεί στο κλειστό σύστημα με ανάδραση εξόδου, και θα κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος, ίσα με τα επιθυμητά.
- Αναγκαία και Ικανή συνθήκη του προβλήματος.

Η δομή

- 1 Χρήσιμοι ορισμοί.
- 2 Δυναμικοί δείκτες, αναλλοίωτοι κάτω απο μετασχηματισμό που περιλαμβάνει ανάδραση εξόδου.
- 3 Εισαγωγή στο πρόβλημα.
- 4 Διαφορετικές περιπτώσεις ικανής και αναγκαίας συνθήκης.
- 5 Παραδείγματα.

Το θέμα

- **Το γενικευμένο πρόβλημα της επανατοποθέτησης πόλων** : φάχνουμε να βρούμε έναν ελεγκτή, κανονικό που θα συνδεθεί στο κλειστό σύστημα με ανάδραση εξόδου, και θα κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος, ίσα με τα επιθυμητά.
- Αναγκαία και Ικανή συνθήκη του προβλήματος.

Η δομή

- 1 Χρήσιμοι ορισμοί.
- 2 Δυναμικοί δείκτες, αναλλοίωτοι κάτω απο μετασχηματισμό που περιλαμβάνει ανάδραση εξόδου.
- 3 Εισαγωγή στο πρόβλημα.
- 4 Διαφορετικές περιπτώσεις ικανής και αναγκαίας συνθήκης.
- 5 Παραδείγματα.

Ισοδυναμία πινάκων

- Δυο ρητοί πίνακες $T_1(s), T_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ είναι **ισοδύναμοι (equivalent)** (στο \mathbb{C}), αν υπάρχουν $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}, T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ αντιστρέψιμοι τέτοιοι ώστε

$$T_L(s) T_1(s) T_R(s) = T_2(s).$$

Smith-McMillan μορφή, αναλλοίωτα πολυώνυμα

- Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ με $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r, r \leq \min\{p, m\}$. Τότε ο $T(s)$ είναι ισοδύναμος (στο \mathbb{C}), με ένα διαγώνιο πίνακα

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}} := \text{diag} \left[\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, 0_{m-r, p-r} \right]$$

όπου $\varepsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{R}[s]$ είναι κανονικοποιημένα και πρώτα πολυώνυμα με το $\varepsilon_i(s)/\varepsilon_{i+1}(s), i = 1, 2, \dots, r-1$ και $\psi_{i+1}(s)/\psi_i(s), i = 1, 2, \dots, r-1$.

- Αν $\psi_i(s) = 1, i \in r \Rightarrow S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$ **Smith μορφή** του $T(s)$ (στο \mathbb{C}).
- Αν $\psi_i(s)$ όχι σταθερά $\Rightarrow S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$ **McMillan μορφή** του $T(s)$ (στο \mathbb{C}).
- Οι ρητές συναρτήσεις $\varepsilon_i(s)/\psi_i(s) =: f_i(s) \in \mathbb{R}(s), i \in r$ είναι ένα σύνολο αναλλοιώτων του $E^{\mathbb{C}}$, όπου $E^{\mathbb{C}}$ ορίζει τη σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}(s)^{p \times m}$, δηλαδή $[T_1(s), T_2(s)] \in E^{\mathbb{C}} \Leftrightarrow T_1(s)$ και $T_2(s)$ έχουν το ίδιο σύνολο $\{f_i(s)\}$, και λέγονται **αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις (invariant rational functions)** του $T(s)$, και τα $\varepsilon_i(s), \psi_i(s)$ **αναλλοίωτα πολυώνυμα (invariant polynomials)**.

Πολυωνυμική (polynomial) Βάση

- Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$, $p \geq m = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s)$ και ο ρητός διανυσματικός χώρος, $Y(s)$, που ορίζεται από τις στήλες $t_j(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times 1}$, $j \in m$ του $T(s)$. Τότε ο πίνακας $T(s)$ είναι μια βάση του $Y(s)$, και αν $T_1(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times m}$, $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T_1(s) = m$ τότε

$$\bar{T}(s) := T(s) T_1(s) \mathbb{R}(s)^{p \times m} \quad (1)$$

είναι επίσης μια βάση του $Y(s)$.

- Έστω ότι

$$T(s) = B(s) A(s)^{-1}$$

όπου $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$, $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ με $\text{rank}_{\mathbb{R}[s]} B(s) = m$. Τότε από την (1), ο $B(s)$ είναι μια βάση του $Y(s)$, η **πολυωνυμική**.

Κανονική (normal) Βάση

- Έστω μια πολυωνυμική βάση $B(s)$ του $Y(s)$, μπορούμε να αναδιατάξουμε τις στήλες $b_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$, $j \in m$, έτσι ώστε ο $\hat{B}(s) := B(s) Q$ όπου $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $|Q| \neq 0$, θα έχει στήλες $\hat{b}_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$, $j \in m$, που θα έχουν την διάταξη,

$$\deg \hat{b}_1(s) \geq \deg \hat{b}_2(s) \geq \dots \geq \deg \hat{b}_m(s).$$

Έτσι $\hat{B}(s)$ είναι **κανονική (normal)** βάση του $Y(s)$.

Ελεύθερο $\mathbb{R}[s]$ –πρότυπο (free $\mathbb{R}[s]$ –module) : M

- Έστω $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ μια πολυωνυμική βάση του ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$, κι έστω M όλων των πολυωνυμικών διανυσμάτων $t(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$, τα οποία μπορούν να γραφούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί πάνω στο δακτύλιο $\mathbb{R}[s]$, των στηλών $b_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$, $j \in m$ της $B(s)$. Τότε το σύνολο M είναι **ένα ελεύθερο $\mathbb{R}[s]$ –πρότυπο** και οι (στήλες) του $B(s)$ μια βάση του M .

Ελάχιστης Συμπλεκτικότητας (least complexity) Βάση

- Μια βάση κανονική (κατά γραμμές ή στήλες) $\bar{B}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ του $\mathbb{R}[s]$ – πρότυπου M ορίζεται ως βάση **ελάχιστης συμπλεκτικότητας** (γραμμικών ή στηλών) του M .

Αναλλοίωτοι ελάχιστοι βαθμοί των στηλών (invariant minimal column degrees)

- Οι διετεταγμένοι βαθμοί των στηλών $v_j := \deg \hat{b}_j(s) \in \mathbb{N}$,

$$v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_m$$

μιας κανονικής κατά στήλες και κανονικής βάσης $\hat{B}(s) = [\hat{b}_1(s), \hat{b}_2(s), \dots, \hat{b}_m(s)]$ του M , είναι οι **αναλλοίωτοι ελάχιστοι βαθμοί των στηλών** του M .

Παράδειγμα

- Έστω η πολυωνυμική βάση

$$B(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^3 & (s+1)^2 \\ s & 1 \\ -(s+1) & 0 \end{bmatrix} = [b_1(s), b_2(s)]$$

με $\deg b_1(s) = 3, \deg b_2(s) = 2, c_c(B) = 3 + 2 = 5 > 3 = \deg B(s)$.

- ο $B(s)$ δεν είναι κανονικός κατά στήλες \Rightarrow πολλαπλασιάζουμε από τα δεξιά με έναν αντιστρέψιμο πίνακα $U(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$ και έχουμε την κανονική κατά στήλες και κανονική βάση :

$$\hat{B}(s) = [\hat{b}_1(s), \hat{b}_2(s)] = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = B(s)U(s)$$

με $\deg \hat{b}_1(s) = 2, \deg \hat{b}_2(s) = 1, c_c(\hat{B}) = 2 + 1 = 3 = \deg \hat{B}(s) = \deg B(s)$.

- $v_1 = 2, v_2 = 1$ είναι οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι βαθμοί των στηλών του $\mathbb{R}[s]$ -προτύπου M .

Βάση Ελάχιστου Βαθμού (least degree)

- Έστω $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ του $Y(s)$ κι έστω ότι ο $B(s)$ δεν είναι αριστερά αντιστρέψιμος. Έστω ακόμη

$$B(s) = B_i(s) Q_i(s), i = 1, 2, \dots$$

όπου $Q_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}, i = 1, 2, \dots$ δεξιοί κοινοί διαιρέτες, μη αντιστρέψιμοι και όχι απαραίτητα μέγιστοι με βαθμούς $1 \leq \deg Q_1 \leq \deg Q_2 \leq \dots$

- Τότε για τα $\mathbb{R}[s]$ -πρότυπα $M_{B_i}, i = 1, 2, \dots$ που παράγονται από τις στήλες των $B_i(s), i = 1, 2, \dots$, ισχύει $M_B \subset M_{B_1} \subset \dots \subset M_{B_i}, i = 1, 2, \dots$
- Αφού $\deg B(s)$ είναι πεπερασμένος θα υπάρχει $i = \mu \in \mathbb{Z}^+$ έτσι ώστε ο $Q_\mu(s) =: Q_{GR}(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ να είναι ένας μέγιστος κοινός δεξιός διαιρέτης των γραμμών του $B(s)$

$$B(s) = B_\mu(s) Q_{GR}(s)$$

για κάποιον αριστερά αντιστρέψιμο πολυωνυμικό πίνακα $B_\mu(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$.

- Έτσι για το ελεύθερο $\mathbb{R}[s]$ -πρότυπο M^* ισχύει $M_B \subset M_{B_1} \subset \dots \subset M_{B_\mu} =: M^*$.
- Έτσι μια αριστερά αντιστρέψιμη πολυωνυμική βάση $B_\mu(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ του $\mathbb{R}[s]$ -προτύπου M^* , ορίζεται ως **ελάχιστου βαθμού** πολυωνυμική βάση του ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$.
- Έστω μια κανονική και ελάχιστης, κατά στήλες, συμπλεκτικότητα βάση

$$\hat{B}_\mu(s) = [\hat{b}_{\mu 1}(s), \hat{b}_{\mu 2}(s), \dots, \hat{b}_{\mu m}(s)] \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$$

του M^* , τότε οι $\eta_j := \deg \hat{b}_{\mu j}(s) \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, m$, δηλαδή οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι βαθμοί των στηλών του M^* , για τους οποίους $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_m$, είναι οι μικρότεροι μεταξύ όλων των βαθμών των στηλών των πολυωνυμικών βάσεων του $Y(s)$.

Ελάχιστη Βάση (minimal basis), Ελάχιστοι Δείκτες (minimal indices)

- Μια πολυωνυμική βάση ενός ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$ που είναι ελάχιστου βαθμού (αριστερά αντιστρέψιμη) και ελάχιστης συμπλεκτικότητας (κανονική κατά στήλες) ορίζεται ως μια **ελάχιστη βάση** του $Y(s)$.
- Οι βαθμοί των στηλών $\eta_i \in \mathbb{N}$ μιας ελάχιστης βάσης $\hat{B}_\mu(s)$ ενός ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$, ορίζονται ως **αναλλοιώτοι ελάχιστοι δείκτες** του Forney ή αλλιώς ως **δείκτες του Kronecker**.

Παράδειγμα

- Έστω

$$\hat{B}(s) = [\hat{b}_1(s), \hat{b}_2(s)] = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$v_1 = \deg \hat{b}_1(s) = 2 > 1 = \deg \hat{b}_2(s) = v_2$, που είναι κανονικός κατά στήλες αλλά όχι αριστερά αντιστρέψιμος.

- Τότε

$$\hat{B}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =: \hat{B}_1(s) Q(s)$$

όπου $Q(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ο μέγιστος κοινός δεξιός διαιρέτης των γραμμών του $\hat{B}(s)$ και $\hat{B}_1(s) = [\hat{b}_{11}(s), \hat{b}_{12}(s)]$ είναι αριστερά αντιστρέψιμος και κανονικός κατά στήλες.

Ελάχιστη Βάση (minimal basis), Ελάχιστοι Δείκτες (minimal indices)

- Μια πολυωνυμική βάση ενός ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$ που είναι ελάχιστου βαθμού (αριστερά αντιστρέψιμη) και ελάχιστης συμπλεκτικότητας (κανονική κατά στήλες) ορίζεται ως μια **ελάχιστη βάση** του $Y(s)$.
- Οι βαθμοί των στηλών $\eta_i \in \mathbb{N}$ μιας ελάχιστης βάσης $\hat{B}_\mu(s)$ ενός ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$, ορίζονται ως **αναλλοιώτοι ελάχιστοι δείκτες** του Forney ή αλλιώς ως **δείκτες** του Kronecker.

Παράδειγμα

- Έστω

$$\hat{B}(s) = [\hat{b}_1(s), \hat{b}_2(s)] = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$\nu_1 = \deg \hat{b}_1(s) = 2 > 1 = \deg \hat{b}_2(s) = \nu_2$, που είναι κανονικός κατά στήλες αλλά όχι αριστερά αντιστρέψιμος.

- Τότε

$$\hat{B}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =: \hat{B}_1(s) Q(s)$$

όπου $Q(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ο μέγιστος κοινός δεξιός διαιρέτης των γραμμών του $\hat{B}(s)$ και $\hat{B}_1(s) = [\hat{b}_{11}(s), \hat{b}_{12}(s)]$ είναι αριστερά αντιστρέψιμος και κανονικός κατά στήλες.

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έστω το πρότυπο $M_{\hat{B}}$ που παράγεται από τις στήλες $\hat{b}_1(s), \hat{b}_2(s)$ του $\hat{B}(s)$ και το πρότυπο $M_{\hat{B}_1}$ που παράγεται από τις στήλες $\hat{b}_{11}(s), \hat{b}_{12}(s)$ του $\hat{B}_1(s)$ με $M_{\hat{B}} \subset M_{\hat{B}_1}$, αφού

$$\hat{b}_1(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} (s+1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ s+1 \end{bmatrix} 1$$

- Το $\hat{B}_1(s)$ είναι τότε μια ελάχιστη βάση του $Y(s)$.
- Οι $\eta_1 := \deg \hat{b}_{11}(s) = 1 < \nu_1 = 2$, $\eta_2 := \deg \hat{b}_{12}(s) = 1 = \nu_1$ είναι οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι δείκτες του $Y(s)$.

Αναλλοίωτοι ελάχιστοι δυναμικοί δείκτες (invariant minimal dynamical indices)

- Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ και

$$T(s) = B_2(s)A_2(s)^{-1} = \bar{B}_2(s)\bar{A}_2(s)^{-1}$$

με $A_2(s), \bar{A}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ κανονικοί κατά στήλες και $B_2(s), \bar{B}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$.
Τότε

$$A_2(s) = \bar{A}_2(s)V(s)$$

για $V(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έστω το πρότυπο $M_{\hat{B}}$ που παράγεται από τις στήλες $\hat{b}_1(s), \hat{b}_2(s)$ του $\hat{B}(s)$ και το πρότυπο $M_{\hat{B}_1}$ που παράγεται από τις στήλες $\hat{b}_{11}(s), \hat{b}_{12}(s)$ του $\hat{B}_1(s)$ με $M_{\hat{B}} \subset M_{\hat{B}_1}$, αφού

$$\hat{b}_1(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} (s+1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ s+1 \end{bmatrix} 1$$

- Το $\hat{B}_1(s)$ είναι τότε μια ελάχιστη βάση του $Y(s)$.
- Οι $\eta_1 := \deg \hat{b}_{11}(s) = 1 < \nu_1 = 2$, $\eta_2 := \deg \hat{b}_{12}(s) = 1 = \nu_1$ είναι οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι δείκτες του $Y(s)$.

Αναλλοίωτοι ελάχιστοι δυναμικοί δείκτες (invariant minimal dynamical indices)

- Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ και

$$T(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1} = \bar{B}_2(s) \bar{A}_2(s)^{-1}$$

με $A_2(s), \bar{A}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ κανονικοί κατά στήλες και $B_2(s), \bar{B}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$.
Τότε

$$A_2(s) = \bar{A}_2(s) V(s)$$

για $V(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$.

Αναλλοίωτοι ελάχιστοι δυναμικοί δείκτες (invariant minimal dynamical indices)

- Έστω, ότι οι $A_2(s), \bar{A}_2(s)$ είναι κανονικοί πολυωνυμικοί πίνακες. Τότε θα είναι κανονικές και κανονικές κατά στήλες βάσεις του προτύπου M που παράγεται από τις στήλες τους, με $\deg a_j(s) = \deg \bar{a}_j(s), j \in m$, όπου $a_j(s), \bar{a}_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1}$.
- Τότε οι $\eta_j = \deg a_j(s), j \in m$ είναι αναλλοίωτοι του $T(s)$.
- Και ορίζονται ως **αναλλοίωτοι ελάχιστοι δυναμικοί κατά στήλες δείκτες** του πίνακα $T(s)$.

Παράδειγμα

- Έστω

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{2 \times 2}.$$

Ισχύει

$$T(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ (s+3)(s+1) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s+1 \\ (s+2)^2(s+1) & -(s+2) \end{bmatrix}^{-1} = B_2(s)A_2(s)^{-1}.$$

με τον $A_2(s)$ να είναι κανονικός κατά στήλες, αφού $[A_2(s)]_C^h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ και $\text{rank}_{\mathbb{R}}[A(s)]_C^h = 2$.

- Τότε οι $\eta_1 = 3, \eta_2 = 1$ είναι οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι δυναμικοί κατά στήλες δείκτες του $T(s)$.

Αναλλοίωτοι ελάχιστοι δυναμικοί δείκτες (invariant minimal dynamical indices)

- Έστω, ότι οι $A_2(s), \bar{A}_2(s)$ είναι κανονικοί πολυωνυμικοί πίνακες. Τότε θα είναι κανονικές και κανονικές κατά στήλες βάσεις του προτύπου M που παράγεται από τις στήλες τους, με $\text{deg} a_j(s) = \text{deg} \bar{a}_j(s), j \in m$, όπου $a_j(s), \bar{a}_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1}$.
- Τότε οι $\eta_j = \text{deg} a_j(s), j \in m$ είναι αναλλοίωτοι του $T(s)$.
- Και ορίζονται ως **αναλλοίωτοι ελάχιστοι δυναμικοί κατά στήλες δείκτες** του πίνακα $T(s)$.

Παράδειγμα

- Έστω

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{2 \times 2}.$$

Ισχύει

$$T(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ (s+3)(s+1) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s+1 \\ (s+2)^2(s+1) & -(s+2) \end{bmatrix}^{-1} = B_2(s)A_2(s)^{-1}.$$

με τον $A_2(s)$ να είναι κανονικός κατά στήλες, αφού $[A_2(s)]_C^h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ και $\text{rank}_{\mathbb{R}}[A(s)]_C^h = 2$.

- Τότε οι $\eta_1 = 3, \eta_2 = 1$ είναι οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι δυναμικοί κατά στήλες δείκτες του $T(s)$.

Δείκτες ελεγχιμότητας (controllability indices)

- Έστω $A, n \times n$ και $B, n \times p$ κι έστω ότι το (A, B) είναι ελέγξιμο με πίνακα ελεγχιμότητας τον

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

που έχει τάξη n , και συνεπώς n γραμμικά ανεξάρτητες στήλες.

- Μπορούμε να βρούμε n τέτοιες στήλες στον $C_k = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{k-1}B], 1 \leq k \leq n$.
- Τότε το μικρότερο k , έστω μ , για το οποίο ο C_k έχει τάξη n , λέγεται **δείκτης ελεγχιμότητας** του (A, B) .
- Έστω ότι

$$C = [\begin{matrix} b_1 b_2 \dots b_p & Ab_1 Ab_2 \dots Ab_p & A^2 b_1 A^2 b_2 \dots A^2 b_p & \dots & A^{n-1} b_1 A^{n-1} b_2 \dots A^{n-1} b_p \end{matrix}]$$

αναδιατάσσοντας τις γραμμικά ανεξάρτητα στήλες έχουμε

$$[\begin{matrix} b_1 Ab_1 \dots A^{\mu_1-1} b_1 & b_2 Ab_2 \dots A^{\mu_2-1} b_2 & \dots & b_p Ab_p \dots A^{\mu_p-1} b_p \end{matrix}]$$

με μ_i είναι ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητα στηλών.

- Το σύνολο $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ θα είναι οι **δείκτες ελεγχιμότητας** ου (A, B) .
- Όμοια για τους **δείκτες παρατηρησιμότητας**, αν θεωρήσουμε τον ανάστροφο του

πίνακα παρατηρησιμότητας $O = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$.

Ορισμός

- Έστω το σύστημα με ελάχιστη τάξη, στο πεδίο Laplace,

$$\begin{aligned} sx &= Ax + Bu \\ y &= Cx + D(s)u \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} sI - A & B \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -u \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

όπου $A, B, C \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ και $D(s) \in \mathbb{R}[s]$.

- Οι δείκτες ελεγχιμότητας είναι αναλλοίωτοι κάτω από τον μετασχηματισμό :

$$1. x_1 = Hx$$

$$2. u_1 = Ku$$

$$3. u_2 = u + Fx$$

όπου H, K ομαλοί πίνακες.

- Προκύπτει αν $D(s) = 0$, ότι

$$G(s) = C(sI - A + BF)^{-1} BK^{-1}$$

- Αν G κανονική οι δυναμικοί δείκτες ταυτίζονται με τους δείκτες ελεγχιμότητας.

Στόχος

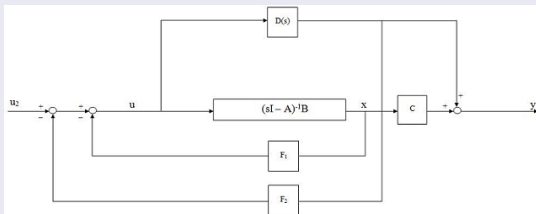
- Να δείξουμε ότι αν η G είναι κανονική, οι δυναμικοί δείκτες ταυτίζονται με τους δείκτες ελεγχιμότητας και όταν η G είναι αυστηρά κανονική παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από τον μετασχηματισμό :

$$\mathcal{F}_1: x_1 = Hx, \text{ όπου } H \in \mathbb{R} \text{ ένας ομαλός πίνακας}$$

$$\mathcal{F}_2: u_1 = Ku, \text{ όπου } K \in \mathbb{R} \text{ ένας ομαλός πίνακας}$$

$$\mathcal{F}_3: u_2 = u + F_1 x + F_2 D(s)u, \text{ όπου } F_1, F_2 \in \mathbb{R}$$

που περιέχει ανάδραση εξόδου, όπως φαίνεται :



Ορισμός

Αν

$$\begin{aligned} T(s)\xi &= U(s)u \\ y &= V(s)\xi + W(s)u \end{aligned} \quad (3)$$

όπου $T^{r \times r}$, $U^{r \times l}$, $V^{m \times r}$, $W^{m \times l} \in \mathbb{R}[s]$ και $n = \text{τάξη} = \deg |T(s)|$, $r = \text{διάσταση του } T$ έχουμε την

$$G(s) = V(s)T^{-1}(s)U(s) + W(s)$$

- πίνακας συστήματος της (3) ορίζεται ο

$$P = \begin{bmatrix} T(s) & U(s) \\ -V(s) & W(s) \end{bmatrix}$$

- βαθμός του συστήματος d , ο μεγαλύτερος που βρίσκουμε μεταξύ των όρων

$$P], P_{j_1}^{i_1}], P_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}], \dots$$

δηλαδή, ο όρος $P_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}]$ αποτελείται από τις $1, 2, \dots, r, r + i_1, r + i_2$ γραμμές και τις $1, 2, \dots, r, r + j_1, r + j_2$ στήλες του πίνακα P , και συγκεκριμένα $P] = |T|$.

Συμπεράσματα

- 1 ο P έχει **ελάχιστο βαθμό**, όταν ο βαθμός του d ισούται με το βαθμό $\delta(G)$ της McMillan μορφής της G
- 2 $G(s)$ κανονική αν και μόνο αν $d = n$
- 3 αν $c = d$, όπου c η συμπλεκτικότητα, τότε ο P έχει την **ελάχιστη συμπλεκτικότητα**.
- 4 αν $c = \delta(G)$, τότε ο P **ελάχιστος**

Ισοδυναμία

Δυο πίνακες συστημάτων P, P_1 είναι αυστηρά ισοδύναμοι όταν ισχύει :

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) & U(s) \\ -V(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(s) & U_1(s) \\ -V_1(s) & W_1(s) \end{bmatrix}$$

όπου $M(s), N(s), X(s), Y(s) \in \mathbb{R}[s]$ και $M(s), N(s)$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες.

Συμπεράσματα

- 1 ο P έχει **ελάχιστο βαθμό**, όταν ο βαθμός του d ισούται με το βαθμό $\delta(G)$ της McMillan μορφής της G
- 2 $G(s)$ κανονική αν και μόνο αν $d = n$
- 3 αν $c = d$, όπου c η συμπλεκτικότητα, τότε ο P έχει την **ελάχιστη συμπλεκτικότητα**.
- 4 αν $c = \delta(G)$, τότε ο P **ελάχιστος**

Ισοδυναμία

Δυο πίνακες συστημάτων P, P_1 είναι **αυστηρά ισοδύναμοι** όταν ισχύει :

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) & U(s) \\ -V(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(s) & U_1(s) \\ -V_1(s) & W_1(s) \end{bmatrix}$$

όπου $M(s), N(s), X(s), Y(s) \in \mathbb{R}[s]$ και $M(s), N(s)$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες.

Συμπέρασμα

- Από την ισοδυναμία έχουμε

$$P'(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & T(s) & I \\ 0 & -V(s) & D(s) \end{bmatrix}$$

με T, V σχετικά δεξιά πρώτα και με $G(s) = V(s)T^{-1}(s) + D(s)$. Ακόμη προκύπτει ότι

$$P(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & T(s) & I \\ 0 & -[V(s) + D(s)T(s)] & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & T(s) & I \\ 0 & -V_1(s) & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

με

$$Q(s) = \begin{bmatrix} T(s) \\ -[V(s) + D(s)T(s)] \end{bmatrix}$$

οπότε αν $Q(s), Q'(s)$ δυο ελάχιστες βάσεις, οι βαθμοί των στηλών δ_i του Q είναι ίδιες με τους αντίστοιχους βαθμούς δ'_i του Q' (δυναμικοί δείκτες) και θα ορίζουν τον ίδιο διανυσματικό χώρο \Rightarrow όλοι οι ελάχιστοι πίνακες συστημάτων $P(4)$, έχουν το ίδιο σύνολο δυναμικών δεικτών $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l$ (αν η G κανονική είναι ακριβώς οι δείκτες ελεγχιμότητας).

Απόδειξη

Έστω

$$G_C = C(sI - A)^{-1} B = G(s) - D(s), m \times l \Rightarrow G_C(s) = V_C(s) T^{-1}(s)$$

$$G_F(s) = F_1(sI - A)^{-1} B, l \times l \Rightarrow G_F(s) = V_F(s) T^{-1}(s)$$

με V_C, T και V_F, T σχετικά πρώτοι. Ο παρακάτω πίνακας συστήματος

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & TM & I \\ 0 & -(V_C + DT)M & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

είναι ελάχιστος και οι βαθμοί των στηλών του, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l$ είναι οι δυναμικοί δείκτες της G .

- ο \mathcal{F}_1 αφήνει τη G αμετάβλητη
- ο \mathcal{F}_2 αντικαθιστά τη G με τη $GK^{-1} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & KTM & I \\ 0 & -(V_C + DT)M & 0 \end{bmatrix}$$

που είναι ελάχιστο.

Απόδειξη

- ο \mathcal{F}_3 αντικαθιστά το σύστημα (2) με το

$$\begin{bmatrix} sI - A & B & 0 & 0 \\ C & D(s) & I & 0 \\ F_1 & -F_2 D(s) - I & 0 & I \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -u \\ y \\ -u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -y \end{bmatrix} \quad (6)$$

κι αν θέσουμε $x = (sI - A)^{-1} Bu$ έχουμε

$$u = (I + G_F + F_2 D(s))^{-1} u_2$$

και συνάρτηση μεταφοράς

$$(G_C + D)(I + G_F + F_2 D)^{-1} = (V_C + DT)(T + V_F + F_2 DT)^{-1} \quad (7)$$

που προκύπτει από τον

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & (T + V_F + F_2 DT)M & I \\ 0 & -(V_C + DT)M & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ο οποίος έχει την ίδια τάξη με αυτή του (6), δηλ. ελάχιστη.

Απόδειξη

Οι βαθμοί της δεύτερης στήλης του (8) είναι

$$\begin{bmatrix} (T + V_F - F_2 V_C) M \\ -(V_C + DT) M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I + G_F - F_2 G_C) TM \\ -(V_C + DT) M \end{bmatrix}$$

κι έστω η i -οστή στήλη έχει βαθμό p_i , τότε

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} TM \\ -(V_C + DT) M \end{bmatrix} \text{diag}(s^{-p_i}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} (I + G_F - F_2 G_C) TM \\ -(V_C + DT) M \end{bmatrix} \text{diag}(s^{-p_i}) \quad (9)$$

κι άρα $p_i = \delta_i, i = 1, 2, \dots, l$. Ακόμη από (9) ο συντελεστής του s^{δ_i} είναι ίδιος με αυτόν του (5).

Άρα

- οι (5) και (8) έχουν ελάχιστη συμπλεκτικότητα
- οι δ_i είναι οι δυναμικοί δείκτες της (7)
- αναλλοίωτοι κάτω από τον \mathcal{F}_3

Παράδειγμα

Έστω

$$\begin{bmatrix} s+1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ F_1 & F_2-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

με $A = s+1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = -1$. Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$G = \frac{y}{u_2} = \frac{Cx + D(s)u}{u + F_1x + F_2D(s)u}$$

και θέτοντας $x = (sI - A)^{-1}Bu$, έχουμε

$$G = \frac{C(sI - A)^{-1}Bu + D(s)u}{u + F_1(sI - A)^{-1}Bu + F_2D(s)u} = \frac{G_C + D(s)}{I + G_F + F_2D(s)}$$

- αν $F_1 = F_2 = -1$

$$G = \frac{\frac{2}{s+1} - 1}{1 - \frac{2}{s+1} + 1} = \frac{-s+1}{2s-2+2} = \frac{-(s-1)}{2s}$$

$$\text{με } \delta_1 = 1 \text{ και τάξη } \left| \begin{array}{cc} s+1 & 2 \\ -1 & -2 \end{array} \right| = |-2s-2+2| = |-2s|.$$

Παράδειγμα

- αν $F_1 = F_2 = 0$

$$G = \frac{\frac{2}{s+1} - 1}{1} = \frac{-(s-1)}{s+1}$$

με $\delta_1 = 1$ και τάξη $\left| \begin{array}{cc} s+1 & 2 \\ 0 & -1 \end{array} \right| = |-s-1|$.

- αν $F_1 = 0, F_2 = 1$

$$|T(s)| = \left| \begin{array}{ccc} s+1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0$$

οπότε οι πίνακες αυτοί πρέπει να εξαιρεθούν από τον \mathcal{F}_3 .

- Αν $F_1 = 1, F_2 = 2$ τότε αν αφαιρέσουμε τη δεύτερη στήλη από την πρώτη, βλέπουμε ότι η πρώτη διαιρείται από το $s-1$, δηλαδή τα T, V δεν είναι σχετικά πρώτα άρα κι αυτά πρέπει να εξαιρεθούν από τον \mathcal{F}_3 .

Ιδιότητες

Έστω το

$$\left. \begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \right\}$$

όπου $x, u, y \in \mathbb{R}$ και $E, A, B, C \in \mathbb{R}(s)$ με E πιθανώς μη ομαλό και με πίνακα συστήματος

$$P(s) = \begin{bmatrix} sE - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

με $|sE - A| \neq 0$.

- Το σύνολο των μετασχηματισμών (μη κανονικές $G(s)$)

$$\mathcal{S}_1 : x_1 = Hx, \text{ όπου } H \text{ ομαλός πίνακας πάνω στο } \mathbb{R}$$

$$\mathcal{S}_2 : u_1 = Ku, \text{ όπου } K \text{ ομαλός πίνακας πάνω στο } \mathbb{R}$$

$$\mathcal{S}_3 : u_2 = u + Fx, \text{ όπου } F \text{ πίνακας πάνω στο } \mathbb{R}$$

αφήνει τους ελάχιστους δείκτες αναλλοίωτους και αν το σύστημα δεν έχει αποσυσζευκτικά μηδενικά, ταυτίζονται με τους δυναμικούς.

Ιδιότητες

Αν

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + B_1 u \\ y &= C_1 x + D(s) u \end{aligned} \right\}$$

όπου $x, u, y \in \mathbb{R}$, $A_1, B_1, C_1 \in \mathbb{R}(s)$ και $D(s) \in \mathbb{R}[s]$.

- Το σύνολο το μετασχηματισμών

$$\mathcal{S}'_1 : x_1 = H_1 x, \text{ όπου } H \text{ ομαλός πίνακας πάνω στο } \mathbb{R}$$

$$\mathcal{S}'_2 : u_1 = K u, \text{ όπου } K \text{ ομαλός πίνακας πάνω στο } \mathbb{R}$$

$$\mathcal{S}'_3 : u_2 = u + F_1 x + F_2 D(s) u, \text{ όπου } F_1, F_2 \text{ πίνακες πάνω στο } \mathbb{R}$$

αναφέρεται στους δυναμικούς δείκτες με F_1, F_2 τέτοιοι ώστε το σύστημα που θα προκύψει, να είναι καλά ορισμένο και να έχει ελάχιστη τάξη

- $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$

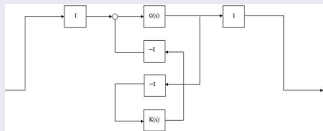
Ορισμός

Έστω την $G = T_G^{-1}U_G$, με T_G, U_G σχετικά αριστερά πρώτοι, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_l$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$ και τον

$$P_G(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & T_G(s) & U_G(s) \\ 0 & -I & 0 \end{bmatrix}$$

και ένα δεύτερο σύστημα με $K = T_K^{-1}U_K$ και

$$P_K(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & T_K(s) & U_K(s) \\ 0 & -I & 0 \end{bmatrix}$$



και λόγω της ισοδυναμίας έχουμε

$$P_C(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_G & U_G & U_G \\ 0 & -U_K & T_K & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_C & U_C \\ -V_C & 0 \end{bmatrix}, |T_C(s)| \neq 0 \quad (10)$$

Ορισμός

Έστω ακόμη την Smith μορφή

$$S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{l-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \phi_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

με το ϕ_i να διαιρεί το $\phi_{i-1}, i = 1, 2, \dots, l$.

- αν υπάρχει ένας κανονικός, ρητός πίνακας $K = T_K^{-1}U_K, l \times m$, ο οποίος αν εφαρμοστεί με ανάδραση στο σύστημα να κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του συστήματος ίσα με τα ϕ_i . Η αλλιώς τη Smith μορφή του πίνακα $T_C(s)$ ίση με τη $S(s)$.
- η “καλύτερη” ικανή συνθήκη για να ισχύει

Ορισμός

Έστω ακόμη την Smith μορφή

$$S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{l-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \phi_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

με το ϕ_i να διαιρεί το $\phi_{i-1}, i = 1, 2, \dots, l$.

- αν υπάρχει ένας κανονικός, ρητός πίνακας $K = T_K^{-1}U_K, l \times m$, ο οποίος αν εφαρμοστεί με ανάδραση στο σύστημα να κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του συστήματος ίσα με τα ϕ_i . Ή αλλιώς τη Smith μορφή του πίνακα $T_C(s)$ ίση με τη $S(s)$.
- η “καλύτερη” ικανή συνθήκη για να ισχύει

Αναγκαία Συνθήκη

- Έστω $G = T_G^{-1}U_G$, $m \times l$ αυστηρά κανονική με T_G, U_G σχετικά αριστερά πρώτοι, και $K = T_K^{-1}U_K$ κανονικός.
- Έστω ακόμη, η Smith μορφή του πίνακα T_C της σχέσης (10) να είναι η (11).
- Τότε οι βαθμοί $\delta(\phi_i)$ των ϕ_i ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη

$$\sum_{i=1}^k \delta(\phi_i) \geq \max \left(\sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{K, l+1-i}), \sum_{i=1}^k (\lambda_{G, l+1-i} + \mu_{K_i}) \right), k=1, 2, \dots, l$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$, αν και μόνο αν T_K, U_K είναι σχετικά αριστερά πρώτοι.

Ικανή Συνθήκη

Έστω $G = T_G^{-1} U_G$, $m \times l$ με $l \leq m$, δείκτες ελεγχιμότητας τους $\lambda_{G1} \geq \dots \geq \lambda_{Gl}$ και παρατηρησιμότητας τους $\mu_{G1} \geq \dots \geq \mu_{Gm}$. Ακόμη T_G, U_G σχετικά αριστεροί πρώτοι και έστω ϕ_i κανονικοποιημένα πολυώνυμα με το ϕ_i να διαιρεί το ϕ_{i-1} , $i = 1, 2, \dots, l$. Τότε **ικανή συνθήκη** για την ύπαρξη κανονικού $l \times m$ ρητού πίνακα $K = T_K^{-1} U_K$, έτσι ώστε η Smith μορφή του πίνακα T_C που θα προκύψει στη σχέση (10) να είναι η (11), είναι η :

$$\sum_{i=1}^k \delta(\phi_i) \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{Gi} + \mu_{G1} - 1), k = 1, 2, \dots, l \quad (12)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$.

Απόδειξη

Έστω $G = V_G \tilde{T}_G^{-1}$, όπου V_G, \tilde{T}_G σχετικά δεξιά πρώτοι με την i στήλη του $\begin{bmatrix} -V_G \\ \tilde{T}_G \end{bmatrix}$

να έχει βαθμό λ_{Gi} , και T_G, U_G τέτοια ώστε η i γραμμή του $\begin{pmatrix} T_G & U_G \end{pmatrix}$ να έχει βαθμό μ_{Gi} .

Κατασκευάζουμε ομαλό $l \times l$ πολυωνυμικό πίνακα Φ , με Smith μορφή την

$$S = \begin{bmatrix} \phi_l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_{l-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \phi_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

που ικανοποιεί την $\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\text{diag}(s^{-\alpha_i}) \Phi(s) \text{diag}(s^{-\beta_i}) \right] = I$ με $\alpha_i = \mu_{G1} - 1, \beta_i = \lambda_{Gi}$.

Απόδειξη

Επιλέγουμε

$$\begin{pmatrix} -U_K & T_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi M^{-1} X - Q T_G & \Phi M^{-1} Y - Q U_G \end{pmatrix}$$

με κάθε στοιχείο του U_K να έχει βαθμό μικρότερο από το μ_{G1} .
Οπότε το όριο

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag} \left[s^{-(\mu_{G1}-1)} \right] \begin{bmatrix} -U_K & \Phi \text{diag} \left(s^{-\lambda_{Gi}} \right) \end{bmatrix}$$

υπάρχει (κατασκευή του Φ), κι άρα ο $K = T_K^{-1} U_K$ υπάρχει και είναι κανονικός η Smith μορφή του πίνακα T_C που θα προκύψει στη σχέση (10) να είναι η (13) που ισούται με αυτή του πίνακα $U_K V_G + T_K \tilde{T}_G = \Phi$.

Παρατηρήσεις

- 1 Η επιλογή γίνεται με τον U_K να έχει κάποιες ιδιότητες.
- 2 Ανάλογο αποτέλεσμα αν αντιστραφούν οι ρόλοι των $\lambda_{Gi}, \mu_{Gi}, \lambda_{Ki}, \mu_{Ki}$.
- 3 Μπορεί να υπάρχει μικρότερο $n_K = \delta(|T_K|) = \sum_{i=1}^l (\mu_{G1} - 1)$ από αυτό που δίνει η (12).

Απόδειξη

Επιλέγουμε

$$\begin{pmatrix} -U_K & T_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi M^{-1} X - Q T_G & \Phi M^{-1} Y - Q U_G \end{pmatrix}$$

με κάθε στοιχείο του U_K να έχει βαθμό μικρότερο από το μ_{G1} .
Οπότε το όριο

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag} \left[s^{-(\mu_{G1}-1)} \right] \begin{bmatrix} -U_K & \Phi \text{diag} \left(s^{-\lambda_{Gi}} \right) \end{bmatrix}$$

υπάρχει (κατασκευή του Φ), κι άρα ο $K = T_K^{-1} U_K$ υπάρχει και είναι κανονικός η Smith μορφή του πίνακα T_C που θα προκύψει στη σχέση (10) να είναι η (13) που ισούται με αυτή του πίνακα $U_K V_G + T_K \tilde{T}_G = \Phi$.

Παρατηρήσεις

- 1 Η επιλογή γίνεται με τον U_K να έχει κάποιες ιδιότητες.
- 2 Ανάλογο αποτέλεσμα αν αντιστραφούν οι ρόλοι των $\lambda_{Gi}, \mu_{Gi}, \lambda_{Ki}, \mu_{Ki}$.
- 3 Μπορεί να υπάρχει μικρότερο $n_K = \delta(|T_K|) = \sum_{i=1}^l (\mu_{G1} - 1)$ από αυτό που δίνει η (12).

Αναγκαία Συνθήκη

- Έστω το πρόβλημα όπως ορίστηκε. Το σύστημα έχει αναλλοίωτα πολυώνυμα $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l$ με το ϕ_i να διαιρεί το $\phi_{i-1}, i = 1, 2, \dots, l$.
- Τότε θα ισχύει

$$\sum_{i=1}^k \deg \phi_i \geq \max_{1 \leq j \leq m} \binom{m}{k} S_j^k, k = 1, 2, \dots, l$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$, όπου

$$S_j^k = \sum_{a=1}^k \lambda_{G_{j_a}} + \mu_{G_l - j_a} + 1, j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_k$$

με $\lambda_{G_1} \geq \lambda_{G_2} \geq \dots \geq \lambda_{G_l}$ οι δείκτες ελεγχιμότητας και $\mu_{K_1} \geq \mu_{K_2} \geq \dots \geq \mu_{K_m}$ οι δείκτες παρατηρησιμότητας.

Συμπέρασμα

- πιο “αυστηρή” από την προηγούμενη, αφού

$$\sum_{i=1}^k \deg \phi_i \geq \max_{1 \leq j \leq k} \binom{l}{k} S_j^k \geq \max \left(\sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{K, l+1-i}), \sum_{i=1}^k (\lambda_{G, l+1-i} + \mu_{K_i}) \right), k = 1, 2, \dots, l$$

Παράδειγμα

- Αν $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ δείκτες ελεγχσιμότητας και $\mu_1 = 2, \mu_2 = 2, \mu_3 = 1$ δείκτες παρατηρησιμότητας τότε από την πρώτη

$$\deg \phi_1 \geq 2, \deg \phi_1 \phi_2 \geq 5, \deg \phi_1 \phi_2 \phi_3 \geq 7$$

ενώ από τη δεύτερη

$$\deg \phi_1 \geq 3, \deg \phi_1 \phi_2 \geq 5, \deg \phi_1 \phi_2 \phi_3 = 7$$

Συμπέρασμα

- πιο “αυστηρή” από την προηγούμενη, αφού

$$\sum_{i=1}^k \deg \phi_i \geq \max_{1 \leq j \leq k} \binom{l}{j} S_j^k \geq \max \left(\sum_{i=1}^k (\lambda_{Gi} + \mu_{K,l+1-i}), \sum_{i=1}^k (\lambda_{G,l+1-i} + \mu_{Ki}) \right), k = 1, 2, \dots, l$$

Παράδειγμα

- Αν $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ δείκτες ελεγχιμότητας και $\mu_1 = 2, \mu_2 = 2, \mu_3 = 1$ δείκτες παρατηρησιμότητας τότε από την πρώτη

$$\deg \phi_1 \geq 2, \deg \phi_1 \phi_2 \geq 5, \deg \phi_1 \phi_2 \phi_3 \geq 7$$

ενώ από τη δεύτερη

$$\deg \phi_1 \geq 3, \deg \phi_1 \phi_2 \geq 5, \deg \phi_1 \phi_2 \phi_3 = 7$$

Το πρόβλημα εναλλακτικά

Ικανή Συνθήκη

Έστω $G(s) = T_G^{-1}U_G = V_G\tilde{T}_G^{-1}$, με T_G κανονικός κατά γραμμές και \tilde{T}_G κανονικός κατά στήλες, με $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$ και $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$ και $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l$ με το ϕ_i να διαιρεί το $\phi_{i-1}, i = 1, 2, \dots, l$. Τότε ένας κανονικός ελεγκτής K , που κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος ίσα με τα ϕ_i , υπάρχει αν

$$\sum_{i=1}^k \deg \phi_i \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_1 - 1), k = 1, 2, \dots, l$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$.

Απόδειξη

Κατασκευάζουμε $l \times l$ πίνακα

$$\Phi(s) = \text{diag}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l)$$

και βρίσκουμε έναν Φ' με $\deg_{r_i} \Phi' = \deg_{c_i} \Phi' = \lambda_i + \mu_1 - 1, i = 1, 2, \dots, l$.

Λύνουμε την

$$P'(s)\tilde{T}_G(s) + Q'(s)V_G(s) = \Phi'(s) \quad (14)$$

και κάνουμε τη διαίρεση

$$Q'(s) = R(s)T_G(s) + U_K(s)$$

με $\deg Q \leq \mu_i - 1$, αφού $\mu_i = \deg_{r_i} T_G$.

Τότε το $(T_K = P' + RV_G, U_K)$ ικανοποιεί τη σχέση (14) κι ο $T_K^{-1}U_K$ είναι κανονικός ρητός πίνακας.

Παράδειγμα

- Έστω

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{2 \times 2}$$

και αν $G(s) = T_G^{-1} U_G = V_G \tilde{T}_G^{-1}$ με T_G, U_G σχετικά αριστερά πρώτα, \tilde{T}_G, V_G σχετικά δεξιά πρώτα, T_G κανονικό κατά γραμμές και \tilde{T}_G κανονικό κατά στήλες, τότε

$$T_G = \begin{bmatrix} s^3 + 4s^2 + 4s + 1 & s + 2 \\ -(s + 1) & s + 2 \end{bmatrix}, U_G = \begin{bmatrix} s + 2 & s + 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{T}_G = \begin{bmatrix} 0 & s + 1 \\ (s + 2)^2 (s + 1) & -(s + 1) \end{bmatrix}, V_G = \begin{bmatrix} s + 2 & 0 \\ (s + 3)(s + 1) & -1 \end{bmatrix}$$

- Το σύστημα έχει δείκτες ελεγχιμότητας $\lambda_{G1} = 3, \lambda_{G2} = 1$ και δείκτες παρατηρησιμότητας τους $\mu_{G1} = 3, \mu_{G2} = 1$.
- Έστω τα επιθυμητά πολυώνυμα να είναι

$$\phi_1(s) = (s+2)^2 (s+4)^2 (s+5)$$

$$\phi_2(s) = (s+2)^2 (s+5)$$

όπου ϕ_2 / ϕ_1 .

Παράδειγμα

- Παρατηρούμε ότι ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\sum_{i=1}^3 \deg \{\phi_i(s)\} \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{G_i} - 1)$$

αφού

$$\Rightarrow \deg \{\phi_1(s)\} + \deg \{\phi_2(s)\} \geq (\lambda_{G_1} + \mu_{G_1} - 1) + (\lambda_{G_2} + \mu_{G_1} - 1)$$

$$\Rightarrow 5 + 3 \geq (3 + 3 - 1) + (1 + 3 - 1)$$

$$\Rightarrow 8 \geq 8$$

- Άρα από Λήμμα [1]

$$\Phi'(s) = \text{diag} \{\phi_1(s), \phi_2(s)\} \Rightarrow$$

$$\Phi'(s) = \begin{bmatrix} (s+2)^2(s+4)^2(s+5) & 0 \\ 0 & (s+2)^2(s+5) \end{bmatrix}$$

όπου $\Phi'(s)$ κανονικοποιημένος κατά γραμμές και στήλες και $\deg_{r_i} \Phi' = \deg_{c_i} \Phi' = \lambda_{G_i} + \mu_{G_i} - 1, i = 1, 2$.

- Λύνουμε τη διοφαντική εξίσωση

$$P'(s) \tilde{T}_G(s) + Q'(s) V_G(s) = \Phi'(s)$$

Παράδειγμα

- Κι έχουμε

$$P'(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 13s + 22 & s^2 + 1.3s - 20 \\ s^2 + 8s + 12 & -1.5s - 5.5 \end{bmatrix}$$

$$Q'(s) = \begin{bmatrix} 22s^2 + 93s + 110 & 11s^2 + 53s + 63 \\ 2.5s^2 + 9.1s + 6.5 & 1.5s^2 + 4.4s + 2.9 \end{bmatrix}$$

- Κάνουμε τη διαίρεση

$$Q'(s) = R(s) T_G(s) + U_K(s)$$

κι έχουμε

$$R(s) = \begin{bmatrix} \frac{11s+31}{(s+1)(s+2)^2} & \frac{(11s+31)(s^2+3s+1)}{(s+1)(s+2)^2} \\ -\frac{(10s^2+87s+118)}{10(s^2+3s+2)^2} & \frac{15s^4+74s^3+141s^2+187s+146}{10(s^2+3s+2)^2} \end{bmatrix}$$

$$U_K = \begin{bmatrix} 22s^2 + 93s + 110 & 11s^2 + 42s + 32 \\ \frac{5}{2}s^2 + \frac{58}{5}s + \frac{131}{10} & \frac{3}{2}s^2 + \frac{29}{10}s + \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

με $\deg_{\pi_i} U_K \leq \mu_{G1} - 1, i = 1, 2.$

- Και από

$$T_K = P' + RV_G \Rightarrow$$

Το πρόβλημα εναλλακτικά

Παράδειγμα

$$T_K = \left[\begin{array}{c} \frac{12s^5 + 126s^4 + 488s^3 + 868s^2 + 717s + 243}{(s+1)(s+2)^2} \\ \frac{25s^6 + 274s^5 + 1212s^4 + 2843s^3 + 3770s^2 + 2613s + 682}{10(s^2 + 3s + 2)^2} \end{array} \quad \begin{array}{c} -\frac{(-10s^5 - 63s^4 + 165s^3 + 1496s^2 + 2588s + 1110)}{(s+1)(s+2)^2} \\ -\frac{(15s^5 + 160s^4 + 599s^3 + 1036s^2 + 907s + 366)}{10(s^2 + 3s + 2)^2} \end{array} \right]$$

- Οπότε έχουμε $K = T_K^{-1} U_K$ ένα κανονικό ρητό πίνακα με

$$K(s) =$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{250s^8 + 6285s^7 + 56378s^6 + 253286s^5 + 652852s^4 + 1038135s^3 + 1071908s^2 + 724882s + 257190}{x(s)} \\ \frac{10(250s^8 + 3511s^7 + 21966s^6 + 82200s^5 + 203304s^4 + 335330s^3 + 347643s^2 + 196908s + 43187)}{x(s)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{150s^8 + 3035s^7 + 24637s + 111112s^5 + 305781s^4 + 527749s^3 + 567568s^2 + 356300s + 100470}{x(s)} \\ \frac{10(95s + 1646s^7 + 12248s^6 + 50729s^5 + 127351s^4 + 197354s^3 + 182628s^2 + 90813s + 18179)}{x(s)} \end{array} \right]$$

όπου $x(s) = (250s^8 + 4865s^7 + 37032s^6 + 143776s^5 + 297689s^4 + 291420s^3 + 67139s^2 - 25484s + 33090)$.

Η περίπτωση που δεν ικανοποιείται η ικανή συνθήκη

Το πρόβλημα

Έστω το σύστημα φ με $G = T_G^{-1} U_G = V_G(s) \tilde{T}_G^{-1}(s)$, $m \times l$ με $l \leq m$, δείκτες ελεγχιμότητας τους $\lambda_{G1} \geq \dots \geq \lambda_{Gl}$ και παρατηρησιμότητας τους $\mu_{G1} \geq \dots \geq \mu_{Gm}$. Ακόμη T_G, U_G σχετικά αριστεροί πρώτοι, ο T_G να είναι κανονικός κατά γραμμές και $\tilde{T}_G(s), V_G(s)$ δυο σχετικά δεξιά πρώτοι με τον \tilde{T}_G κανονικό κατά στήλες. Τότε

$$P_G(s) = \begin{bmatrix} T_G(s) & U_G(s) \\ -I & D \end{bmatrix}$$

κι έστω το σύστημα K με

$$P_K(s) = \begin{bmatrix} T_K(s) & U_K(s) \\ -I & D \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} X_K(s) &= T_K(s) \\ Y_K(s) &= U_K(s) + T_K(s)D \end{aligned} \quad (15)$$

κι αν συνδεθούν με ανάδραση εξόδου έχουμε

$$P_H(s) = \begin{bmatrix} T_H(s) & U_H(s) \\ -V_H(s) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_G(s) & U_G(s) & U_G(s) \\ -Y_K(s) & X_K(s) & 0 \\ -I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Και τα τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του πίνακα $T_H(s)$ ισούνται με αυτά του

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} -Y_K(s) & X_K(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_G(s) \\ T_G(s) \end{bmatrix}$$

Το γενικό πρόβλημα επανατοποθέτησης πόλων

Πιο “αυστηρή” ικανή συνθήκη

Έστω $\phi_i(s), i = 1, 2, \dots, l$ κανονικοποιημένα πολυώνυμα τέτοια ώστε

$$\phi_i(s)/\phi_{i-1}(s) = w_{i+1}(s)\psi_i(s), i = 1, 2, \dots, l-1$$

όπου $w_{i+1}(s)$ ανάγωγο πραγματικό πολυώνυμο και τα $w_{i+1}(s), \phi_1(s)/w_{i+1}(s)$ σχετικώς πρώτα. Ακόμη, έστω ότι

$$\sum_{i=1}^{k-1} \deg \{w_{i+1}(s)\} \leq \mu_{G1} - \mu_{Gk}$$

Τότε το κανονικό σύστημα K_{ob} υπάρχει πάντα αν

$$\deg \{\phi_1(s)\} \geq \lambda_{G1} + \mu_{G1} - 1$$

και

$$\sum_{i=1}^k \deg \{\phi_i(s)\} \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{Gi} + \mu_{G1} - 1) - \sum_{j=2}^k (k-j+1) \deg \{w_j(s)\}, k = 2, 3, \dots, l$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$.

Απόδειξη

Κατασκευάζουμε τα $\bar{\phi}_i(s), i = 1, 2, \dots, l$ όπως παρακάτω :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1(s) &= \phi_1(s) \\ \bar{\phi}_i(s) &= \phi_i(s) \cdot \prod_{j=2}^i w_j(s) \end{aligned}$$

Απόδειξη

Έχουμε

$$\bar{\phi}_i(s) / \bar{\phi}_{i-1}(s)$$

και αφού τα $\bar{\phi}_i(s)$ ικανοποιούν τη

$$\sum_{i=1}^k \deg \{ \bar{\phi}_i(s) \} \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{G_1} - 1), k = 1, 2, \dots, l$$

ορίζουμε

$$Z_k(s) = \begin{bmatrix} -Y_k(s) & X_k(s) \end{bmatrix}$$

που περιγράφει το σύστημα (15) και οι βαθμοί των γραμμών του θα είναι $\mu_{G_1} - 1$. Θα ισχύει

$$\begin{bmatrix} -Y_k(s) & X_k(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_G(s) \\ \tilde{T}_G(s) \end{bmatrix} = \bar{\Phi}(s)$$

με τον $\bar{\Phi}(s)$ να έχει Smith μορφή την

$$\tilde{S}(s) = \text{diag} \{ \bar{\phi}_1(s), \bar{\phi}_{l-1}(s), \dots, \phi_1(s) \}.$$

Ακόμη ορίζουμε

$$R^t(s) = \begin{bmatrix} T_G(s) & U_G(s) \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} [T_G(s)]_t & [U_G(s)]_t \end{bmatrix}$$

Απόδειξη

Και

$$Q_G^t(s) = \begin{bmatrix} [T_G(s) & U_G(s)] \\ -Y_K(s) & X_K(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_G^t(s) \\ Z_K(s) \end{bmatrix}$$

- Έστω ότι το $w_j(s)$ έχει τ_j ανάγωγους παράγοντες και το $w_j^i(s)$ αναπαριστά τον i -οστό ανάγωγο παράγοντα του $w_j(s)$.
- Αφού το $w_j^i(s)$, $i = 1, 2, \dots, \tau_j$, $j = 1, 2, \dots, l$ είναι ένας παράγοντας του $\bar{\phi}_l(s) \Rightarrow$ όλοι οι $(m+1) \times (m+1)$ όροι του $Q_G^m(s)$ διαιρούνται από το $w_j^i(s) \Rightarrow$ όλοι οι $(m+1) \times (m+1)$ όροι του $Q_G^t(s)$, $t = m - l + 1, \dots, m$ αντίστοιχα, διαιρούνται από το $w_j^i(s)$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

- **Βήμα 1** : Επιλέγουμε

$$Z^{(1)}(s) = Z_K(s)$$

όπου $Z_k(s) = [-Y_k(s) \quad X_k(s)]$.

- **Βήμα 2** : Για κάθε $k = 1, 2, \dots, l$ ορίζουμε

$$Q_G^{(k)}(s) = \begin{bmatrix} R_G^{m-k}(s) \\ Z^{(k)}(s) \end{bmatrix}$$

- **Βήμα 3** : Θεωρούμε τα $w_{k+1}^i(s)$ για $i = 1$ και βρίσκουμε τους πίνακες

$$A_i^{(k)}(s) = \begin{bmatrix} a_{k+1,1}(s) & \mathbf{0}_{k \times t} & \dots & a_{k+1,t}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1}(s) & a_{j2}(s) & \dots & a_{jt}(s) \end{bmatrix}$$

$$B_i^{(k)}(s) = \begin{bmatrix} b_{k+1,1}(s) & I_k & b_{k+1,k}(s) & \mathbf{0}_{k \times (l-k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ b_{j1}(s) & \dots & b_{jk}(s) & I_{l-k} \end{bmatrix}$$

έτσι ώστε οι τελευταίες $l - k$ γραμμές του πίνακα

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

$$\bar{Z}^{(k)}(s) = A_i^{(k)}(s) R^t(s) + B_i^{(k)}(s) Z^{(k)}(s)$$

να διαιρούνται από το $w_{k+1}^{(i)}(s)$.

- **Βήμα 4** : Διαιρούμε τις τελευταίες $l-k$ γραμμές του πίνακα $\bar{Z}^{(k)}(s)$ με το $w_{k+1}^{(i)}(s)$, και έστω $\hat{Z}^{(k)}(s)$ ο πίνακας που προκύπτει.
- **Βήμα 5** : Αν ο πίνακας $\hat{Z}^{(k)}(s)$ δεν είναι κανονικός κατά γραμμές, τότε τον πολλαπλασιάζουμε με έναν αντιστρέψιμο πίνακα $N(s)$ έτσι ώστε να γίνει.

- **Βήμα 6** : Ορίζουμε

$$\check{Z}^{(k)}(s) = Z_{(1)}^{(k)}(s)$$

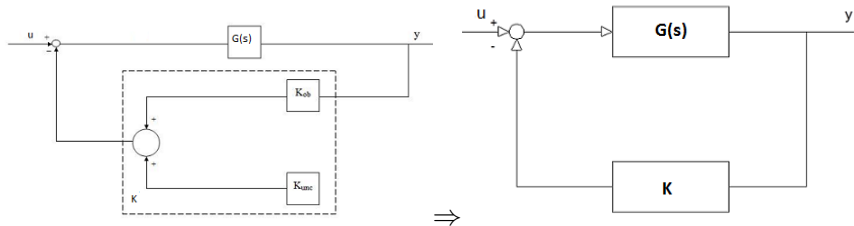
- **Βήμα 7** : Εφαρμόζουμε τα βήμα 3 έως 6 για $i = 1, 2, \dots, \tau_{k+1}$
- **Βήμα 8** : Ορίζουμε

$$Z_{(\tau_{k+1})}^{(k)}(s) = Z^{(k+1)}(s)$$

- **Βήμα 9** : Εφαρμόζουμε τα βήματα 2 έως 8 για $k = 1, 2, \dots, l-1$

Έτσι ο $Z^{(k)}(s)$ κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος ίσα με τα $\phi_i(s), i = 1, 2, \dots, l$, αφού τα $w_j(s), j \leq k$, συμβαίνουν μόνο στα αναλλοίωτα πολυώνυμα $\bar{\phi}_1^{(k)}(s), \dots, \bar{\phi}_{j-1}^{(k)}(s)$ και ακόμη περιγράφει ένα κανονικό σύστημα K .

Πιο “αυστηρή” ικανή συνθήκη



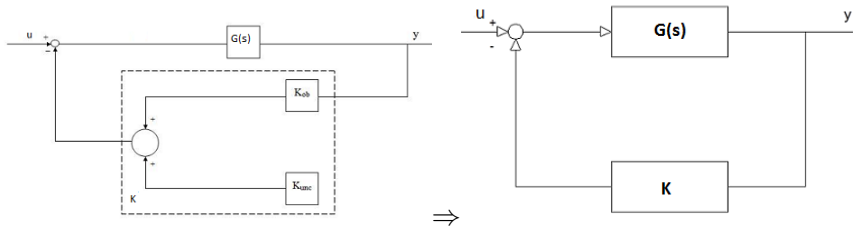
Συμπεράσματα

- 1 Τα ίδια ισχύουν αν αντιστραφούν οι ρόλοι των λ_{G_i}, μ_{G_i} .
- 2 Αν $\phi_j(s), w_i(s)$ κανονικοποιημένα πολυώνυμα, ικανοποιούν τις συνθήκες και $\deg\{w_{i+1}(s)\} = \mu_{G_i} - \mu_{G_{i+1}}$ τότε υπάρχει πάντα κανονικό σύστημα ανάδρασης K_{ob} το οποίο κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος ίσα με τα $\phi_j(s), j = 1, 2, \dots, l$ αν ισχύει

$$\sum_{j=1}^k \deg\{\phi_j(s)\} \geq \sum_{j=1}^k (\mu_{G_j} + \lambda_{G_j} - 1), k = 1, 2, \dots, l$$

- 3 Η τάξη του K $d_K = \min\{\sum_{i=1}^l (\mu_{G_i} - 1), \sum_{i=1}^m (\lambda_{G_i} - 1)\}$ μικρότερη από την προηγούμενη $d_K = \min\{l(\mu_{G_1} - 1), m(\lambda_{G_1} - 1)\}$.

Πιο “αυστηρή” ικανή συνθήκη



Συμπεράσματα

- 1 Τα ίδια ισχύουν αν αντιστραφούν οι ρόλοι των λ_{G_i}, μ_{G_i} .
- 2 Αν $\phi_j(s), w_i(s)$ κανονικοποιημένα πολυώνυμα, ικανοποιούν τις συνθήκες και $\deg\{w_{i+1}(s)\} = \mu_{G_i} - \mu_{G_{i+1}}$ τότε υπάρχει πάντα κανονικό σύστημα ανάδρασης K_{ob} το οποίο κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος ίσα με τα $\phi_j(s), j = 1, 2, \dots, l$ αν ισχύει

$$\sum_{j=1}^k \deg\{\phi_j(s)\} \geq \sum_{j=1}^k (\mu_{G_j} + \lambda_{G_j} - 1), k = 1, 2, \dots, l$$

- 3 Η τάξη του K $d_K = \min\{\sum_{i=1}^l (\mu_{G_i} - 1), \sum_{i=1}^m (\lambda_{G_i} - 1)\}$ μικρότερη από την προηγούμενη $d_K = \min\{l(\mu_{G_1} - 1), m(\lambda_{G_1} - 1)\}$.

Παράδειγμα

- Έστω το ελάχιστης τάξης σύστημα με

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1/s^4 & 1/s^2 & 0 \\ -1/s^6 & (s^2-1)/s^4 & 1/s \\ 1/s^6 & (1-s^2)/s^4 & 0 \end{bmatrix}$$

και πίνακες συστήματος, τους

$$P_G(s) = \begin{bmatrix} T_G(s) & U_G(s) \\ -I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s & s & 0 & 0 & 1 \\ 1 & s^2 & 0 & 0 & 1 & s \\ s^4 & 0 & 0 & 1 & s^2 & 0 \\ & -I_3 & & & 0_{3 \times 3} & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_G(s) & I_3 \\ -V_G(s) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^4 & -s^2 & 0 & & \\ -s^2 & s^2+1 & 0 & I_3 & \\ 0 & 0 & s & & \\ 0 & -1 & 0 & & \\ 1 & -1 & -1 & 0_{3 \times 3} & \\ -1 & 1 & 0 & & \end{bmatrix}$$

με T_G, U_G σχετικά αριστερά πρώτα και \tilde{T}_G, V_G σχετικά δεξιά πρώτα.

- Παρατηρώ ότι έχει δείκτες ελεγχιμότητας τους $\lambda_{G1} = 4, \lambda_{G2} = 2, \lambda_{G3} = 1$ και παρατηρησιμότητας τους $\mu_{G1} = 4, \mu_{G2} = 2, \mu_{G3} = 1$.
- Κι έστω τα

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= (s^2 + s + 1)(s+2)^2(s+4)^2(s+5) \\ \phi_2(s) &= (s+2)^2(s+5) \\ \phi_3(s) &= (s+2) \end{aligned}$$

- ΔΕΝ ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\sum_{i=1}^3 \deg \{ \phi_i(s) \} \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{G_i} - 1)$$

αφού

$$\begin{aligned} \Rightarrow \deg \{ \phi_1(s) \} + \deg \{ \phi_2(s) \} + \deg \{ \phi_3(s) \} &\geq (\lambda_{G_1} + \mu_{G_1} - 1) + (\lambda_{G_2} + \mu_{G_1} - 1) + (\lambda_{G_3} + \mu_{G_1} - 1) \\ &\Rightarrow 7 + 3 + 1 \geq (4 + 4 - 1) + (2 + 4 - 1) + (1 + 4 - 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 11 \geq 16, \text{ \acute{a}τοπο}$$

- Άρα υπάρχουν

$$\begin{aligned} w_2(s) &= s^2 + s + 1 \\ w_3(s) &= s + 5 \end{aligned}$$

που ικανοποιούν τη

$$\sum_{i=1}^{k-1} \deg \{ w_{i+1}(s) \} \leq \mu_{G_1} - \mu_{G_k}$$

$$\sum_{i=1}^2 \deg \{ w_{i+1}(s) \} \leq \mu_{G_1} - \mu_{G_3}$$

$$\Rightarrow \deg \{ w_2(s) \} + \deg \{ w_3(s) \} \leq 4 - 1$$

$$\Rightarrow 3 \leq 3$$

- Άρα κατασκευάζουμε $\bar{\phi}_1(s), \bar{\phi}_2(s), \bar{\phi}_3(s)$ τέτοια ώστε

$$\bar{\phi}_1(s) = \phi_1(s) = s^7 + 18s^6 + 130s^5 + 485s^4 + 1012s^3 + 1220s^2 + 864s + 320$$

$$\bar{\phi}_2(s) = \phi_2(s)(s^2 + s + 1) = s^5 + 10s^4 + 34s^3 + 53s^2 + 44s + 20$$

$$\bar{\phi}_3(s) = \phi_3(s)(s^2 + s + 1)(s + 5) = s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 17s + 10$$

τα οποία ικανοποιούν τη

$$\sum_{i=1}^3 \deg\{\bar{\phi}_i(s)\} \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{G_1} - 1)$$

$$\Rightarrow \deg\{\bar{\phi}_1(s)\} + \deg\{\bar{\phi}_2(s)\} + \deg\{\bar{\phi}_3(s)\} \geq (\lambda_{G_1} + \mu_{G_1} - 1) + (\lambda_{G_2} + \mu_{G_1} - 1) + (\lambda_{G_3} + \mu_{G_1} - 1)$$

$$\Rightarrow 7 + 5 + 4 \geq (4 + 4 - 1) + (2 + 4 - 1) + (1 + 4 - 1)$$

$$\Rightarrow 16 \geq 16$$

- Οπότε ψάχνουμε ένα κανονικό σύστημα K , το οποίο κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος ίσα με τα $\bar{\phi}_i(s), i = 1, 2, 3$, τέτοιο ώστε

$$Z_K(s) = \begin{bmatrix} -Y_K(s) & X_K(s) \end{bmatrix}$$

που θα ικανοποιεί την

$$\begin{bmatrix} -Y_K(s) & X_K(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_G(s) \\ \tilde{T}_G(s) \end{bmatrix} = \hat{\Phi}(s)$$

με τον $\hat{\Phi}(s)$ να έχει Smith μορφή

$$\bar{S}(s) = \text{diag} \{ \bar{\phi}_1(s), \bar{\phi}_{l-1}(s), \dots, \bar{\phi}_1(s) \}$$

- V_G, \tilde{T}_G γνωστοί και για τον $\hat{\Phi}$, για $a_i = \mu_{G1} - 1, \beta_i = \lambda_{Gi}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \delta(\bar{\phi}_1) &= \mu_{G1} - 1 + \lambda_{G1} \Rightarrow 7 = 4 - 1 + 4 \Rightarrow 7 = 7 \\ \delta(\bar{\phi}_2) &= \mu_{G1} - 1 + \lambda_{G2} \Rightarrow 5 = 4 - 1 + 2 \Rightarrow 5 = 5 \\ \delta(\bar{\phi}_3) &= \mu_{G1} - 1 + \lambda_{G3} \Rightarrow 4 = 4 - 1 + 1 \Rightarrow 4 = 4 \end{aligned}$$

άρα [1]

$$\hat{\Phi}(s) = \text{diag} \{ \bar{\phi}_1(s), \bar{\phi}_2(s), \bar{\phi}_3(s) \} \Rightarrow$$

$$\hat{\Phi}(s) =$$

$$\begin{bmatrix} s^7 + 18s^6 + 130s^5 + 485s^4 & 0 & 0 \\ +1012s^3 + 1220s^2 + 864s + 320 & & \\ 0 & s^5 + 10s^4 + 34s^3 + 53s^2 + 44s + 20 & 0 \\ 0 & 0 & s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 17s + 10 \end{bmatrix}$$

- Λύνουμε τη

$$\begin{bmatrix} -Y_K(s) & X_K(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_G(s) \\ \tilde{T}_G(s) \end{bmatrix} = \hat{\Phi}(s) \Rightarrow Y_K(s)V_G(s) + X_K(s)\tilde{T}_G(s) = \hat{\Phi}(s) \Rightarrow$$

$$Y_K(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + X_K(s) \begin{bmatrix} s^4 & -s^2 & 0 \\ -s^2 & s^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = \hat{\Phi}(s)$$

κι έχουμε

$$Z_K^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} -Y_K(s) & X_K(s) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1142s^3 - 1705s^2 & 864s & -320 & s^3 + 18s^2 & s^3 + 18s^2 & 864 \\ -1876s - 1540 & 0 & 0 & +131s + 503 & -1012s - 1220 & 0 \\ -34s^3 - 53s^2 - 44s - 20 & 0 & 0 & s + 10 & s^3 + 10s^2 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & 0 & 0 & s^3 + 8s^2 + 18s + 17 \end{bmatrix}$$

- Άρα για $k=1$ διαγράφουμε το $w_2(s) = s^2 + s + 1$ από τα $\bar{\phi}_2(s), \bar{\phi}_3(s)$ κι έχουμε

$$Q^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} R^{(1)}(s) \\ Z^{(1)}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s & s & 0 & 0 & 1 \\ 1 & s^2 & 0 & 0 & 1 & s \\ & & Z^{(1)}(s) & & & \end{bmatrix}$$

αφού

$$\begin{bmatrix} T_G(s) & U_G(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s & s & 0 & 0 & 1 \\ 1 & s^2 & 0 & 0 & 1 & s \\ s^4 & 0 & 0 & 1 & s^2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Βρίσκουμε $A_1^{(1)}(s), B_1^{(1)}(s)$ τέτοιοι ώστε οι τελευταίες $l-k=2$ γραμμές του $\bar{Z}_K^{(1)}(s) = A_1^{(1)}(s)R^{(1)}(s) + B_1^{(1)}(s)Z_K^{(1)}(s)$ να διαιρούνται από το $w_2(s) = s^2 + s + 1$, άρα

$$A_1^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 20(5s^3 + 283s^2 + 443s + 432)/(113s + 486) & -4(-25s^2 + 1415s + 1999)/(113s + 486) \\ -10(s+1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(s+10)/(113s+486) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

- Διαιρούμε τις τελευταίες $l-k=2$ γραμμές του $\bar{Z}_K^{(1)}(s)$ με το $w_2(s) = s^2 + s + 1$ κι έχουμε

$$\hat{Z}_K^{(1)}(s) =$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} -1142s^3 - 1705s^2 & 864s & -320 & s^3 + 18s^2 & s^3 + 18s^2 & 864 \\ -1876s - 1540 & & & +131s + 503 & -1012s - 1220 & \\ -2700s^2 - 6688s & 0 & -100s^2 + 5760s & -s^2 - 27s & 112s^2 + 1476s & 0 \\ -2316 & & +3200 & -170 & +4204 & \\ 0 & -10 & -10 & 0 & 0 & s+7 \end{array} \right]$$

- Αφού $\hat{Z}_K^{(1)}(s)$ κανονικός είναι

$$\check{Z}_K^{(1)}(s) = \hat{Z}_K^{(1)}(s)$$

- Θέτουμε $\check{Z}_K^{(1)}(s) = Z_K^{(2)}(s)$ και για $k=2$ διαγράφουμε το $w_3(s) = s+5$ από το $\bar{\phi}_3(s)$ κι έχουμε

$$Q^{(2)}(s) = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & s & s & 0 & 0 & 1 \\ & & Z^{(2)}(s) & & & \end{array} \right]$$

με

$$R^1(s) = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & s & s & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- Όμοια βρίσκουμε τους $A_1^{(2)}(s), B_1^{(2)}(s)$ έτσι ώστε οι τελευταίες $l-k=3-2=1$ γραμμές του $\bar{Z}_K^{(2)} = A_1^{(2)}(s)R^1(s) + B_1^{(2)}(s)Z_K^{(2)}(s)$ να διαιρούνται με το $w_3(s) = s+5$, οπότε

$$A_1^{(2)}(s) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right], B_1^{(2)}(s) = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- Διαιρούμε τις τελευταίες $l-k=1$ γραμμές του $\tilde{Z}_K^{(2)}(s)$ με το $w_3(s) = s+5$ και έχουμε

$$\hat{Z}_K^{(2)}(s) =$$

$$\begin{bmatrix} -1142s^3 - 1705s^2 & 864s & -320 & s^3 + 18s^2 & s^3 + 18s^2 & 864 \\ -1876s - 1540 & & & +131s + 503 & -1012s - 1220 & \\ -2700s^2 - 6688s & 0 & -100s^2 + 5760s & -s^2 - 27s & 112s^2 + 1476s & 0 \\ -2316 & & +3200 & -170 & +4204 & \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αφού είναι κανονικός κατά γραμμές $\hat{Z}_K^{(2)}(s) = \tilde{Z}_K^{(2)}(s) = Z_K^{(3)}(s)$ κι άρα ο ζητούμενο σύστημα K_{ob} είναι κανονικό αφού περιγράφεται από τον

$$Z_K^{(3)}(s) = \begin{bmatrix} -Y_K(s) & X_K(s) \end{bmatrix}$$

με

$$P_{K_{ob}}(s) = \begin{bmatrix} T_K(s) & U_K(s) \\ -V_K(s) & D_K(s) \end{bmatrix}$$







όπου $X_K(s) = T_K(s)$, $Y_K(s) = U_K(s) + T_K(s)D$ και

$$V_K(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } D = \begin{bmatrix} 1108 & -544 & 0 \\ 34 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Κάνοντας τις πράξεις έχουμε

$$P_{K_{ob}}(s) = \begin{bmatrix} s^3 + 18s^2 + 131s + 503 & s^3 + 18s^2 - 1012s - 1220 & 864 & -18851s^2 - 108864s - 514304 & 544s^3 + 9792s^2 + 70400s + 275360 & 2048 \\ s^2 - 27s - 170 & 112s^2 + 1476s + 4204 & 0 & 47940 - 13580s & -544s^2 - 14688s - 92480 & -100s^2 + 5760s + 1472 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 1108 & -544 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ευχαριστώ πολύ !

-  H.H Rosenbrock and G. E. Hayton, “ The general problem of pole assignment,” Int. J. Contr., vol. 27, pp. 837-852, 1978.
-  T. G. Koussioris, “ On the general problem of pole assignment”, Int. J. Contr, vol. 30, pp. 677-694, 1979.
-  H.H Rosenbrock and G. E. Hayton, “ Dynamical indices of a transfer function matrix “, Int. J. Contr., vol. 20, pp. 177-189, 1974.
-  G. E. HaytonJ, “Properties of dynamical indices”, Int. J. Contr.,vol. 22, pp. 289-293, 1975.
-  P. Zagalak and V. Kucera, “ The General Problem of Pole Assignment: A Polynomial Equation Approach”, IEEE Trans. Automat. Contr, vol. AC-30,pp. 286- 289, 1985.
-  Vardulakis, A.I.G., “ Linear Multivariable Control : Algebraic Analysis and Synthesis Methods”