



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ”

**Το γενικευμένο πρόβλημα
της επανατοποθέτησης πόλων**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παχή Ελένη

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2016



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

“ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ”

Το γενικευμένο πρόβλημα της επανατοποθέτησης πόλων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παχή Ελένη

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την

.....
Ν.Καραμπετάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....
Ο. Κοσμίδου
Αν. Καθηγήτρια Δ.Π.Θ

.....
Ε. Κάππος
Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2016

.....
Παχή Ελένη

Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

Copyright © Παχή Ελένη, 2016.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε το πρόβλημα της επανατοποθέτησης πεπερασμένων πόλων ενός γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος το οποίο περιγράφεται από μια συνάρτηση μεταφοράς.

Στο πρώτο κεφάλαιο, αναφέρονται χρήσιμοι ορισμοί με τους οποίους ο αναγνώστης καταλαβαίνει το νόημα του θέματος και του επιλύουν οποιαδήποτε τυχούσα απορία.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, εισάγουμε την έννοια των δυναμικών δεικτών, που στη δική μας περίπτωση δεν είναι άλλοι από τους δείκτες ελεγχιμότητας ενός συστήματος. Ακόμη αναφέρονται κάποιες ιδιότητές τους και εξηγούμε πως αυτοί παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από ένα σύνολο μετασχηματισμών που περιέχει και ανάδραση εξόδου.

Στο τρίτο κεφάλαιο, εισάγουμε το γενικό πρόβλημα της επανατοποθέτησης πόλων μιας συνάρτησης μεταφοράς κατά το οποίο ψάχνουμε να βρούμε έναν ελεγκτή που θα περιγράφεται από έναν πίνακα συστήματος, θα είναι κανονικός και αφού θα συνδεθεί στο κλειστό σύστημα με ανάδραση εξόδου, θα έχει την ιδιότητα να κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος, που δεν είναι άλλα από αυτά που περιέχουν τους ίδιους τους πόλους του συστήματος, ίσα με τα επιθυμητά. Στη συνέχεια αναφέρονται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες, που προτάθηκαν από τους Rosenbrock και Hayton και θα πρέπει να ισχύουν για να πετύχουμε την εύρεση ενός τέτοιου ελεγκτή, καθώς επίσης και κάποια συμπεράσματα. Ακόμη αναφέρουμε μια πιο αυστηρή αναγκαία συνθήκη καθώς επίσης και μια διαφορετική προσέγγιση της ικανής που προτάθηκαν αργότερα από τους Zagalak και Kucera, αλλά και την εφαρμογή της μεθόδου σε ένα παράδειγμα. Να σημειώσουμε ότι για την εύρεση του ελεγκτή θα πρέπει να λάβουμε υπόψη τους δείκτες ελεγχιμότητας του συστήματος, και γι αυτό το λόγο το δεύτερο κεφάλαιο είναι ιδιαίτερα σημαντικό αφού μας δείχνει ακριβώς ότι κατά την εφαρμογή του ελεγκτή στο σύστημα με ανάδραση εξόδου οι δείκτες ελεγχιμότητας παραμένουν αναλλοίωτοι.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο, εξετάζουμε την περίπτωση κατά την οποία δεν ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες που ορίστηκαν και προτείνουμε μια νέα συνθήκη και μαζί έναν αλγόριθμο για να αντιμετωπίσουμε την προκειμένη περίπτωση. Στη συνέχεια ακολουθεί ο προγραμματισμός του αλγόριθμου στο περιβάλλον του Matlab καθώς και η εφαρμογή του σε ένα παράδειγμα.

Τέλος, αναφέρεται η σχετική βιβλιογραφία που βοήθησε στην υλοποίηση της παρούσας εργασίας, καθώς επίσης και ένα παράρτημα με την απόδειξη μιας ιδιότητας των δυναμικών δεικτών.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Δυναμικοί Δείκτες, Πίνακας Συστήματος, Αναλλοίωτα Πολυώνυμα, Κανονικό Σύστημα

ABSTRACT

In this postgraduate thesis, we study the general problem of pole assignment in a linear, time-invariant system which can be described by a transfer function matrix.

The first chapter provides all relevant definitions so that the reader can understand the issues addressed by the current thesis.

In the second chapter, dynamical indices, for the purposes of this thesis there are defined as the controllability indices of a transfer function of a system as well as some properties of them. Also we explain how these indices are invariant under a transformation group that includes the output feedback.

In third chapter, we introduce the general problem of pole assignment of a transfer function matrix. Our goal is to find a proper system matrix, that if is connected with the closed-loop system with output feedback, it will make the invariant polynomials of the closed-loop system equal to the desired ones. Consequently, we examine the necessary and sufficient conditions for the accomplishment of this goal, that proposed by Rosenbrock and Hayton, as well as some results. Also, we consider an alternative route and a necessary condition stricter than the one discussed previously. Following that, we provide a more constructive proof of the first sufficient condition and we represent the route of the new method in an example. Both necessary and sufficient conditions proposed earlier by Zagalak and Kucera.

In the last chapter, we examine the case in which the previous conditions do not hold. So, a new condition and an algorithm are proposed to deal with this case. Next, the programming of this algorithm is represented in Matlab software and its application in an example is discussed.

The current thesis closes with the provision of the bibliography used, as well as with an appendix outlining the proof of a property of dynamical indices.

KEY WORDS

Dynamical Indices, System Matrix, Invariant Polynomials, Proper System

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	6
Abstract	7
Περιεχόμενα	8
1 Βασικές Έννοιες	10
2 Δυναμικοί Δείκτες	27
2.1 Εισαγωγή.....	27
2.2 Πίνακες Συστημάτων.....	28
2.3 Δυναμικοί Δείκτες.....	30
2.4 Παράδειγμα.....	36
2.5 Ιδιότητες των Δυναμικών Δεικτών.....	37
3 Το Πρόβλημα της Επανατοποθέτησης Πόλων	40
3.1 Ορισμός του Προβλήματος.....	40
3.2 Χρήσιμα Λήμματα.....	42
3.3 Ικανή και Αναγκαία Συνθήκη.....	44
3.4 Εναλλακτική Προσέγγιση του Προβλήματος.....	51
3.4.1 Βοηθητικοί Ορισμοί.....	51
3.4.2 Ικανή και Αναγκαία Συνθήκη.....	52
3.4.2.1. Παράδειγμα.....	53
3.4.3 Κώδικας.....	55
3.4.4 Παράδειγμα.....	56
4 Ο Αλγόριθμος	59
4.1 Εισαγωγή.....	59
4.2 Ικανή Συνθήκη.....	61
4.3 Κώδικας.....	71

4.4 Παράδειγμα.....	79
Βιβλιογραφία	86
Παράρτημα	88
A. Απόδειξη Ιδιότητας.....	88

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε βασικές έννοιες, που χρησιμοποιούνται σε όλη την εργασία, θεωρήματα και προτάσεις καθώς και παραδείγματα. [1, 2]

Ορισμός 1.1. Έστω \mathbb{R} το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}[s]$ ο δακτύλιος πολυωνύμων με συντελεστές από το \mathbb{R} και $\mathbb{R}(s)$ το παρακάτω πεδίο κλασμάτων πάνω στο $\mathbb{R}[s]$

$$\mathbb{R}(s) := \left\{ t(s) \mid t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, d(s) \in \mathbb{R}[s], d(s) \neq 0 \right\}.$$

Το $\mathbb{R}(s)$ λέγεται **πεδίο (πραγματικών) ρητών συναρτήσεων (field of real functions)**.

Έστω $\mathbb{R}(s)^p, p \in \mathbb{Z}^+ := \{1, 2, \dots\}$ να είναι το σύνολο των διατεταγμένων p -άδων των ρητών συναρτήσεων, οι οποίες θεωρούνται σαν “διανύσματα στήλες”, δηλαδή έστω

$$\mathbb{R}(s)^p := \left\{ t(s) \mid t(s) = [t_1(s), t_2(s), \dots, t_p(s)]^T, t_i(s) \in \mathbb{R}(s), i \in p \right\}$$

Αν ορίσουμε το άθροισμα των δυο στοιχείων $t(s) = [t_1(s), \dots, t_p(s)]^T \in \mathbb{R}(s)^p$ και $u(s) = [u_1(s), \dots, u_p(s)]^T \in \mathbb{R}(s)^p$ ως

$$t(s) + u(s) = [t_1(s) + u_1(s), \dots, t_p(s) + u_p(s)]^T$$

και το γινόμενο του $a(s) \in \mathbb{R}(s)$ με το $t(s) \in \mathbb{R}(s)^p$ ως

$$a(s)t(s) := [a(s)t_1(s), \dots, a(s)t_p(s)]^T$$

τότε ο $\mathbb{R}(s)^p$ έχει τη δομή ενός γραμμικού διανυσματικού χώρου και τον καλούμε **(πραγματικό) ρητό διανυσματικό χώρο (real vector space)**. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}(s)^p$ λέγονται **ρητά διανύσματα (real rational vectors)**.

Ακόμη έστω ότι $\mathbb{R}(s)^{p \times m}$ ορίζει το σύνολο των $p \times m$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}(s)$. Τότε ένας πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ ονομάζεται **(πραγματικός) ρητός πίνακας (real rational matrix)**.

Ορισμός 1.2. Ένας ρητός πίνακας $T(s)$ του οποίου τα στοιχεία είναι πολυώνυμα, λέγεται **πολυωνυμικός πίνακας (polynomial matrix)**.

Ένας πολυωνυμικός πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ λέγεται **αντιστρέψιμος (unimodular)**, αν υπάρχει $\hat{T}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ τέτοιο ώστε

$$T(s)\hat{T}(s) = I_p$$

ή ισοδύναμα αν

$$\det T(s) = c \in \mathbb{R}, c \neq 0.$$

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$, $\text{rank}_{\mathbb{R}[s]} T(s) = \min\{p, m\}$. Αν εκφράσουμε τις p γραμμές του $T(s)$ με τα διανύσματα $\tilde{t}_i(s) = [t_{i1}(s), t_{i2}(s), \dots, t_{im}(s)] \in \mathbb{R}[s]^{1 \times m}$, $i \in p$ και τις m στήλες αντίστοιχα, με τα διανύσματα $t_j(s) = [t_{1j}(s), t_{2j}(s), \dots, t_{pj}(s)]^T \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$, $j \in m$, τότε ο $T(s)$ μπορεί να γραφεί με την εξής μορφή :

$$T(s) = \begin{bmatrix} \tilde{t}_1(s) \\ \tilde{t}_2(s) \\ \vdots \\ \tilde{t}_p(s) \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad T(s) = [t_1(s) \quad t_2(s) \quad \dots \quad t_m(s)]$$

Ορισμός 1.3. Έτσι, ορίζουμε ως **συμπλεκτικότητα κατά γραμμές (στήλες) (row (column) complexity)** ενός πολυωνυμικού πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$, και συμβολίζουμε με $c_r(T)$, $(c_c(T))$ αντίστοιχα, το άθροισμα των βαθμών των γραμμών (στηλών) των μη-μηδενικών διανυσμάτων, δηλαδή

$$c_r(T) := \sum_{i=1}^p \deg \tilde{t}_i(s), \quad c_c(T) := \sum_{j=1}^m \deg t_j(s)$$

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ με τα διανύσματα των γραμμών να είναι $\tilde{t}_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{1 \times m}$, $i \in p$ και αντίστοιχα τα διανύσματα στηλών $t_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$, $j \in m$, όπως ορίστηκε παραπάνω.

Έστω ακόμη $r_i = \deg \tilde{t}_i(s)$, $i \in p$ και $q_j = \deg t_j(s)$, $j \in m$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι,

$$\tilde{t}_i(s) = \sum_{k=0}^{r_i} \tilde{t}_{ik}^T s^k, \quad i \in p$$

όπου $\tilde{t}_{ik}^T \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, $i \in p$, $k = 0, 1, 2, \dots, r_i$ και

$$t_j(s) = \sum_{k=0}^{q_j} t_{jk} s^k, \quad j \in m$$

όπου $t_{jk} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $j \in m$, $k = 0, 1, 2, \dots, q_j$.

Τότε ο $T(s)$ παίρνει την παρακάτω μορφή

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^{r_1} & & & 0 \\ & s^{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s^{r_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_{1r_1}^T \\ \vdots \\ \tilde{t}_{pr_p}^T \end{bmatrix} + T_r(s)$$

ή αντίστοιχα

$$T(s) = [t_{1q_1}, t_{2q_2}, \dots, t_{mq_m}] \begin{bmatrix} s^{q_1} & & & 0 \\ & s^{q_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s^{q_m} \end{bmatrix} + T_c(s)$$

όπου $T_r(s)$ ($T_c(s)$) $\in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ και οι γραμμές (στήλες) του έχουν μικρότερο βαθμό από το r_i (q_i).

Ορισμός 1.4. Έτσι, ονομάζουμε **πίνακα συντελεστή μέγιστου βαθμού κατά γραμμές (highest row degree coefficient matrix)** του πίνακα $T(s)$, και συμβολίζουμε με $[T(s)]_r^h$, τον πίνακα

$$[T(s)]_r^h := \begin{bmatrix} \tilde{t}_{1r_1}^T \\ \vdots \\ \tilde{t}_{pr_p}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

δηλαδή, σε κάθε διάνυσμα γραμμής επιλέγουμε το μεγαλύτερο βαθμίο πολυώνυμο και παίρνουμε τον συντελεστή του.

Αντίστοιχα έχουμε το **πίνακα συντελεστή μέγιστου βαθμού κατά στήλες (highest column degree coefficient matrix)**, που συμβολίζεται ως εξής :

$$[T(s)]_c^h := [t_{1q_1} \quad \dots \quad t_{mq_m}] \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

Παράδειγμα 1.1. Έστω

$$T(s) = \begin{bmatrix} 2s^2 + 3s + 1 & s^2 + 2 & s \\ 4s^3 & s^3 + 4s & 3s^2 + 3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Τότε έχουμε

$$[T(s)]_r^h = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } [T(s)]_c^h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 1.5. Ένας πολυωνυμικός πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ είναι **κανονικός κατά γραμμές (στήλες) (row (column) proper)** αν

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} [T(s)]_r^h = \min\{p, m\}, \left(\text{rank}_{\mathbb{R}} [T(s)]_c^h = \min\{p, m\} \right).$$

Παράδειγμα 1.2. Ο πολυωνυμικός πίνακας της (1) είναι κανονικός κατά γραμμές αφού $\text{rank}_{\mathbb{R}} [T(s)]_r^h = \min\{2, 3\} = 2$ ενώ δεν είναι κανονικός κατά στήλες αφού $\text{rank}_{\mathbb{R}} [T(s)]_c^h = 1 \neq \min\{2, 3\} = 2$.

Ορισμός 1.6. Δυο ρητοί πίνακες $T_1(s), T_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ είναι **ισοδύναμοι (equivalent)** (στο \mathbb{C}), αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}, T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ τέτοιοι ώστε

$$T_L(s) T_1(s) T_R(s) = T_2(s).$$

Θεώρημα 1.1. (Smith-McMillan μορφή ενός ρητού πίνακα (στο \mathbb{C}). Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ με $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r, r \leq \min\{p, m\}$. Τότε ο $T(s)$ είναι ισοδύναμος (στο \mathbb{C}), με ένα διαγώνιο πίνακα $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s)$ που έχει τη μορφή

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) := \text{diag} \left[\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, 0_{m-r, p-r} \right]$$

όπου τα $\varepsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{R}[s]$ είναι κανονικοποιημένα¹ και πρώτα πολυώνυμα τέτοια ώστε το $\varepsilon_i(s)$ να διαιρεί το $\varepsilon_{i+1}(s), i = 1, 2, \dots, r-1$, και το $\psi_{i+1}(s)$ να διαιρεί το $\psi_i(s), i = 1, 2, \dots, r-1$. \blacktriangle

Αν $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{r \times m}$ τότε $\psi_i(s) = 1, i \in r$ και ο $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$ θα είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας που λέγεται **Smith μορφή** του $T(s)$ (στο \mathbb{C}).

Αν ο $T(s)$ δεν είναι πολυωνυμικός, για κάποια $i = 1, 2, \dots, j; 0 \leq j \leq r$, τότε τα $\psi_i(s)$ δεν θα είναι σταθερά πολυώνυμα, κι έτσι ο $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$ θα είναι ένας μη πολυωνυμικός πίνακας, που λέγεται **McMillan μορφή** του $T(s)$ (στο \mathbb{C}).

Ορισμός 1.7. Οι ρητές συναρτήσεις $\varepsilon_i(s)/\psi_i(s) =: f_i(s) \in \mathbb{R}(s), i \in r$ αποτελούν ένα σύνολο αναλλοιώτων του $E^{\mathbb{C}}$, όπου $E^{\mathbb{C}}$ ορίζει τη σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}(s)^{p \times m}$, δηλαδή

¹ Αν ο συντελεστής του μεγαλύτερου βαθμίου όρου ενός πολυωνύμου $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ισούται με τη μονάδα, τότε το πολυώνυμο λέγεται κανονικοποιημένο (monic).

$$[T_1(s), T_2(s)] \in E^{\mathbb{C}} \Leftrightarrow T_1(s) \text{ και } T_2(s) \text{ έχουν το ίδιο σύνολο } \{f_i(s)\}$$

και λέγονται **αναλλοιώτες ρητές συναρτήσεις (invariant rational functions)** του $T(s)$, και τα $\varepsilon_i(s), \psi_i(s)$ **αναλλοιώτα πολυώνυμα (invariant polynomials)**.

Ορισμός 1.8. Τα **μηδενικά (zeros)** του $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ στο \mathbb{C} , ορίζονται ως τα μηδενικά των πολυωνύμων $\varepsilon_i(s), i \in r$ και οι **πόλοι (poles)** του ως τα μηδενικά των $\psi_i(s), i \in r$ πολυωνύμων.

Παράδειγμα 1.3. Έστω ότι έχουμε τον πίνακα

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

που έχει Smith μορφή την

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} & 0 \\ 0 & (s+2) \end{bmatrix}$$

τότε

$$\varepsilon_1(s) = 1, \varepsilon_2(s) = s + 2$$

$$\psi_1(s) = (s + 1)(s + 2)(s + 3), \psi_2(s) = 1$$

έτσι το μηδενικό του $T(s)$ (στο \mathbb{C}) είναι το -2 και οι πόλοι τα $-1, -2, -3$.

Ορισμός 1.9. Έστω $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}, B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times q}, C(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times m}$ τρεις πολυωνυμικοί πίνακες που ικανοποιούν τη σχέση

$$A(s) = B(s)C(s).$$

Θα λέμε ότι ο $B(s)$ είναι ένας **αριστερός διαιρέτης (left divisor)** του $A(s)$ κι ο $C(s)$ ένας **δεξιός διαιρέτης (right divisor)** αντίστοιχα. Κι ακόμη ο $A(s)$ είναι ένα **αριστερό πολλαπλάσιο (left multiple)** του $C(s)$ ή ένα **δεξί πολλαπλάσιο (right multiple)** του $B(s)$.

Έστω δυο πολυωνυμικοί πίνακες $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times l} (\in \mathbb{R}[s]^{l \times m}), T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t} (\in \mathbb{R}[s]^{t \times m})$, κι έστω $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p} (T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m})$ να είναι ένας αριστερός (δεξιός) διαιρέτης των T_1, T_2 , δηλαδή

$$T_1(s) = T_L(s)\bar{T}_1(s) \text{ και } T_2(s) = T_L(s)\bar{T}_2(s)$$

$$T_1(s) = \bar{T}_1(s)T_L(s) \text{ και } T_2(s) = \bar{T}_2(s)T_L(s)$$

$$\text{όπου } \bar{T}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times l} (\in \mathbb{R}[s]^{l \times m}), \bar{T}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t} (\in \mathbb{R}[s]^{t \times m}).$$

Ορισμός 1.10. Τότε ο $T_L(s) (T_R(s))$ λέγεται **κοινός αριστερός (δεξιός) διαιρέτης (common left (right) divisor)** των T_1, T_2 . Κι ακόμη αν ο $T_L(s) (T_R(s))$ είναι ένα δεξί (αριστερό) πολλαπλάσιο και κοινού αριστερού (δεξιού) διαιρέτη : $\bar{T}_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p} (\bar{T}_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m})$ των T_1, T_2 , δηλαδή αν

$$T_L(s) = \bar{T}_L(s)T_3(s) (T_R(s) = T_3(s)\bar{T}_R(s))$$

για κάποιο $T_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p} (\in \mathbb{R}[s]^{m \times m})$, τότε ο $T_L(s) (T_R(s))$ λέγεται **μέγιστος κοινός αριστερός (δεξιός) διαιρέτης (greatest common left (right) divisor)** των T_1, T_2 .

Ορισμός 1.11. Οι $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times l}$ ($\in \mathbb{R}[s]^{l \times m}$), $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t}$ ($\in \mathbb{R}[s]^{t \times m}$) με $l + t \geq p = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \end{bmatrix}$ ($l + t \geq m = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix}$), λέγονται **αριστερά (δεξιά) πρώτοι (left (right) prime)**, αν ο μέγιστος κοινός αριστερός (δεξιός) διαιρέτης $T_{GL}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ ($T_{GR}(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$) είναι αντιστρέψιμος.

Πρόταση 1.1. Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ με $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$, $1 \leq r \leq \min\{p, m\}$. Τότε υπάρχουν πάντα πίνακες $A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$, $B_1 \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ αριστερά πρώτοι και $A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ δεξιά πρώτοι τέτοιοι ώστε

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$$

Ορισμός 1.12. Η παραπάνω μορφή του πίνακα $T(s)$ λέγεται **αριστερή (δεξιά) πολυωνυμική κλασματική έκφραση, (left (right) coprime polynomial matrix fraction description (MFD))** του $T(s)$.

Παράδειγμα 1.4. Θεωρώντας τον ρητό πίνακα του Παραδείγματος 1.3., τότε

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = B_2(s) A_2(s)^{-1}$$

είναι μια δεξιά κλασματική έκφραση του $T(s)$.

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$, $p \geq m = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s)$ και έστω ο ρητός διανυσματικός χώρος, $Y(s)$, που ορίζεται από τις στήλες $t_j(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times 1}$, $j \in m$ του $T(s)$. Τότε ο πίνακας $T(s)$ είναι μια βάση του $Y(s)$, και αν $T_1(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times m}$, $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T_1(s) = m$ τότε

$$\bar{T}(s) := T(s) T_1(s) \mathbb{R}(s)^{p \times m} \quad (2)$$

είναι επίσης μια βάση του $Y(s)$. Έστω τώρα μια δεξιά πολυωνυμική κλασματική έκφραση του $T(s)$, την

$$T(s) = B(s) A(s)^{-1}$$

όπου $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$, $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ με $\text{rank}_{\mathbb{R}[s]} B(s) = m$. Τότε προκύπτει από την (2) ότι ο $B(s)$ είναι επίσης, μια βάση του $Y(s)$, και μάλιστα η **πολυωνυμική (polynomial)** του βάσης. Έτσι προκύπτει ότι οποιοσδήποτε ρητός διανυσματικός χώρος έχει πολυωνυμικές βάσεις.

Ας παρατηρήσουμε ότι, αν έχουμε μια πολυωνυμική βάση $B(s)$ του $Y(s)$, μπορούμε πάντα να αναδιατάξουμε τις στήλες $b_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$, $j \in m$, πολλαπλασιάζοντας με έναν σταθερό πίνακα $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $|Q| \neq 0$, έτσι ώστε ο πίνακας $\hat{B}(s) := B(s)Q$ που θα προκύψει, θα έχει στήλες $\hat{b}_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$, $j \in m$, που θα έχουν την εξής διάταξη,

$$\text{deg} \hat{b}_1(s) \geq \text{deg} \hat{b}_2(s) \geq \dots \geq \text{deg} \hat{b}_m(s).$$

Τότε ο $\hat{B}(s)$ λέγεται μια **κανονική (normal)** βάση του $Y(s)$.

Έστω $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ μια πολυωνυμική βάση του ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$, και έστω το σύνολο M όλων των πολυωνυμικών διανυσμάτων $t(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$, τα οποία μπορούν να γραφούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί πάνω στο δακτύλιο $\mathbb{R}[s]$, των στηλών $b_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$, $j \in m$ της $B(s)$. Τότε το σύνολο M είναι **ένα ελεύθερο $\mathbb{R}[s]$ -πρότυπο (free $\mathbb{R}[s]$ -module)** και οι (στήλες) του $B(s)$ μια βάση του M .

Έστω την συμπλεκτικότητα κατά στήλες $c_c(B) = \sum_{j=1}^m \deg b_j(s)$, της βάσης $B(s)$ του προτύπου M . Τότε έχουμε

$$c_c(B) \geq \deg B(s)$$

και αν $U(s)$ αντιστρέψιμος πίνακας έχουμε

$$\bar{B}(s) = B(s)U(s)$$

με τον $\bar{B}(s)$ να είναι κανονικός κατά στήλες. Τότε

$$c_c(B) \geq c_c(\bar{B}) = \deg \bar{B}(s) = \deg B(s)$$

δηλαδή, η συμπλεκτικότητα κατά στήλες μιας κανονικής κατά στήλες βάσης $\bar{B}(s)$, $c_c(\bar{B})$ είναι η ελάχιστη συμπλεκτικότητα μεταξύ των συμπλεκτικότητων όλων των βάσεων του προτύπου M . Έτσι προκύπτει το παρακάτω.

Ορισμός 1.13. Μια βάση κανονική (κατά γραμμές ή στήλες) $\bar{B}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ του $\mathbb{R}[s]$ – προτύπου M ορίζεται ως βάση **ελάχιστης συμπλεκτικότητας** (γραμμών ή στηλών), (**least complexity**), του M .

Ορισμός 1.14. Οι διεταγμένοι βαθμοί των στηλών $\nu_j := \deg \hat{b}_j(s) \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_m$$

μιας κανονικής κατά στήλες και κανονικής βάσης $\hat{B}(s) = [\hat{b}_1(s), \hat{b}_2(s), \dots, \hat{b}_m(s)]$ του προτύπου M , ορίζονται ως οι **αναλλοίωτοι ελάχιστοι βαθμοί των στηλών (invariant minimal column degrees)** του προτύπου M .

Παράδειγμα 1.5. Έστω η πολυωνυμική βάση

$$B(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^3 & (s+1)^2 \\ s & 1 \\ -(s+1) & 0 \end{bmatrix} = [b_1(s), b_2(s)]$$

με $\deg b_1(s) = 3, \deg b_2(s) = 2, c_c(B) = 3 + 2 = 5 > 3 = \deg B(s)$. Παρατηρούμε ότι ο $B(s)$ δεν είναι κανονικός κατά στήλες. Έτσι τον πολλαπλασιάζουμε από τα δεξιά με έναν αντιστρέψιμο πίνακα

$U(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$ και έχουμε την κανονική κατά στήλες και κανονική βάση :

$$\hat{B}(s) = [\hat{b}_1(s), \hat{b}_2(s)] = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = B(s)U(s)$$

με $\deg \hat{b}_1(s) = 2, \deg \hat{b}_2(s) = 1, c_c(\hat{B}) = 2 + 1 = 3 = \deg \hat{B}(s) = \deg B(s)$. Έτσι $\nu_1 = 2, \nu_2 = 1$ είναι οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι βαθμοί των στηλών του $\mathbb{R}[s]$ – προτύπου M που παράγεται από τις στήλες του $B(s)$ ή του $\hat{B}(s)$.

Έστω μια βάση (όχι απαραίτητα κανονική κατά γραμμές) $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ του ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$ κι υποθέτουμε ότι ο $B(s)$ δεν είναι αριστερά αντιστρέψιμος. Έστω ακόμη $Q_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$, $i = 1, 2, \dots$ να είναι δεξιοί κοινοί διαιρέτες και όχι απαραίτητα μέγιστοι, των γραμμών του $B(s)$, δηλαδή

$$B(s) = B_i(s) Q_i(s), i = 1, 2, \dots$$

και οι βαθμοί των $Q_i(s)$ να είναι τέτοιοι ώστε $1 \leq \deg Q_1 \leq \deg Q_2 \leq \dots$. Τότε τα $\mathbb{R}[s]$ -πρότυπα $M_{B_i}, i = 1, 2, \dots$ που παράγονται από τις στήλες των $B_i(s), i = 1, 2, \dots$, είναι μια ακολουθία υποπροτύπων (submodules)

$$M_B \subset M_{B_1} \subset \dots \subset M_{B_i}, i = 1, 2, \dots$$

αφού το $B(s)$ δεν είναι μια βάση του M_{B_1} , κ.ο.κ.

Τώρα, αφού ο βαθμός του $B(s)$ είναι πεπερασμένος θα υπάρχει κάποιος δείκτης $i = \mu \in \mathbb{Z}^+$ για τον οποίον ο $Q_\mu(s) =: Q_{GR}(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ θα είναι ένας μέγιστος κοινός δεξιός διαιρέτης των γραμμών του $B(s)$, τέτοιος ώστε $\deg B(s) = \deg B_\mu(s) + \deg Q_{GR}(s)$ και

$$B(s) = B_\mu(s) Q_{GR}(s)$$

για κάποιον αριστερά αντιστρέψιμο πολυωνυμικό πίνακα $B_\mu(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$.

Σε αυτή την περίπτωση, το ελεύθερο $\mathbb{R}[s]$ -πρότυπο M^* , που παράγεται από τις στήλες του $B_\mu(s)$, ικανοποιεί την παρακάτω ακολουθία υποπροτύπων

$$M_B \subset M_{B_1} \subset \dots \subset M_{B_\mu} =: M^*.$$

Οι βαθμοί των βάσεων $B_i(s), i = 1, 2, \dots$ των $\mathbb{R}[s]$ -προτύπων M_{B_i} ικανοποιούν την ανισοτική σχέση

$$\deg B(s) > \deg B_1(s) > \dots > \deg B_\mu(s).$$

Ορισμός 1.15. Μια αριστερά αντιστρέψιμη πολυωνυμική βάση $B_\mu(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ του $\mathbb{R}[s]$ -προτύπου M^* , ορίζεται ως **ελάχιστου βαθμού (least degree)** πολυωνυμική βάση του ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$. Το πρότυπο M^* , που παράγεται από τις στήλες μιας ελάχιστης βάσης $B_\mu(s)$ του $Y(s)$, λέγεται **μέγιστο πρότυπο (maximal module)** του $Y(s)$.

Αν θεωρήσουμε μια κανονική και ελάχιστη, κατά στήλες, συμπλεκτικότητας βάση

$$\hat{B}_\mu(s) = [\hat{b}_{\mu 1}(s), \hat{b}_{\mu 2}(s), \dots, \hat{b}_{\mu m}(s)] \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$$

του M^* , τότε οι βαθμοί των στηλών της $\eta_i := \deg \hat{b}_{\mu j}(s) \in \mathbb{N}, j \in m$, δηλαδή οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι βαθμοί των στηλών του M^* ,

$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_m$$

είναι οι μικρότεροι βαθμοί στηλών μεταξύ όλων των βαθμών των στηλών των πολυωνυμικών βάσεων του $Y(s)$.

Ορισμός 1.16. Μια πολυωνυμική βάση ενός ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$ που είναι ελάχιστου βαθμού και ελάχιστης συμπλεκτικότητας ορίζεται ως μια **ελάχιστη βάση (minimal basis)** του $Y(s)$. Κι αντίστροφα, μια ελάχιστη βάση ενός ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$, είναι μια πολυωνυμική βάση του $Y(s)$, που είναι αριστερά αντιστρέψιμη και κανονική κατά στήλες.

Οι βαθμοί των στηλών $\eta_i \in \mathbb{N}$ μιας ελάχιστης βάσης $\hat{B}_\mu(s)$ ενός ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$, δηλαδή οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι βαθμοί των στηλών ενός μέγιστου προτύπου M^* , ορίζονται σαν **αναλλοίωτοι ελάχιστοι δείκτες (minimal indices)** του Forney ή αλλιώς ως **δείκτες (indices)** του Kronecker.

Παράδειγμα 1.6. Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας του Παραδείγματος 1.5.

$$\hat{B}(s) = [\hat{b}_1(s), \hat{b}_2(s)] = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

με τις στήλες να έχουν βαθμό $\nu_1 = \deg \hat{b}_1(s) = 2 > 1 = \deg \hat{b}_2(s) = \nu_2$, που είναι κανονικός κατά στήλες αλλά όχι αριστερά αντιστρέψιμος. Τότε έχουμε

$$\hat{B}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =: \hat{B}_1(s) Q(s)$$

όπου $Q(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ο μέγιστος κοινός δεξιός διαιρέτης των γραμμών του $\hat{B}(s)$ και $\hat{B}_1(s) = [\hat{b}_{11}(s), \hat{b}_{12}(s)]$ είναι αριστερά αντιστρέψιμος και κανονικός κατά στήλες. Έστω το πρότυπο $M_{\hat{B}}$ που παράγεται από τις στήλες $\hat{b}_1(s), \hat{b}_2(s)$ του $\hat{B}(s)$ και το πρότυπο $M_{\hat{B}_1}$ που παράγεται από τις στήλες $\hat{b}_{11}(s), \hat{b}_{12}(s)$ του $\hat{B}_1(s)$. Παρατηρούμε ότι $M_{\hat{B}} \subset M_{\hat{B}_1}$, αφού το $\hat{b}_1(s) \in M_{\hat{B}}$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των στηλών $\hat{b}_{11}(s), \hat{b}_{12}(s)$ του $\hat{B}_1(s)$ πάνω στο $\mathbb{R}[s]$. Δηλαδή,

$$\hat{b}_1(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} (s+1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ s+1 \end{bmatrix} 1$$

ενώ το αντίθετο δεν μπορεί να συμβεί. Έτσι το $M_{\hat{B}_1}$ είναι ένα μέγιστο πρότυπο που περιέχεται στο ρητό διανυσματικό χώρο $Y(s)$, που επεκτείνεται από τις στήλες του $\hat{B}(s)$ ή $\hat{B}_1(s)$. Το $\hat{B}_1(s)$ είναι τότε μια ελάχιστη βάση του $Y(s)$. Οι βαθμοί των στηλών $\eta_1 := \deg \hat{b}_{11}(s) = 1 < \nu_1 = 2$, $\eta_2 := \deg \hat{b}_{12}(s) = 1 = \nu_1$ είναι οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι δείκτες του Forney του $Y(s)$.

Ορισμός 1.17. Μια ρητή συνάρτηση

$$t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

όπου $n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s]$, λέγεται **κανονική (proper)** ρητή συνάρτηση αν

$$\lim_{s \rightarrow \infty} t(s) = e \in \mathbb{R}.$$

Αν $e = 0$, τότε η $t(s)$ λέγεται **αυστηρά κανονική (strictly proper)** συνάρτηση.

Ακόμη, έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$, τότε ο $T(s)$ λέγεται κανονικός ρητός πίνακας, αν όλα τα στοιχεία $t_{ij}(s)$ είναι κανονικές ρητές συναρτήσεις ή ισοδύναμα αν $\lim_{s \rightarrow \infty} T(s) = E \in \mathbb{R}^{p \times m}$ και αυστηρά κανονικός αν $E = 0_{p,m}$.

Θα συμβολίζουμε ως $\mathbb{R}_{pr}(s)$ το σύνολο των κανονικών ρητών συναρτήσεων και με $\mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ το σύνολο των κανονικών ρητών πινάκων.

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ και

$$T(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1} = \bar{B}_2(s) \bar{A}_2(s)^{-1}$$

με $A_2(s), \bar{A}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ κανονικοί κατά στήλες και $B_2(s), \bar{B}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$. Τότε ισχύει

$$A_2(s) = \bar{A}_2(s) V(s)$$

για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $V(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$. Έστω, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι οι $A_2(s), \bar{A}_2(s)$ είναι κανονικοί πολυωνυμικοί πίνακες. Τότε και οι δύο θα είναι κανονικές και κανονικές κατά στήλες βάσεις του ελεύθερου $\mathbb{R}[s]$ -προτύπου M που παράγεται από τις στήλες τους, κι ακόμη θα ισχύει

$$\deg a_j(s) = \deg \bar{a}_j(s), j \in m$$

όπου $a_i(s), \bar{a}_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1}$. Τότε έχουμε τα εξής συμπεράσματα.

Πρόταση 1.2. Οι διετεταγμένοι βαθμοί των στηλών, $\eta_j = \deg a_j(s), j \in m$ ενός οποιουδήποτε κανονικού και κανονικού κατά στήλες πίνακα $A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$, που εμφανίζεται σε οποιοδήποτε δεξιά κλασματική έκφραση: $B_2(s) A_2(s)^{-1}$ οποιουδήποτε ρητού πίνακα $T(s)$, είναι αναλλοίωτοι του $T(s)$.

Ορισμός 1.18. Οι βαθμοί των στηλών η_j ορίζονται ως **αναλλοίωτοι ελάχιστοι δυναμικοί κατά στήλες δείκτες (invariant minimal column dynamical indices)** του πίνακα $T(s)$. Το άθροισμα τους $\sum_{j=1}^m \eta_j = \deg A_2(s)$ ορίζεται ως η **αναλλοίωτη δυναμική τάξη (invariant dynamical order)** του $T(s)$.

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε και τους **αναλλοίωτους ελάχιστους δυναμικούς κατά γραμμές δείκτες (invariant minimal row dynamical indices)**, που θα αναφέρονται στους βαθμούς των γραμμών ενός κανονικού και κανονικού κατά γραμμές πίνακα $A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$, που εμφανίζεται σε οποιαδήποτε αριστερή κλασματική έκφραση οποιουδήποτε ρητού πίνακα $T(s)$.

Παράδειγμα 1.7. Έστω

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{2 \times 2}.$$

Μια δεξιά κλασματική έκφραση του $T(s)$ είναι η

$$T(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ (s+3)(s+1) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s+1 \\ (s+2)^2(s+1) & -(s+2) \end{bmatrix}^{-1} = B_2(s) A_2(s)^{-1}.$$

Παρατηρούμε ότι ο $A_2(s)$ είναι κανονικός κατά στήλες, αφού

$$[A_2(s)]_c^h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } \text{rank}_{\mathbb{R}} [A(s)]_c^h = 2.$$

Τότε οι βαθμοί των στηλών του $A_2(s)$ είναι οι $\eta_1 = 3, \eta_2 = 1$, οι οποίοι είναι οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι δυναμικοί κατά στήλες δείκτες του πίνακα $T(s)$.

Παρατήρηση 1.1. Έστω $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ και

$$T(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1} \quad (3)$$

όπου $B_2(s) = [b_{21}(s), b_{22}(s), \dots, b_{2m}(s)] \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ με $b_{2j}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$, $j \in m$ να είναι οι στήλες του $B_2(s)$, $A_2(s) = [a_{21}(s), a_{22}(s), \dots, a_{2m}(s)] \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ με $a_{2j}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$, $j \in m$ να είναι οι στήλες του $A_2(s)$ και ακόμη ο $A_2(s)$ είναι κανονικός κατά στήλες, τότε έχουμε ([1], Πρόταση 1.55)

$$\deg b_{2j}(s) \leq \deg a_{2j}(s) = \eta_j, j \in m \quad (4)$$

όπου $\eta_j, j \in m$ οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι κατά στήλες δυναμικοί δείκτες του $T(s)$. Αν τώρα θεωρήσουμε το ρητό πίνακα

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{(p+m) \times m}$$

από την (3) έχουμε

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2(s) \\ A_2(s) \end{bmatrix} A_2(s)^{-1}.$$

Αφού $B_2(s), A_2(s)$ είναι δεξιά πρώτοι και $\begin{bmatrix} B_2(s) \\ A_2(s) \end{bmatrix}_c^h = \begin{bmatrix} X \\ [A_2(s)]_c^h \end{bmatrix}$, $X \in \mathbb{R}^{p \times m}$, έτσι ώστε ο

$$\begin{bmatrix} B_2(s) \\ A_2(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{(p+m) \times m} \quad (5)$$

να είναι κανονικός κατά στήλες και επειδή από την (4) οι βαθμοί των στηλών ισούνται με τους δυναμικούς δείκτες $\eta_j, j \in m$, προκύπτει ότι ο πολυωνυμικός πίνακας στη σχέση (5) είναι μια ελάχιστη βάση ενός ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$, που επεκτείνεται από τις στήλες του ρητού πίνακα $\begin{bmatrix} T(s) \\ I_m \end{bmatrix}$, και ακόμη οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι δείκτες του Forney του $Y(s)$, δηλαδή οι βαθμοί των στηλών του $\begin{bmatrix} B_2(s) \\ A_2(s) \end{bmatrix}$, ταυτίζονται με τους αναλλοίωτους ελάχιστους κατά στήλες δυναμικούς δείκτες του πίνακα $T(s)$.

Ορισμός 1.19. Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ με

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$$

με $A_1(s), B_1(s)$ σχετικά αριστερά πρώτα και $B_2(s), A_2(s)$ σχετικά δεξιά πρώτα.

Τότε ορίζουμε ως **ελάχιστη τάξη (least order)** του $T(s)$, και συμβολίζουμε με $\nu(T)$, το

$$\nu(T) := \deg A_1(s) = \deg A_2(s)$$

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ με

$$T(s) = T_{sp}(s) + T_{pol}(s)$$

όπου $T_{sp}(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ είναι αυστηρά κανονικός (δηλ, $\lim_{s \rightarrow \infty} T_{sp}(s) = 0$) και $T_{pol}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ πολυωνυμικός πίνακας.

Ορισμός 1.20. Τότε ορίζουμε ως **McMillan βαθμό (McMillan degree)** του $T(s)$, και συμβολίζουμε με $\delta_M(T)$, την ποσότητα

$$\delta_M(T) := v(T_{sp}(s)) + v\left(T_{pol}\left(\frac{1}{w}\right)\right).$$

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ έτσι ώστε

$$T(s) = T_{sp}(s) + E$$

όπου $T_{sp}(s)$ είναι αυστηρά κανονικός και $E \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Ορισμός 1.21. Έστω $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$. Τότε η τετράδα πινάκων $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $E \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ τέτοια ώστε

$$T(s) = C(SI_n - A)^{-1}B + E$$

λέγεται μια **πραγμάτωση (realization)** του $T(s)$.

Ο όρος “πραγμάτωση” (A, B, C, E) του $T(s)$ δικαιολογείται από το γεγονός ότι, αν θεωρήσουμε ένα σύστημα Σ με διάνυσμα εισόδου $u(t)$ και εξόδου $y(t)$, τότε η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος μπορεί να περιγραφεί από την παρακάτω πρώτης τάξεως διαφορική εξίσωση με πίνακες καθώς και από την έξοδο

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Eu(t) \end{aligned} .$$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια πραγμάτωση $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{E})$ ενός κανονικού ρητού πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$.

Έστω ότι

$$T(s) = N(s)D(s)^{-1} \tag{6}$$

είναι μια πολυωνυμική κλασματική έκφραση, όχι απαραίτητα δεξιά πρώτη, του $T(s)$ με $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$, $D(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ και κανονικός κατά στήλες. Θεωρούμε τη διαίρεση

$$N(s) = Q(s)D(s) + R(s)$$

με $Q(s), R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ και $R(s)D(s)^{-1} =: T_{sp}(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ αυστηρώς κανονικός.

Από την (6) έχουμε

$$T(s) = R(s)D(s)^{-1} + Q(s) \tag{7}$$

και αφού ο $T(s)$ είναι κανονικός ή ισοδύναμα ([1], Κεφάλαιο 3) δε θα έχει πόλους στο $s = \infty$: $\lim_{s \rightarrow \infty} T(s) =: T(\infty) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ θα έχουμε από την (7) $T(\infty) = Q(\infty)$.

Ορίζουμε

$$\hat{E} := T(\infty).$$

Έστω $d_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1}$, $j \in m$ να είναι η j -οστή στήλη του $D(s)$, $\nu_j := \deg d_j(s)$, $j \in m$, $n := \sum_{j=1}^m \nu_j$ και με τον $D(s)$, να έχει την παρακάτω μορφή

$$D(s) = [D(s)]_c^h \text{diag}[s^{\nu_1}, s^{\nu_2}, \dots, s^{\nu_m}] + D_{bc}S(s)$$

όπου $[D(s)]_c^h \in \mathbb{R}^{m \times m}$ είναι ο μεγιστοβάθμιος κατα στήλες πίνακας συντελεστής του $D(s)$, και $D_{bc}S(s) =: D_c(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ του οποίου η j -οστή στήλη έχει βαθμό μικρότερο από το $\nu_j, j \in m$, έτσι προκύπτει ότι $D_{bc} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και $S(s) = \text{block diag} [\hat{S}_1(s), \hat{S}_2(s), \dots, \hat{S}_m(s)] \in \mathbb{R}[s]^{n \times m}, \hat{S}_j(s) := [1, s, \dots, s^{\nu_j-1}]^T \in \mathbb{R}^{\nu_j-1}, j \in m$.

Έτσι ορίζουμε τους πίνακες

$$\begin{aligned} \hat{B}_m &:= \left[[D(s)]_c^h \right]^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m} \\ \hat{A}_m &:= -\hat{B}_m D_{bc} \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \tilde{B} &:= \text{block diag} [e_1, e_2, \dots, e_m] \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ e_j &= [0, 0, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{\nu_j \times 1}, j \in m \\ A_0 &:= \text{block diag} [A_{01}, A_{02}, \dots, A_{0m}] \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ A_{0j} &:= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu_j \times \nu_j}, j \in m \end{aligned}$$

έτσι ώστε μια πραγμάτωση $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \hat{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \hat{E} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ του $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ να δίνεται από τους παρακάτω πίνακες

$$\begin{aligned} \hat{A} &:= A_0 + \tilde{B} \hat{A}_m \\ \hat{B} &:= \tilde{B} \hat{B}_m \\ \hat{C} &\text{ τέτοιο ώστε } \hat{C} S(s) = R(s) \\ \hat{E} &:= T(\infty). \end{aligned}$$

Όμοια μια παραγμάτωση $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{E})$ ενός κανονικού ρητού πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ μπορεί να βρεθεί και από μια αριστερή κλασματική πολυωνυμική έκφραση του $T(s) = A(s)^{-1} B(s)$ με $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ και κανονικός κατά γραμμές και $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$. Έτσι θεωρώντας τη διαίρεση από “αριστερά” τώρα, έχουμε

$$B(s) = A(s) Q(s) + R(s)$$

όπου $R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ και από ([1], Πρόταση 1.55) οι γραμμές του έχουν βαθμό μικρότερο από τον αντίστοιχο του $A(s)$ και $Q(s) = T(\infty) =: \bar{E} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ με τον $T(s)$ να γράφεται ως εξής :

$$T(s) = A(s)^{-1} R(s) + \bar{E}.$$

Αν τώρα $a_i(s)^T \in \mathbb{R}[s]^{1 \times p}, i \in p$, είναι οι γραμμές του $A(s)$, $r_i := \text{dega}_i(s)^T, i \in p, n := \sum_{i=1}^p r_i$, ο $A(s)$ θα γράφεται ως

$$A(s) = \text{diag}(s^{r_1}, \dots, s^{r_p}) [A(s)]_r^h + \bar{S}(s) A_{br}$$

όπου $\bar{S}(s) = \text{block diag} [\bar{S}_1(s), \dots, \bar{S}_p(s)] \in \mathbb{R}[s]^{p \times n}, \bar{S}_i(s) = [1, s, \dots, s^{r_i-1}] \in \mathbb{R}[s]^{1 \times r_i}, i \in p, A_{br} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ και αντίστοιχα με πριν θα έχουμε :

$$\hat{C}_p := \left[[A(s)]_r^h \right]^{-1} \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}_p &:= -A_{br} \hat{C}_p \in \mathbb{R}^{n \times p} \\
\tilde{C} &:= \text{block diag} [e_1, e_2, \dots, e_m] \in \mathbb{R}^{p \times n} \\
e_i &= [0, 0, \dots, 1] \in \mathbb{R}^{1 \times r_i}, i \in p \\
A_0 &:= \text{block diag} [A_{01}, A_{02}, \dots, A_{0p}] \in \mathbb{R}^{n \times n} \\
A_{0i} &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}, i \in p
\end{aligned}$$

έτσι ώστε μια πραγμάτωση $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\bar{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\bar{E} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ του $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ να δίνεται από τους παρακάτω πίνακες

$$\begin{aligned}
\bar{A} &:= A_0 + \hat{A}_p \tilde{C} \\
\bar{B} &\text{ τέτοιο ώστε } \bar{S}(s) \bar{B} = R(s) \\
\bar{C} &:= \hat{C}_p \tilde{C} \\
\bar{E} &:= T(\infty).
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν A, B, C, E είναι μια πραγμάτωση του $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ και αν ορίσουμε τους πίνακες

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &:= U^{-1} A U \in \mathbb{R}^{n \times n} \\
\tilde{B} &:= U^{-1} B \in \mathbb{R}^{n \times m} \\
\tilde{C} &:= C U \in \mathbb{R}^{p \times n} \\
\tilde{E} &:= E \in \mathbb{R}^{p \times m}
\end{aligned}$$

όπου $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{rank}_{\mathbb{R}} U = n$, τότε ισχύει

$$\begin{aligned}
\tilde{C} (sI_n - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} + \tilde{E} &= C U (sI_n - U^{-1} A U)^{-1} U^{-1} B + E \\
&= C (sI_n - A)^{-1} B + E
\end{aligned}$$

και έτσι η τετράδα $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{E})$ είναι επίσης μια πραγμάτωση του $T(s)$.

Αν θεωρήσουμε την πραγμάτωση $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{E})$ του $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ που είδαμε προηγουμένως, τότε έχουμε ([1], Πρόταση 1.81) ότι

$$[sI_n - \hat{A}, \hat{B}] \begin{bmatrix} S(s) \\ -D(s) \end{bmatrix} = 0$$

απ' όπου εξαιτίας της δομής του $S(s)$ έχουμε ότι

$$\text{rank}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} S(s) \\ D(s) \end{bmatrix} = m, \forall s \in \mathbb{C}$$

ή ισοδύναμα ότι οι πολυωνυμικοί πίνακες $S(s) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ είναι δεξιά πρώτοι, από το οποίο συνεπάγεται ότι οι $[sI_n - \hat{A}], \hat{B}$ είναι αριστερά πρώτοι ή ισοδύναμα ότι

$$\text{rank}_{\mathbb{C}} [sI_n - \hat{A}, \hat{B}] = n, \forall s \in \mathbb{C}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$\text{rank}_{\mathbb{C}} [sI_n - \hat{A}, \hat{B}] = n, \forall s \in \text{sp}(\hat{A})$$

αφού για να χάσει τάξη ο $[sI_n - \hat{A}, \hat{B}]$ για κάποιο s_0 , θα πρέπει $\det [s_0I_n - \hat{A}] = 0$ ή ισοδύναμα το s_0 να είναι ιδιοτιμή του πίνακα \hat{A} .

Όμοια και θεωρώντας την πραγμάτωση $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{E})$ του $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ έχουμε ότι

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_n - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = n, \forall s \in \text{sp}(\bar{A}).$$

Θεωρώντας τώρα μια άλλη πραγμάτωση $A := U^{-1}\hat{A}U$, $B := U^{-1}\hat{B}$, $C := \hat{C}U$, $E := \hat{E}$ της $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{E})$ του $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ και $A := U^{-1}\bar{A}U$, $B := U^{-1}\bar{B}$, $C := \bar{C}U$, $E := \bar{E}$ της $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{E})$ με $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $|U| \neq 0$, θα έχουμε

$$\text{rank}_{\mathbb{C}} [sI_n - A, B] = n, \forall s \in \text{sp}(A) \quad (8)$$

και αντίστοιχα

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix} = n, \forall s \in \text{sp}(A). \quad (9)$$

Ορισμός 1.22. Μια πραγμάτωση $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $E \in \mathbb{R}^{p \times m}$ του $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ έτσι ώστε η σχέση (8) να ικανοποιείται, λέγεται **ελέγξιμη (controllable)** πραγμάτωση του $T(s)$ και το ζεύγος (A, B) λέγεται **ελέγξιμο (controllable pair)**. Όμοια, αν η σχέση (9) ικανοποιείται, τότε η πραγμάτωση λέγεται **παρατηρήσιμη (observable)** και το ζεύγος (A, C) **παρατηρήσιμο (observable pair)**.

Παρατήρηση 1.2. Οι δείκτες $\nu_j, j \in m$ στην πραγμάτωση $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{E})$ είναι γνωστοί ως **δείκτες ελεγχξιμότητας (controllability indices)** του (\hat{A}, \hat{B}) και οι δείκτες $r_i, i \in p$ στην πραγμάτωση $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{E})$ είναι γνωστοί ως **δείκτες παρατηρησιμότητας (observability indices)** του (\bar{A}, \bar{C}) .

Παρατήρηση 1.3. Έχοντας τη σχέση

$$[sI_n - \hat{A}, \hat{B}] \begin{bmatrix} S(s) \\ -D(s) \end{bmatrix} = 0_{n,m}$$

παρατηρούμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας

$$\begin{bmatrix} S(s) \\ -D(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(n+m) \times m}$$

είναι αριστερά αντιστρέψιμος και κανονικός κατά στήλες, έτσι είναι μια ελάχιστη βάση του ρητού διανυσματικού χώρου $Y(s)$. Ακόμη, οι βαθμοί των στηλών του $\nu_j, j \in m$, δηλαδή οι δείκτες ελεγχξιμότητας του

(\hat{A}, \hat{B}) είναι ακριβώς οι ελάχιστοι αναλλοίωτοι δείκτες του Forney. Το ίδιο ισχύει και για τους δείκτες παρατηρησιμότητας, αντίστοιχα, του πίνακα

$$[\bar{S}(s), A(s)] \begin{bmatrix} sI_n - \bar{A} \\ -\bar{C} \end{bmatrix} = 0_{p,n}.$$

Παρατήρηση 1.4. Αν οι $N(s), D(s)$ είναι δεξιά πρώτοι, τότε οι δείκτες ελεγχιμότητας του (\hat{A}, \hat{B}) ταυτίζονται με τους αναλλοίωτους ελάχιστους κατά στήλες δυναμικούς δείκτες $\eta_j, j \in m$ του $T(s)$. Όμοια αν $A(s), B(s)$ είναι αριστερά πρώτοι, οι δείκτες παρατηρησιμότητας του (\bar{A}, \bar{C}) , ταυτίζονται με τους αναλλοίωτους ελάχιστους κατά γραμμές δυναμικούς δείκτες $\mu_i, i \in p$ του $T(s)$.

Ορισμός 1.23. Ένα σύστημα λέγεται **διακριτό ως προς το χρόνο (time discrete)** όταν η σχέση εισόδου- εξόδου έχει τη μορφή

$$y(kT) = (Fx)(kT)$$

Ένα σύστημα της μορφής

$$y(t) = (Fx)(t) \quad (10)$$

λέγεται **προσθετικό** αν για κάθε ζεύγος εισόδων $x(t), u(t)$ ισχύει

$$[F(x+u)](t) = (Fx)(t) + (Fu)(t)$$

και **ομογενές** αν για κάθε σταθερά $a \in \mathbb{C}$ και είσοδο $x(t)$ ισχύει

$$[F(ax)](t) = a(Fx)(t)$$

Έτσι το σύστημα ονομάζεται **γραμμικό (linear)** να είναι και προσθετικό και ομογενές.

Το σύστημα

$$y(t) = (Fx)(t)$$

ονομάζεται **χρονικά αναλλοίωτο (time invariant)**, αν για κάθε είσοδο $x(t)$ και κάθε t_1 , η έξοδος σε είσοδο $x(t-t_1)$ ισούται με την $y(t-t_1)$, δηλαδή

$$y(t-t_1) = (Fx(t-t_1)).$$

Έστω το σύστημα της σχέσης (10), έτσι ώστε να είναι σύστημα μιας εξόδου και μιας εισόδου, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και πριν την εφαρμογή της εισόδου κατά την αρχική χρονική στιγμή $t=0$, να βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας. Προκύπτει ([2], Κεφάλαιο 2) ότι ο τελεστής εισόδου-εξόδου F είναι το ολοκλήρωμα της συνέλιξης

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) x(t-\tau) d\tau, t > 0 \quad (11)$$

για $x(t) = 0, \forall t < 0$, όπου $h(t)$ είναι η χρονοστική απόκριση του συστήματος.

Θεωρώντας το μετασχηματισμό Laplace της (11), προκύπτει ότι

$$Y(s) = H(s)X(s).$$

Ορισμός 1.24. Η συνάρτηση $H(s)$ ονομάζεται **συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)** του συστήματος.

Ας παρατηρήσουμε ότι, αν η είσοδος $x(t)$ είναι μη μηδενική συνάρτηση, έτσι ώστε $X(s) \neq 0$, κι επειδή το σύστημα είναι μιας εισόδου και μιας εξόδου, θα έχουμε ότι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

δηλαδή όταν οι αρχικές συνθήκες ισούνται με το μηδέν, η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός γραμμικού και χρονικά αναλλοίωτου συστήματος συνεχούς χρόνου, ισούται με το λόγο του μετασχηματισμού Laplace $Y(s)$ της εξόδου $y(t)$ δια του μετασχηματισμού Laplace $X(s)$ της εισόδου $x(t)$.

Έστω το σύστημα n -τάξης που περιγράφεται από την παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}, m \leq n. \quad (12)$$

Υποθέτοντας ότι $x^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, \dots, m-1$ και $y^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, \dots, n-1$ και από το μετασχηματισμό Laplace έχουμε ότι

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} X(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} X(s).$$

Έτσι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \in \mathbb{R}_{pr}(s).$$

Ορισμός 1.25. Το πολυώνυμο

$$D(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της (12) ή του συστήματος και η εξίσωση

$$D(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος.

Οι ρίζες $p_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης ονομάζονται **πόλοι (poles)** του συστήματος.

Ορισμός 1.26. Οι ρίζες $z_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, m$ της

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 = 0$$

ονομάζονται **μηδενικά (zeros)** του συστήματος.

Αν τώρα τα πολυώνυμα $N(s), D(s)$ δεν είναι πρώτα μεταξύ τους, τότε έχουμε ότι

$$N(s) = f(s) \bar{N}(s) \text{ και } D(s) = f(s) \bar{D}(s)$$

όπου $\bar{N}(s), \bar{D}(s)$ πρώτα μεταξύ τους πολυώνυμα και $f(s) \in \mathbb{R}[s]$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους. Τότε η συνάρτηση μεταφοράς παίρνει τη μορφή

$$G(s) = \frac{\bar{Y}(s)}{\bar{X}(s)}$$

και λέμε ότι δεν περιγράφει πλήρως το σύστημα (12).

Ορισμός 1.27. Οι ρίζες του $f(s)$ λέγονται **αποσυζευκτικά μηδενικά** του συστήματος (**decoupling zeros**).

Παράδειγμα 1.8. Έστω το γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t).$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι

$$D(s) = s^2 + s - 2 = (s - 1)(s + 2) = 0$$

και άρα οι πόλοι του συστήματος είναι $p_1 = 1$ και $p_2 = -2$. Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{s - 1}{s^2 + s - 2} = \frac{s - 1}{(s - 1)(s + 2)} = \frac{1}{s + 2}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει ένα αποσυζευκτικό μηδενικό, που είναι ρίζα του ΜΚΔ $f(s) = s - 1$ των $N(s) = s - 1$ και $D(s) = (s - 1)(s + 2)$ και είναι ο πόλος $p_1 = 1$ του συστήματος. Άρα η συνάρτηση μεταφοράς έχει μόνο έναν πόλο, τον $p_2 = -2$ και δεν περιγράφει πλήρως το σύστημα.

Κεφάλαιο 2

Δυναμικοί Δείκτες

Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται, με τους δυναμικούς δείκτες ενός συστήματος. Αποτελεί, ουσιαστικά, ένα πρώτο βήμα για την επίλυση του προβλήματος αφού θα δούμε ότι οι δυναμικοί δείκτες παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από έναν μετασχηματισμό που περιέχει την ανάδραση εξόδου. Ακόμη επειδή οι δυναμικοί δείκτες ταυτίζονται με τους δείκτες ελεγχιμότητας σε κανονικές συναρτήσεις κι επειδή ο ελεγκτής που ψάχνουμε θα εφαρμοστεί με ανάδραση εξόδου στο σύστημα, ουσιαστικά αποδεικνύουμε ότι οι δείκτες ελεγχιμότητας του συστήματος θα παραμείνουν αναλλοίωτοι και μετά την εφαρμογή του ζητούμενου ελεγκτή.

2.1 Εισαγωγή

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα στο χώρο των καταστάσεων

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

που περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις στο πεδίο Laplace

$$\begin{aligned}sx &= Ax + Bu \\ y &= Cx + D(s)u\end{aligned}\tag{13}$$

όπου A, B, C είναι πίνακες με στοιχεία από το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} και $D(s)$ πίνακας με στοιχεία του πολυώνυμο από το δακτύλιο των πραγματικών πολυωνύμων $\mathbb{R}[s]$ με συντελεστές από το \mathbb{R} . Και υποθέτουμε ότι το παραπάνω σύστημα έχει ελάχιστη τάξη.

Κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς το σύστημα που ορίστηκε προηγουμένως, μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή

$$\begin{pmatrix} sI - A & B \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -u \end{bmatrix} = 0\tag{14}$$

Μελέτες έδειξαν [3], ότι το παρακάτω σύνολο μετασχηματισμών το οποίο αποτελείται από τους τρεις επιμέρους μετασχηματισμούς όπως στη συνέχεια,

1. $x_1 = Hx$
2. $u_1 = Ku$
3. $u_2 = u + Fx$

όπου H, K ομαλοί πίνακες, ορίζει ένα σύνολο αναλλοιώτων οι οποίοι ταυτίζονται με τους δείκτες ελεγχιμότητας του συστήματος.

Ωστόσο επειδή οι δείκτες αυτοί σχετίζονται μόνο με την εξίσωση (13) και αν υποθέσουμε ότι $D(s) = 0$, με τον παραπάνω μετασχηματισμό να διατηρεί την ιδιότητα του συστήματος να έχει ελάχιστη τάξη,

προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος με τη βοήθεια των παραπάνω μετασχηματισμών δίνεται από την εξίσωση

$$G(s) = C(sI - A + BF)^{-1}BK^{-1} \quad (15)$$

Όπως είδαμε, μόνο όταν η G είναι κανονική οι δυναμικοί δείκτες ταυτίζονται με τους δείκτες ελεγχιμότητας, παρόλο που ο ορισμός τους μπορεί να επεκταθεί κι όταν η G δεν είναι κανονική. Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι οι δυναμικοί δείκτες παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από ένα γενικευμένο σύνολο μετασχηματισμών που περιλαμβάνει και ανάδραση εξόδου, στο οποίο η G ορίστηκε να είναι αυστηρά κανονική. Πριν από αυτό όμως θα δούμε πως συνδέονται και με τις εξισώσεις του χώρου καταστάσεων όπου είναι ορισμένος ο μετασχηματισμός.

2.2 Πίνακες συστημάτων

Όπως είδαμε οι δυναμικοί δείκτες ορίστηκαν σε σχέση με τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος, έτσι [9] οποιοδήποτε σύστημα αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων μπορεί να γραφεί μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στη μορφή :

$$\begin{aligned} T(s)\xi &= U(s)u \\ y &= V(s)\xi + W(s)u \end{aligned} \quad (16)$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες και $T^{r \times r}, U^{r \times l}, V^{m \times r}, W^{m \times l} \in \mathbb{R}[s]$.

Υποθέτουμε ότι $|T(s)| \neq 0$, η τάξη του συστήματος ορίζεται σαν το βαθμό του $|T(s)|$ και έστω ότι είναι n . Ακόμη υποθέτουμε ότι $r \geq n$, όπου r η διάσταση του πίνακα T .

Τότε η συνάρτησης μεταφοράς είναι η :

$$G(s) = V(s)T^{-1}(s)U(s) + W(s) \quad (17)$$

Ακόμη μπορούμε να ορίσουμε σαν $\nu(G)$ την ελάχιστη τάξη μεταξύ όλων των συστημάτων από τα οποία προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς G .

Αν γράψουμε με τη μορφή πινάκων τις εξισώσεις (16) θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} T(s) & U(s) \\ -V(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ -u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix} \quad (18)$$

κι έτσι προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός :

Ορισμός 2.2.1 [29] Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} T(s) & U(s) \\ -V(s) & W(s) \end{bmatrix}$$

καλείται **πίνακας τους συστήματος (system matrix)** της σχέσης (17).

Για παράδειγμα, αν έχουμε τη μορφή ενός συστήματος στο χώρο των καταστάσεων

$$\begin{aligned} (sI - A)x &= Bu \\ y &= Cx + D(s)u \end{aligned} \quad (19)$$

τότε αυτό έχει σαν πίνακα συστήματος τον :

$$\begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D(s) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Ακόμη, όταν οι πίνακες T, U είναι σχετικά αριστερά πρώτοι και οι T, V σχετικά δεξιά πρώτοι, τότε το σύστημα (ή ο πίνακας του) έχει ελάχιστη τάξη.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την ισοδυναμία δύο πινάκων συστημάτων.

Ορισμός 2.2.2 [29] Έτσι, δυο πίνακες συστημάτων P, P_1 είναι **αυστηρά ισοδύναμοι (strictly equivalent)** αν μπορούν να γραφούν στην παρακάτω μορφή:

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) & U(s) \\ -V(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(s) & U_1(s) \\ -V_1(s) & W_1(s) \end{bmatrix} \quad (21)$$

όπου $M(s), N(s), X(s), Y(s) \in \mathbb{R}[s]$ και $M(s), N(s)$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες.

Επίσης, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, αν έχουμε δύο πίνακες συστημάτων που έχουν ελάχιστη τάξη και η τιμή της μεταβλητής r παραμένει η ίδια, τότε θα είναι αυστηρά ισοδύναμοι αν και μόνο αν έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς.

Συνεχίζουμε, δίνοντας έναν ακόμη ορισμό.

Ορισμός 2.2.3 [29] Ορίζουμε ως βαθμό d ενός συστήματος το μεγαλύτερο βαθμό που συναντάται μεταξύ όλων των όρων που έχουν τη μορφή

$$P, P_{j_1}^{i_1}, P_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}, \dots \quad (22)$$

και προκύπτουν από τον πίνακα του συστήματος.

Ας εξηγήσουμε τη σημασία του παραπάνω ορισμού με ένα παράδειγμα.

Έστω ότι έχουμε $P_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$, τότε αυτό ερμηνεύεται ως εξής: ο όρος P αποτελείται από τις $1, 2, \dots, r, r + i_1, r + i_2$ γραμμές και τις $1, 2, \dots, r, r + j_1, r + j_2$ στήλες του πίνακα P , και συγκεκριμένα $P = |T|$.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

- αν ο P έχει ελάχιστη τάξη τότε ο βαθμός του d ισούται με το βαθμό $\delta(G)$ της McMillan μορφής της G και λέμε ότι ο P έχει **ελάχιστο βαθμό**.
- η συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ είναι κανονική αν και μόνο αν $d = n$.
- αν $c = d$, όπου c η συμπλεκτικότητα των στηλών, τότε ο P έχει την **ελάχιστη συμπλεκτικότητα**.
- αν $c = \delta(G)$, τότε ο P είναι **ελάχιστος**.

Γενικά ισχύει $c \geq d \geq n$ και $d - \delta(G) = n - \nu(G)$ και να σημειώσουμε ότι ενώ η τάξη και ο βαθμός παραμένουν σταθερά σε ισοδύναμα συστήματα, η συμπλεκτικότητα όχι.

Προφανώς η αυστηρή ισοδυναμία πινάκων συστημάτων, μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι ένας πίνακας P_1 με T_1, U_1 σχετικά (αριστερά) πρώτα, μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$P(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T(s) & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -V(s) & \vdots & D(s) \end{bmatrix} \quad (23)$$

οπότε αν έχουμε έναν ελάχιστης τάξης πίνακα συστήματος, η συνάρτηση μεταφοράς είναι η

$$G(s) = V(s)T^{-1}(s) + D(s) \quad (24)$$

όπου V, T σχετικά δεξιά πρώτοι, ο πίνακας $|T|$ έχει βαθμό $n = \nu(G)$ και ακόμη ισχύει $V(s)T^{-1}(s) \rightarrow 0$ καθώς $s \rightarrow \infty$, δηλαδή η G είναι αυστηρώς κανονική.

2.3 Δυναμικοί Δείκτες

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε αρχικά κάποια χρήσιμα συμπεράσματα και θα αποδείξουμε ότι οι δυναμικοί δείκτες παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από ένα γενικευμένο σύνολο μετασχηματισμών.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα πίνακα συστήματος P_0 με T_0, U_0 σχετικά πρώτα, ο οποίος έχει τη μορφή της εξίσωσης (23). Αν πολλαπλασιάσουμε $D(s)$ φορές τη δεύτερη γραμμή του πίνακα στην εξίσωση (23) και την αφαιρέσουμε από την τρίτη τότε έχουμε :

$$P(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T(s) & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -[V(s) + D(s)T(s)] & \vdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T(s) & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -V_1(s) & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

και έστω

$$Q(s) = \begin{bmatrix} T(s) \\ -[V(s) + D(s)T(s)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) \\ -V_1(s) \end{bmatrix} \quad (26)$$

τότε προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα :

1. Έστω $Q(s), Q'(s)$ δυο ελάχιστες βάσεις για έναν διανυσματικό χώρο V , τότε οι βαθμοί των στηλών, δηλαδή οι ελάχιστοι δείκτες δ_i του Q ταυτίζονται με τους αντίστοιχους ελάχιστους δ'_i του Q' τα οποία όταν οι $T(s), V(s)$ είναι σχετικά πρώτοι ταυτίζονται με τους δυναμικούς δείκτες.
2. Οι δυναμικοί δείκτες του χώρου V^\perp (ορθογώνιος του V) ταυτίζονται με τους δυναμικούς δείκτες του V , όπου V ο γραμμικός διανυσματικός χώρος των βάσεων.
3. Η συμπλεκτικότητα c και ο βαθμός d του $P(s)$ ισούνται με τη συμπλεκτικότητα και το βαθμό του $Q(s)$.
4. Ο $P(s)$ είναι ελάχιστος αν και μόνο αν ο $Q(s)$ είναι μια ελάχιστη βάση.

Θεώρημα 2.3.1 [29] Έστω P, P' δύο πίνακες συστημάτων ελάχιστης τάξης που έχουν τη μορφή της εξίσωσης (25) και δίνουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$. Έστω, ακόμη, Q, Q' οι αντίστοιχοι πίνακες της εξίσωσης (26). Τότε θα ισχύει $Q'(s) = Q(s)R(s)$, όπου $R(s)$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, και οι στήλες του Q ορίζουν τον ίδιο διανυσματικό χώρο V με τις στήλες του Q' .

Απόδειξη

Έχουμε

$$G = V_1 T^{-1} = V_1' (T')^{-1} \quad (27)$$

και θεωρούμε $R = T^{-1}T'$ τέτοιο ώστε

$$T' = TR, V_1' = V_1 R \quad (28)$$

Φέρνουμε τον R στη McMillan μορφή, όπου M, N αντιστρέψιμοι πίνακες.
Τότε

$$MRN = MT^{-1}T'N = E\Psi^{-1} \quad (29)$$

όπου E, Ψ διαγώνιοι πολυωνυμικοί πίνακες.
Από τις εξισώσεις (28), (29) προκύπτει ότι :

$$\begin{bmatrix} T' \\ V_1' \end{bmatrix} N\Psi = \begin{bmatrix} T \\ V_1 \end{bmatrix} M^{-1}E \quad (30)$$

και επειδή T, V_1 και T', V_1' είναι σχετικά πρώτοι το ίδιο ισχύει θα και για τους πίνακες E, Ψ . Προκύπτει ότι $E = \Psi = I$ οπότε ο πίνακας $R = M^{-1}N^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος και το πρώτο μέρος του θεωρήματος έχει αποδειχθεί. Για το δεύτερο, η εξίσωση (30) δείχνει ότι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των στηλών του Q' μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του Q και αντίστροφα. Ακόμη, επειδή

$$\begin{bmatrix} T \\ V_1 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} T' \\ V_1' \end{bmatrix} (T')^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix} \quad (31)$$

αποδεικνύεται ότι οι στήλες του Q ορίζουν τον ίδιο διανυσματικό χώρο με τις στήλες του Q' .▲

Ας αναφέρουμε στη συνέχεια κάποια συμπεράσματα.

Αν έχουμε μια συνάρτηση μεταφοράς G τότε όλοι οι πίνακες της εξίσωσης (25) από τους οποίους προκύπτει η G , ορίζουν τον ίδιο διανυσματικό χώρο V . Έτσι όλοι οι ελάχιστοι πίνακες συστημάτων P (25) από τους οποίους προκύπτει η G , έχουν το ίδιο σύνολο δυναμικών δεικτών $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l$ [2]. Έτσι από τον ορισμό της συμπλεκτικότητας c και από το ότι ο P είναι ελάχιστος προκύπτει ότι :

$$\sum_{i=1}^l \delta_i = c = \delta(G) \quad (32)$$

όπου $\delta(G)$ είναι ο βαθμός McMillan της G .

Αν η G είναι κανονική, τότε $\delta(G) = \nu(G)$ και τα δ_i είναι οι δείκτες ελεγχιμότητας [2], ενώ δεν ισχύει το ίδιο αν η G δεν είναι κανονική.

Χρήσιμο είναι ακόμη και το ακόλουθο λήμμα [9].

Λήμμα 2.3.1 Έστω ότι η αυστηρά κανονική συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ έχει την παρακάτω μορφή :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = V(s)T^{-1}(s), m \times l \quad (33)$$

όπου A, B, C ορίζουν ένα ελάχιστης τάξης σύστημα στο χώρο των καταστάσεων και V, T σχετικά (δεξιά) πρώτοι.

Τότε αν

$$G_1(s) = C_1(sI - A)^{-1}B, m_1 \times l \quad (34)$$

θα υπάρχει ένας πολυωνυμικός πίνακας $V_1(s)$ τέτοιος ώστε :

$$G_1(s) = V_1(s)T^{-1}(s) \quad (35)$$

και αντίστροφα.

Απόδειξη

Οι πίνακες συστημάτων

$$\begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

και

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & T(s) & I_l \\ 0 & -V(s) & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

και οι δυο είναι ελάχιστης τάξης και άρα προκύπτει η ίδια συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$. Τότε σίγουρα θα υπάρχει ένας μετασχηματισμός αυστηρής ισοδυναμίας που θα τους συσχετίζει, σαν τον παρακάτω :

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T(s) & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -V(s) & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Το ίδιο ακριβώς θα ισχύει και για τους πίνακες συστημάτων των σχέσεων (34) και (35) οπότε θα έχουμε :

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T(s) & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -V_2(s) & -V_3(s) & \vdots & W(s) \end{bmatrix} \quad (39)$$

και με έναν επιπλέον μετασχηματισμό έχουμε ότι :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & I & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_2(s) & -W(s) & \vdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T(s) & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -V_2(s) & -V_3(s) & \vdots & W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T(s) & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -V_1(s) & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

όπου $V_1(s) = W(s)T(s) + V_3(s)$ έχοντας έτσι το ζητούμενο.

Αντίστροφα, αν $G_1(s) = V_1(s)T^{-1}(s)$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T(s) & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -V_1(s) & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_l \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -V_4(s) & W_1(s) \end{bmatrix} \quad (41)$$

και αφαιρώντας κατάλληλα πολλαπλάσια των γραμμών $(sI - A \ B)$ από τις γραμμές $(-V_4(s) \ W_1(s))$, μειώνουμε τον πίνακα $-V_4(s)$ σε έναν πίνακα C_1 . Αφού η G είναι αυστηρώς κανονική ο πίνακας

$W_1(s)$ συγκλίνει στο μηδέν με τον ίδιο μετασχηματισμό. Έτσι έχουμε αποδείξει και το αντίστροφο του λήμματος. ▲

Ας ορίσουμε τώρα το γενικευμένο σύνολο των μετασχηματισμών κάτω από τους οποίους θα παραμείνουν αναλλοίωτοι οι δυναμικοί δείκτες.

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ ενός συστήματος ελάχιστης τάξης να περιγράφεται από τις εξισώσεις (19). Να τονίσουμε ότι το σύστημα που προκύπτει από τους μετασχηματισμούς παραμένει ελάχιστης τάξης και καλά ορισμένο.

Το γενικευμένο σύνολο των μετασχηματισμών είναι το εξής :

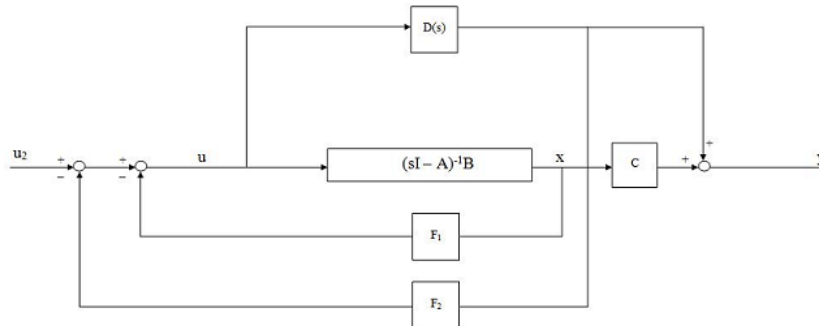
$$\mathcal{F}_1: x_1 = Hx, \text{ όπου } H \in \mathbb{R} \text{ ένας ομαλός πίνακας}$$

$$\mathcal{F}_2: u_1 = Ku, \text{ όπου } K \in \mathbb{R} \text{ ένας ομαλός πίνακας}$$

$$\mathcal{F}_3: u_2 = u + F_1x + F_2D(s)u, \text{ όπου } F_1 \in \mathbb{R}^{l \times r}, F_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$$

Να σημειώσουμε ότι, εξαιρούνται εκείνα τα F_1, F_2 , ανάλογα με το σύστημα στο οποίο εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό, τα οποία μπορεί να οδηγήσουν το σύστημα είτε σε $|T(s) \equiv 0|$ και να μην είναι καλά ορισμένο είτε οι πίνακες V, T να μην είναι σχετικά πρώτοι.

Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα ροής του συστήματος που προκύπτει από τον \mathcal{F}_3 με την ανάδραση εξόδου να υπολογίζεται αν $F_1 = F_2C$.



Σχήμα 2.1 : Διάγραμμα ροής

Οπότε μπορούμε πλέον να αποδείξουμε το παρακάτω.

Θεώρημα 2.3.2 [29] Οι δυναμικοί δείκτες μιας συνάρτησης μεταφοράς G παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από το σύνολο των μετασχηματισμών \mathcal{F} .

Απόδειξη

Έστω τις αυστηρά κανονικές συναρτήσεις μεταφοράς G_C, G_F που ορίζονται ως εξής :

$$G_C = C(sI - A)^{-1}B = G(s) - D(s), m \times l \quad (42)$$

$$G_F(s) = F_1(sI - A)^{-1}B, l \times l \quad (43)$$

όπου οι πίνακες A, B, C ορίζουν ένα σύστημα ελάχιστης τάξης στο χώρο των καταστάσεων. Έχουμε

$$G_C(s) = V_C(s)T^{-1}(s) \quad (44)$$

όπου V_C, T σχετικά πρώτοι, τότε από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι

$$G_F(s) = V_F(s)T^{-1}(s) \quad (45)$$

Όπως έχουμε δει, ένα ελάχιστης τάξης σύστημα από το οποίο προκύπτει η G , μπορεί να έχει πίνακα συστήματος τον

$$\begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -(V_C + DT) & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

και αν δεν έχει ελάχιστη συμπλεκτικότητα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $M(s)$ τέτοιος ώστε :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & TM & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -(V_C + DT)M & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

οπότε πλέον έχει και ελάχιστη τάξη αλλά και συμπλεκτικότητα και άρα είναι ελάχιστος.

Έστω οι βαθμοί των στηλών του, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l$ να είναι οι δυναμικοί δείκτες της G .

Ο μετασχηματισμός \mathcal{F}_1 αφήνει τη G αμετάβλητη.

Ο μετασχηματισμός \mathcal{F}_2 αντικαθιστά τη G με τη GK^{-1} η οποία προκύπτει από το σύστημα

$$\begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & KTM & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -(V_C + DT)M & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

το οποίο είναι ελάχιστο και οι στήλες του έχουν τους ίδιους βαθμούς με αυτούς του πίνακα (47), οπότε και ο δεύτερος μετασχηματισμός αφήνει τους δείκτες αναλλοίωτους.

Ο μετασχηματισμός \mathcal{F}_3 μπορεί να αντικαταστήσει το σύστημα που δίνεται από τις σχέσεις (19) με τον πίνακα συστήματος

$$\begin{bmatrix} sI - A & B & 0 & \vdots & 0 \\ -C & D(s) & I & \vdots & 0 \\ F_1 & -F_2D(s) - I & 0 & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -I & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -u \\ y \\ -u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -y \end{bmatrix} \quad (49)$$

όπου η τάξη του θα είναι ο βαθμός του

$$\pm \begin{vmatrix} sI - A & B & 0 \\ -C & D(s) & I \\ F_1 & -F_2 D(s) - I & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sI - A & B \\ F_1 & -F_2 D(s) - I \end{vmatrix} \quad (50)$$

$$= |sI - A| |-G_F - F_2 D(s) - I| \quad (51)$$

Πολλαπλασιάζοντας με $T(s)$ έχουμε

$$= \alpha |-V_F - F_2 D(s) T(s) - T(s)| \quad (52)$$

Εναλλακτικά, αν αντικαταστήσουμε το $x = (sI - A)^{-1} Bu$ στον ορισμό του \mathcal{F}_3 έχουμε

$$u = (I + G_F + F_2 D(s))^{-1} u_2 \quad (53)$$

και έτσι η συνάρτηση μεταφοράς που σχετίζει την είσοδο u_2 με την έξοδο y είναι η

$$(G_C + D)(I + G_F + F_2 D)^{-1} = (V_C + DT)(T + V_F + F_2 DT)^{-1} \quad (54)$$

που προκύπτει από τον πίνακα συστήματος

$$\begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & (T + V_F + F_2 DT)M & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -(V_C + DT)M & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω σύστημα έχει την ίδια τάξη με αυτή του συστήματος στη σχέση (49), αν συγκριθούν με τη σχέση (52), και έτσι από τον ορισμό ο μετασχηματισμός \mathcal{F}_3 έχει ελάχιστη τάξη.

Οι βαθμοί των στηλών της δεύτερης στήλης του πίνακα (55) είναι

$$\begin{bmatrix} (T + V_F - F_2 V_C)M \\ -(V_C + DT)M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I + G_F - F_2 G_C)TM \\ -(V_C + DT)M \end{bmatrix} \quad (56)$$

το οποίο προκύπτει αν προσθέσουμε F_2 φορές την τρίτη γραμμή του πίνακα (55) στη δεύτερη γραμμή. Έστω ότι η i -οστή στήλη στον πίνακα (56) έχει βαθμό p_i , τότε

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} TM \\ -(V_C + DT)M \end{bmatrix} \text{diag}(s^{-p_i}) \quad (57)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \lim_{s \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} I + G_F - F_2 G_C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \right\} \times \left\{ \lim_{s \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} (I + G_F - F_2 G_C)TM \\ -(V_C + DT)M \end{bmatrix} \text{diag}(s^{-p_i}) \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} (I + G_F - F_2 G_C)TM \\ -(V_C + DT)M \end{bmatrix} \text{diag}(s^{-p_i}) \end{aligned} \quad (58)$$

το οποίο είναι πεπερασμένο και έχει μια μη μηδενική είσοδο σε κάθε στήλη, οπότε συνεπάγεται ότι $p_i = \delta_i, i = 1, 2, \dots, l$. Ακόμη η σχέση (58) δείχνει ότι ο συντελεστής του s^{δ_i} είναι ίδιος με αυτός της σχέσης (47), οπότε έχει την ελάχιστη συμπλεκτικότητα καθώς επίσης και πλήρη τάξη. Το ίδιο ισχύει και για τον πίνακα (55), οπότε τα δ_i είναι οι δυναμικοί δείκτες της συνάρτησης μεταφοράς που ορίζεται στη σχέση (54) και είναι αναλλοίωτοι και κάτω από το μετασχηματισμό \mathcal{F}_3 αποδεικνύοντας έτσι το θεώρημα. \blacktriangle

Μπορούμε να συμπεράνουμε από τη σχέση

$$\sum_{i=1}^l \delta_i = c = \delta(G)$$

ότι και ο McMillan βαθμός της συνάρτησης μεταφοράς παραμένει αναλλοίωτος κάτω από το μετασχηματισμό \mathcal{F} .

Ας σημειώσουμε ότι ασχοληθήκαμε μόνο με τους δείκτες που σχετίζονται με την είσοδο. Αντίστοιχα υπάρχουν δυναμικοί δείκτες καθώς και ελάχιστοι που σχετίζονται με την έξοδο και στηρίζονται στην ίδια θεωρία αρκεί να θεωρήσουμε τον ανάστροφο του πίνακα $P(s)$, δηλαδή τον $P^T(s)$.

Ας δούμε στη συνέχεια κάποια παραδείγματα πάνω στο μετασχηματισμό \mathcal{F} .

2.4 Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε τον παρακάτω πίνακα συστήματος που έχει τη μορφή της σχέσης (49)

$$\begin{bmatrix} s+1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ -1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ F_1 & F_2 - 1 & 0 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες του συστήματος στο χώρο των καταστάσεων είναι $A = s + 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = -1$. Εμείς ψάχνουμε να βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος δίνοντας διάφορες τιμές των F_1, F_2 , με τη βοήθεια της θεωρίας που ορίστηκε. Είδαμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος που συνδέει την έξοδο

$$y = Cx + D(s)u$$

με την είσοδο

$$u_2 = u + F_1x + F_2D(s)u$$

του μετασχηματισμού \mathcal{F} , είναι η

$$G = \frac{y}{u_2} = \frac{Cx + D(s)u}{u + F_1x + F_2D(s)u}$$

και αν θέσουμε $x = (sI - A)^{-1}Bu$ έχουμε

$$G = \frac{C(sI - A)^{-1}Bu + D(s)u}{u + F_1(sI - A)^{-1}Bu + F_2D(s)u} = \frac{G_C + D(s)}{I + G_F + F_2D(s)}$$

- Αν $F_1 = F_2 = 0$ τότε

$$G = \frac{\frac{2}{s+1} - 1}{1} = \frac{-(s-1)}{s+1}$$

με δυναμικό δείκτη $\delta_1 = 1$, αφού ισούται με το βαθμό της στήλης της σχέσης (56) με τάξη ίση με τη μονάδα, αφού $\begin{vmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = |-s-1|$

- Αν $F_1 = F_2 = -1$ τότε

$$G = \frac{\frac{2}{s+1} - 1}{1 - \frac{2}{s+1} + 1} = \frac{-s+1}{2s-2+2} = \frac{-(s-1)}{2s}$$

με δυναμικό δείκτη $\delta_1 = 1$ και με τάξη ίση με τη μονάδα, αφού $\begin{vmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = |-2s-2+2| = |-2s|$

- Αν $F_1 = 0, F_2 = 1$ τότε

$$|T(s)| = \begin{vmatrix} s+1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

οπότε οι πίνακες αυτοί πρέπει να εξαιρεθούν από τον \mathcal{F}_3 .

- Αν $F_1 = 1, F_2 = 2$ τότε αν αφαιρέσουμε τη δεύτερη στήλη από την πρώτη, βλέπουμε ότι η πρώτη διαιρείται από το $s-1$, δηλαδή τα T, V δεν είναι σχετικά πρώτα άρα κι αυτά πρέπει να εξαιρεθούν από τον \mathcal{F}_3 .

- Αν $F_1 = \frac{1}{3}, F_2 = 0$ τότε

$$G = \frac{\frac{2}{s+1} - 1}{1 + \frac{2}{3(s+1)}} = \frac{2-s-1}{3s+3+2} = \frac{-s+1}{3s+5}$$

με δυναμικό δείκτη $\delta_1 = 1$ και με τάξη ίση με τη μονάδα, αφού $\begin{vmatrix} s+1 & 2 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} = |-s-1-\frac{2}{3}| = |-s-\frac{5}{3}|$

- Αν $F_1 = 0, F_2 = 2$ τότε

$$G = \frac{\frac{-s+1}{s+1}}{1-2} = \frac{-s+1}{-s-1}$$

με δυναμικό δείκτη $\delta_1 = 1$ και με τάξη ίση με τη μονάδα, αφού $\begin{vmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |s+1|$

Παρατηρούμε ότι ενώ τα δυο τελευταία ζευγάρια είναι αποδεκτά, η σύνθεσή τους δεν είναι, κι έτσι συμπεραίνουμε ότι ο μετασχηματισμός \mathcal{F} δεν αποτελεί σύνολο κλειστό ως προς τη σύνθεση. Ακόμη παρατηρούμε ότι ο δυναμικός δείκτης διατηρείται άρα και ο βαθμός McMillan, και συνεπώς και η τάξη του συστήματος αφού η συνάρτηση μεταφοράς είναι αυστηρώς κανονική.

2.5 Ιδιότητες των Δυναμικών Δεικτών

Στην ενότητα αυτή της εργασίας θα θεωρήσουμε το σύστημα

$$\left. \begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \right\}$$

με E μη ομαλό πίνακα και θα δείξουμε ότι [15] οι ελάχιστοι δείκτες παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από ένα νέο σύνολο μετασχηματισμών και στη συνέχεια ότι ισούνται με τους δυναμικούς. Θα δούμε ακόμη

πως καταλήγουμε στο προηγούμενο σύνολο μετασχηματισμών που ορίσαμε παραπάνω, καθώς επίσης και τη σχέση που έχουν τα δυο σύνολα μεταξύ τους. Τα σύνολο των μετασχηματισμών που θα δούμε στη συνέχεια αναφέρεται σε δείκτες οι οποίοι έχουν οριστεί και για μη κανονικές συναρτήσεις μεταφοράς.

Έστω λοιπόν, το πρώτης τάξης σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} E\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{array} \right\} \quad (59)$$

όπου $x, u, y \in \mathbb{R}$ διανύσματα και E, A, B, C πραγματικοί σταθεροί πίνακες με E πιθανώς μη ομαλό. Ο πίνακας συστήματος που αντιστοιχεί στο (59) είναι ο

$$P(s) = \begin{bmatrix} sE - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

με $|sE - A| \neq 0$, διότι θέλουμε το σύστημα να είναι καλώς ορισμένο.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι [14], αν το σύστημα δεν έχει πεπερασμένα ή άπειρα αποσυζευκτικά μηδενικά, τότε οι ελάχιστοι δείκτες, που προκύπτουν από τον μη ομαλό πίνακα $\begin{pmatrix} sE - A & B \end{pmatrix}$ είναι ακριβώς οι δυναμικοί δείκτες της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος, καθώς επίσης και θα θεωρήσουμε το σύνολο μετασχηματισμών που αντιστοιχεί στους ελάχιστους δείκτες.

Θεώρημα 2.5.1 [30] Έστω το παρακάτω σύνολο μετασχηματισμών \mathfrak{S} με

$$\mathfrak{S}_1 : x_1 = Hx, \text{ όπου } H \text{ ομαλός πίνακας πάνω στο } \mathbb{R}$$

$$\mathfrak{S}_2 : u_1 = Ku, \text{ όπου } K \text{ ομαλός πίνακας πάνω στο } \mathbb{R}$$

$$\mathfrak{S}_3 : u_2 = u + Fx, \text{ όπου } F \text{ πίνακας πάνω στο } \mathbb{R}$$

Έστω ακόμη ότι ο $P(s)$ της σχέσης (60) δεν έχει πεπερασμένα ούτε άπειρα αποσυζευκτικά μηδενικά και έστω ακόμη $P'(s)$ ο πίνακας συστήματος στον οποίον εφαρμόστηκε ο μετασχηματισμός να είναι ο

$$P'(s) = \begin{bmatrix} sE' - A' & B' \\ -C' & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Τότε οι ελάχιστοι δείκτες, που προκύπτουν από την ελάχιστη βάση $\begin{pmatrix} sE' - A' & B' \end{pmatrix}$ είναι αυτοί που προκύπτουν από την $\begin{pmatrix} sE - A & B \end{pmatrix}$ αντίστοιχα. Επιπλέον, αν ο $P'(s)$ είναι καλά ορισμένος και δεν έχει και αυτός πεπερασμένα ή άπειρα αποσυζευκτικά μηδενικά, τότε οι δυναμικοί δείκτες της $G'(s)$ ταυτίζονται με αυτούς της $G(s)$, που στην ουσία είναι οι ελάχιστοι της βάσης $\begin{pmatrix} sE - A & B \end{pmatrix}$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι [13] για τις ελάχιστες βάσεις ισχύει η ισοδυναμία

$$X(s) \sim Y(s) \iff X(s) = LY(s)R \quad (62)$$

με L, R σταθερούς πίνακες, ομαλούς.

Σαν ειδική περίπτωση της παραπάνω ισοδυναμίας στη σχέση (62) ισχυριζόμαστε ότι

$$\begin{pmatrix} sE' - A' & B' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} sE - A & B \end{pmatrix} R \quad (63)$$

Έτσι αν $R = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, η εξίσωση (63) είναι ισοδύναμη με το μετασχηματισμό \mathfrak{S}_1 .

Όμοια αν $R = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$, έχουμε το μετασχηματισμό \mathfrak{S}_2 και αν $R = \begin{bmatrix} I & 0 \\ F & I \end{bmatrix}$, έχουμε το μετασχηματισμό \mathfrak{S}_3 .

Οπότε οποιοσδήποτε μετασχηματισμός στο σύνολο \mathfrak{S} μπορεί να γραφεί ως γινόμενο τέτοιων πινάκων και άρα οι ελάχιστοι δείκτες, που προκύπτουν από τον $(sE - A \ B)$ είναι αναλλοίωτοι κάτω από τον \mathfrak{S} . Κι επειδή οι ελάχιστοι δείκτες, είναι δυναμικοί δείκτες της $G(s)$ καθώς επίσης, κι επειδή ο $P'(s)$ είναι καλά ορισμένος και δεν έχει άπειρα ή πεπερασμένα αποσυζευκτικά μηδενικά, συμπεραίνουμε ότι οι ελάχιστοι δείκτες, που προκύπτουν από τον $(sE' - A' \ B')$, είναι οι δυναμικοί δείκτες της $G'(s)$. Αποδείξαμε έτσι το ζητούμενο.▲

Αν τώρα το σύστημα πάρει την παρακάτω μορφή, δηλαδή

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + B_1 u \\ y &= C_1 x + D(s) u \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

όπου τα διανύσματα $x, u, y \in \mathbb{R}$, A_1, B_1, C_1 πραγματικοί, σταθεροί πίνακες και $D(s) \in \mathbb{R}[s]$.

Μπορούμε να ορίσουμε το ακόλουθο σύνολο μετασχηματισμών το οποίο θα αναφέρεται στους δυναμικούς δείκτες, το οποίο είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο \mathfrak{S}' :

$$\mathfrak{S}'_1 : x_1 = H_1 x, \text{ όπου } H \text{ ομαλός πίνακας πάνω στο } \mathbb{R}$$

$$\mathfrak{S}'_2 : u_1 = K u, \text{ όπου } K \text{ ομαλός πίνακας πάνω στο } \mathbb{R}$$

$$\mathfrak{S}'_3 : u_2 = u + F_1 x + F_2 D(s) u, \text{ όπου } F_1, F_2 \text{ πίνακες πάνω στο } \mathbb{R}$$

Να σημειώσουμε ότι οι πίνακες F_1, F_2 θα πρέπει να είναι τέτοιοι ώστε το σύστημα που θα προκύψει, αφού εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό, να είναι καλά ορισμένο και να έχει ελάχιστη τάξη. Ακόμη, επειδή αναφέρονται στους δυναμικούς δείκτες το σύνολο \mathfrak{S}' δεν μπορεί να είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση, κάτι το οποίο δεν συμβαίνει [3] με το σύνολο \mathfrak{S} το οποίο σχετίζεται με τους ελάχιστους δείκτες. Έτσι αμέσως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ το οποίο και θα αποδείξουμε στο παράρτημα της εργασίας.

Τέλος, τα παραπάνω συμπεράσματα ισχυούν, χωρίς σημαντικές διαφορές, αν, πρώτον, η διαφορική εξίσωση στην (59) αντικατασταθεί με μια εξίσωση διαφορών και δεύτερον αν το \mathbb{R} αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο σώμα. Όμως, μόνο αν το σώμα είναι πεπερασμένο οι εξισώσεις διαφορών έχουν νόημα.

Κεφάλαιο 3

Το Πρόβλημα της Επανατοποθέτησης Πόλων

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσδιορίσουμε το κυρίως θέμα της διπλωματικής εργασίας, δηλαδή το γενικευμένο πρόβλημα της επανατοποθέτησης πόλων μιας συνάρτησης μεταφοράς [28], και θα αποδείξουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει το πρόβλημα. Βέβαια αυτό θα γίνει σταδιακά, αποδεικνύοντας πρώτα κάποια χρήσιμα λήμματα και θεωρήματα. Τέλος, θα δείξουμε έναν εναλλακτικό υπολογισμό της ικανής και αναγκαίας συνθήκης, πιο αυστηρό που μελετήθηκε αργότερα [31] και θα παρουσιάσουμε επίσης έναν αλγόριθμο που επιλύει το ίδιο πρόβλημα.

3.1 Ορισμός του Προβλήματος

Είναι γνωστό ότι [9] αν έχουμε μια ρητή και αυστηρά κανονική συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$, $m \times l$, με ελάχιστη τάξη n_G , ο πίνακας συστήματος από τον οποίον προκύπτει θα έχει την παρακάτω μορφή

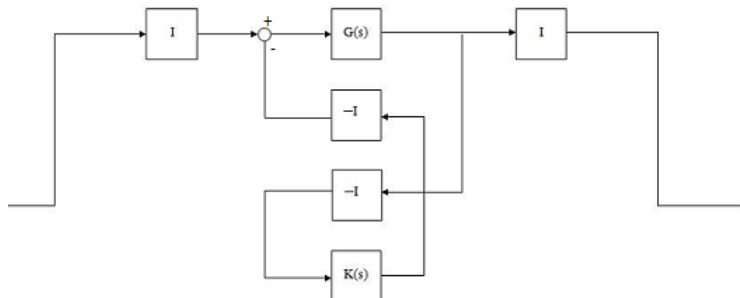
$$P_G(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T_G(s) & \vdots & U_G(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -I & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

όπου T_G, U_G σχετικά αριστερά πρώτοι πίνακες με $G = T_G^{-1}U_G$. Ακόμη ο βαθμός $\delta(|T_G|)$ ισούται με το n_G .

Έστω ότι έχουμε ένα δεύτερο σύστημα το οποίο ορίζεται όπως παρακάτω, με

$$P_K(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T_K(s) & \vdots & U_K(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -I & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

το οποίο δεν έχει απαραίτητα ελάχιστη τάξη, αλλά από το οποίο προκύπτει μια κανονική συνάρτηση μεταφοράς $K = T_K^{-1}U_K$, $l \times m$ με $\delta(|T_K|) = n_K$.



Σχήμα 3.1 : Σύνδεση Συστημάτων

Αν συνδέσουμε τα παραπάνω 2 συστήματα όπως στο Σχήμα 3.1 παραπάνω, τότε προκύπτει το σύστημα κλειστού συστήματος [10]

$$P_{C'}(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T_G & 0 & U_G & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & T_K & 0 & U_K & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & I & \vdots & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & -I & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

το οποίο λόγω της αυστηρής ισοδυναμίας συστημάτων παίρνει τη μορφή [9]

$$P_C(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T_G & U_G & \vdots & U_G \\ 0 & -U_K & T_K & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -I & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_C & U_C \\ -V_C & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

με $|T_C(s)| \neq 0$.

Να σημειώσουμε ότι ο T_C έχει το πολύ l μη μοναδιαίες εισόδους.

Έστω ότι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

$$S(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{l-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \phi_1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

έτσι ώστε το ϕ_i να διαιρεί το ϕ_{i-1} , $i = 1, 2, \dots, l$. Ακόμη να σημειώσουμε ότι κανένα από τα P_K, P_C δεν μπορούν να έχουν ελάχιστη τάξη, αν ο παραπάνω πίνακας έχει περισσότερα από $r = \min(l, m)$ μη μοναδιαία πολυώνυμα ϕ_i .

Έτσι μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό του προβλήματος ως εξής :

(i) Έστω την αυστηρά κανονική, ρητή συνάρτηση μεταφοράς $G = T_G^{-1}U_G$, $m \times l$ με T_G, U_G σχετικά αριστερά πρώτοι πίνακες, η οποία έχει δείκτες ελεγχιμότητας τους $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$ και δείκτες παρατηρησιμότητας τους $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$. Ακόμη, έστω l μη μηδενικά κανονικοποιημένα πολυώνυμα $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l$ με ϕ_i να διαιρεί το ϕ_{i-1} , $i = 1, 2, \dots, l$.

Το ερώτημα είναι αν υπάρχει ένας κανονικός, ρητός πίνακας $K = T_K^{-1}U_K$, $l \times m$, που στην ουσία θα είναι ένας ελεγκτής, ο οποίος αν εφαρμοστεί με ανάδραση στο σύστημα να κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του συστήματος ίσα με τα ϕ_i . Η αλλιώς η Smith μορφή του πίνακα $T_C(s)$ να είναι ο $S(s)$.

Αν υπάρχει να βρεθεί.

(ii) Ποια είναι η “καλύτερη” ικανή συνθήκη για να ισχύει πάντα το (i) ;

3.2 Χρήσιμα Λήμματα

Πριν προχωρήσουμε στην επίλυση του γενικευμένου προβλήματος της επανατοποθέτησης πόλων μιας συνάρτησης μεταφοράς, χρειαζόμαστε τα παρακάτω λήμματα τα οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στην απόδειξη της ικανής και αναγκαίας συνθήκης.

Λήμμα 3.2.1 [28] Έστω ότι δίνονται οι ακέραιοι α_i, β_i που ικανοποιούν τις σχέσεις $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_l \geq 0, \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_l \geq 0$. Ακόμη, έστω $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l$ κανονικοποιημένα πολυώνυμα τέτοια ώστε το ϕ_i να διαιρεί το $\phi_{i-1}, i = 2, 3, \dots, l$. Τότε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, για την ύπαρξη ενός $l \times l$ πολυωνυμικού πίνακα $\Phi(s)$, ο οποίος έχει Smith μορφή την

$$S = \begin{bmatrix} \phi_l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_{l-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \phi_1 \end{bmatrix} \quad (70)$$

και ικανοποιεί την

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\text{diag}(s^{-\alpha_i}) \Phi(s) \text{diag}(s^{-\beta_i})] = I \quad (71)$$

είναι η

$$\sum_{i=1}^k \delta(\phi_i) \geq \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i), k = 1, 2, \dots, l \quad (72)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$.

Απόδειξη

Η συνθήκη είναι αναγκαία επειδή η σχέση (71) δείχνει ότι ο $\Phi(s)$ έχει έναν $p \times p$ όρο (κάτω δεξιά) ο οποίος έχει βαθμό ίσο με το $\sum_{i=l-p+1}^l (\alpha_i + \beta_i)$. Συνεπώς, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $\phi_{l-p+1}, \phi_{l-p+2}, \dots, \phi_l$ όλων των $p \times p$ όρων δεν μπορεί να έχει μεγαλύτερο βαθμό από τον παρακάτω

$$\sum_{i=l-p+1}^l \delta(\phi_i) \leq \sum_{i=l-p+1}^l (\alpha_i + \beta_i) \quad (73)$$

όπου, σύμφωνα με την (71), η ισότητα ισχύει όταν $p = l$ στη σχέση (73), και αλλάζοντας τις ανισότητες έχουμε το ζητούμενο.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι είναι και μια ικανή συνθήκη με κατασκευαστικό τρόπο.

Αν $\delta(\phi_i) = \alpha_i + \beta_i, i = 1, 2, \dots, l$ τότε η (71) ικανοποιείται για $\Phi = \text{diag}(\phi_i)$. Αν δεν ισχύει αυτό, τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα q , λόγω της σχέσης (72), για το οποίο θα ισχύει $\delta(\phi_q) < \alpha_q + \beta_q$. Θέτοντας $k = q$, βρίσκουμε ένα $p < q$ τέτοιο ώστε $\delta(\phi_p) > \alpha_p + \beta_p \geq \alpha_q + \beta_q > \delta(\phi_q)$. Έτσι σύμφωνα με μια διαδικασία [9], μειώνουμε το βαθμό της στήλης p στο $\text{diag}(\phi_i)$ κατά μια μονάδα και αυξάνουμε το βαθμό της στήλης q κατά μια μονάδα αντίστοιχα. Στον Φ_1 πίνακα που προκύπτει, τα στοιχεία στη κύρια διαγώνιο είναι κανονικοποιημένα και έχουν μεγαλύτερο βαθμό από οποιοδήποτε άλλο στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκουν. Ακόμη, ικανοποιούν τη συνθήκη της σχέσης (72) όπως ακριβώς και τα $\delta(\phi_i)$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να προκύψει ένας πίνακας Φ_2 με τα στοιχεία του στη κύρια διαγώνιο να έχουν βαθμό $(\alpha_i + \beta_i)$, και τα υπόλοιπα στοιχεία της κάθε στήλης να έχουν μικρότερο βαθμό από αυτά της κύριας διαγώνιου.

Τώρα στη στήλη $j < l$, έστω ότι ο μεγαλύτερος βαθμός που συμβαίνει στα στοιχεία (i, j) , $i > j$, να είναι ο $r < \alpha_i + \beta_i$. Αφαιρούμε κατάλληλο πολλαπλάσιο της στήλης $j + 1$ από τη στήλη j , έτσι ώστε ο βαθμός του στοιχείου $(j + 1, j)$ να μειωθεί κάτω από το $\alpha_{j+1} + \beta_{j+1}$. Συνεχίζουμε με τη στήλη $j + 2$ και μειώνουμε το βαθμό του στοιχείου $(j + 2, j)$ κάτω από το $\alpha_{j+2} + \beta_{j+2}$. Όμοια για τα στοιχεία $(j + 3, j), \dots, (l, j)$. Συνεπάγεται ότι στο τέλος του παραπάνω αλγόριθμου κανένα στοιχείο (i, j) , $i < j$, δεν θα έχει βαθμό μεγαλύτερο από το $\alpha_j + \beta_j - 1$ ενώ ο βαθμός του στοιχείου (j, j) θα παραμείνει ο $\alpha_j + \beta_j$. Ακόμη, κανένα στοιχείο (i, j) , $i > j$, δεν έχει βαθμό που να υπερβαίνει το $\max(\alpha_{j+1} + \beta_{j+1} - 1, r - 1)$, έτσι επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία μέχρι κανένα από αυτά τα στοιχεία να έχει βαθμό που να υπερβαίνει το $\alpha_{j+1} + \beta_{j+1} - 1$. Τότε χρησιμοποιώντας μόνο τις στήλες $j + 2, j + 3, \dots, l$, μειώνουμε το βαθμό των στοιχείων (i, j) , $i > j + 1$ κάτω από το $\alpha_{j+2} + \beta_{j+2}$, κ.ο.κ για $i = j + 1, j + 2, \dots, l$ και για $j = 1, 2, \dots, l - 1$. Ο πίνακας Φ που προκύπτει ικανοποιεί τη σχέση (71) και έτσι έχουμε το ζητούμενο. \blacktriangle

Τα επόμενα δυο λήμματα παραθέτουν γνωστά συμπεράσματα [21, 16].

Λήμμα 3.2.2 Έστω ο $\begin{pmatrix} -U & T \end{pmatrix}$ είναι ένας ρητός πίνακας, με $T, l \times l$ και έστω ότι υπάρχουν ακέραιοι α_i (όχι απαραίτητα θετικοί) τέτοιοι ώστε

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\text{diag}(s^{-\alpha_i}) \begin{pmatrix} -U & T \end{pmatrix}] = H = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} \quad (74)$$

όπου ο H έχει τάξη l . Τότε ο $T^{-1}U$ υπάρχει και είναι κανονικός αν και μόνο αν ο H_2 είναι ομαλός. Ακόμη ο $T^{-1}U$ υπάρχει και είναι αυστηρά κανονικός αν και μόνο αν ο H_2 είναι ομαλός και $H_1 = 0$.

Απόδειξη

Αν υπάρχει το όριο, έχουμε

$$[\lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}(s^{-\alpha_i}) T] [\lim_{s \rightarrow \infty} T^{-1}U] = [\lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}(s^{-\alpha_i}) U] \quad (75)$$

και επειδή λόγω ορισμού των α_i το πρώτο και το τρίτο όριο υπάρχουν, συνεπάγεται ότι

$$H_2 [\lim_{s \rightarrow \infty} T^{-1}U] = H_1 \quad (76)$$

Τότε ο $T^{-1}U$ δεν μπορεί να υπάρχει και να είναι κανονικός αν ο H_2 δεν είναι ομαλός, διότι αν ίσχυε κάτι τέτοιο θα είχαμε ότι ο

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} = H_2 \begin{pmatrix} \lim_{s \rightarrow \infty} T^{-1}U & I \end{pmatrix} \quad (77)$$

χάνει τάξη, κάτι το οποίο είναι άτοπο. Έτσι αφού ο H_2 είναι ομαλός, από τη σχέση (76) συνεπάγεται ότι

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T^{-1}U = H_2^{-1}H_1 \quad (78)$$

δηλαδή ο $T^{-1}U$ είναι κανονικός. Ακόμη ο $T^{-1}U$ είναι αυστηρώς κανονικός αν $H_1 = 0$. \blacktriangle

Λήμμα 3.2.3 Έστω $Q(s)$ ένας ρητός $l \times (m + l)$ πίνακας, τάξης l . Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $M(s)$ και ακέραιοι α_i (όχι απαραίτητα θετικοί) με $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_l$ τέτοιοι ώστε

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\text{diag}(s^{-\alpha_i}) M(s) Q(s)] = H \quad (79)$$

όπου ο H έχει τάξη l . Αν ο Q είναι πολυωνυμικός, τότε $\alpha_l \geq 0$.

Απόδειξη

Για κάθε γραμμή q_i του Q επιλέγουμε έναν ακέραιο εκθέτη α'_i τέτοιο ώστε το όριο $\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-\alpha'_i} q_i(s) = h'_i$ να υπάρχει και να είναι μη μηδενικό. Αν τα h'_i είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε υπάρχουν γ_i τέτοια ώστε

$$h'_k = \sum_{i=1, i \neq k}^l \gamma_i h'_i \quad (80)$$

όπου $\alpha'_k \geq \alpha'_i$ για όλα τα i με μη μηδενικό γ_i στο άθροισμα. Τότε αφαιρώντας πολλαπλάσια των $\gamma_i s^{\alpha'_k - \alpha'_i}$, όπου i οι αντίστοιχες γραμμές στον πίνακα Q , από τη γραμμή k , προκύπτει ότι ο εκθέτης που αντιστοιχεί στη γραμμή k , γίνεται μικρότερος από α'_k . Εφόσον ο εκθέτης β για όλους τους $l \times l$ όρους δεν αλλάζει, η διαδικασία θα σταματά όταν το άθροισμα δεν θα γίνεται μικρότερο από το β . Όταν θα συμβεί αυτό, οι εκθέτες των γραμμών θα είναι οι α_i , και οι γραμμές του πίνακα H που προκύπτει θα είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Τέλος, κάνουμε μια ανακατάταξη στις γραμμές, έτσι ώστε $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_l$. Και αν ο Q είναι πολυωνυμικός, τότε προφανώς $\alpha_l \geq 0$, αφού τα α_i συμβολίζουν εκθέτες. ▲

3.3 Ικανή και Αναγκαία Συνθήκη

Το υποκεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει βασικά θεωρήματα και τις αποδείξεις τους, καθώς επίσης και την απόδειξη της ικανής και αναγκαίας συνθήκης του γενικευμένου προβλήματος της επανατοποθέτησης πólων.

Να σημειώσουμε ότι, δεν υποθέτουμε ότι $|T_G(s) \neq 0|$, ούτε ότι η $G = T_G^{-1}U_G$, αν υπάρχει, είναι αυστηρώς κανονική. Ακόμη, δεν υποθέτουμε ότι $|T_K(s) \neq 0|$, ούτε ότι ο $K = T_K^{-1}U_K$, αν υπάρχει, είναι κανονικός, ούτε ότι οι πίνακες T_K, U_K είναι σχετικά αριστεροί πρώτοι κι ακόμη $|T_C(s) \neq 0|$.

Θεώρημα 3.3.1 [28] Αν οι πίνακες T_G, U_G είναι σχετικά αριστεροί πρώτοι, τότε ο T_C έχει το πολύ l μη μοναδιαία αναλλοίωτα πολυώνυμα.

Απόδειξη

Τα μη μοναδιαία αναλλοίωτα πολυώνυμα του T_C , είναι οι μη μοναδιαίες είσοδοι στη Smith μορφή του παρακάτω $(m+l) \times (m+l)$ πίνακα

$$\begin{bmatrix} T_G & U_G \\ -U_K & T_K \end{bmatrix}$$

Επειδή, οι T_G, U_G είναι σχετικά αριστεροί πρώτοι, ο μέγιστος κοινός διαρέτης των $m \times m$ όρων της σχέσης (80) ισούται με τη μονάδα. Άρα αποδείξαμε το ζητούμενο. ▲

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο θεώρημα ας σημειώσουμε ότι, ένας εναλλακτικός πίνακας συστήματος [9] από τον οποίον προκύπτει η G μπορεί να είναι ο

$$\begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \tilde{T}_G(s) & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -V_G(s) & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (81)$$

όπου $\tilde{T}_G(s), V_G(s)$ σχετικά δεξιά πρώτοι πίνακες.

Θεώρημα 3.3.2 [28] Έστω $G = T_G^{-1}U_G = V_G\tilde{T}_G^{-1}$, όπου T_G, U_G σχετικά αριστερά πρώτοι και \tilde{T}_G, V_G σχετικά δεξιά πρώτοι. Τότε η Smith μορφή S_1 του πίνακα της σχέσης (80) είναι η

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

όπου S_2 είναι η Smith μορφή του $T_K\tilde{T}_G + U_KV_G$.

Απόδειξη

Οι πίνακες συστήματος

$$P_G(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T_G(s) & \vdots & U_G(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -I & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$P_G(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \tilde{T}_G(s) & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -V_G(s) & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

είναι και οι δυο ελάχιστης τάξης και προκύπτει η ίδια συνάρτηση μεταφοράς G . Άρα μπορούμε να ισχυριστούμε από την αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων [9] ότι [10]

$$P_{C''}(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \tilde{T}_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & T_K & 0 & U_K & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -V_G & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & I & \vdots & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & -I & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

Ας παρατηρήσουμε ότι ο $P_{C''}(s)$ και ο $P_{C'}(s)$ (που ορίστηκε στην αρχή του κεφαλαίου) δεν είναι πίνακες συστήματος, αν $|T_C(s)| \equiv 0$. Από την ισοδυναμία πινάκων, ο $P_{C''}(s)$ μπορεί να γραφεί ως

$$P_{C''}(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T_K\tilde{T}_G + U_KV_G & \vdots & T_K \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -V_G & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{C'''} & U_{C'''} \\ -V_{C'''} & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

Έτσι αν ο $P_{C'}(s)$ είναι ισοδύναμος με τον $P_C(s)$ στη σχέση (67), το ίδιο θα ισχύει και για τον $P_{C'''}(s)$. Έτσι από τις ιδιότητες της ισοδυναμίας, ο T_C στην (68) θα έχει την ίδια Smith μορφή με τον $T_{C''}$ στην (83). Κι έτσι αποδεικνύεται το θεώρημα.▲

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι οι δείκτες ελεγκσιμότητας λ_{Gi} της G διατάσσονται ως εξής [15] $\lambda_{G1} \geq \dots \geq \lambda_{Gl}$. Όμοια, οι δείκτες παρατηρησιμότητας του K μπορούν να διαταχθούν αντίστοιχα ως $\mu_{K1} \geq \dots \geq \mu_{Kl}$. Έτσι, έχουμε την αναγκαία συνθήκη για τους βαθμούς $\delta(\phi_i)$ των πολυωνύμων της σχέσης (69).

Θεώρημα 3.3.3 (Αναγκαία Συνθήκη) [28] Έστω η $G = T_G^{-1}U_G$, $m \times l$ αυστηρά κανονική με T_G, U_G σχετικά αριστερά πρώτοι, και $K = T_K^{-1}U_K$ κανονικός. Έστω ακόμη, η Smith μορφή του πίνακα T_C της σχέσης (68) να είναι η (69). Τότε οι βαθμοί $\delta(\phi_i)$ των ϕ_i ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη, γνωστή ως συνθήκη των Rosenbrock και Hayton,

$$\sum_{i=1}^k \delta(\phi_i) \geq \max \left(\sum_{i=1}^k (\lambda_{Gi} + \mu_{K,l+1-i}), \sum_{i=1}^k (\lambda_{G,l+1-i} + \mu_{Ki}) \right), k = 1, 2, \dots, l \quad (84)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$, αν και μόνο αν T_K, U_K είναι σχετικά αριστερά πρώτοι.

Απόδειξη

Έστω $G = V_G \tilde{T}_G^{-1}$, όπου V_G, \tilde{T}_G σχετικά δεξιά πρώτοι και οι βαθμοί των στηλών του $\begin{bmatrix} -V_G \\ \tilde{T}_G \end{bmatrix}$ είναι οι $\lambda_{G1} \geq \dots \geq \lambda_{Gl}$ [9]. Από το Θεώρημα 3.3.2, τα μη μοναδιαία αναλλοίωτα πολυώνυμα ϕ_i του T_C είναι αυτά του πίνακα

$$\Phi = \begin{pmatrix} -U_K & T_K \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -V_G \\ \tilde{T}_G \end{bmatrix} \quad (85)$$

Από το Λήμμα 3.2.2, έχουμε ότι

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} -V_G \\ \tilde{T}_G \end{bmatrix} \text{diag}(s^{-\lambda_{Gi}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ H_{G2} \end{bmatrix} \quad (86)$$

όπου H_{G2} ομαλός πίνακας. Ακόμη από το Λήμμα 3.2.3, μπορούμε να βρούμε αντιστρέψιμο πίνακα $M(s)$ και $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_l \geq 0$, τέτοια ώστε

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}(s^{-\alpha_i}) M \begin{pmatrix} -U_K & T_K \end{pmatrix} = H_K = \begin{pmatrix} H_{K1} & H_{K2} \end{pmatrix} \quad (87)$$

όπου ο H_K έχει τάξη l , και από το Λήμμα 3.2.2, ο H_{K2} είναι ομαλός. Τότε από τις σχέσεις (85-87) έχουμε,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}(s^{-\alpha_i}) M \Phi \text{diag}(s^{-\lambda_{Gi}}) = H_{K2} H_{G2} \quad (88)$$

Έτσι με τη βοήθεια του Λήμματος 3.2.1, παρόλο που μερικοί από τους $p \times p$ όρους στο δεξιά κάτω μέρος του $H_{K2} H_{G2}$, μπορεί να είναι μηδέν, στις τελευταίες p στήλες του $H_{K2} H_{G2}$ θα υπάρχει τουλάχιστον ένας μη μηδενικός όρος, που ο μέγιστος βαθμός στο $M\Phi$ θα είναι

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p + \lambda_{G,l-p+1} + \lambda_{G,l-p+2} + \dots + \lambda_{Gl}$$

το οποίο είναι ένα άνω όριο για το βαθμό του μέγιστου κοινού διαιρέτη $\phi_l, \phi_{l-1}, \dots, \phi_{l-p+1}$ των $p \times p$ του $M\Phi$.

Δηλαδή, όπως είδαμε, θα ισχύει

$$\sum_{i=1}^k \delta(\phi_i) \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \alpha_{l+1-i}), k = 1, 2, \dots, l \quad (89)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις τελευταίες p γραμμές του $M\Phi$, έχουμε όμοια

$$\sum_{i=1}^k \delta(\phi_i) \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{G, l+1-i} + \alpha_i), k = 1, 2, \dots, l \quad (90)$$

Μένει, δηλαδή, να αποδείξουμε ότι $\mu_{K_i} = \alpha_i$.

Αν οι U_K, T_K δεν ήταν σχετικά αριστερά πρώτοι, τότε θα υπήρχε κάποιο s_0 για το οποίο ο

$$\begin{bmatrix} -M(s_0)U_K(s_0) & M(s_0)T_K(s_0) \end{bmatrix} = R(s_0) \quad (91)$$

θα είχε τάξη μικρότερη από l . Θα βρίσκαμε τότε $\gamma_i \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε οι γραμμές r_i του $R(s_0)$ να ικανοποιούν τη σχέση

$$r_k = \sum_{i=1, i \neq k}^l \gamma_i r_i$$

όπου $\alpha_k \geq \alpha_i$ για όλα τα i με μηδενικά γ_i στο παραπάνω άθροισμα. Τότε αν αφαιρέσουμε κατάλληλα πολλαπλάσια των γ_i των i γραμμών του $R(s_0)$ από τη γραμμή k , προκύπτει μια γραμμή βαθμού α_k , η οποία διαιρείται από έναν γραμμικό παράγοντα. Διαιρώντας τη γραμμή k με αυτόν τον παράγοντα, μειώνουμε το μέγιστο βαθμό οποιούδηποτε $l \times l$ όρου κατά την ίδια ποσότητα με αυτή που μείωσαμε και το άθροισμα των βαθμών των γραμμών. Όταν τελειώσει η διαδικασία αυτή [16], θα έχει δημιουργηθεί μια ελάχιστη βάση και οι βαθμοί των γραμμών θα είναι οι δείκτες ελεγχιμότητας μ_{K_i} του K . Επειδή οι βαθμοί των γραμμών αυξάνονται με τη διαδικασία αυτή, και αν $\mu_{K_1} \geq \dots \geq \mu_{K_l}$ έχουμε ότι

$$\mu_{K_i} \leq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, l$$

με την ισότητα να ισχύει όταν οι U_K, T_K είναι σχετικά αριστερά πρώτοι. Άρα έχουμε από τις (89), (90) ότι

$$\sum_{i=1}^k \delta(\phi_i) \geq \max \left(\sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{K, l+1-i}), \sum_{i=1}^k (\lambda_{G, l+1-i} + \mu_{K_i}) \right), k = 1, 2, \dots, l$$

και αποδείξαμε έτσι την αναγκαία συνθήκη της σχέσης (84).▲

Στη συνέχεια παραθέτουμε κάποια άλλα συμπεράσματα, χρήσιμα για την απόδειξη της ικανής συνθήκης του προβλήματος.

Αν Q είναι οποιοσδήποτε ρητός πίνακας τότε ισχύει ότι

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (92)$$

όπου Q_1 είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας και Q_2 αυστηρά κανονικός. Τότε ο τελεστής της προβολής μπορεί να ορισθεί ως

$$\Pi Q = Q_2 \quad (93)$$

Επίσης, αν I είναι ο τελεστής της ταυτότητας, τότε

$$(I - \Pi)Q = Q_1 \quad (94)$$

Θεώρημα 3.3.4 [28] Έστω $G = V_G \tilde{T}_G^{-1}$, $m \times l$, όπου V_G, \tilde{T}_G σχετικά δεξιά πρώτοι, και έστω Φ ένας $l \times l$ πολυωνυμικός πίνακας. Τότε υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες T_K, U_K τέτοιοι ώστε

$$U_K V_G + T_K \tilde{T}_G = \Phi \quad (95)$$

Απόδειξη

Έχουμε ότι $G = T_G^{-1} U_G$, $m \times l$, με T_G, U_G σχετικά αριστερά πρώτοι. Τότε υπάρχουν [9] πολυωνυμικοί πίνακες X, Y τέτοιοι ώστε

$$\begin{vmatrix} T_G & U_G \\ X & Y \end{vmatrix} = 1 \quad (96)$$

Ακόμη

$$\begin{pmatrix} T_G & U_G \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -V_G \\ \tilde{T}_G \end{bmatrix} = T_G \begin{pmatrix} I_m & G \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -G \\ I_l \end{bmatrix} \tilde{T}_G = 0 \quad (97)$$

τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} T_G & U_G \\ X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_G \\ \tilde{T}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} \quad (98)$$

όπου M πολυωνυμικός πίνακας. Από τη σχέση (96), ο πρώτος πίνακας στη σχέση (98) είναι αντιστρέψιμος, κι επειδή V_G, \tilde{T}_G σχετικά πρώτοι [9], ο δεύτερος πίνακας της σχέσης (98), έχει τάξη l για όλα τα s . Συνεπώς, ο πίνακας M δεν χάνει τάξη και είναι αντιστρέψιμος. Άρα από τη σχέση (98) προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned} -XV_G + Y\tilde{T}_G &= M \\ \Rightarrow -M^{-1}XV_G + M^{-1}Y\tilde{T}_G &= I \\ \Rightarrow -\Phi M^{-1}XV_G + \Phi M^{-1}Y\tilde{T}_G &= \Phi \end{aligned}$$

Οπότε αν

$$\begin{pmatrix} -U_K & T_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi M^{-1}X & \Phi M^{-1}Y \end{pmatrix} \quad (99)$$

αποδεικνύουμε το ζητούμενο του θεωρήματος το οποίο ικανοποιεί τη σχέση (95). ▲

Ας δούμε το επόμενο συμπέρασμα το οποίο είναι πιο χρήσιμο, όταν θέλουμε να επιλέξουμε κατάλληλο $K = T_K^{-1} U_K$, από το παραπάνω θεώρημα.

Συμπέρασμα 3.3.1 [28] Επιλέγουμε T_K, U_K τέτοια ώστε ο $U_K T_G^{-1}$ να είναι αυστηρά κανονικός.

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό της προβολής Π όπως φαίνεται στη σχέση (93) έχουμε,

$$\begin{aligned} [\Pi (\Phi M^{-1} X T_G^{-1})] T_G &= \Phi M^{-1} X - [(I - \Pi) (\Phi M^{-1} X T_G^{-1})] T_G \\ &= \Phi M^{-1} X - Q T_G \end{aligned} \quad (100)$$

όπου Q πολυωνυμικός πίνακας. Τότε

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -Q & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_G & U_G \\ \Phi M^{-1} X & \Phi M^{-1} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_G \\ \tilde{T}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (101)$$

άρα η επιλογή

$$\begin{pmatrix} -U_K & T_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi M^{-1}X - QT_G & \Phi M^{-1}Y - QU_G \end{pmatrix} \quad (102)$$

ικανοποιεί το συμπέρασμα, αφού

$$-(-QT_G + \Phi M^{-1}X)V_G + (\Phi M^{-1}Y - QU_G T)\tilde{T}_G = \Phi$$

▲.

Στο επόμενο θεώρημα θα δώσουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε ο $K = T_K^{-1}U_K$ να υπάρχει και να είναι κανονικός.

Θεώρημα 3.3.5 [28] Έστω $G = V_G \tilde{T}_G^{-1}$, $m \times l$, όπου V_G, \tilde{T}_G σχετικά δεξιά πρώτα, και έστω Φ ένας ομαλός $l \times l$ πολυωνυμικός πίνακας. Ορίζουμε $n_G = \delta(|\tilde{T}_G|)$ και $p = \delta(|\Phi|) - n_G$ και έστω T_K, U_K πολυωνυμικοί πίνακες που ικανοποιούν τη σχέση

$$U_K V_G + T_K \tilde{T}_G = \Phi$$

Τότε το $K = T_K^{-1}U_K$ υπάρχει και είναι κανονικός αν και μόνο αν ο μέγιστος βαθμός οποιουδήποτε $l \times l$ όρου του $\begin{pmatrix} -U_K & T_K \end{pmatrix}$ είναι p .

Απόδειξη

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, επιλέγουμε V_G, \tilde{T}_G τέτοια ώστε οι βαθμοί των στηλών του πίνακα $\begin{bmatrix} -V_G \\ \tilde{T}_G \end{bmatrix}$ να είναι οι $\lambda_{G1} \geq \dots \geq \lambda_{Gl}$.

Ακόμη επιλέγουμε M, a_i όπως στη σχέση (87).

Τότε από τη σχέση

$$U_K V_G + T_K \tilde{T}_G = \Phi$$

αν χρησιμοποιήσουμε την (86), έχουμε ότι

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}(s^{-a_i}) M \begin{pmatrix} U_K & T_K \end{pmatrix} = \lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}(s^{-a_i}) M \Phi \text{diag}(s^{-\lambda_{Gi}}) H_{G2}^{-1} \quad (103)$$

όπου το πρώτο όριο υπάρχει λόγω του ορισμού των M, a_i , οπότε θα υπάρχει και το δεύτερο.

Αφού $\sum_{i=1}^l \lambda_{Gi} = n_G$, βρίσκουμε παίρνοντας την ορίζουσα του δεξιού μέρους της (103), ότι ο πίνακας είναι ομαλός αν και μόνο αν $p = \sum_{i=1}^l a_i$. Έτσι από το Λήμμα 3.2.2 έχουμε το ζητούμενο. ▲

Ας συνεχίσουμε με δυο συμπεράσματα ακόμη.

Συμπέρασμα 3.3.2 [28] Έστω $G, V_G, \tilde{T}_G, \Phi, p, T_K, U_K$ για τα οποία ισχύουν ακριβώς τα ίδια με το παραπάνω θεώρημα και με V_G, \tilde{T}_G τέτοια ώστε οι βαθμοί των στηλών του πίνακα $\begin{bmatrix} -V_G \\ \tilde{T}_G \end{bmatrix}$ να είναι οι $\lambda_{G1} \geq \dots \geq \lambda_{Gl}$. Τότε ο $K = T_K^{-1}U_K$ υπάρχει και είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $M(s)$ και δείκτες a_i , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $p = \sum_{i=1}^l a_i$, τέτοιοι ώστε το ακόλουθο όριο να υπάρχει

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}(s^{-a_i}) M \begin{bmatrix} -U_K & \Phi \text{diag}(s^{-\lambda_{Gi}}) \end{bmatrix} \quad (104)$$

Απόδειξη

Αν το παραπάνω όριο υπάρχει, τότε από την (95) χρησιμοποιώντας την (86), έχουμε

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}(s^{-a_i}) M \begin{pmatrix} -U_K & T_K \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H_{G2} \end{bmatrix} = \lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}(s^{-a_i}) M \Phi \text{diag}(s^{-\lambda_{G_i}}) \quad (105)$$

κι επειδή $p = \sum_{i=1}^l a_i$, ο πίνακας στα δεξιά της παραπάνω σχέσης είναι ομαλός. Δηλαδή ο

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}(s^{-a_i}) M T_K \quad (106)$$

υπάρχει και είναι ομαλός, οπότε από το Λήμμα 3.2.2 και ο $K = (M T_K)^{-1} M U_K$ υπάρχει και είναι κανονικός. Αντίστροφα, Αν ο K υπάρχει και είναι κανονικός, η ύπαρξη κατάλληλων M, a_i προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα. ▲

Συμπέρασμα 3.3.3 [28] Έστω πάλι τα $G, V_G, \tilde{T}_G, \Phi, p, T_K, U_K$ όπως παραπάνω. Τότε ο $K = T_K^{-1} U_K$ υπάρχει και είναι κανονικός αν και μόνο αν ο ρητός πίνακας

$$\text{diag}(s^{\lambda_{G_i}}) \Phi^{-1} U_K \quad (107)$$

είναι κανονικός.

Απόδειξη

Βρίσκουμε M, a_i όπως στο Λήμμα 3.2.3 τέτοια ώστε

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}(s^{-a_i}) M \begin{bmatrix} -U_K & \Phi \text{diag}(s^{-\lambda_{G_i}}) \end{bmatrix} = H = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} \quad (108)$$

όπου ο H δεν χάνει τάξη. Τότε από το Λήμμα 3.2.2, ο πίνακας στη σχέση (107) είναι κανονικός αν και μόνο αν ο H_2 είναι ομαλός. Έτσι, παίρνοντας τις ορίζουσες βρίσκουμε ότι αυτό αληθεύει αν και μόνο αν $p = \sum_{i=1}^l a_i$. Οπότε το αποτέλεσμα προκύπτει πλέον από το Συμπέρασμα 3.3.2. ▲

Αξίζει να σημειωθεί ότι, επιλέγουμε T_K, U_K έτσι ώστε ο U_K να έχει κάποιες ιδιότητες κάτι το οποίο είναι δύσκολο να ισχυριστούμε και για τον T_K , αφού στις σχέσεις (104), (107) χρειαζόμαστε μόνο τα U_K, Φ, G . Ακόμη, ο τρόπος που ορίστηκαν οι δείκτες a_i στη σχέση (106), αφήνει ανοιχτό το ενδεχόμενο να υπάρχουν και αρνητικές τιμές.

Μπορούμε πλέον να αποδείξουμε και την ικανή συνθήκη, που επιλύει το πρόβλημά μας.

Θεώρημα 3.3.6 (Ικανή Συνθήκη) [28] Έστω $G = T_G^{-1} U_G, m \times l$ ένας αυστηρώς κανονικός ρητός πίνακας με $l \leq m$ και δείκτες ελεξιμότητας τους $\lambda_{G_1} \geq \dots \geq \lambda_{G_l}$ και παρατηρησιμότητας τους $\mu_{G_1} \geq \dots \geq \mu_{G_m}$. Ακόμη οι T_G, U_G σχετικά αριστεροί πρώτοι και έστω ϕ_i να είναι κανονικοποιημένα πολυώνυμα που έχουν την εξής ιδιότητα, το ϕ_i να διαιρεί το $\phi_{i-1}, i = 1, 2, \dots, l$.

Τότε μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη κανονικού $l \times m$ ρητού πίνακα $K = T_K^{-1} U_K$, τέτοια ώστε η Smith μορφή του πίνακα T_C που θα προκύψει στη σχέση (68) να είναι η (69), είναι η παρακάτω :

$$\sum_{i=1}^k \delta(\phi_i) \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{G_1} - 1), k = 1, 2, \dots, l \quad (109)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$.

Η συνθήκη αυτή είναι γνωστή, ως συνθήκη των Rosenbrock και Hayton.

Απόδειξη

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, επιλέγουμε T_G, U_G τέτοια ώστε η i γραμμή του πίνακα $(T_G \ U_G)$ να έχει βαθμό μ_{Gi} . Ακόμη, ισχύει ότι $G = V_G \tilde{T}_G^{-1}$, όπου V_G, \tilde{T}_G σχετικά δεξιά πρώτοι και η i στήλη του πίνακα $\begin{bmatrix} -V_G \\ \tilde{T}_G \end{bmatrix}$ έχει βαθμό λ_{Gi} . Όπως στο Λήμμα 3.2.1, κατασκευάζουμε έναν ομαλό $l \times l$ πολυωνυμικό πίνακα Φ , οποίος έχει Smith μορφή την (70) και ικανοποιεί την (71) με $\alpha_i = \mu_{G1} - 1, \beta_i = \lambda_{Gi}$, κάτι το οποίο μπορεί να συμβαίνει αν παρατηρήσουμε την (109). Επιλέγουμε, $(-U_K \ T_K)$ όπως στην (102), κι επειδή η $\Pi (\Phi M^{-1} X T_G^{-1})$ είναι αυστηρά κανονική, η εξίσωση (100) δείχνει ότι κάθε στοιχείο του U_K έχει βαθμό μικρότερο από το μ_{G1} . Άρα το όριο, κι από τη κατασκευή του πίνακα Φ ,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag} [s^{-(\mu_{G1}-1)}] [-U_K \ \Phi \text{diag} (s^{-\lambda_{Gi}})] \quad (110)$$

υπάρχει. Έτσι, από το Θεώρημα 3.3.5, το Συμπέρασμα 3.3.2, ο $K = T_K^{-1} U_K$ υπάρχει και είναι κανονικός και από το Θεώρημα 3.3.2 έχουμε το ζητούμενο. ▲

Ας κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις.

Πρώτον, αν αντιστραφούν οι ρόλοι των $\lambda_{Gi}, \mu_{Gi}, \lambda_{Ki}, \mu_{Ki}$ τότε θα έχουμε αντίστοιχο αποτέλεσμα στην ικανή και αναγκαία συνθήκη.

Για παράδειγμα, αν αντί για τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_G & U_G & U_G \\ 0 & -U_K & T_K & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είχαμε θεωρήσει το πίνακα

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{T}_G & V_K & I \\ 0 & -V_G & \tilde{T}_K & 0 \\ 0 & -V_G & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

θα είχαμε ανάλογο αποτέλεσμα στο Θεώρημα 3.3.6, με το l να έχει αντικατασταθεί από το m , τα λ_{Gi} από τα μ_{Gi} και το μ_{G1} από το λ_{G1} .

Μια δεύτερη παρατήρηση είναι ότι η σχέση (166), μπορεί να μην είναι η καλύτερη ικανή συνθήκη, διότι προκύπτει από συγκεκριμένη επιλογή των T_K, U_K και δίνει $n_K = \delta(|T_K|) = \sum_{i=1}^l (\mu_{G1} - 1)$. Κάποια άλλη επιλογή μπορεί να δίνει μικρότερο n_K .

3.4 Εναλλακτική Προσέγγιση του Προβλήματος

Στο υποκεφάλαιο αυτό, θα δείξουμε μια πιο αυστηρή αναγκαία συνθήκη για την επίλυση του προβλήματος που ορίσαμε παραπάνω, καθώς επίσης και θα δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη για την ικανή συνθήκη η οποία έχει μια πιο κατασκευαστική μορφή σε σχέση με τη προηγούμενη και βασίζεται στον αλγόριθμο της ευκλείδειας διαίρεσης για τους πολυωνυμικούς πίνακες καθώς επίσης και στην επίλυση διοφαντικής εξίσωσης.

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας κάποιους βοηθητικούς ορισμούς [31].

3.4.1 Βοηθητικοί Ορισμοί

Έστω $Q(s)$ ένας $m \times l$ πολυωνυμικός πίνακας.

Θα συμβολίζουμε ως βαθμό της γραμμής i (της στήλης j) την ποσότητα $deg_{ri}Q$ ($deg_{cj}Q$) και ως κύριο πίνακα συντελεστή των γραμμών (στηλών) του Q , τον πίνακα Q_{rL} (Q_{cL}).

Έτσι θα λέμε ότι ο Q είναι **κανονικός κατά γραμμές (row reduced)** αν $rankQ_{rL} = m$. Όμοια, ο Q είναι **κανονικός κατά στήλες (column reduced)** όταν $rankQ_{cL} = l$. Να σημειώσουμε ότι η διαφορά σε αυτόν τον ορισμό σε σχέση με τον Ορισμό 1.5 που δώσαμε στο πρώτο κεφάλαιο, είναι ότι αναφέρεται σε ρητούς πίνακες γενικότερα, και όχι απαραίτητα σε πολυωνυμικούς.

Τέλος, θα λέμε ότι ο Q είναι **κανονικοποιημένος ως προς τις γραμμές (στήλες) (row (column) monic)** του, αν είναι τετράγωνος και Q_{rL} (Q_{cL}) είναι ο πίνακας ταυτότητα.

3.4.2 Ικανή και Αναγκαία Συνθήκη [31]

Έστω λοιπόν, ότι θεωρούμε το γνωστό κλειστό σύστημα, δηλαδή

$$G(s) = T_G^{-1}U_G = V_G\tilde{T}_G^{-1}$$

όπου T_G, U_G σχετικά αριστερά πρώτοι, διάστασης $m \times m, m \times l$ αντίστοιχα, ενώ \tilde{T}_G, V_G σχετικά δεξιά πρώτοι, διάστασης $m \times l, l \times l$ αντίστοιχα. Ακόμη, μπορούμε να πάρουμε τον T_G κανονικό κατά γραμμές και τον \tilde{T}_G κατά στήλες, αντίστοιχα.

Επίσης, έστω $K(s)$ τέτοιος ώστε

$$K(s) = T_K^{-1}U_K = V_K\tilde{T}_K^{-1}$$

όπου T_K, U_K πίνακες διάστασης $l \times l, l \times m$ αντίστοιχα, όχι απαραίτητα σχετικά αριστερά πρώτοι και \tilde{T}_K, V_K , πίνακες διάστασης $l \times m, m \times m$, όχι απαραίτητα σχετικά δεξιά πρώτοι.

Ας δούμε τότε, λοιπόν, την καινούρια αναγκαία συνθήκη, που προτείνεται, για τους βαθμούς των αναλλοίωτων πολυωνύμων του συστήματος.

Θεώρημα 3.4.2.1 (Νέα Αναγκαία Συνθήκη) Έστω το κλειστό σύστημα με την παραπάνω αυστηρώς κανονική συνάρτηση μεταφοράς, καθώς επίσης και τον ελεγκτή K . Το σύστημα έχει αναλλοίωτα πολυώνυμα $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l$ με το ϕ_i να διαιρεί το $\phi_{i-1}, i = 1, 2, \dots, l$. Τότε θα ισχύει

$$\sum_{i=1}^k deg\phi_i \geq \max_{1 \leq j \leq \binom{m}{k}} S_j^k, k = 1, 2, \dots, l \quad (111)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$, όπου

$$S_j^k = \sum_{a=1}^k \lambda_{G_{j_a}} + \mu_{K_{l-j_a+1}}, j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_k$$

με $\lambda_{G1} \geq \lambda_{G2} \geq \dots \geq \lambda_{Gl}$ οι δείκτες ελεγκσιμότητας της συνάρτησης μεταφοράς και $\mu_{K1} \geq \mu_{K2} \geq \dots \geq \mu_{Km}$ οι δείκτες παρατηρησιμότητας του ελεγκτή.

Απόδειξη

Έστω $G(s) = V_G\tilde{T}_G^{-1}$ με \tilde{T}_G να είναι κανονικός κατά στήλες. Τότε

$$deg_{cj}\tilde{T}_G > deg_{cj}V_G, j = 1, 2, \dots, l \quad (112)$$

και έστω για τις στήλες να ισχύει ότι $deg_{cj}\tilde{T}_G = \lambda_j$. Ακόμη, έστω $K(s) = T_K^{-1}U_K$ με T_K να είναι κανονικός κατά γραμμές. Τότε

$$deg_{ri}T_K \geq deg_{ri}U_K, i = 1, 2, \dots, l \quad (113)$$

και έστω για τις γραμμές του να ισχύει ότι $\deg_{ri}P = \mu_{Kl-i+1}$.

Τότε, από το προηγούμενο Θεώρημα 3.3.4, τα αναλλοίωτα πολυώνυμα ϕ_i του κλειστού συστήματος είναι αυτά του παρακάτω πίνακα

$$\Phi(s) = T_K(s) \tilde{T}_G(s) + U_K(s) V_G(s)$$

Ορίζουμε

$$\Phi_1(s) := [T_K(s) U_K(s)], \Phi_2(s) := \begin{bmatrix} \tilde{T}_G \\ V_G \end{bmatrix}$$

Από τις σχέσεις (112),(113) προκύπτει ότι ο Φ_1 είναι κανονικός κατά γραμμές, οι οποίες έχουν βαθμό μ_{Ki} , κι αντίστοιχα ο Φ_2 είναι κανονικός κατά στήλες, που έχουν βαθμό τα λ_{Gi} . Ακόμη, ο $\Phi_{1rL}\Phi_{2cL} = T_{KrL}\tilde{T}_{GcL}$ είναι ομαλός.

Τότε από λήμμα [31], υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $U_1(s), U_2(s)$ τέτοιοι ώστε ο $U_1\Phi U_2$ να είναι κανονικοποιημένος ως προς τις γραμμές και τις στήλες του με βαθμό $\gamma_i = \lambda_{Gi} + \mu_{Kl-i+1}, i = 1, 2, \dots, l$. Έτσι, τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του $U_1\Phi U_2$ ταυτίζονται με αυτά του Φ .

Για να βρούμε μια σχέση μεταξύ των βαθμών των ϕ_i, γ_i θα πρέπει τα γ_i να διαταχθούν.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, τους συνδυασμούς των ακεραίων από το σύνολο $(\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ παίρνοντας k τη φορά με $k = 1, 2, \dots, l$. Υπάρχουν $\binom{l}{k}$ τέτοιοι συνδυασμοί, κι ας συμβολίσουμε με S_j^k το άθροισμα των ακεραίων που εμφανίζεται στον j -οστό k συνδυασμό. Τότε ο $U_1\Phi U_2$ έχει $k \times k$ όρο, ο οποίος έχει βαθμό ίσο με το $\min S_j^k, 1 \leq j \leq \binom{l}{k}$. Συνεπώς, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\phi_l, \phi_{l-1}, \dots, \phi_{l-k+1}$ όλων των $k \times k$ όρων δεν μπορεί να έχει βαθμό μεγαλύτερο από τον

$$\sum_{i=l-k+1}^l \deg \phi_i \leq \min_{1 \leq j \leq \binom{l}{k}} S_j^k$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$. Έτσι, αλλάζοντας τις ανισότητες προκύπτει το ζητούμενο. \blacktriangle

Παρατηρούμε ότι, η νέα αναγκαία συνθήκη είναι πιο “αυστηρή” από αυτή των Rosenbrock και Hayton, που ορίστηκε σε προηγούμενη υποκεφάλαιο. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι

$$\sum_{i=1}^k \deg \phi_i \geq \max_{1 \leq j \leq \binom{l}{k}} S_j^k \geq \max \left(\sum_{i=1}^k (\lambda_{Gi} + \mu_{Kl-i+1}), \sum_{i=1}^k (\lambda_{G,l+1-i} + \mu_{Ki}) \right), k = 1, 2, \dots, l$$

Για να γίνει καλύτερα αντιληπτό ας δούμε και το εξής παράδειγμα.

3.4.2.1 Παράδειγμα

Αν έχουμε τους εξής δείκτες ελεγχιμότητας $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ αλλά και τους δείκτες παρατηρησιμότητας $\mu_1 = 2, \mu_2 = 2, \mu_3 = 1$, τότε η αναγκαία συνθήκη των Rosenbrock και Hayton δίνει για τους βαθμούς των αναλλοίωτων πολυωνύμων ότι

$$\deg \phi_1 \geq 2, \deg \phi_1 \phi_2 \geq 5, \deg \phi_1 \phi_2 \phi_3 \geq 7$$

ενώ από τη νέα αναγκαία συνθήκη προκύπτει ότι

$$\deg \phi_1 \geq 3, \deg \phi_1 \phi_2 \geq 5, \deg \phi_1 \phi_2 \phi_3 = 7$$

παρατηρώντας έτσι ότι η νέα συνθήκη είναι καλύτερη.

Θεώρημα 3.4.2.2 (Ικανή Συνθήκη) [31] Έστω $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$ οι δείκτες ελεγχιμότητας και $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$ οι δείκτες παρατηρησιμότητας μιας αυστηρώς κανονικής συνάρτησης μεταφοράς. Ακόμη έστω $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l$ πολυώνυμα κανονικοποιημένα, με το ϕ_i να διαιρεί το $\phi_{i-1}, i = 1, 2, \dots, l$. Τότε ένας κανονικός ελεγκτής K , ο οποίος κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος ίσα με τα ϕ_i , υπάρχει αν

$$\sum_{i=1}^k \deg \phi_i \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_1 - 1), k = 1, 2, \dots, l$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$.

Απόδειξη

Κατασκευάζουμε έναν $l \times l$ πίνακα

$$\Phi(s) = \text{diag}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l)$$

και χρησιμοποιώντας Λήμμα 3.2.1, τροποποιούμε τον Φ , κάνοντας πράξεις στις γραμμές και τις στήλες του με αντιστρέψιμους πίνακες, σε έναν πίνακα Φ' ο οποίος είναι κανονικοποιημένος και ως προς τις γραμμές αλλά και τις στήλες του, και ακόμη ισχύει

$$\deg_{ri} \Phi' = \deg_{ci} \Phi' = \lambda_i + \mu_1 - 1, i = 1, 2, \dots, l$$

Αν $G(s) = T_G^{-1} U_G = V_G \tilde{T}_G^{-1}$ με T_G κανονικό κατά γραμμές και τον \tilde{T}_G κανονικό κατά στήλες, τότε

$$\lambda_i = \deg_{ci} \tilde{T}_G, i = 1, 2, \dots, l$$

$$\mu_i = \deg_{rj} T_G, j = 1, 2, \dots, m$$

Έστω, τώρα, P', Q' πολυωνυμικοί πίνακες, οι οποίοι ικανοποιούν την παρακάτω διοφαντική εξίσωση

$$P'(s) \tilde{T}_G(s) + Q'(s) V_G(s) = \Phi'(s) \quad (114)$$

αφού οι V_G, \tilde{T}_G είναι σχετικά δεξιά πρώτοι [26].

Κάνοντας την παρακάτω διαίρεση

$$Q'(s) = R(s) T_G(s) + U_K(s)$$

παίρνουμε το μοναδικό πιλήχο T_G και το μοναδικό υπόλοιπο U_K το οποίο ικανοποιεί τη σχέση

$$\deg U_K \leq \mu_i - 1$$

αφού $\mu_i = \deg_{rj} T_G$.

Τότε το ζεύγος $(T_K = P' + R V_G, U_K)$ ικανοποιεί τη σχέση (114) κι ακόμη ο πίνακας $T_K^{-1} U_K$ είναι κανονικός ρητός πίνακας, διότι αν πάρουμε τον πρώτο όρο του Φ' , δηλαδή του $T_K \tilde{T}_G + U_K V_G$ έχουμε ότι

$$\mu_i - 1 = \deg_{ri} [T_K U_K]$$

και

$$[T_K U_K]_{ri} = [V_{GrL}^{-1} \quad U_{KrL}]$$

Έτσι, ο T_K είναι κανονικός κατά γραμμές και $\deg_{ri} T_K \geq \deg_{ri} U_K, i = 1, 2, \dots, l$ και ο $K = T_K^{-1} U_K$ είναι ο ζητούμενος ελεγκτής.▲

Ας δούμε λοιπόν τα βήματα της προηγούμενης απόδειξης συνοπτικά σε έναν αλγόριθμο.

Αλγόριθμος

Βήμα 1 : Θεωρούμε $G(s) = T_G^{-1} U_G = V_G \tilde{T}_G^{-1}$, τέτοια ώστε ο T_G να είναι κανονικός κατά γραμμές και ο \tilde{T}_G κανονικός κατά στήλες.

Βήμα 2 : Από τον $\Phi(s)$ βρίσκουμε τον κατάλληλο $\Phi'(s)$ [28].

Βήμα 3 : Λύνουμε την εξίσωση (114) και εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο της διαίρεσης βρίσκουμε τα T_K, U_K

Βήμα 4 : Θέτουμε $K = T_K^{-1} U_K$.

Προφανώς, ο ελεγκτής $K = T_K^{-1} U_K$ είναι ο ζητούμενος που λύνει το πρόβλημά μας.

3.4.3 Κώδικας

Στο υποκεφάλαιο αυτό, θα δείξουμε τον κώδικα, που έγινε στο περιβάλλον του Matlab και στον οποίον προγραμματίσαμε τον αλγόριθμο που αποδείξαμε στο υποκεφάλαιο 3.4.2. Αυτός εμπεριέχεται στο αρχείο (script) example4.m και είναι ο εξής :

```

l = input('dwse to l, opou l oi eisodoi');
m = input('dwse to m, opou m oi exodoi ');
% inputs : δίνονται οι πίνακες που θα χρειαστούν
%TU,U,TV,V, F
for i=1:l
for j=1:m
tu=input(['dwse to ' int2str(i) ', ' int2str(j) ' stoixeio tou pinaka TU: '], 's');
TU(i,j)=sym(tu);
end
end
for i=1:l
for j=1:m
tv=input(['dwse to ' int2str(i) ', ' int2str(j) ' stoixeio tou pinaka TV: '], 's');
TV(i,j)=sym(tv);
end
end
for i=1:l
for j=1:m
v=input(['dwse to ' int2str(i) ', ' int2str(j) ' stoixeio tou pinaka V: '], 's');
V(i,j)=sym(v);
end
end
for i=1:l
for j=1:m
u=input(['dwse to ' int2str(i) ', ' int2str(j) ' stoixeio tou pinaka U: '], 's');
U(i,j)=sym(u);
end
end
for i=1:l

```

```

for j=1:m
f=input(['dwse to ' int2str(i) ', ' int2str(j) ' stoixeio tou pinaka F: '], 's');
F(i,j)=sym(f);
end
end
% επίλυση διοφαντικής
[P,Q]=xaybc(TV,V,F);
% διαίρεση πινάκων
[QQ,RR]=quorem(Q,TU);
R=QQ*inv(TU);
R=simplify(R);
% υπολογισμός Uk
Uk=Q-R*TU;
Uk=simplify(Uk);
% υπολογισμός Tk
Tk=P+R*V;
Tk=simplify(Tk);
K=inv(Tk)*Uk;
K=simplify(K);

```

3.4.4 Παράδειγμα

Στη συνέχεια, ακολουθεί μια εφαρμογή στον αλγόριθμο εύρεσης κανονικού συστήματος $K = T_K^{-1}U_K$ τον οποίο αποδείξαμε στο υποκεφάλαιο 3.4.2. Η υλοποίηση του παραδείγματος έγινε με τη βοήθεια του κώδικα που αναφέραμε προηγουμένως.

Ας θεωρήσουμε το σύστημα ελάχιστης τάξης φ το οποίο έχει αυστηρώς κανονική συνάρτηση μεταφοράς την

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{2 \times 2}$$

Ξέρουμε ότι υπάρχουν T_G, U_G σχετικά αριστερά πρώτα και \tilde{T}_G, V_G σχετικά δεξιά πρώτα, με T_G κανονικό κατά γραμμές και \tilde{T}_G κανονικό κατά στήλες, τέτοια ώστε

$$G(s) = T_G^{-1}U_G = V_G\tilde{T}_G^{-1}$$

και έστω

$$T_G = \begin{bmatrix} s^3 + 4s^2 + 4s + 1 & s + 2 \\ -(s + 1) & s + 2 \end{bmatrix}, U_G = \begin{bmatrix} s + 2 & s + 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$\tilde{T}_G = \begin{bmatrix} 0 & s + 1 \\ (s + 2)^2(s + 1) & -(s + 1) \end{bmatrix}, V_G = \begin{bmatrix} s + 2 & 0 \\ (s + 3)(s + 1) & -1 \end{bmatrix}$$

Συμπεραίνουμε από τους βαθμούς των γραμμών του T_G , ότι το σύστημα έχει δείκτες ελεγχιμότητας τους $\lambda_{G1} = 3, \lambda_{G2} = 1$. Αντίστοιχα από τους βαθμούς των στηλών του \tilde{T}_G , το σύστημα έχει δείκτες παρατηρησιμότητας τους $\mu_{G1} = 3, \mu_{G2} = 1$.

Έστω ακόμη, τα επιθυμητά κανονικοποιημένα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος να είναι τα

$$\phi_1(s) = (s + 2)^2(s + 4)(s + 5)$$

$$\phi_2(s) = (s + 2)^2(s + 5)$$

με το ϕ_2 να διαιρεί το ϕ_1 και τα οποία ικανοποιούν την ικανή συνθήκη των Rosenbrock και Hayton, αφού

$$\sum_{i=1}^k \deg \{ \phi_i(s) \} \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{G_i} - 1), k = 1, 2.$$

- Για $k = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \Rightarrow \deg \{ \phi_1(s) \} &\geq (\lambda_{G_1} + \mu_{G_1} - 1) \\ \Rightarrow 5 &\geq (3 + 3 - 1) \Rightarrow 5 \geq 5 \end{aligned}$$

- Για $k = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \Rightarrow \deg \{ \phi_1(s) \} + \deg \{ \phi_2(s) \} &\geq (\lambda_{G_1} + \mu_{G_1} - 1) + (\lambda_{G_2} + \mu_{G_2} - 1) \\ \Rightarrow 5 + 3 &\geq (3 + 3 - 1) + (1 + 3 - 1) \\ \Rightarrow 8 &\geq 8 \end{aligned}$$

Έτσι κατασκευάζουμε πίνακα, από το Λήμμα 3.2.1,

$$\Phi'(s) = \text{diag} \{ \phi_1(s), \phi_2(s) \} \Rightarrow$$

$$\Phi'(s) = \begin{bmatrix} (s+2)^2(s+4)^2(s+5) & 0 \\ 0 & (s+2)^2(s+5) \end{bmatrix}$$

με τον $\Phi'(s)$ να είναι κανονικοποιημένος κατά γραμμές και στήλες και ακόμη

$$\deg_{ri} \Phi' = \deg_{ci} \Phi' = \lambda_{G_i} + \mu_{G_i} - 1, i = 1, 2$$

Στη συνέχεια λύνουμε την παρακάτω διοφαντική εξίσωση

$$P'(s) \tilde{T}_G(s) + Q'(s) V_G(s) = \Phi'(s).$$

από την οποία προκύπτει με την βοήθεια του προγράμματος, ότι

$$P'(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 13s + 22 & s^2 + 1.3s - 20 \\ s^2 + 8s + 12 & -1.5s - 5.5 \end{bmatrix}$$

$$Q'(s) = \begin{bmatrix} 22s^2 + 93s + 110 & 11s^2 + 53s + 63 \\ 2.5s^2 + 9.1s + 6.5 & 1.5s^2 + 4.4s + 2.9 \end{bmatrix}.$$

Οπότε κάνοντας τη διαίρεση

$$Q'(s) = R(s) T_G(s) + U_K(s)$$

προκύπτει από τον προγραμματισμό στο περιβάλλον του Matlab, ότι

$$R(s) = \begin{bmatrix} \frac{11s+31}{(s+1)(s+2)^2} & \frac{(11s+31)(s^2+3s+1)}{(s+1)(s+2)^2} \\ \frac{-(10s^2+87s+118)}{10(s^2+3s+2)^2} & \frac{15s^4+74s^3+141s^2+187s+146}{10(s^2+3s+2)^2} \end{bmatrix}$$

$$U_K = \begin{bmatrix} 22s^2 + 93s + 110 & 11s^2 + 42s + 32 \\ \frac{5}{2}s^2 + \frac{58}{5}s + \frac{131}{10} & \frac{3}{2}s^2 + \frac{29}{10}s + \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

με $\deg_{ri}U_K \leq \mu_{G1} - 1 = 3 - 1 = 2, i = 1, 2$.

Και άρα έχουμε

$$T_K = P' + RV_G \Rightarrow$$

$$T_K = \begin{bmatrix} \frac{12s^5+126s^4+488s^3+868s^2+717s+243}{(s+1)(s+2)^2} & \frac{-(-10s^5-63s^4+165s^3+1496s^2+2588s+1110)}{(s+1)(s+2)^2} \\ \frac{25s^6+274s^5+1212s^4+2843s^3+3770s^2+2613s+682}{10(s^2+3s+2)^2} & \frac{-(15s^5+160s^4+599s^3+1036s^2+907s+366)}{10(s^2+3s+2)^2} \end{bmatrix}.$$

Οπότε ο $K = T_K^{-1}U_K$ είναι ένας κανονικός ρητός πίνακας με $\deg_{ri}T_K \geq \deg_{ri}U_K, i = 1, 2$ και έτσι κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις έχουμε ότι

$$K(s) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{250s^8 + 6285s^7 + 56378s^6 + 253286s^5 + 652852s^4 + 1038135s^3 + 1071908s^2 + 724882s + 257190}{x(s)} & \frac{150s^8 + 3035s^7 + 24637s^6 + 111112s^5 + 305781s^4 + 527749s^3 + 567568s^2 + 356300s + 100470}{x(s)} \\ \frac{10(250s^8 + 3511s^7 + 21966s^6 + 82200s^5 + 203304s^4 + 335330s^3 + 347643s^2 + 196908s + 43187)}{x(s)} & \frac{10(95s + 1646s^7 + 12248s^6 + 50729s^5 + 127351s^4 + 197354s^3 + 182628s^2 + 90813s + 18179)}{x(s)} \end{bmatrix}$$

όπου $x(s) = (250s^8 + 4865s^7 + 37032s^6 + 143776s^5 + 297689s^4 + 291420s^3 + 67139s^2 - 25484s + 33090)$.

Ακόμη παρατηρούμε ότι ισχύει και η αναγκαία συνθήκη των Rosenbrock και Hayton αφού για τους δείκτες ελεγκσιμότητας $\lambda_{G1} = 3, \lambda_{G2} = 1$ και για τους δείκτες παρατηρησιμότητας $\mu_{K1} = 2, \mu_{K2} = 2$, που προέκυψαν από τους βαθμούς των γραμμών του πίνακα T_K , έχουμε

$$\sum_{i=1}^k \deg \phi_i \geq \max \left(\sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{K,l+1-i}), \sum_{i=1}^k (\lambda_{G,l+1-i} + \mu_{K_i}) \right), k = 1, 2, 3$$

• Για $k = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \deg \phi_1 &\geq \max((\lambda_{G1} + \mu_{K2}), (\lambda_{G2} + \mu_{K1})) \\ &\Rightarrow 5 \geq \max(2 + 3, 3) = 5 \end{aligned}$$

• Για $k = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \deg \phi_1 + \deg \phi_2 &\geq \max((\lambda_{G1} + \mu_{K2} + \lambda_{G2} + \mu_{K1}), (\lambda_{G2} + \mu_{K1} + \lambda_{G1} + \mu_{K2})) \\ &\Rightarrow 8 \geq \max(5 + 3, 3 + 5) = 8 \end{aligned}$$

Έτσι ο ελεγκτής $K(s)$ είναι ο ζητούμενος, αφού ικανοποιεί τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες του προβλήματος.

Κεφάλαιο 4

Ο Αλγόριθμος

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο της εργασίας, θα δούμε μια διαφορετική προσέγγιση της ικανής συνθήκης η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε περίπτωση που τα πολυώνυμα $\phi_i, i = 1, 2, \dots, l$ δεν ικανοποιούν την προηγούμενη ικανή συνθήκη που ορίστηκε παραπάνω από τους Rosenbrock και Hayton. Στη συνέχεια θα προτείνουμε και θα αποδείξουμε έναν αλγόριθμο, ο οποίος θα επιλύει το γενικό πρόβλημα και τέλος, αφού τον προγραμματίσουμε θα δούμε την εφαρμογή του σε ένα παράδειγμα. Η διαφορετική αυτή προσέγγιση του προβλήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την επανατοποθέτηση πόλων με πολλαπλότητα.

Θα κάνουμε μια γρήγορη εισαγωγή που θα αναφέρει έννοιες που έχουν οριστεί προηγουμένως αλλά οι οποίες θα προσαρμοστούν στη διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος.

4.1 Εισαγωγή

Έστω ότι έχουμε το γνωστό γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο, ελάχιστο και αυστηρώς κανονικό σύστημα φ με τάξη n_G , το οποίο έχει l εισόδους και m εξόδους.

Τότε το σύστημα έχει δείκτες ελεγχιμότητας τους

$$\lambda_G = \lambda_{G_1} \geq \lambda_{G_2} \geq \dots \geq \lambda_{G_l} \quad (115)$$

και δείκτες παρατηρησιμότητας τους

$$\mu_G = \mu_{G_1} \geq \mu_{G_2} \geq \dots \geq \mu_{G_m} \quad (116)$$

Έστω ακόμη ότι ο πίνακας της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος είναι

$$G(s) = T_G^{-1}(s) U_G(s) \quad (117)$$

όπου T_G, U_G σχετικά αριστερά πρώτοι και ο T_G να είναι κανονικός κατά γραμμές. Τότε ο πίνακας συστήματος, όπως είδαμε, του φ μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή [9] :

$$P_G(s) = \begin{bmatrix} T_G(s) & \vdots & U_G(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ -I & \vdots & D \end{bmatrix} \quad (118)$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον πίνακα ενός συστήματος K το οποίο είναι κανονικό και παρατηρήσιμο, αλλά δεν είναι πάντα ελέγξιμο

$$P_K(s) = \begin{bmatrix} T_K(s) & \vdots & U_K(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ -I & \vdots & D \end{bmatrix} \quad (119)$$

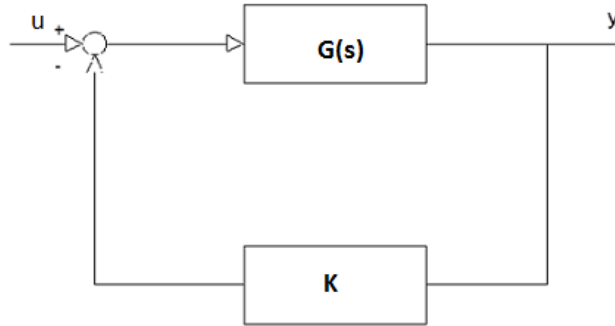
όπου ο T_K είναι κανονικός κατά γραμμές.

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} X_K(s) &= T_K(s) \\ Y_K(s) &= U_K(s) + T_K(s) D \end{aligned} \quad (120)$$

και υποθέτουμε ότι τα δυο συστήματα συνδέονται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2 παρακάτω. Οπότε προκύπτει το παρακάτω κλειστό (closed-loop) σύστημα H με πίνακα συστήματος τον

$$P_H(s) = \begin{bmatrix} T_H(s) & \vdots & U_H(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ -V_H(s) & \vdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_G(s) & U_G(s) & \vdots & U_G(s) \\ -Y_K(s) & X_K(s) & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -I & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (121)$$



Σχήμα 4.1 : Ανάδραση Εξόδου

Έστω τώρα $\tilde{T}_G(s), V_G(s)$ δυο σχετικά δεξιά πρώτοι πολυωνυμικοί πίνακες τέτοιοι ώστε

$$G(s) = V_G(s) \tilde{T}_G^{-1}(s) \quad (122)$$

με τον \tilde{T}_G να είναι κανονικός κατά στήλες.

Όπως είδαμε [20] τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του πίνακα $T_H(s)$ ισούνται με τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του πίνακα

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} -Y_K(s) & X_K(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_G(s) \\ \tilde{T}_G(s) \end{bmatrix} \quad (123)$$

οπότε έχουμε πλέον το γενικό πρόβλημα της επανατοποθέτησης πόλων όπως ορίστηκε παραπάνω.

Ας παρατηρήσουμε ότι, αν ο βαθμός των πολυωνύμων $\phi_i(s)$ συμβολίζεται ως $deg\{\phi_i(s)\}$ τότε η τάξη του ελεγκτή K που χρειάζεται για να επανατοποθετήσει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα, μπορεί να ορισθεί ως

$$n_K = \sum_{i=1}^q deg\{\phi_i(s)\} - n_G \quad (124)$$

Αποδείχθηκε [20] ότι για την ύπαρξη ελεγκτή K , που θα εφαρμοστεί στο σύστημα με ανάδραση εξόδου και θα επιλύει το πρόβλημα, υπάρχει η αναγκαία συνθήκη

$$q \leq \min\{l, m\}$$

καθώς επίσης και η ικανή

$$\sum_{i=1}^k deg\{\phi_i(s)\} \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{G_i} - 1), k = 1, 2, \dots, l \quad (125)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια τεχνική που εδραιώνει την νέα ικανή συνθήκη για την επίλυση του προβλήματος, η οποία περιορίζει περισσότερο τα πολυώνυμα $\phi_i(s)$, μικραίνει επίσης την τάξη του συστήματος K , σε σχέση με αυτή που προτάθηκε παραπάνω, και διατηρεί την ελεγχσιμότητα.

4.2 Ικανή Συνθήκη

Πριν παρουσιάσουμε την ικανή συνθήκη, θα αναφέρουμε κάποια χρήσιμα συμπεράσματα. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, θεωρούμε ότι $l \leq m$, δηλαδή ότι οι είσοδοι είναι λιγότερες από τις εξόδους.

Ας δούμε τα παρακάτω λήμματα. [27]

Λήμμα 4.2.1 Έστω τον $l \times l$ πολυωνυμικό πίνακα $\Phi(s)$ που έχει Smith μορφή την παρακάτω

$$S(s) = \text{diag}[\phi_l(s)\delta(s), \phi_{l-1}(s)\delta(s), \dots, \phi_1(s)\delta(s)] \quad (126)$$

όπου $\delta(s) \in \mathbb{R}[s]$ ένα ανάγωγο πολυώνυμο με συντελεστές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ακόμη υποθέτουμε ότι το $\delta(s)$ δεν διαιρεί το $\phi_1(s)$, οπότε και κανένα $\phi_i(s)$. Τότε αν διαιρέσουμε τις k γραμμές του πίνακα $\Phi(s)$ με το $\delta(s)$, η Smith μορφή του πίνακα $\hat{\Phi}(s)$ που προκύπτει θα είναι

$$\hat{S}(s) = \text{diag}[\phi_l(s), \phi_{l-1}(s), \dots, \phi_{l-k+1}(s), \phi_{l-k}(s)\delta(s), \dots, \phi_1(s)\delta(s)] \quad (127)$$

Απόδειξη

Από τη Smith μορφή του πίνακα $\Phi(s)$ συμπεραίνουμε ότι κάθε στοιχείο του πίνακα διαιρείται από το $\delta(s)$, καθώς επίσης και ότι ο $\hat{\Phi}(s)$ είναι πολυωνυμικός πίνακας. Έτσι χωρίς περιορισμό της γενικότητας, διαιρούμε τις πρώτες k γραμμές του $\Phi(s)$. Θεωρούμε τους όρους $\Phi_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{i_1, i_2, \dots, i_p}$ και $\hat{\Phi}_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{i_1, i_2, \dots, i_p}$ των πινάκων $\Phi(s)$ και $\hat{\Phi}(s)$ αντίστοιχα, που αποτελούνται από τις i_1, i_2, \dots, i_p γραμμές και τις j_1, j_2, \dots, j_p στήλες. Τότε

$$\Phi_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{i_1, i_2, \dots, i_p}(s) = \hat{\Phi}_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{i_1, i_2, \dots, i_p}(s) [\delta(s)]^\nu \quad (128)$$

όπου το $\nu \leq k$. Έτσι όλοι οι παράγοντες, εκτός του $\delta(s)$, που εμπεριέχονται στο μέγιστο κοινό διαιρέτη των $p \times p$ όρων του πίνακα $\Phi(s)$, εμπεριέχονται αντίστοιχα και στο μέγιστο κοινό διαιρέτη των $p \times p$ όρων του πίνακα $\hat{\Phi}(s)$. Έτσι η Smith μορφή του πίνακα $\hat{\Phi}(s)$ γίνεται

$$\hat{S}(s) = \text{diag}[\phi_l(s)\delta^{\nu_1}(s), \phi_{l-1}(s)\delta^{\nu_2-1}(s), \dots, \phi_1(s)\delta^{\nu_l}(s)] \quad (129)$$

όπου ν_i μη αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε

$$\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_l \quad (130)$$

Επειδή η ορίζουσα του $\hat{\Phi}(s)$ είναι

$$|\hat{\Phi}(s)| = [\delta(s)]^{l-k} |\Phi(s)| = [\delta(s)]^{l-k} \prod_{i=1}^l \phi_i(s) \quad (131)$$

με

$$\sum_{i=1}^l \nu_i = l - k \quad (132)$$

εξαιτίας των παραπάνω ανισοτήτων έχουμε

$$\nu_{l-k+1} = \nu_{l-k+2} = \dots = \nu_l = 0. \quad (133)$$

Ακόμη αν θεωρήσουμε τους $(k+1) \times (k+1)$ όρους του $\hat{\Phi}(s)$, επειδή κάθε ένας από αυτούς έχει τουλάχιστον μια γραμμή που διαιρείται από το $\delta(s)$, συμπεραίνουμε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης θα έχει το $\delta(s)$ σαν παράγοντα οπότε

$$\nu_{l-k} \geq 1 \quad (134)$$

και άρα από τις σχέσεις (130) και (132)

$$\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_{l-k} = 1 \quad (135)$$

το οποίο αποδεικνύει το λήμμα.▲

Λήμμα 4.2.2 Έστω ο πίνακας

$$Q^t(s) = \begin{bmatrix} R^t(s) \\ \dots \\ Z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & U(s) \\ \dots & \dots \\ Y(s) & X(s) \end{bmatrix} \quad (136)$$

για τον οποίο ισχύουν τα παρακάτω :

1. Ο $R^t(s)$ είναι μια $t \times (m+l)$, $t < m$ ελάχιστη βάση [16] που έχει μέγιστο βαθμό γραμμών ίσο με D_{R^t} .
2. Ο πίνακας συντελεστής της μεγαλύτερης τάξης των γραμμών R_a^t του $R^t(s)$ έχει μορφή

$$R_a^t = \begin{bmatrix} T_a & 0 \end{bmatrix} \quad (137)$$

με πίνακα T_a , $t \times m$ πλήρης τάξης.

3. Ο πίνακας $Z(s)$ είναι ένας $(l \times (m+l))$ κανονικός κατά γραμμές πολυωνυμικός πίνακας τέτοιος ώστε να υπάρχουν $Y(s)$, $l \times m$, $X(s)$, $l \times l$ πολυωνυμικοί πίνακες και ο ελάχιστος βαθμός των γραμμών του $Z(s)$ να ισούται με d .
4. Ο πίνακας συντελεστής μεγαλύτερης τάξης των γραμμών Z_a του $Z(s)$ έχει τη μορφή

$$Z_a = \begin{bmatrix} Y_a & X_a \end{bmatrix} \quad (138)$$

όπου X_a σταθερός ομαλός πίνακας.

5. Όλοι οι $(m+1) \times (m+1)$ όροι του πίνακα $Q^t(s)$ διαιρούνται από ένα ανάγωγο πολυώνυμο $w(s) \in \mathbb{R}[s]$, το οποίο έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του $d - D_{R^t}$.

Τότε θέλουμε να δείξουμε ότι :

1. Υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $A(s)$, $B(s)$ τέτοιοι ώστε στον πίνακα

$$\bar{Z}(s) = A(s)R^t(s) + B(s)Z(s) = \begin{bmatrix} \bar{Y}(s) & \bar{X}(s) \end{bmatrix} \quad (139)$$

να διαιρούνται οι τελευταίες $l - m + t$ γραμμές του από το $w(s)$.

2. Ο $[\bar{X}(s)]^{-1} \bar{Y}(s)$ είναι ένας κανονικός ρητός πίνακας.

3. Αν κατασκευάσουμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\hat{Z}(s) = \begin{bmatrix} I_{m-t} & 0 \\ 0 & w(s) I_{l-m+t} \end{bmatrix}^{-1} \bar{Z}(s) = \begin{bmatrix} \hat{Y}(s) & \hat{X}(s) \end{bmatrix} \quad (140)$$

τότε ο $[\hat{X}(s)]^{-1} \hat{Y}(s)$ είναι ένας κανονικός πίνακας.

4. Αν $N(s)$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε ο

$$\tilde{Z}(s) = N(s) \hat{Z}(s) \quad (141)$$

να είναι ένας κανονικός κατά γραμμές πολυωνυμικός πίνακας, που έχει ελάχιστο βαθμό γραμμών ίσο με \tilde{d} , τότε

$$d - \tilde{d} \leq \deg \{w(s)\} \quad (142)$$

Απόδειξη

1. Αφού ο πίνακας $R^t(s)$ είναι ελάχιστος, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ) των $t \times t$ όρων του, ισούται με τη μονάδα. Έτσι βρίσκουμε k διανύσματα $Z_{i_1}(s), \dots, Z_{i_k}(s)$ του πίνακα $Z(s)$ τέτοια ώστε ο ΜΚΔ των $(t+k) \times (t+k)$ όρων του πίνακα

$$L(s) = \begin{bmatrix} R^t(s) \\ \dots \\ Z_{i_1}(s) \\ \vdots \\ Z_{i_k}(s) \end{bmatrix} \quad (143)$$

να μη διαιρείται από το $w(s)$, ενώ για κάθε $i \neq i_1, i_2, \dots, i_k$ ο ΜΚΔ των $(t+k+1) \times (t+k+1)$ όρων να διαιρείται από το $w(s)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, θεωρούμε ότι $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_k = k$. Αφού όλοι οι $(m+1) \times (m+1)$ όροι του πίνακα $Q^t(s)$ διαιρούνται από το $w(s)$, συμπεραίνουμε ότι $k \leq m-t$. Είναι γνωστό [?] ότι υπάρχουν πολυώνυμα $a_{ig}(s), g = 1, 2, \dots, t$ και $b_{ij}(s), j = 1, 2, \dots, k$ τέτοια ώστε

$$\max \{ \deg \{a_{ig}(s)\}, \deg \{b_{ij}(s)\} \} < \deg \{w(s)\} \quad (144)$$

και αν οι $R_g^t(s), Z_j(s)$ αναπαριστούν τις g -οστή και j -οστή γραμμές των πινάκων $R^t(s), Z(s)$ αντίστοιχα, έχουμε ότι ο πίνακας

$$Z'_i(s) = \sum_{g=1}^t a_{ig}(s) R_g^t(s) + \sum_{j=1}^k b_{ij}(s) Z_j(s) + Z_i(s) \quad (145)$$

διαιρείται από το $w(s) \forall i = k+1, k+2, \dots, l$. Έτσι κατασκευάζουμε τον πίνακα $\bar{Z}(s)$, όπως στη συνέχεια. Αν $\bar{Z}_i(s)$ δηλώνει την i -οστή γραμμή του $\bar{Z}(s)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{Z}_i(s) &= Z_i(s), i = 1, 2, \dots, k \\ \bar{Z}_i(s) &= Z'_i(s), i = k+1, k+2, \dots, l \end{aligned} \quad (146)$$

Έτσι σύμφωνα με αυτή την κατασκευή οι τελευταίες $l-k$ γραμμές του πίνακα $\bar{Z}(s)$ διαιρούνται από το $w(s)$, και οι πίνακες $A(s), B(s)$ έχουν την παρακάτω μορφή :

$$A(s) = \begin{bmatrix} \dots & 0_{k \times t} & \dots & \dots \\ a_{k+1,1}(s) & a_{k+1,2}(s) & \dots & a_{k+1,t}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{l1}(s) & a_{l2}(s) & \dots & a_{lt}(s) \end{bmatrix} \quad (147)$$

$$B(s) = \begin{bmatrix} \dots & I_k & \dots & \vdots & 0_{k \times (l-k)} \\ b_{k+1,1}(s) & \dots & b_{k+1,k}(s) & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & I_{t-k} \\ b_{l1}(s) & \dots & b_{lk}(s) & \vdots & \dots \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} I & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{21} & \vdots & I \end{bmatrix} \quad (148)$$

2. Η ορίζουσα του πίνακα $B(s)$ ισούται με τη μονάδα, οπότε ο πίνακας $B(s)$ αντιστρέφεται ως εξής

$$B^{-1}(s) = \begin{bmatrix} I_k & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ -B_{21}(s) & \vdots & I_{l-k} \end{bmatrix} \quad (149)$$

Όπως είδαμε, ο πίνακας $A(s)$ έχει τις πρώτες γραμμές του ίσες με το μηδέν και επειδή για τον πίνακα B ισχύει η σχέση (149), ισχυριζόμαστε ότι

$$B^{-1}(s) A(s) = A(s) \quad (150)$$

και γράφουμε

$$\begin{aligned} B^{-1}(s) \bar{Z}(s) &= B^{-1}(s) A(s) R^t(s) + B^{-1}(s) B(s) Z(s) \\ &= Z(s) + A(s) R^t(s) \end{aligned} \quad (151)$$

Αφού ικανοποιείται η ανισότητα (144), ο μέγιστος βαθμός των γραμμών του πίνακα A είναι μικρότερος ή ίσος με το $\deg \{w(s)\} - 1$. Επειδή ο μέγιστος βαθμός των γραμμών του πίνακα $R^t(s)$ είναι D_{R^t} και από την υπόθεση ισχύει ότι $D_{R^t} + \deg \{w(s)\} \leq d$, συμπεραίνουμε ότι ο μέγιστος βαθμός των γραμμών του πίνακα $A(s) R^t(s)$ δεν μπορεί να υπερβαίνει το d . Ακόμη, επειδή ο πίνακας $R^t(s)$ έχει πίνακα συντελεστή μέγιστης τάξης αυτόν στη σχέση (137), συνεπάγεται ότι ο αντίστοιχος πίνακας συντελεστής του $A(s) R^t(s)$ θα είναι ο $[T'_a \quad 0_{t \times l}]$, ενώ ο πίνακας συντελεστής μέγιστης τάξης του

$$B^{-1}(s) \bar{Z}(s) \triangleq Z'(s) \triangleq [Y'(s) \quad X'(s)] \quad (152)$$

θα είναι ο

$$Z'_a = [Y'_a \quad X_a] \quad (153)$$

όπου X_a ομαλός σταθερός πίνακας. Κι επειδή ακριβώς ο X_a είναι ομαλός, ο πίνακας

$$[X'(s)]^{-1} Y'(s) = [B(s) X'(s)]^{-1} B(s) Y'(s) = [\bar{X}(s)]^{-1} \bar{Y}(s) \quad (154)$$

είναι κανονικός και ρητός [20].

3. Αν ορίσουμε

$$W(s) = \begin{bmatrix} I_{m-t} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & w(s)I_{l-m+t} \end{bmatrix} \quad (155)$$

επειδή ο $W(s)$ είναι ομαλός έχουμε ότι

$$[\hat{X}(s)]^{-1} \hat{Y}(s) = [W^{-1}(s) \bar{X}(s)]^{-1} W^{-1}(s) \bar{Y}(s) = [\bar{X}(s)]^{-1} \bar{Y}(s) \quad (156)$$

δηλαδή, ο $\hat{Z}(s)$ είναι ένας κανονικός ρητός πίνακας.

4. Έχουμε ότι

$$\tilde{Z}(s) = N(s) \bar{Z}(s) = N(s) W^{-1}(s) B(s) Z(s) + N(s) W^{-1}(s) A(s) R^t(s) \quad (157)$$

και θεωρούμε τον πίνακα $w(s) \tilde{Z}(s)$. Αν c_i, \tilde{d}_i είναι οι βαθμοί της i -οστής γραμμής των πινάκων $w(s) \tilde{Z}(s), \tilde{Z}(s)$ αντίστοιχα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

$$c_i = \tilde{d}_i + \deg \{w(s)\}, i = 1, 2, \dots, l \quad (158)$$

καθώς επίσης και από την (157) έχουμε

$$\begin{aligned} w(s) \tilde{Z}(s) &= N(s) \begin{bmatrix} w(s) I_{m-t} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & I_{l-m+t} \end{bmatrix} B(s) Z(s) + \\ N(s) \begin{bmatrix} w(s) I_{m-t} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & I_{l-m+t} \end{bmatrix} A(s) R^t(s) &\triangleq J_1(s) Z(s) + J_2(s) R^t(s) \\ &= [J_2(s) \quad J_1(s)] \begin{bmatrix} R^t(s) \\ \cdots \\ Z(s) \end{bmatrix} = [J_2(s) \quad J_1(s)] Q^t(s) \\ &= [J_2(s) \quad J_1(s)] \begin{bmatrix} T(s) & U(s) \\ Y(s) & X(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (159)$$

Είδαμε ότι ο πίνακας συντελεστής μέγιστης τάξης του πίνακα $Q^t(s)$ έχει τη μορφή

$$Q_a^t = \begin{bmatrix} T_a & 0 \\ Y_a & X_a \end{bmatrix} \quad (160)$$

Αφού ο πίνακας X_a είναι ομαλός και ο T_a δεν χάνει τάξη, συνεπάγεται ότι και ο Q_a^t δεν χάνει τάξη και δεν μπορούν να συμβούν διαγραφές των μεγαλύτερων βαθμών των γραμμών του πίνακα στη σχέση (159). Ακόμη, αφού από τον πίνακα $w(s) \tilde{Z}(s) \triangleq [w(s) \tilde{Y}(s), w(s) \tilde{X}(s)]$ προκύπτει ένας κανονικός ρητός πίνακας

$$[w(s) \tilde{X}(s)]^{-1} w(s) \tilde{Y}(s) = [\bar{X}(s)]^{-1} \bar{Y}(s).$$

Ο μέγιστος βαθμός που συμβαίνει στην i -οστή γραμμή του $J_1 X(s)$, ας το συμβολίσουμε με $D_i \{J_1 X(s)\}$, πρέπει να ισούται με το c_i . Όμως

$$c_i = \max_j \{ \deg \{J_{1_{ij}}\} + d_j \} \geq \min_j \{d_j\} = d \quad (161)$$

και λαμβάνοντας υπόψη την προηγούμενη εξίσωση, αλλά και από τη σχέση (158) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \min_j \{c_i\} &= \min_i \left\{ \left\{ \tilde{d}_i \right\} + \deg \{w(s)\} \right\} = \tilde{d} + \deg \{w(s)\} \geq d \\ &\Rightarrow d - \tilde{d} \leq \deg \{w(s)\} \end{aligned} \quad (162)$$

Ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του λήμματος. ▲

Οπότε είμαστε σε θέση να δώσουμε και το θεώρημα που περιέχει την πιο “αυστηρή” ικανή συνθήκη, αλλά και τον αλγόριθμο για την επίλυση του προβλήματος.

Θεώρημα 4.2.1 [27] Έστω $\phi_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, l$ κανονικοποιημένα πολυώνυμα τέτοια ώστε

$$\phi_i(s) / \phi_{i-1}(s) = w_{i+1}(s) \psi_i(s), i = 1, 2, \dots, l-1 \quad (163)$$

όπου $w_{i+1}(s)$ ένα ανάγωγο πραγματικό πολυώνυμο με τα $w_{i+1}(s)$, $\phi_1(s) / w_{i+1}(s)$ σχετικά πρώτα. Ακόμη, έστω ότι οι βαθμοί των πολυωνύμων $w_{i+1}(s)$ ικανοποιούν την παρακάτω εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{k-1} \deg \{w_{i+1}(s)\} \leq \mu_{G1} - \mu_{Gk} \quad (164)$$

Τότε το κανονικό σύστημα K_{ob} το οποίο θα εφαρμοστεί με ανάδραση εξόδου στο κλειστό σύστημα και θα κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα ίσα με τα $\phi_i(s)$, υπάρχει πάντα αν

$$\deg \{\phi_1(s)\} \geq \lambda_{G1} + \mu_{G1} - 1 \quad (165)$$

και

$$\sum_{i=1}^k \deg \{\phi_i(s)\} \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{Gi} + \mu_{G1} - 1) - \sum_{j=2}^k (k-j+1) \deg \{w_j(s)\}, k = 2, 3, \dots, l \quad (166)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$.

Απόδειξη

Κατασκευάζουμε τα πολυώνυμα $\bar{\phi}_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, l$ όπως παρακάτω :

$$\bar{\phi}_1(s) = \phi_1(s) \quad (167)$$

$$\bar{\phi}_i(s) = \phi_i(s) \cdot \prod_{j=2}^i w_j(s)$$

και έχουμε

$$\bar{\phi}_i(s) / \bar{\phi}_{i-1}(s)$$

Αφού τα πολυώνυμα $\bar{\phi}_i(s)$ ικανοποιούν την παρακάτω συνθήκη των Rosenbrock και Hayton που ορίσαμε προηγουμένως, [20]

$$\sum_{i=1}^k \deg \{ \bar{\phi}_i(s) \} \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{Gi} + \mu_{G1} - 1), k = 1, 2, \dots, l \quad (168)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο τους για να κατασκευάσουμε ένα κανονικό σύστημα K τέτοιο ώστε αν ο πίνακας

$$Z_k(s) = \begin{bmatrix} -Y_k(s) & X_k(s) \end{bmatrix} \quad (169)$$

περιγράφει τις εξισώσεις του συστήματος που είδαμε στη σχέση (120), τότε θα ισχύει

$$\begin{bmatrix} -Y_k(s) & X_k(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_G(s) \\ \tilde{T}_G(s) \end{bmatrix} = \tilde{\Phi}(s) \quad (170)$$

με τον πίνακα $\tilde{\Phi}(s)$ να έχει Smith μορφή την

$$\tilde{S}(s) = \text{diag} \{ \bar{\phi}_l(s), \bar{\phi}_{l-1}(s), \dots, \phi_1(s) \} \quad (171)$$

Να σημειώσουμε ότι, όλοι οι βαθμοί των γραμμών του πίνακα $Z_k(s)$ ισούνται με $\mu_{G1} - 1$, άρα κι ο ελάχιστος βαθμός των γραμμών θα ισούται με $d = \mu_{G1} - 1$.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι ο βαθμός των γραμμών του πίνακα $\begin{bmatrix} T_G(s) & U_G(s) \end{bmatrix}$ όπως στην εξίσωση (118), είναι σε αύξουσα σειρά.

Έστω, λοιπόν, ο πίνακας

$$R^t(s) = \begin{bmatrix} T_G(s) & U_G(s) \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} [T_G(s)]_t & [U_G(s)]_t \end{bmatrix} \quad (172)$$

ο οποίος αποτελείται από τα πρώτα t διανύσματα των γραμμών του πίνακα $\begin{bmatrix} T_G(s) & U_G(s) \end{bmatrix}$. Τότε ο μέγιστος βαθμός των γραμμών του πίνακα $R^t(s)$ είναι

$$D_{R^t} = \mu_{G,l+1} \quad (173)$$

Ορίζουμε

$$Q_G^t(s) = \begin{bmatrix} [T_G(s) & U_G(s)] \\ -Y_K(s) & X_K(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_G^t(s) \\ Z_K(s) \end{bmatrix} \quad (174)$$

Έστω ότι το $w_j(s)$ έχει τ_j ανάγωγους παράγοντες και έστω ότι το $w_j^i(s)$ αναπαριστά τον i -οστό ανάγωγο παράγοντα του $w_j(s)$. Αφού το $w_j^i(s)$, $i = 1, 2, \dots, \tau_j$, $j = 1, 2, \dots, l$ είναι όπως είδαμε ένας παράγοντας του αναλλοίωτου πολυωνύμου $\bar{\phi}_l(s)$, συμπεραίνουμε ότι όλοι οι $(m+1) \times (m+1)$ όροι του $Q_G^m(s)$ διαιρούνται από το $w_j^i(s)$ και άρα όλοι οι $(m+1) \times (m+1)$ όροι του $Q_G^t(s)$, $t = m-l+1, \dots, m$ αντίστοιχα, διαιρούνται από το $w_j^i(s)$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα βήματα του αλγόριθμου ο οποίος “διαγράφει” τους παράγοντες $w_j^i(s)$ του $w_j(s)$ από τα αναλλοίωτα πολυώνυμα

$$\bar{\phi}_j(s), \bar{\phi}_{j+1}(s), \dots, \bar{\phi}_l(s).$$

Να σημειώσουμε ότι, αν το σύστημα K_{ob} συνδεθεί με το σύστημα φ όπως στο Σχήμα 4.1, τότε τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος είναι ίσα με τα $\phi_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Αλγόριθμος

Βήμα 1 : Επιλέγουμε

$$Z^{(1)}(s) = Z_K(s) \quad (175)$$

όπου $Z_k(s) = \begin{bmatrix} -Y_k(s) & X_k(s) \end{bmatrix}$.

Βήμα 2 : Για κάθε $k = 1, 2, \dots, l$ ορίζουμε

$$Q_G^{(k)}(s) = \begin{bmatrix} R_G^{m-k}(s) \\ Z^{(k)}(s) \end{bmatrix} \quad (176)$$

Βήμα 3 : Θεωρούμε τα πολυώνυμα $w_{k+1}^i(s)$ για $i = 1$ και βρίσκουμε τους πίνακες $A_i^{(k)}(s), B_i^{(k)}(s)$, όπως στη σχέση (139) ακριβώς έτσι όπως δείχνει το Λήμμα 4.2.2, έτσι ώστε οι τελευταίες $l - k$ γραμμές του πίνακα $\bar{Z}^{(k)}(s)$ να διαιρούνται από το $w_{k+1}^{(i)}(s)$.

Βήμα 4 : Διαιρούμε τις τελευταίες $l - k$ γραμμές του πίνακα $\bar{Z}^{(k)}(s)$ με το $w_{k+1}^{(i)}(s)$, και έστω $\hat{Z}^{(k)}(s)$ ο πίνακας που προκύπτει.

Βήμα 5 : Αν ο πίνακας $\hat{Z}^{(k)}(s)$ δεν είναι κανονικός κατά γραμμές, τότε τον πολλαπλασιάζουμε με έναν αντιστρέψιμο πίνακα $N(s)$ έτσι ώστε να γίνει κανονικός.

Βήμα 6 : Ορίζουμε

$$\tilde{Z}^{(k)}(s) = Z_{(1)}^{(k)}(s) \quad (177)$$

Βήμα 7 : Εφαρμόζουμε τα βήμα 3 έως 6 για $i = 1, 2, \dots, \tau_{k+1}$

Βήμα 8 : Ορίζουμε

$$Z_{(\tau_{k+1})}^{(k)}(s) = Z^{(k+1)}(s) \quad (178)$$

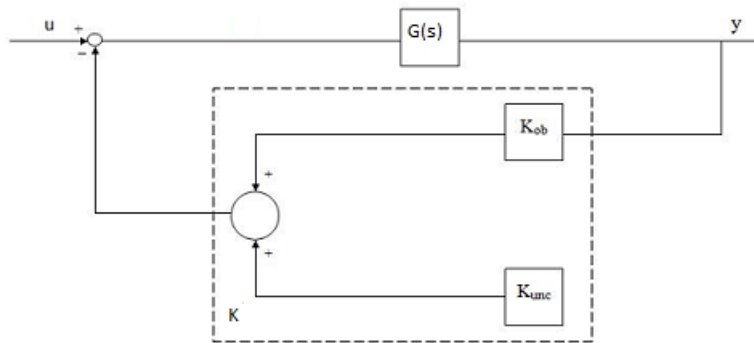
Βήμα 9 : Εφαρμόζουμε τα βήματα 2 έως 8 για $k = 1, 2, \dots, l - 1$

Έστω ότι τα $\bar{\phi}_1^{(k)}(s), \dots, \bar{\phi}_l^{(k)}(s)$ είναι τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του πίνακα

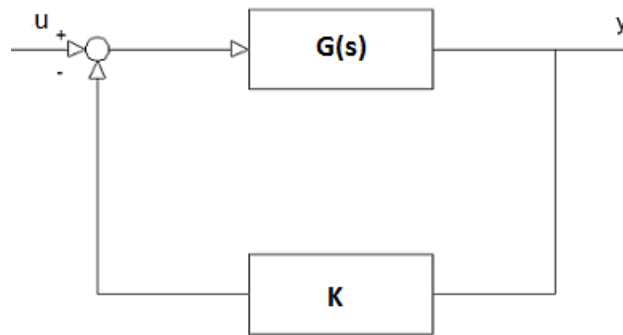
$$Z^{(k)}(s) \cdot \begin{bmatrix} -V_G(s) \\ \tilde{T}_G(s) \end{bmatrix} = \Phi^{(k)}(s) \quad (179)$$

Όπως είδαμε στο Λήμμα 4.2.1, τα πολυώνυμα $w_j(s), j \leq k$, συμβαίνουν μόνο στα αναλλοίωτα πολυώνυμα $\bar{\phi}_1^{(k)}(s), \dots, \bar{\phi}_{j-1}^{(k)}(s)$, κι έτσι συμπεραίνουμε ότι ο $Z^{(l)}(s)$ κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος ίσα με τα $\phi_i(s), i = 1, 2, \dots, l$. Ακόμη ο $Z^{(l)}(s)$ περιγράφει ένα κανονικό σύστημα κι αυτό συμβαίνει διότι, ο $Z^{(1)}(s)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Λήμματος 4.2.2 αλλά και τη σχέση (164), οπότε από τον $Z^{(2)}(s)$ προκύπτει κανονικό σύστημα, κ.ο.κ. Οπότε το σύστημα K είναι κανονικό και έτσι αποδείξαμε το θεώρημα.▲

Αν θέλουμε να δούμε με τη βοήθεια διαγραμμάτων αυτό που έκανε το παραπάνω θεώρημα, όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες του, είναι ότι το σύστημα K που κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος ίσα με τα $\phi_i(s), i = 1, 2, \dots, l$, μπορεί να συνδεθεί όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2 έτσι ώστε τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του συστήματος στο Σχήμα 4.3 να ισούνται με τα $\phi_i(s), i = 1, 2, \dots, l$.



Σχήμα 4.2



Σχήμα 4.3 : Ανάδραση Εξόδου

Ας δούμε δυο σημαντικά συμπεράσματα που προκύπτουν.

Συμπέρασμα 4.2.1 Αντίστοιχα με το θεώρημα που δείξαμε παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω, το οποίο αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

Έστω $\phi_i(s), i = 1, 2, \dots, m, m \leq l$ πολυώνυμα τέτοια ώστε

$$\phi_i(s) / \phi_{i-1}(s) = w_{i+1}(s) \psi_i(s)$$

όπου $w_{i+1}(s)$ ένα ανάγωγο πραγματικό πολυώνυμο με τα $w_{i+1}(s), \phi_1(s) / w_{i+1}(s)$ σχετικά πρώτα.

Ακόμη, έστω ότι οι βαθμοί των πολυωνύμων $w_{i+1}(s)$ ικανοποιούν την παρακάτω εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{k-1} \deg \{w_{i+1}(s)\} \leq \lambda_{G1} - \lambda_{Gk}, k = 2, 3, \dots, m$$

Τότε το κανονικό σύστημα K_{ob} το οποίο αν εφαρμοστεί με ανάδραση εξόδου στο κλειστό σύστημα θα κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμά του ίσα με τα $\phi_i(s)$, υπάρχει πάντα αν

$$\deg \{\phi_1(s)\} \geq \mu_{G1} + \lambda_{G1} - 1$$

και

$$\sum_{i=1}^k \deg \{\phi_i(s)\} \geq \sum_{i=1}^k (\mu_{G_i} + \lambda_{G_1} - 1) - \sum_{j=2}^k (k - j + 1) \deg \{w_j(s)\}, k = 2, 3, \dots, m$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$.

Συμπέρασμα 4.2.2 Έστω $\phi_j(s), w_i(s)$ κανονικοποιημένα πολυώνυμα που ικανοποιούν τις συνθήκες του παραπάνω θεωρήματος και έστω

$$\deg \{w_{i+1}(s)\} = \mu_{G_i} - \mu_{G_{i+1}} \quad (180)$$

Τότε υπάρχει πάντα ένα κανονικό σύστημα ανάδρασης K_{ob} το οποίο κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος ίσα με τα $\phi_j(s), j = 1, 2, \dots, l$, αν

$$\sum_{j=1}^k \deg \{\phi_j(s)\} \geq \sum_{j=1}^k (\mu_{G_j} + \lambda_{G_j} - 1), k = 1, 2, \dots, l$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $k = l$.

Απόδειξη

Από το θεώρημα κι αφού ισχύει η σχέση (180), έχουμε για κάθε $k = 2, 3, \dots, l$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \deg \{\phi_j(s)\} &\geq \sum_{i=1}^k (\mu_{G_1} + \lambda_{G_j} - 1) - \sum_{i=2}^k (k - i + 1) \deg \{w_i(s)\} \\ &= \sum_{j=1}^k (\lambda_{G_j} - 1) + k\mu_{G_1} - (k-1)\mu_{G_1} + (k-2)\mu_{G_2} - (k-2)\mu_{G_2} + \dots + \mu_{G_k} \\ &= \sum_{j=1}^k (\lambda_{G_j} + \mu_{G_j} - 1) \end{aligned} \quad (181)$$

Το οποίο ισχύει από τις σχέσεις (181) και (165), (166).▲

Παρατηρούμε ότι η τάξη του K είναι

$$d_K = \min \left\{ \sum_{i=1}^l (\mu_{G_i} - 1), \sum_{i=1}^m (\lambda_{G_i} - 1) \right\}$$

η οποία είναι μικρότερη από την αντίστοιχη

$$d_K = \min \{l(\mu_{G_1} - 1), m(\lambda_{G_1} - 1)\}$$

που προτείνει η τεχνική των Rosenbrock και Hayton.

4.3 Κώδικας

Στο παρακάτω κεφάλαιο δίνουμε τον προγραμματισμό του αλγόριθμου που αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο της εργασίας. Ο προγραμματισμός έγινε στο περιβάλλον του Matlab.

Στο πρώτο αρχείο, algorithm.m, δίνονται οι απαραίτητοι είσοδοι και γίνεται η επίλυση του προβλήματος καλώντας τις κατάλληλες συναρτήσεις (functions), οι οποίες αντιστοιχούν ακριβώς στα βήματα του αλγόριθμου που είδαμε προηγουμένως.

```
l = input('dwse to l, opou l oi eisodoi');
m = input('dwse to m, opou m oi exodoi ');
for i=1:l
for j=1:m
tu=input(['dwse to ' int2str(i) ', ' int2str(j) ' stoixeio tou pinaka TU: '], 's');
TU(i,j)=sym(tu);
end
end
for i=1:l
for j=1:m
tv=input(['dwse to ' int2str(i) ', ' int2str(j) ' stoixeio tou pinaka TV: '], 's');
TV(i,j)=sym(tv);
end
end
for i=1:l
for j=1:m
v=input(['dwse to ' int2str(i) ', ' int2str(j) ' stoixeio tou pinaka V: '], 's');
V(i,j)=sym(v);
end
end
for i=1:l
for j=1:m
u=input(['dwse to ' int2str(i) ', ' int2str(j) ' stoixeio tou pinaka U: '], 's');
U(i,j)=sym(u);
end
end
for i=1:l
for j=1:m
f=input(['dwse to ' int2str(i) ', ' int2str(j) ' stoixeio tou pinaka F: '], 's');
F(i,j)=sym(f);
end
end
for i=1:l-1
w=input(['dwse to ' int2str(i) 'polywnymo to pinaka W:'], 's');
W(i)=sym(w);
end
syms s
[X0,Y0,R,S] = xaybc(TV,V,F,3)
X=[s^3+18*s^2+131*s+503,s^3+18*s^2-1012*s-1220,864;s+10,s^3+10*s^2,0;0,0,s^3+8*s^2+18*s+17];
T=(X-X0)*inv(R);
Y=Y0+T*S;
Z_k=[-Y,X];
for k=1:l-1
R=[TU U];
R_new=feval('step2',R,k,m);
Q_k=[R_new;Z_k];
[Z_knew1,A,B]=feval('step3',k,l,m,R_new,Z_k,W);
[Z_knew2]=feval('step4',Z_knew1,k,l,m,W);
[Z_knew3]=feval('step5',Z_knew2);
```

```

Z_k=Z_knew3;
end
Z_k;
Yk=sym(zeros(1,m));
Xk=sym(zeros(1,m));
D=[1108,-544,0;34,0,0;0,2,2];
Vk=[-1,0,0;0,-1,0;0,0,-1];
for i=1:l
for j=1:m
Yk(i,j)=-Z_k(i,j);
end
end
for i=1:l
for j=1:m
Xk(i,j)=Z_k(i,m+j);
end
end
Tk=Xk;
Uk=Yk-Tk*D;
Pkob=[Tk,Uk;Vk,D];

```

Ακολουθούν τα αρχεία των συναρτήσεων στο περιβάλλον του Matlab, τα οποία εκτελούν ακριβώς τα βήματα του αλγόριθμου που αναφέρει η θεωρία.

• Βήμα 2

```

function [R_new]=step2(R,k,m)
R1=[];
for t=1:(m-k)
R_k=[R1;R(t,:)];
R1=R_k;
R_new=R1;
end

```

• Βήμα 3

```

function[Z_knew1,A,B]=step3(k,l,m,R_new,Z_k,W)
% εδώ θα υπολογίσουμε τους πίνακες A,B σύμφωνα με την εξίσωση (139)
% με τη βοήθεια των πινάκων Q,R που υπολογίστηκαν στο βήμα 2
% αρχικά πρέπει να ορίσουμε τη γενική μορφή των πινάκων όπως στις εξισώσεις
% (148,147)
syms s;
% ορισμός του A
A=sym('A',[1,m-k]);
for i=1:l
for j=1:m-k
if i<=k
A(i,j)=0;
end
end
end
% ορισμός του B
B=sym('B',[1,1]);
% βοηθάει ο b2 στον υπολογισμό του μοναδιαίου I(1-k)
b2=zeros;
for i=1:l

```



```

for j=1:l
% ορισμός των μηδενικών
if (i<=k)&&(j<=l-k)
B(i,j+k)=0;
end
% ορισμός του μοναδιαίου I(1-k)
if(i>k)&&(j>k)
for h=k+1:l
for n=k+1:m
% θέτω τα στοιχεία που θέλω να αντικαταστήσω με το
% μοναδιαίο, ίσα με το μηδέν για να μπορούν να ταυτιστούν
% αφού είναι σε μορφή symbolic
B(h,n)=0;
b2(h,n)=B(h,n);
end
end
b2=eye(1-k);
[pp,qq]=size(b2);
for h=k+1:l
for n=k+1:m
if pp==1
B(h,n)=b2(h-pp-k+1,n-qq-k+1);
else
B(h,n)=b2(h-k,n-k);
end
end
end
end
end
end
% όμοια ορίζεται και ο μοναδιαίος I(k)
b1=zeros;
for t=1:k
for g=1:k
B(t,g)=0;
b1(t,g)=B(t,g);
end
end
b1=eye(k);
for t=1:k
for g=1:k
B(t,g)=b1(t,g);
end
end
% ορισμός της εξίσωσης (139)
% ψάχνουμε τους αγνώστους που έχει μέσα
Z_knew1=A*R_new+B*Z_k;
[~,cA]=size(A);
[~,cB]=size(B);
% σύμφωνα με τον αλγόριθμο οι τελευταίες 1-k γραμμές του Z_k
% πρέπει να διαιρούνται από το w(k)
% χρήση της quotem
% αφού το w(k) διαιρεί τις τελευταίες 1-k γραμμές, θα πρέπει τα υπόλοιπα
% που θα προκύψουν από την quotem να ισούνται με το μηδέν
% αποθήκευση των υπολοίπων στον πίνακα residues
g=l-k;
residues=sym(zeros(1-k,m+3));
quotients=sym(zeros(1-k,m+3));
for i=l-g+1:l

```

```

for j=1:m+3
[q,r]=quorem(Z_knew1(i,j),W(k,1));
residues(i,j)=r;
quotients(i,j)=q;
end
end
[~,~]=size(residues);
for i=1-g+1:l
% οι παρακάτω εντολές βρίσκουν ποια στοιχεία των A,B είναι οι
% άγνωστοι και βάζουν τα στοιχεία του A στον πίνακα t1 και του B στον t2
% τέλος, τοποθετούν τον t1 και t2 σε έναν πίνακα t
t1=zeros;
syms t1;
u=1;
for j=1:cA
cond=in(A(i,j),'real');
if isAlways(cond)==0
t1(u)=A(i,j);
u=u+1;
end
end
t2=zeros;
syms t2;
v=1;
for j=1:cB
cond=in(B(i,j),'real');
if isAlways(cond)==0
t2(v)=B(i,j);
v=v+1;
end
end
t=[t1 t2];
% βρίσκουμε τις λύσεις με την εντολή vpasolve και στη συνέχεια
% αντιστοιχίζουμε τις λύσεις στους ζητούμενους πίνακες A, B
sol=vpasolve([residues(i,4)==0,residues(i,5)==0,residues(i,6)==0],t);
solNames =fieldnames(sol);
x=length(t1);
y=length(t2);
for loopIndex=1:x
stuff = sol.(solNames{loopIndex});
A(i,loopIndex)=stuff;
end
for loopIndex=x+1:y+x
stuff = sol.(solNames{loopIndex});
B(i,loopIndex-x)=stuff;
end
end
Z_knew1=A*R_new+B*Z_k;
for i=1:l
for j=1:m+3
Z_knew1(i,j)=simplify(Z_knew1(i,j));
end
end
if k==1
for i=1-1:l
for j=1:m+3
if (i==2 && j==1) || (i==2 && j==2) || (i==2 && j==4) || (i==2&&j==5) || (i==2&&j==6)
|| (i==2&&j==3)
Z_knew1(i,j)=Z_knew1(i,j)*(113.0*s + 486.0);

```

```

Z_knew1(i,j)=simplify(Z_knew1(i,j));
else
Z_knew1(i,j)=Z_knew1(i,j);
end
end
end
end
end

```

• Βήμα 4

```

function [Z_knew2]=step4(Z_knew1,k,l,m,W)
% function για το τέταρτο βήμα step4, όπου παίρνει τον Z_knew1 του τρίτου βήματος
% και διαιρεί τις 1-k τελευταίες γραμμές του με το w(k)
% έτσι προκύπτει ο Z_knew2
% η διαίρεση γίνεται με την εντολή quorem
syms s;
g=l-k;
Z_knew2=sym(zeros);
Q=sym(zeros);
R=sym(zeros);
for i=l-g+1:l
for j=1:m+3
[q,r]=quorem(Z_knew1(i,j),W(k,1));
Q(i,j)=q;
R(i,j)=r;
Z_knew2(i,j)=Q(i,j);
end
end
for i=1:l-g
for j=1:m+3
Z_knew2(i,j)=Z_knew1(i,j);
end
end
end

```

• Βήμα 5

```

function[proper]=step5(Z_knew2)
% function για το πέμπτο βήμα, όπου μετατρέπουμε τον Z_knew2, αν δεν είναι
% σε row proper
syms s
t = Z_knew2;
t=expand(t);
[p,m]=size(t);
use =cell(10);
RT=1;
for i=1:10
use{i} =eye(p);
end
highestrowdegree =1:p;
count = 0;
condition = 0;
while condition < 1
% στο σημείο αυτό βρίσκει τον πίνακα highestrowdegree δηλαδή σε κάθε
% γραμμή παίρνει το μεγαλύτερο βαθμό
% στη συνέχεια υπολογίζει το rowcomplexity, δηλαδή προσθέτει όλους τους
% μέγιστους βαθμούς της κάθε γραμμής

```

```

for i=1:p
maximum=0;
for j=1:m
highestrowdegree(i)=max(maximum,length(sym2poly(sym(t(i,j))))-1);
maximum=highestrowdegree(i);
end
end
% εδώ γίνεται χρήση της function matrixdegree που υπολογίζει το βαθμό
% του πίνακα
deg=feval('matrixdegree',t);
sum =0;
for i=1:p
rowcomplexity =sum+highestrowdegree(i);
sum=rowcomplexity;
end
% υπολογίζει το degree του πίνακα και κάνει τους ελέγχους σε σχέση
% με την rowcomplexity
% με βάση τη θεωρία για να είναι row proper θα πρέπει αυτά τα δυο
% να ισούνται
if rowcomplexity==deg
condition =1;
proper =t;
end if
rowcomplexity>deg
highestrowcoef=zeros;
for i=1:p
for j=1:m
if t(i,j)==0
highestrowcoef(i,j)=0;
else
if
highestrowdegree(i)==length(sym2poly(sym(t(i,j))))-1
help=coeffs(sym(t(i,j)));
us=help(1,length(help));
highestrowcoef(i,j)=us;
else
highestrowcoef(i,j)=0;
end
end
end
end
highestrowcoef a=sym('a',[1 p]);
product =dotprod(a,highestrowcoef);
zero =zeros(1,m);
syms a1
syms a2
syms a3
if RT==1
% για να μην πάρει την τετριμμένη όπου a=0,
% δίνεται μια τυχαία τιμή σε ένα από τα ai
sol=solve([product==zero,a2==-1],[a1,a2,a3]);
RT=RT+1;
else
sol=vpasolve(product==zero);
RT=RT+1;
end
solNames =fieldnames(sol);
for loopIndex=1:numel(solNames)
stuff = sol.(solNames{loopIndex});

```

```

a(loopIndex)=stuff;
end
maximum=0;
for i=1:p
if highestrowdegree(i)>maximum
r0=highestrowdegree(i);
x=i;
maximum=highestrowdegree(i);
end
end
row=sym('row',[1 p]);
for i=1:p
row(i) = a(i)*s^(r0 - highestrowdegree(i));
end
help=sym(eye(p));
help(x,:) = row(1,:);
matrix = help;
proper =dotprod(matrix,t);
count =count+1;
use{count}=matrix;
proper=simplify(proper);
t=proper;
syms s
end
end
help=eye(p);
% o unimodular
for i=0:9
mtr=dotprod(help,use{10-i});
mtr=simplify(sym(mtr));
help=mtr;
end

```

```

function [deg] = matrixdegree(t)
syms s
[p,m]=size(t);
if p==m
deg=length(sym2poly(sym(det(t))))-1;
end
if p>m
temp=sym('temp',[m m]);
v=1:p;
w=nchoosek(v,m);
[use,~]=size(w);
x=0;
for i=1:use
for j=1:m
temp(j,:)=t(w(i,j),:);
end
determinant=det(temp);
if length(sym2poly(sym(determinant)))-1>=x
deg=length(sym2poly(sym(determinant)))-1;
x=length(sym2poly(sym(determinant)))-1;
end
end
end
if p<m
temp=sym('temp',[p p]);
v=1:m;

```

```

w=nchoosek(v,p);
[use,~]=size(w);
x=0;
for i=1:use
for j=1:p
temp(:,j)=t(:,w(i,j));
end
determinant=det(temp);
if length(sym2poly(sym(determinant)))-1>= x;
deg=length(sym2poly(sym(determinant)))-1;
x=length(sym2poly(sym(determinant)))-1;
end
end
end
syms s

```

4.4 Παράδειγμα

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο που είδαμε, σε ένα παράδειγμα. Τα αποτελέσματα προκύπτουν από τον προηγούμενο κώδικα.

Ας θεωρήσουμε το σύστημα ελάχιστης τάξης φ το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς τον πίνακα,

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1/s^4 & 1/s^2 & 0 \\ -1/s^6 & (s^2 - 1)/s^4 & 1/s \\ 1/s^6 & (1 - s^2)/s^4 & 0 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε να ορίσουμε σαν πίνακα συστήματος, όπως στη σχέση (118), από τον οποίο προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς, τον

$$P_G(s) = \begin{bmatrix} T_G(s) & \vdots & U_G(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -I & \vdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s & s & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & s^2 & 0 & \vdots & 0 & 1 & s \\ s^4 & 0 & 0 & \vdots & 1 & s^2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -I_3 & \vdots & & & & 0_{3 \times 3} & \end{bmatrix}$$

με τα T_G, U_G σχετικά αριστερά πρώτα.

Όμοια μπορούμε να ορίσουμε τον

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_G(s) & \vdots & I_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -V_G(s) & \vdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^4 & -s^2 & 0 & \vdots & & & \\ -s^2 & s^2 + 1 & 0 & \vdots & & & I_3 \\ 0 & 0 & s & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & & & \\ 1 & -1 & -1 & \vdots & & & 0_{3 \times 3} \\ -1 & 1 & 0 & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

με τα \tilde{T}_G, V_G σχετικά δεξιά πρώτα.

Συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει δείκτες ελεγχσιμότητας τους $\lambda_{G1} = 4, \lambda_{G2} = 2, \lambda_{G3} = 1$. Αντίστοιχα από το δεύτερο πίνακα συστήματος και τις στήλες του, το σύστημα έχει δείκτες παρατηρησιμότητας τους $\mu_{G1} = 4, \mu_{G2} = 2, \mu_{G3} = 1$.

Έστω ακόμη, τα επιθυμητά αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος να είναι τα

$$\phi_1(s) = (s^2 + s + 1)(s + 2)^2(s + 4)^2(s + 5)$$

$$\phi_2(s) = (s + 2)^2(s + 5)$$

$$\phi_3(s) = (s + 2)$$

Παρατηρούμε ότι τα παραπάνω πολυώνυμα δεν ικανοποιούν τη συνθήκη των Rosenbrock και Hayton, αφού

$$\sum_{i=1}^k \deg \{ \phi_i(s) \} \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{G_i} - 1), k = 1, 2, 3.$$

- Για $k = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}\Rightarrow \deg \{\phi_1(s)\} &\geq (\lambda_{G_1} + \mu_{G_1} - 1) \\ \Rightarrow 7 &\geq (4 + 4 - 1) \Rightarrow 7 \geq 7\end{aligned}$$

- Για $k = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned}\Rightarrow \deg \{\phi_1(s)\} + \deg \{\phi_2(s)\} &\geq (\lambda_{G_1} + \mu_{G_1} - 1) + (\lambda_{G_2} + \mu_{G_1} - 1) \\ \Rightarrow 7 + 3 &\geq (4 + 4 - 1) + (2 + 4 - 1) \\ \Rightarrow 10 &\geq 12, \text{ άτοπο}\end{aligned}$$

- Για $k = 3$, έχουμε

$$\begin{aligned}\Rightarrow \deg \{\phi_1(s)\} + \deg \{\phi_2(s)\} + \deg \{\phi_3(s)\} &\geq (\lambda_{G_1} + \mu_{G_1} - 1) + (\lambda_{G_2} + \mu_{G_1} - 1) + (\lambda_{G_3} + \mu_{G_1} - 1) \\ \Rightarrow 7 + 3 + 1 &\geq (4 + 4 - 1) + (2 + 4 - 1) + (1 + 4 - 1) \\ \Rightarrow 11 &\geq 16, \text{ άτοπο}\end{aligned}$$

Έτσι σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.1 υπάρχουν πολυώνυμα

$$w_2(s) = s^2 + s + 1$$

$$w_3(s) = s + 5$$

τα οποία ικανοποιούν την ανισοτική σχέση

$$\sum_{i=1}^{k-1} \deg \{w_{i+1}(s)\} \leq \mu_{G_1} - \mu_{G_k}.$$

Πράγματι για $k = 3$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^2 \deg \{w_{i+1}(s)\} &\leq \mu_{G_1} - \mu_{G_3} \\ \Rightarrow \deg \{w_2(s)\} + \deg \{w_3(s)\} &\leq 4 - 1 \\ \Rightarrow 3 &\leq 3\end{aligned}$$

Έτσι σύμφωνα με τη σχέση (167), κατασκευάζουμε $\bar{\phi}_1(s)$, $\bar{\phi}_2(s)$, $\bar{\phi}_3(s)$ έτσι ώστε

$$\bar{\phi}_1(s) = \phi_1(s) = s^7 + 18s^6 + 130s^5 + 485s^4 + 1012s^3 + 1220s^2 + 864s + 320$$

$$\bar{\phi}_2(s) = \phi_2(s)(s^2 + s + 1) = s^5 + 10s^4 + 34s^3 + 53s^2 + 44s + 20$$

$$\bar{\phi}_3(s) = \phi_3(s)(s^2 + s + 1)(s + 5) = s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 17s + 10$$

τα οποία ικανοποιούν την ικανή συνθήκη των Rosenbrock και Hayton, αφού

$$\sum_{i=1}^k \deg \{\bar{\phi}_i(s)\} \geq \sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{G_1} - 1), k = 1, 2, 3.$$

- Για $k = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \Rightarrow \deg \{ \bar{\phi}_1(s) \} &\geq (\lambda_{G1} + \mu_{G1} - 1) \\ \Rightarrow 7 &\geq (4 + 4 - 1) \Rightarrow 7 \geq 7 \end{aligned}$$

- Για $k = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \Rightarrow \deg \{ \bar{\phi}_1(s) \} + \deg \{ \bar{\phi}_2(s) \} &\geq (\lambda_{G1} + \mu_{G1} - 1) + (\lambda_{G2} + \mu_{G1} - 1) \\ \Rightarrow 7 + 5 &\geq (4 + 4 - 1) + (2 + 4 - 1) \Rightarrow 12 \geq 7 + 5 = 12 \end{aligned}$$

- Για $k = 3$, έχουμε

$$\begin{aligned} \Rightarrow \deg \{ \bar{\phi}_1(s) \} + \deg \{ \bar{\phi}_2(s) \} + \deg \{ \bar{\phi}_3(s) \} &\geq (\lambda_{G1} + \mu_{G1} - 1) + (\lambda_{G2} + \mu_{G1} - 1) + (\lambda_{G3} + \mu_{G1} - 1) \\ \Rightarrow 7 + 5 + 4 &\geq (4 + 4 - 1) + (2 + 4 - 1) + (1 + 4 - 1) \\ \Rightarrow 16 &\geq 16 \end{aligned}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τη μέθοδό τους, ψάχνουμε να βρούμε ένα κανονικό σύστημα K , το οποίο κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος ίσα με τα $\bar{\phi}_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ και το οποίο αν περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα

$$Z_K(s) = \begin{bmatrix} -Y_K(s) & X_K(s) \end{bmatrix}$$

θα πρέπει να ικανοποιεί την εξής διοφαντική εξίσωση :

$$\begin{bmatrix} -Y_K(s) & X_K(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_G(s) \\ \tilde{T}_G(s) \end{bmatrix} = \hat{\Phi}(s)$$

όπου ο $\hat{\Phi}(s)$ έχει Smith μορφή τον πίνακα

$$\bar{S}(s) = \text{diag} \{ \bar{\phi}_l(s), \bar{\phi}_{l-1}(s), \dots, \bar{\phi}_1(s) \}$$

Οι πίνακες V_G, \tilde{T}_G είναι γνωστοί από την υπόθεση.

Για τον πίνακα $\hat{\Phi}$, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.1 για $a_i = \mu_{G1} - 1, \beta_i = \lambda_{G_i}$ έχουμε ότι :

$$\delta(\bar{\phi}_1) = \mu_{G1} - 1 + \lambda_{G1} \Rightarrow 7 = 4 - 1 + 4 \Rightarrow 7 = 7$$

$$\delta(\bar{\phi}_2) = \mu_{G1} - 1 + \lambda_{G2} \Rightarrow 5 = 4 - 1 + 2 \Rightarrow 5 = 5$$

$$\delta(\bar{\phi}_3) = \mu_{G1} - 1 + \lambda_{G3} \Rightarrow 4 = 4 - 1 + 1 \Rightarrow 4 = 4$$

Άρα προκύπτει από το Λήμμα 3.2.1, ότι

$$\hat{\Phi}(s) = \text{diag} \{ \bar{\phi}_1(s), \bar{\phi}_2(s), \bar{\phi}_3(s) \} \Rightarrow$$

$$\hat{\Phi}(s) =$$

$$\begin{bmatrix} s^7 + 18s^6 + 130s^5 + 485s^4 & 0 & 0 \\ +1012s^3 + 1220s^2 + 864s + 320 & s^5 + 10s^4 + 34s^3 + 53s^2 + 44s + 20 & 0 \\ 0 & 0 & s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 17s + 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τα δεδομένα του προβλήματος στο προγραμματιστικό κομμάτι που είδαμε παραπάνω, και εκτελώντας το έχουμε τα εξής αποτελέσματα.

Αρχικά, λύνουμε τη διοφαντική εξίσωση

$$[-Y_K(s) \quad X_K(s)] \begin{bmatrix} -V_G(s) \\ \tilde{T}_G(s) \end{bmatrix} = \hat{\Phi}(s) \Rightarrow Y_K(s) V_G(s) + X_K(s) \tilde{T}_G(s) = \hat{\Phi}(s) \Rightarrow$$

$$Y_K(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + X_K(s) \begin{bmatrix} s^4 & -s^2 & 0 \\ -s^2 & s^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = \hat{\Phi}(s)$$

κι παίρνουμε τον εξής πίνακα

$$Z_K^{(1)}(s) = [-Y_K(s) \quad X_K(s)] =$$

$$\begin{bmatrix} -1142s^3 - 1705s^2 & 864s & -320 & \vdots & s^3 + 18s^2 & s^3 + 18s^2 & 864 \\ -1876s - 1540 & & & \vdots & +131s + 503 & -1012s - 1220 & \\ -34s^3 - 53s^2 - 44s - 20 & 0 & 0 & \vdots & s + 10 & s^3 + 10 * s^2 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & \vdots & 0 & 0 & s^3 + 8s^2 + 18s + 17 \end{bmatrix}$$

Άρα για $k = 1$ θα πρέπει να διαγράψουμε το $w_2(s) = s^2 + s + 1$ από τα πολυώνυμα $\bar{\phi}_2(s)$, $\bar{\phi}_3(s)$, κι έτσι προκύπτει ότι

$$Q^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} R^2(s) \\ \dots \\ Z^{(1)}(s) \end{bmatrix}$$

όπου ο $R^2(s)$ θα είναι οι πρώτες δυο γραμμές του πίνακα

$$[T_G(s) \quad U_G(s)] = \begin{bmatrix} 0 & s & s & 0 & 0 & 1 \\ 1 & s^2 & 0 & 0 & 1 & s \\ s^4 & 0 & 0 & 1 & s^2 & 0 \end{bmatrix}$$

από υπόθεση, δηλαδή

$$Q^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} 0 & s & s & 0 & 0 & 1 \\ 1 & s^2 & 0 & 0 & 1 & s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & Z^{(1)}(s) & & & \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια θα πρέπει, σύμφωνα με το τρίτο βήμα του αλγόριθμου, να βρούμε πίνακες $A_1^{(1)}(s)$, $B_1^{(1)}(s)$, που θα έχουν τη μορφή του Λήμματος 4.2.2 κι ακόμη θα ισχύει ότι στον πίνακα

$$\bar{Z}_K^{(1)}(s) = A_1^{(1)}(s) R^2(s) + B_1^{(1)}(s) Z_K^{(1)}(s)$$

οι τελευταίες $l - k = 2$ γραμμές του να διαιρούνται από το $w_2(s) = s^2 + s + 1$. Έτσι βρίσκουμε

$$A_1^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 20(5s^3 + 283s^2 + 443s + 432) / (113s + 486) & -4(-25s^2 + 1415s + 1999) / (113s + 486) \\ -10(s + 1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} & & & \vdots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ - (s+10)/(113s+486) & & & \vdots & 1 & 0 \\ & & & & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & & & & \\ 0 & & & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και ο $\bar{Z}_K^{(1)}(s)$ εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις προκύπτει ότι θα είναι

$$\bar{Z}_K^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} -1142s^3 - 1705s^2 - 1876s - 1540 & 864s & -320 & \vdots & s^3 + 18s^2 + 131s + 503 & s^3 + 18s^2 - 1012s - 1220 & 864 \\ -2700s^4 - 9388s^3 - 11704s^2 - 9004s - 2316 & 0 & -100s^4 + 5660s^3 + 8860s^2 + 8960s + 3200 & \vdots & -s^4 - 28s^3 - 198s^2 - 197s - 170 & 112s^4 - 1588s^3 + 5792s^2 + 5680s + 4204 & 0 \\ 0 & -10s^2 - 10s - 10 & -10s^2 - 10s - 10 & \vdots & 0 & 0 & s^3 + 8s^2 + 8s + 7 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με το τέταρτο βήμα του αλγόριθμου, ο πίνακας που προκύπτει αν διαιρέσουμε τις τελευταίες $l - k = 2$ γραμμές του $\bar{Z}_K^{(1)}(s)$ με το $w_2(s) = s^2 + s + 1$, είναι ο

$$\hat{Z}_K^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} -1142s^3 - 1705s^2 - 1876s - 1540 & 864s & -320 & \vdots & s^3 + 18s^2 + 131s + 503 & s^3 + 18s^2 - 1012s - 1220 & 864 \\ -2700s^2 - 6688s - 2316 & 0 & -100s^2 + 5760s + 3200 & \vdots & -s^2 - 27s - 170 & 112s^2 + 1476s + 4204 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & \vdots & 0 & 0 & s + 7 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε το πέμπτο βήμα, κι επειδή ο πίνακας είναι κανονικός κατά γραμμές έχουμε ότι :

$$\tilde{Z}_K^{(1)}(s) = \hat{Z}_K^{(1)}(s)$$

Στη συνέχεια θέτουμε $\tilde{Z}_K^{(1)}(s) = Z_K^{(2)}(s)$ και εφαρμόζουμε ξανά τον αλγόριθμο για $k = 2$ και για να διαγράψουμε το $w_3(s) = s + 5$ από το αναλλοίωτο πολυώνυμο $\bar{\phi}_3(s)$. Έτσι έχουμε αντίστοιχα τον πίνακα

$$Q^{(2)}(s) = \begin{bmatrix} 0 & s & s & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & Z^{(2)}(s) & & & \end{bmatrix}$$

όπου ο

$$R^1(s) = [0 \quad s \quad s \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

αφού δημιουργείται από τη πρώτη γραμμή του πίνακα $[T_G(s) \quad U_G(s)]$.

Οπότε όμοια βρίσκουμε τους πίνακες $A_1^{(2)}(s), B_1^{(2)}(s)$

$$A_1^{(2)}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$B_1^{(2)}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

άρα και τον

$$\bar{Z}_K^{(2)} = A_1^{(2)}(s) R^1(s) + B_1^{(2)}(s) Z_K^{(2)}(s) \Rightarrow$$

$$\bar{Z}_K^{(2)}(s) = \begin{bmatrix} -1142s^3 - 1705s^2 & 864 & -320 & \vdots & s^3 + 18s^2 & s^3 + 18s^2 & 864 \\ -1876s - 1540 & & & & +131s + 503 & -1012s - 1220 & \\ -2700s^2 - 6688s & 0 & -100s^2 + 5760s & \vdots & -s^2 - 27s - 170 & 112s^2 + 1476s & 0 \\ -2316 & & +3200 & & & +4204 & \\ 0 & -2s - 10 & -2s - 10 & \vdots & 0 & 0 & s + 5 \end{bmatrix}$$

κι εφαρμόζοντας το τέταρτο βήμα, προκύπτει ότι αν διαρέσουμε τις τελευταίες $l - k = 3 - 2 = 1$ γραμμές του πίνακα $\bar{Z}_K^{(2)}$ με το $w_3(s) = s + 5$ προκύπτει ο

$$\hat{Z}_K^{(2)}(s) = \begin{bmatrix} -1142s^3 - 1705s^2 & 864 & -320 & \vdots & s^3 + 18s^2 & s^3 + 18s^2 & 864 \\ -1876s - 1540 & & & & +131s + 503 & -1012s - 1220 & \\ -2700s^2 - 6688s & 0 & -100s^2 + 5760s & \vdots & -s^2 - 27s - 170 & 112s^2 + 1476s & 0 \\ -2316 & & +3200 & & & +4204 & \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι κανονικός κατά γραμμές και άρα $\hat{Z}_K^{(2)}(s) = \tilde{Z}_K^{(2)}(s) = Z_K^{(3)}(s)$, ο οποίος σύμφωνα με το θεωρητικό κομμάτι κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα ίσα με τα $\phi_i(s)$.

Άρα το ζητούμενο σύστημα K_{ob} είναι κανονικό, αφού κι ο

$$Z_K^{(3)}(s) = \begin{bmatrix} -Y_K(s) & X_K(s) \end{bmatrix}$$

περιγράφει όπως είδαμε ένα κανονικό σύστημα, που περιγράφεται από τον πίνακα παρακάτω

$$P_{K_{ob}}(s) = \begin{bmatrix} T_K(s) & \vdots & U_K(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ -V_K(s) & \vdots & D_K(s) \end{bmatrix}$$

όπου $X_K(s) = T_K(s)$ και $Y_K(s) = U_K(s) + T_K(s)D$ με

$$V_K(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } D = \begin{bmatrix} 1108 & -544 & 0 \\ 34 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Άρα κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς προκύπτει ότι το σύστημα που θα εφαρμοστεί με ανάδραση εξόδου στο κλειστό σύστημα και θα κάνει τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του κλειστού συστήματος ίσα με τα $\phi_i(s)$, θα έχει την παρακάτω μορφή

$$P_{K_{ob}}(s) = \begin{bmatrix} s^3 + 18s^2 + 131s + 503 & s^3 + 18s^2 - 1012s - 1220 & 864 & \vdots & -18851s^2 - 108864s - 514304 & 544s^3 + 9792s^2 + 70400s + 275360 & 2048 \\ s^2 - 27s - 170 & 112s^2 + 1476s + 4204 & 0 & \vdots & 47940 - 13580s & -544s^2 - 14688s - 92480 & -100s^2 + 5760s + 1472 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & -4 & -4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \vdots & 1108 & -544 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

αφού ικανοποιεί και την αναγκαία συνθήκη των Rosenbrock και Hayton για τους δείκτες ελεγχσιμότητας $\lambda_{G1} = 4, \lambda_{G2} = 2, \lambda_{G3} = 1$ και τους δείκτες παρατηρησιμότητας $\mu_{K1} = 3, \mu_{K2} = 2, \mu_{K3} = 0$, που προέκυψαν από τους βαθμούς των γραμμών του πίνακα T_K , όπως φαίνεται παρακάτω

$$\sum_{i=1}^k \deg \bar{\phi}_i \geq \max \left(\sum_{i=1}^k (\lambda_{G_i} + \mu_{K, l+1-i}), \sum_{i=1}^k (\lambda_{G, l+1-i} + \mu_{K_i}) \right), k = 1, 2, 3$$

- Για $k = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \deg \bar{\phi}_1 &\geq \max((\lambda_{G1} + \mu_{K3}), (\lambda_{G3} + \mu_{K1})) \\ &\Rightarrow 7 \geq \max(4, 4) = 4 \end{aligned}$$

- Για $k = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \deg \bar{\phi}_1 + \deg \bar{\phi}_2 &\geq \max((\lambda_{G1} + \mu_{K3} + \lambda_{G2} + \mu_{K2}), (\lambda_{G2} + \mu_{K2} + \lambda_{G1} + \mu_{K3})) \\ &\Rightarrow 7 + 5 \geq \max(4 + 4, 4 + 4) \\ &12 \geq 8 \end{aligned}$$

- Για $k = 3$, έχουμε

$$\begin{aligned} \deg \bar{\phi}_1 + \deg \bar{\phi}_2 + \deg \bar{\phi}_3 &\geq \max((\lambda_{G1} + \mu_{K3} + \lambda_{G2} + \mu_{K2} + \lambda_{G3} + \mu_{K1}), (\lambda_{G3} + \mu_{K1} + \lambda_{G2} + \mu_{K2} + \lambda_{G1} + \mu_{K3})) \\ &7 + 5 + 4 \geq \max(4 + 4 + 1, 4 + 4 + 4) \\ &\Rightarrow 16 \geq 12 \end{aligned}$$

References

- [1] Vardoulakis, A.I.G., “ Linear Multivariable Control : Algebraic Analysis and Synthesis Methods”, WILEY
- [2] Βαρδουλάκης, Α.Ι.Γ, 2012, “ Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου”, Τόμος Α’ : Κλασσική Θεωρία Ελέγχου, Εκδόσεις Τζιόλα.
- [3] Brunovsky, P., 1970, “A classification of linear controllable systems”, *Kybernetika (Praha)*, 3,173.
- [4] Fossard, A., 1972, “Commande des Systemes Multidimensionnels” , Dunod, Paris.
- [5] Guegen, C. J., 1971, Proc. 2nd IFAC Symposium on Multivariable Technical Control Systems, Dusseldorf, edited by H. Schwartz (North-Holland, Elsevier) 1, Paper 1.2.2.
- [6] Hannan, K J., 1969, “ The identification of vector mixed autoregressive-moving average systems”, *Biometrika*, 56,223.
- [7] Kalman, R. K, 1972, *Ordinary Differential Equations*, edited by L. Weiss (Academic Press), p. 459.
- [8] Porov, V. M., 1970, *Lecture Notes in Mathematics*, edited by A. Dold and B. Eckman (Springer-Verlag), p. 169.
- [9] Rosenbrock, H. H., 1967 a, Proc. Instn elect. Engrs, 114, 1353; 1967 b, *Electron. Lett.*, 3, 368; 1968, *Ibid.*, 4, 227; 1969, *Ibid.*, 5, 658; 1970 a, Proc. Instn elect. Engrs, 117, 1717; 1970 b, *State-space and Multivariable Theory* (NelsonWiley); 1971, *Computer-aided Control System Design* (first draft), Chap. 4; 1974, *Int. J. Control*, 19, 323.
- [10] Rosenbrock, H. H. and Pugh, A. C., 1974, “Contributions to a hierarchical theory”, *Int. J. Control*, 19,845.
- [11] Wang, S. H., 1971, “ Design of Linear Multivariable Systems”, Memo. No. ERL-M309, University of California, Berkeley.
- [12] Wolovich, W. A., 1971, Proc. 2nd IFAC Symposium on Multivariable Technical Control Systems, Dusseldorf, edited by H. Schwartz (North-Holland, Elsevier) 1, Paper 1.2.3.
- [13] Gantmacher, F. R., 1959, *Applications of the Theory of Matrices* (Interscience Publishers Inc.).
- [14] Rosenbrock, R. R., 1974, Structural Properties of Linear Dynamical Systems, *Int. J. Control*, 20, 191.
- [15] Rosenbrock, H. H., and Hayton, G. E., 1974, “Dynamical indices of a transfer function matrix”, *Int. J. Control*, 20, 177.
- [16] Forney, G. D., 1975, “ Minimal bases of rational vector spaces, with applications to multivariable systems.”, *SIAM J. Control*, 13, 493.
- [17] Koussiouris, G. T., 1977, Ph.D. Thesis, University of Manchester Institute of Science and Technology, Manchester, U.K.
- [19] Pearson, J. B., and Ding, C. Y., 1969, “Compensator Design for Multivariable Linear Systems”, *I.E.E.E. Trans. autom. Control*, 14, 130.

- [20] Rosenbrock, H. H., and Nayton, G. E., 1977, Report No. 288, Control Systems Centre, University of Manchester Institute of Science and Technology, Manchester, U.K.
- [21] Wolovich, W. A., 1974, Linear Multivariable Systems (New York: Springer).
- [22] Belevitch, V., 1963, Recent Developments in Network Theory, edited by S. R. Deards (Pergamon), p. 19; 1968, Classical Network Theory (Holden-Day).
- [23] Birkoff, G., and MacLane, S., 1965, A Survey of Modern Algebra, third edition (Macmillan).
- [24] Dickinson, B. W., Morf, M., and Kailath, T., 1974, I.E.E.E. Trans. autom. Control, 19,656.
- [25] Kalman, R. E., FALE, P. L., and ARBIB, M. A., 1969, Topics in Mathematical System Theory (McGraw-Hill).
- [26] V. Kucera, Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach. New York: Wiley, 1979.
- [27] V. Kucera, " Assigning the invariant factors by feedback," Kybernetika, vol. 17, pp.118-127, 1981.
- [28] H.H Rosenbrock and G. E. Hayton, " The general problem of pole assignment," Int. J. Contr., vol. 27, pp. 837-852, 1978.
- [27] T. G. Koussiouris, " On the general problem of pole assignment", Int. J. Contr, vol. 30, pp. 677-694, 1979.
- [29] H.H Rosenbrock and G. E. Hayton, " Dynamical indices of a transfer function matrix ", Int. J. Contr., vol. 20, pp. 177-189, 1974.
- [30] G. E. Hayton, "Properties of dynamical indices", Int. J. Contr.,vol. 22, pp. 289-293, 1975.
- [31] P. Zagalak and V. Kucera, " The General Problem of Pole Assignment: A Polynomial Equation Approach", IEEE Trans. Automat. Contr, vol. AC-30,pp. 286- 289, 1985.

Ιστότοποι :

www.mathworks.com/

Παράρτημα

A. Απόδειξη Ιδιότητας

Έστω ότι έχουμε δυο πίνακες συστήματος $P(s), P'(s)$ της μορφής (60), οι οποίοι σχετίζονται με την ισοδυναμία :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix} = P'(s) \quad (182)$$

όπου M, N πραγματικοί, ομαλοί πίνακες διάστασης $r \times r$.

Αποδεικνύεται ότι ο πίνακας συστήματος της σχέσης (60) είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα συστήματος της μορφής :

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} sI_n - A_1 & 0 & \vdots & B_1 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & I_{r-n} + sJ & \vdots & B_2 \\ -C_1 & -C_2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (183)$$

όπου J ένας πραγματικός πίνακας, που έχει όλες τις εισόδους του μηδέν εκτός, ίσως, από αυτές που βρίσκονται στη πρώτη υπερδιαγώνιό του, που είναι ή 0 ή 1. Ακόμη αποδεικνύεται ότι οι πίνακες A_1, B_1, C_1 είναι οι πίνακες του συστήματος στο χώρο των καταστάσεων με

$$D(s) = C_2 (I + sJ)^{-1} B_2. \quad (184)$$

Έτσι το σύστημα μπορεί να αναπαραστεί με τις δυο παρακάτω μορφές :

$$\begin{bmatrix} sE - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ -u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix} \quad (185)$$

και

$$\begin{bmatrix} sI_n - A_1 & 0 & \vdots & B_1 \\ 0 & I_{r-n} + sJ & \vdots & B_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -C_1 & -C_2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \\ \cdots \\ -u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ -y \end{bmatrix} \quad (186)$$

Προκύπτει από τις (182), (185), (186) ότι

$$\begin{bmatrix} \chi \\ \xi \end{bmatrix} = N^{-1} \chi \quad (187)$$

Έτσι αν έχουμε τους μετασχηματισμούς των $\mathfrak{Z}', \mathfrak{Z}$ συμπεραίνουμε ότι

- Ο μετασχηματισμός \mathfrak{Z}'_2 είναι ίδιος με τον \mathfrak{Z}_2 .

- Ο μετασχηματισμός \mathfrak{S}'_1 μπορεί να γραφεί

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \xi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & I_{r-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \quad (188)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (187) έχουμε :

$$\chi_1 = N \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & I_{r-n} \end{bmatrix} N^{-1} \chi \quad (189)$$

κι έτσι ο \mathfrak{S}'_1 είναι υποσύνολο του \mathfrak{S}_1 με

$$H = N \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & I_{r-n} \end{bmatrix} N^{-1}$$

- Ο μετασχηματισμός \mathfrak{S}'_3 μπορεί να γραφεί

$$u_2 = u + F_1 x + F_2 D(s) u \quad (190)$$

από τις σχέσεις $D(s) = C_2 (I + sJ)^{-1} B_2$ και (186) έχουμε :

$$D(s) u = C_2 \xi \quad (191)$$

και

$$u_2 = u + \begin{pmatrix} F_1 & F_2 C_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \quad (192)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (187) προκύπτει ότι :

$$u_2 = u + \begin{pmatrix} F_1 & F_2 C_2 \end{pmatrix} N^{-1} \chi \quad (193)$$

κι έτσι ο \mathfrak{S}'_3 είναι υποσύνολο του \mathfrak{S}' με

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 C_2 \end{pmatrix} N^{-1}$$

Αποδείξαμε το ζητούμενο.▲