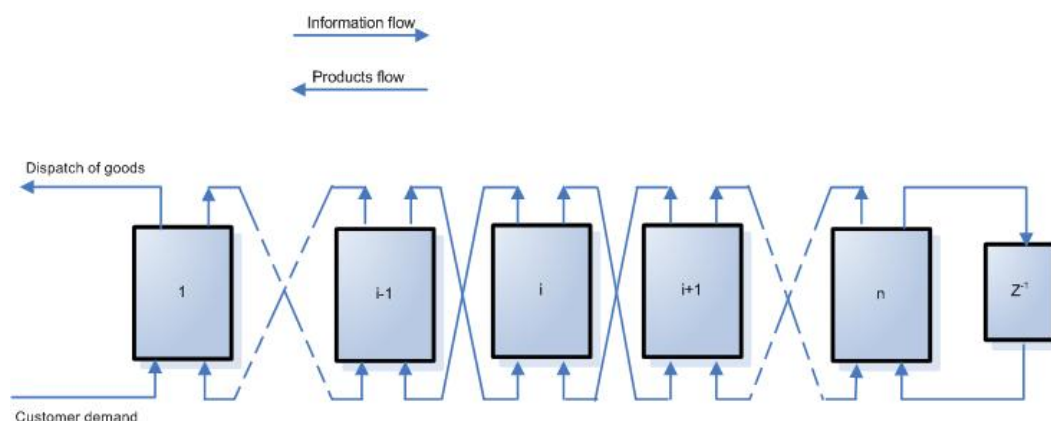


ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



«ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ
ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΓΙΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΣΕΙΡΙΑΚΩΝ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΩΝ
ΑΛΥΣΙΔΩΝ»



ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΡΑΦΑΗΛΙΔΗΣ ΦΩΤΙΟΣ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΤΖΙΩΝΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

**«ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ & ΕΛΕΓΧΟΥ»**

ΤΟΥ Π.Μ.Σ. ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ

Α.Π.Θ.

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	3
ΛΙΣΤΑ ΕΙΚΟΝΩΝ	4
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	6
ABSTRACT	8
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	9
2 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ	18
3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	22
4 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ BULLWHIP EFFECT	28
5 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΣΕΙΡΙΑΚΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ	31
5.1 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΕΙΡΙΑΚΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ ΜΕ ΕΝΑΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟ ΚΟΜΒΟ (ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ P-CONTROLLER)	31
5.1.1 Υπολογισμός εξισώσεων και πινάκων συστήματος κατάστασης.....	32
5.1.2 Υπολογισμός πίνακα συνδιακύμανσης	34
5.1.3 Υπολογισμός «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης».....	35
5.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΕΙΡΙΑΚΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ ΜΕ ΕΝΑΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟ ΚΟΜΒΟ (ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ – ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ PI-CONTROLLER).....	37
5.2.1 Υπολογισμός εξισώσεων και πινάκων συστήματος κατάστασης.....	38
5.2.2 Υπολογισμός πίνακα συνδιακύμανσης	40
5.2.3 Υπολογισμός «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης».....	43
5.3 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΕΙΡΙΑΚΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ ΜΕ ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ (ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ P-CONTROLLER ΚΑΙ ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ P-CONTROLLER)	46
5.3.1 Υπολογισμός εξισώσεων και πινάκων συστήματος κατάστασης.....	47
5.3.2 Υπολογισμός πίνακα συνδιακύμανσης	49
5.3.3 Υπολογισμός «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης».....	52
5.4 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΕΙΡΙΑΚΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ ΜΕ ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ (ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ).....	54
5.4.1 Υπολογισμός εξισώσεων και πινάκων συστήματος κατάστασης.....	55
5.4.2 Υπολογισμός πίνακα συνδιακύμανσης	58
5.4.3 Υπολογισμός «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης».....	60
5.5 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΕΙΡΙΑΚΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ ΜΕ ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ (ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΚΑΙ ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ).....	69
5.5.1 Υπολογισμός εξισώσεων και πινάκων συστήματος κατάστασης.....	70
5.5.2 Υπολογισμός πίνακα συνδιακύμανσης	73
5.5.3 Υπολογισμός «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης».....	74
5.6 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΕΙΡΙΑΚΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ ΜΕ ΕΝΑΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟ ΚΟΜΒΟ (ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ – ΔΙΑΦΟΡΙΣΗΣ PD-CONTROLLER)	84
5.6.1 Υπολογισμός εξισώσεων και πινάκων συστήματος κατάστασης.....	85
5.6.2 Υπολογισμός πίνακα συνδιακύμανσης	87
5.6.3 Υπολογισμός «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης».....	89
5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	91
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	97
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	101
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β	102

Λίστα εικόνων

Εικόνα 1.1 Σειριακή εφοδιαστική Αλυσίδα με n ενδιάμεσους κόμβους.....	11
Εικόνα 4.1 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο αναλογικούς ελεγκτές και με «λευκό θόρυβο»	30
Εικόνα 5.1 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με αναλογικό ελεγκτή.....	32
Εικόνα 5.2 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή..	37
Εικόνα 5.3 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή	44
Εικόνα 5. 4 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο αναλογικούς ελεγκτές.....	46
Εικόνα 5.5 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο αναλογικούς ελεγκτές	53
Εικόνα 5.6 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό και έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή	55
Εικόνα 5.7 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο αναλογικούς ελεγκτές	63
Εικόνα 5.8 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό και έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή και την εντολή contour του Matlab	64
Εικόνα 5.9 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό και έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή	65
Εικόνα 5.10 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή	66
Εικόνα 5.11 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό και έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή	67
Εικόνα 5.12 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό και έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή	68
Εικόνα 5.13 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό και έναν αναλογικό ελεγκτή.....	70
Εικόνα 5.14 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο αναλογικούς ελεγκτές	78
Εικόνα 5.15 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό και έναν αναλογικό ελεγκτή και την εντολή contour του Matlab.....	79
Εικόνα 5.16 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό και έναν αναλογικό ελεγκτή.....	80
Εικόνα 5.17 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή.....	81
Εικόνα 5.18 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό και έναν αναλογικό ελεγκτή.....	82
Εικόνα 5.19 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό και έναν αναλογικό ελεγκτή.....	83
Εικόνα 5.20 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-διαφορικό ελεγκτή	84
Εικόνα 5.21 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-διαφορικό ελεγκτή.....	90
Εικόνα B.1 Μοντέλο προσομοίωσης εφοδιαστικής αλυσίδας PD Controller στο Matlab	102

Εικόνα Β.2 Μοντέλο προσομοίωσης ενδιάμεσου κόμβου εφοδιαστικής αλυσίδας PD Controller στο Matlab	103
Εικόνα Β.3 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας αναλογίας-διαφόρισης (PD).....	104

Περίληψη

Σχεδίαση και σύνθεση ελεγκτών για μοντέλα σειριακών εφοδιαστικών αλυσίδων

Αυτή η διατριβή ασχολείται με το σχεδιασμό και τη σύνθεση ελεγκτών για μια σειριακή εφοδιαστική αλυσίδα πολλαπλών ενδιάμεσων κόμβων. Η εφοδιαστική αλυσίδα μπορεί να έχει ένα ή δύο ενδιάμεσους κόμβους μεταξύ του πελάτη και του κατασκευαστή. Το μοντέλο καθοδηγείται από στοχαστική ακολουθία αναπαριστώντας τη ζήτηση του πελάτη και η οποία αναλύεται με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν συνθήκες σταθερότητας. Αρχικά, σχεδιάζουμε τα κατάλληλα μοντέλα ελέγχου για δύο ή και τρεις κόμβους (συμπεριλαμβανομένου και του κατασκευαστή) χρησιμοποιώντας ελεγκτές αναλογίας. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το αντίστοιχο σύστημα κατάστασης (δηλαδή τους πίνακες A, B, C και D), και οι οποίοι μας επιτρέπουν να αναπαριστούμε το αντίστοιχο μοντέλο. Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής (όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν μέτρο <1), υπολογίζουμε το πίνακα συνδιακύμανσης, ο οποίος είναι η μοναδική, θετική και μονά-ορισμένη λύση της διακριτής εξίσωσης $Lyapunov P - APA' - BB' = 0$. Ο πίνακας μας βοηθάει να περιγράψουμε το φαινόμενο ενίσχυσης ζήτησης στην εφοδιαστική αλυσίδα.

Ο υπολογισμός του πίνακα συνδιακύμανσης μας βοηθάει να υπολογίσουμε την εξίσωση και τους περιορισμούς του φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης. Στη συνέχεια της έρευνας, προσθέτουμε έναν ελεγκτή ολοκλήρωσης σε έναν μόνο ενδιάμεσο κόμβο μιας εφοδιαστικής αλυσίδας κάθε φορά. Επιπλέον, εξετάζουμε και έναν ελεγκτή αναλογίας και διαφόρισης στην εφοδιαστική αλυσίδα που έχουμε μόνο έναν ενδιάμεσο κόμβο. Σε όλες τις παραπάνω εφοδιαστικές αλυσίδες εφαρμόζουμε την ίδια μεθοδολογία έρευνας όπως αυτήν που εφαρμόσαμε για τους ελεγκτές αναλογίας.

Λέξεις κλειδιά: εφοδιαστική αλυσίδα, ελεγκτής αναλογίας, ελεγκτής ολοκλήρωσης, ελεγκτής διαφορίσης, ελεγκτής αναλογίας-ολοκλήρωσης, ελεγκτής αναλογίας-διαφορίσης, φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης, πίνακας συνδιακύμανσης

Abstract

Controller design and synthesis for serial supply-chain modeling

This dissertation deals with the design and synthesis of controllers for a serial multi-node supply chain. The supply chain may have one or two intermediate nodes between customer and manufacturer. The model is driven by a stochastic sequence representing customer demand and it's analyzed under stationarity conditions. Initially, we design the appropriate control schemes for two or three nodes (including the manufacturer) using proportional controllers. Then, we derive the corresponding state space (A, B, C and D matrices) and this allows us to represent a model. Assuming that matrix A is asymptotically stable (all eigenvalues of A have modulus < 1), we derive the covariance matrix which is given by the (unique, positive semi-definite) solution of the discrete Lyapunov equation $P - APA' - BB' = 0$. This, allows us to characterize the "bullwhip effect" (demand amplification) in the supply chain.

The computation of the covariance matrix helps us to find out the equation and constraints for the bullwhip effect. Towards this investigation, we add an integral controller each time to only one intermediate node of the supply chain model. Moreover, we examine a proportional and derivative controller, when we have only one intermediate node. For all the above models, we follow the same methodology as we did for the proportional controllers.

Keywords: supply chain, proportional controller, integral controller, derivative controller, proportional-integral controller, proportional-derivative controller, bullwhip effect, covariance matrix

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εφοδιαστική αλυσίδα είναι η διαδρομή του προϊόντος από την παραγωγή μέχρι την κατανάλωση. Αποτελείται από μονάδες παραγωγής και αποθήκευσης που συνδέονται μεταξύ τους με διαύλους μεταφοράς και αποσκοπεί στον έλεγχο, την υποστήριξη και την πρόβλεψη της ροής της ζήτησης και της προσφοράς.

Στις μέρες μας μια καλά στημένη εφοδιαστική αλυσίδα με σωστή διαχείριση μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά κέρδη για την επιχείρηση, ενώ αντιθέτως ένα λάθος ή μία παράλειψη στην εφοδιαστική αλυσίδα είναι πολύ πιθανό να οδηγήσει στην καταστροφή και στα πρόθυρα της χρεοκοπίας. Οι εταιρείες σήμερα επενδύουν μεγάλα χρηματικά ποσά στον σχεδιασμό και τη διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας, καθώς από αυτήν εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό, η επίτευξη ή όχι των στόχων τους.

Μερικά παραδείγματα γνωστών εταιρειών απλά επιβεβαιώνουν το γεγονός ότι η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας παίζει πλέον τον κυρίαρχο ρόλο στο παιχνίδι του ανταγωνισμού. Η Siemens CT, εταιρεία κατασκευής αξονικών τομογράφων μεγάλης αξίας, αναδιοργανώνοντας την εφοδιαστική της αλυσίδα κατάφερε να μειώσει αποτελεσματικά και θεαματικά τον χρόνο παράδοσης των εμπορευμάτων της καταργώντας όλους τους προσωρινούς αποθηκευτικούς χώρους. Η Gillette, το 2000, δημιουργώντας μια ομάδα για τη διαχείριση της αλυσίδας οδηγήθηκε σε εξοικονόμηση της τάξης των 90 εκατομμυρίων δολαρίων, και σε κέρδη τα οποία απολαμβάνει ακόμα και σήμερα. Η Chrysler είχε φτάσει πολύ νωρίτερα από το 2008 στα πρόθυρα της χρεοκοπίας. Το 1980 βρισκόταν στο χείλος του γκρεμού, αλλά δημιουργώντας και αυτή μια ομάδα για τη διαχείριση της αλυσίδας κατάφερε να εξοικονομήσει τεράστια ποσά και κατά συνέπεια να αποσοβήσει την καταστροφή. Μία άλλη εταιρεία που έφτασε μια ανάσα από την πτώχευση ήταν η Apple Computers, αλλά κατάφερε να ξεφύγει από τον κίνδυνο χάρη στις δραστικές αλλαγές που έκανε στην εφοδιαστική της αλυσίδα. Υιοθέτησε τεχνικές παραγωγής «τη στιγμή που χρειάζεται», αναθεώρησε το σύστημα πρόβλεψης πωλήσεων και ελαχιστοποίησε τα αποθέματα. Ένα άλλο

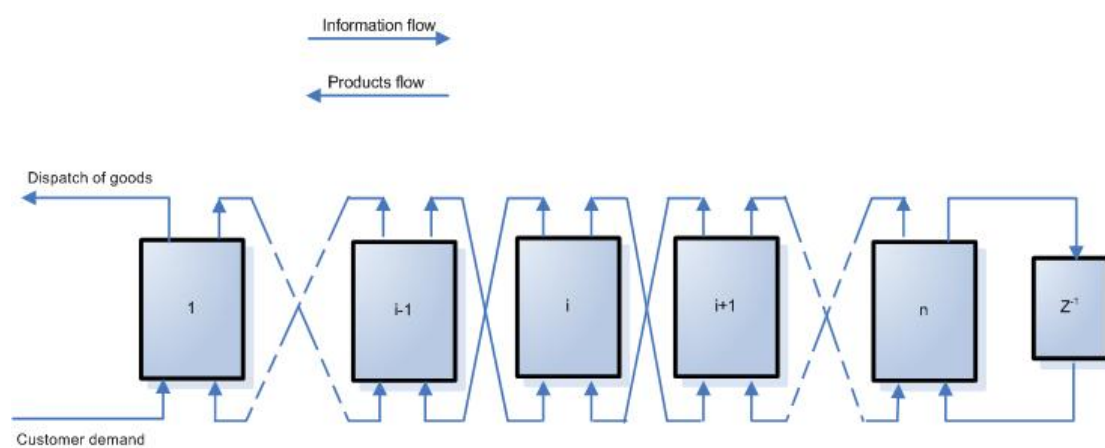
χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η εταιρία Dell, η οποία ουσιαστικά μεταμόρφωσε τον κλάδο των προσωπικών υπολογιστών, αλλάζοντας σχεδόν εξολοκλήρου την εφοδιαστική της αλυσίδα, κατασκευάζοντας κατά παραγγελία τον κάθε υπολογιστή. Το χαρακτηριστικότερο παράδειγμα όμως είναι η εταιρία Nike, η οποία κυριαρχεί στην αγορά των αθλητικών προϊόντων, χωρίς καν να διαθέτει ένα δικό της εργοστάσιο, διαθέτοντας απλά ένα πρωτοποριακό πρόγραμμα διαχείρισης της εφοδιαστικής της αλυσίδας.

Ένα άλλο γεγονός που τονίζει τη σημασία της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι ότι στην Αμερική οι εταιρείες ξοδεύουν το 10% περίπου του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος (ΑΕΠ) της χώρας στις εφοδιαστικές τους αλυσίδες. Περίπου το ένα τρίτο αυτού του κόστους αφορά την διατήρηση των αποθεμάτων, και το υπόλοιπο τη διακίνηση των εμπορευμάτων, με μικροποσά να μένουν για τα διαχειριστικά έξοδα. Και εδώ πρέπει να σημειωθεί πως όσο μεγάλα και να φαίνονται τα ποσά στο παρελθόν ήταν πολύ μεγαλύτερα. Απλά η μείωση του κόστους οφείλεται στο γεγονός ότι βελτιώθηκε αισθητά ο κλάδος των μεταφορών και μειώθηκε σημαντικά ο όγκος των αποθεμάτων.

Από όλα αυτά τα παραδείγματα και τα γεγονότα γίνεται κατανοητό ότι σήμερα η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι πολύ πιο σημαντική από την ίδια τη βιομηχανική παραγωγή και η συστηματική μελέτη και σωστή αξιοποίησή της αποτελεί κομβικό σημείο για την πορεία μιας εταιρείας.

Οι επιχειρήσεις, οι οποίες επιθυμούν να αξιοποιήσουν πλεονεκτήματα όπως η ελαχιστοποίηση του κόστους και η μέγιστη ικανοποίηση του πελάτη, αναζητούν με διάφορους τρόπους την κατάλληλη οργάνωση της επιχείρησής τους. Η οργάνωση μιας επιχείρησης βασίζεται στην διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας, η οποία αποτελεί σημαντικό κομμάτι του προβλήματος. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, εφοδιαστική αλυσίδα είναι η αλυσίδα που συνδέει τον πελάτη με τον κατασκευαστή, και μπορεί στο ενδιάμεσο αυτής της σύνδεσης να παρεμβάλλονται κόμβοι (εμπορικοί εταίροι). Στόχος της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι να υποστηρίξει την αδιάλειπτη ροή της ζήτησης, της προσφοράς και της ταμειακής ρευστότητας. Το σημαντικότερο πρόβλημα στην διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι η αντιμετώπιση της πολυπλοκότητας, της μεταβλητότητας, καθώς και η σωστή συνεργασία ανάμεσα στους εμπορικούς εταίρους.

Καθώς, μια πραγματική εφοδιαστική αλυσίδα είναι ένα πολύπλοκο δίκτυο, θα επικεντρωθούμε να αναλύσουμε την ισορροπία μεταξύ του υλικού και της ροής πληροφοριών του συστήματος. Μια απλή σειριακή εφοδιαστική αλυσίδα είναι ένα σύνολο από κόμβους που συνδέονται με διαύλους μεταφοράς, όπως φαίνεται και στην επόμενη εικόνα (**Εικόνα 1.1**). Σε αυτήν την εικόνα φαίνεται ένα δίκτυο εφοδιαστικής αλυσίδας στην απλή μορφή, δηλαδή με ενδιάμεσους κόμβους ενός στρώματος, αλλά φαίνεται και ροή πληροφοριών και αγαθών.



Εικόνα 1.1 Σειριακή εφοδιαστική Αλυσίδα με n ενδιάμεσους κόμβους

Στην παραπάνω εικόνα παρατηρούμε ότι η ζήτηση του πελάτη (Customer Demand) αποτελεί την είσοδο στην εφοδιαστική αλυσίδα, ενώ η απόδοση των αγαθών στον πελάτη (Dispatch of goods) είναι η έξοδος της εφοδιαστικής αλυσίδας. Επίσης, παρατηρούμε ότι απεικονίζονται οι ροές της ζήτησης (Information flow – Ροή Πληροφοριών) και της προσφοράς (Products flow – Ροή Αγαθών). Αυτή η ροή πληροφοριών βοηθάει στην ανάπτυξη μοντέλων, τα οποία μπορούν να περιγράψουν τις δυνατότητες ενός συστήματος εφοδιαστικής αλυσίδας. Τέτοια μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως η βάση στην κατανόηση των δυνατοτήτων μιας εφοδιαστικής αλυσίδας. Συνεπώς, η διαχείριση ενός τέτοιου συστήματος είναι να διατηρεί το επίπεδο αποθέματος αγαθών κάθε κόμβου σε τέτοιο σημείο ώστε να ικανοποιεί τις απαιτήσεις των πελατών παραγγέλλοντας την αντίστοιχη ποσότητα αγαθών από τον επόμενο κόμβο της εφοδιαστικής

αλυσίδας. Η πολιτική παραγγελίας αγαθών είναι μια στρατηγική ελέγχου του επιπέδου αποθέματός τους. Ο άλλος στόχος μιας εφοδιαστικής αλυσίδας είναι να μπορεί να προβλέπει τις αλλαγές στην ζήτηση των αγαθών από τους προηγούμενους κόμβους.

Υπάρχουν διάφορες τεχνικές-πολιτικές για τη διαμόρφωση και τον έλεγχο της εφοδιαστικής αλυσίδας, δηλαδή την επίτευξη των στόχων διαχείρισης μιας εφοδιαστικής αλυσίδας, οι οποίοι αναλύθηκαν προηγουμένως. Ο στόχος της διατριβής αυτής είναι να αναλύσει τις επιδράσεις συγκεκριμένων τεχνικών αναπλήρωσης αποθεμάτων (α) *αναλογίας (ελεγκτής αναλογίας P-controller)*, (β) *αναλογίας-ολοκλήρωσης (ελεγκτής αναλογίας-ολοκλήρωσης PI-controller)* και (γ) *αναλογίας-διαφόρισης (ελεγκτής αναλογίας-διαφόρισης PD-controller)* στην σταθερότητα και στην απόδοση μιας σειριακής πολλαπλής εφοδιαστικής αλυσίδας. Από τα πρώτα μοντέλα εφοδιαστικών αλυσίδων, που αναπτύχθηκαν, ήταν γύρω στην δεκαετία του '60 από τον συγγραφέα Forrester, J.W (1961). Μια έρευνα στην μοντελοποίηση και ανάλυση εφοδιαστικών αλυσίδων γίνεται από τον συγγραφέα B.M. Beamon (1998). Η ανάλυση του ελέγχου της ανατροφοδότησης μιας εφοδιαστικής αλυσίδας χρησιμοποιώντας σειρά προσομοιώσεων διακριτού χρόνου έγινε από τους συγγραφείς B. Porter, A. Bradshaw (1974), A. Bradshaw, B. Porter (1975) και K.L. Mak, A. Bradshaw, B. Porter (1976). Πιο πρόσφατα, ερευνήθηκε η δυναμική συμπεριφορά μιας εφοδιαστικής αλυσίδας και αναλύθηκαν τα αποτελέσματα πολλών κανόνων ελέγχου χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις συνεχούς χρόνου από τους συγγραφείς E. Perea, I. Grossmann, E. Ydstie, T. Tahmassebi (2000) και Perea-Lopez, E., Grossmann, I.E., and Ydstie, B.E (2001). Για ένα μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας συνεχούς χρόνου, είναι συνηθισμένο να χρησιμοποιούμε μια θεωρητική ανάλυση χρησιμοποιώντας μια *μετασχηματισμό Laplace* για να μετατρέψουμε κανονικές διαφορικές εξισώσεις σε συναρτήσεις μεταφοράς στο πεδίο s . Για ένα μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας διακριτού χρόνου, χρησιμοποιούμε *z-μετασχηματισμό* για να μετασχηματίσουμε ένα χρονικό μοντέλο σε συναρτήσεις μεταφοράς στο πεδίο z . Αυτοί οι μετασχηματισμοί μας δίνουν την δυνατότητα να παρατηρήσουμε ένα σύστημα για την σταθερότητά του. Πολλοί διαφορετικές τεχνικές για σχεδιασμό ελεγκτών μπορούν να αναπτυχθούν χρησιμοποιώντας

συναρτήσεις μεταφοράς και μετά μπορεί να εφαρμοστεί μια συχνοτική ανάλυση για να ελέγξουμε την στρατηγική παραγγελίας. Στις τεχνικές αυτές που θα εξετάσουμε, θεωρείται ότι η ζήτηση αγαθών σε κάθε κόμβο είναι συνεχής, και δεν ενεργοποιείται από κάποιο γεγονός (π.χ. όταν το απόθεμα σε αγαθά πέφτει κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο). Παρόλο που σε μερικές τεχνικές συνεχούς ζήτησης αγαθών είναι πιθανόν να υπάρχουν πρακτικοί περιορισμοί, αυτές οι τεχνικές μπορεί να προσφέρουν επιπλέον ελαστικότητα (π.χ. εξομαλύνοντας τις ροές), γεγονός το οποίο μπορεί να βελτιώσει σημαντικά την σταθερότητα και τις επιδόσεις μιας εφοδιαστικής αλυσίδας. Στην πραγματικότητα, οι τεχνικές συνεχούς ζήτησης αγαθών εφαρμόζονται σε περιπτώσεις όπου τα έξοδα αποθήκευσης εξαιτίας της υπερβολικής ζήτησης δεν είναι σημαντικά.

Η σταθερότητα σε μια εφοδιαστική αλυσίδα συχνά ποσοτικοποιείται μέσω της έννοιας, «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (*bullwhip effect*). Το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» είναι ένα από τα συνηθισμένα φαινόμενα, τα οποία χαρακτηρίζουν την αστάθεια σε μια εφοδιαστική αλυσίδα. Ένα εύχρηστο μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας πρέπει να μπορεί να απεικονίσει τα δυναμικά χαρακτηριστικά ενός συστήματος εφοδιαστικής αλυσίδας, όπως είναι το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης». Το φαινόμενο αυτό σχετίζεται με την αυξημένη ζήτηση της ποσότητας των αγαθών στους προς τα πάνω κόμβους της αλυσίδας. Ουσιαστικά το *bullwhip effect* είναι η ενίσχυση των ευρών των διαταραχών της ζήτησης από την ουρά στα προς τα πάνω επίπεδα της εφοδιαστικής αλυσίδας Forrester, J.W. (1961) και Serman, J.D. (1989). Δηλαδή, μικρές διακυμάνσεις στην ζήτηση του πελάτη στους κάτω κόμβους θα προκαλέσουν μεγάλες διακυμάνσεις στην ζήτηση των πάνω κόμβων Lee, H.L., Padmanabhan, V., and Whang, S. (1997) και Lee, H.L., Padmanabhan, V., and Whang, S. (1997). Η ενίσχυση της ζήτησης μπορεί να περιορίσει σημαντικά την ομαλή λειτουργία της αλυσίδας και να οδηγήσει σε υψηλές δαπάνες που προκύπτουν εξαιτίας των επιπτώσεων της στον προγραμματισμό της παραγωγής, σε υψηλά επίπεδα αποθηκευτικού κόστους, σε φτωχή εξυπηρέτηση των πελατών, κ.τ.λ Simchi-Levi D., Kaminsky P., Simchi-Levi E. (2003). Το «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έχει απασχολήσει τους ειδικούς και έχει αναλυθεί διεξοδικά από τη σύγχρονη βιβλιογραφία, με αποτέλεσμα να αναγνωριστούν πολλοί παράγοντες που

συνεργάζονται για την εμφάνισή του από τους συγγραφείς Dejonckheere J., Disney S.M., Lambrecht M.R., Towhill D.R. (2002), Lee H.L., Padmanabhan V., Whang S. (1997) και Perea-Lopez E., Grossmann I.E., Ydstie B.E. (2001). Σε αυτούς τους παράγοντες περιλαμβάνονται:

1. ο ελλιπής συντονισμός
2. οι επιθετικές πολιτικές πρόβλεψης της ζήτησης για ανεφοδιασμό των αποθεμάτων
3. οι αβέβαιοι χρόνοι προπορείας (χρόνοι που απαιτούνται από τη στιγμή που αποστέλλεται τα προϊόντα μέχρι την παραλαβή τους από τους γειτονικούς κόμβους μιας αλυσίδας)
4. διακυμάνσεις στις τιμές των προϊόντων

Όλοι οι παραπάνω παράγοντες έχουν ερευνηθεί από τους μελετητές F. Chen, Z. Drezner, J.K. Ryan, D. Simchi-Levi (2000) και F. Chen, Z. Drezner, J.K. Ryan, D. Simchi-Levi (2000). Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι αυτοί οι παράγοντες ισχύουν γενικά για όλες τις πολιτικές παραγγελίας, και όχι μόνο για τις αναλογικές πολιτικές που θα μελετήσουμε. Για να μειωθούν τα αρνητικά χαρακτηριστικά, τα οποία εισήγαγε το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» σε μια εφοδιαστική αλυσίδα, αρκετοί μελετητές έχουν ασχοληθεί ερευνητικά με το συγκριμένο θέμα. Οι κυριότερες προτάσεις για την επίλυση του προβλήματος αυτού, με τις οποίες ασχολήθηκαν αυτοί οι ερευνητές, είναι:

1. Μείωση της διακύμανσης των πληροφοριών μεταξύ της αρχής και του τέλους της εφοδιαστικής αλυσίδας.
2. Διαμοιρασμός των πληροφοριών μεταξύ των συμμετεχόντων της εφοδιαστικής αλυσίδας.
3. Ενσωμάτωση διαμοιρασμένου ελέγχου μέσα στην εφοδιαστική αλυσίδα και μείωση της αβεβαιότητας.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο σημαντικότερος λόγος για την εμφάνιση του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» είναι η ροή λανθασμένων πληροφοριών διαμέσου της αλυσίδας. Οι ερευνητές έχουν προτείνει διάφορους τρόπους για την αντιμετώπισή του. Οι Van Ackere and Larsen

ανέπτυξαν ένα χρήσιμο πλαίσιο στο οποίο κατηγοριοποιούσαν ένα σύνολο μονάδων μέτρησης, τα οποία μπορούν να ληφθούν ως μέτρα μέσα σε μια εφοδιαστική αλυσίδα για να μειώσουν ή να αποφύγουν το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης». Αυτά τα στοιχεία είναι τα εξής:

1. επανασχεδιασμός της φυσικής διαδικασίας (π.χ. όπως η μείωση των χρόνων προπορείας και διαγραφή ενός καναλιού μέσα στην εφοδιαστική αλυσίδα)
2. επανασχεδιασμός των καναλιών πληροφοριών (π.χ. όπως η δημοσιοποίηση της ζήτησης του πελάτη σε όλους τους συμμετέχοντες της εφοδιαστικής αλυσίδας)
3. επανασχεδιασμός της διαδικασίας αποφάσεων (π.χ. όπως χρησιμοποίηση διαφορετικών κανόνων ανανέωσης αποθεμάτων)

Ο Sheu Jiu-Biing (2005) παρουσίασε μια διαφορετική στρατηγική ελέγχου της ανταπόκρισης στην ζήτηση του πελάτη, η οποία βασίζεται σε ένα πολύ-επίπεδο σύστημα αποθήκευσης προϊόντων, για να αντιμετωπίσει αποτελεσματικά και αποδοτικά το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» σε μια εφοδιαστική αλυσίδα.

Οι S. Geary, S.M. Disney, D.R. Towill (2006) παρουσίασαν δέκα βασικές αρχές για την μείωση του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης» και οι οποίες είναι: αξιοποίηση των αρχών που απορρέουν από i) τα συστήματα ελέγχου, ii) χρονική συμπίεση, iii) ελάττωση επιπέδων, iv) συγχρονισμός, v) πρόβλεψη της ζήτησης, vi) τοποθέτηση παραγγελιών σε παρτίδες, vii) διακυμάνσεις τιμών, viii) ανταγωνισμός, ix) αμοιβαία ανταλλαγή πληροφοριών και x) τεχνικές σε συνεργία.

Όλα αυτά παρουσιάζονται συγκεντρωτικά από τους συγγραφείς Ahmad Makui, Alireza Madadi (2007) και παρουσιάζουν μια μέθοδο υπολογισμού του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης» βασιζόμενοι στην λύση της εξίσωσης Luarunon για εφοδιαστικές αλυσίδες που υπόκεινται είτε σε κεντρικό είτε σε μη κεντρικό έλεγχο.

Οι S. Balan, Prem Vrat, Pradeep Kumar (2009) υπολογίζουν το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» χρησιμοποιώντας συναρτήσεις μεταφοράς μιας SISO (Single Input Single Output) εφοδιαστικής αλυσίδας.

Στη συνέχεια χρησιμοποίησαν τη θεωρία από την τεχνική ασαφούς λογικής για να ελέγξουν το σύστημα και να μειώσουν το φαινόμενο.

Οι Robert N. Boute, Stephen M. Disney, Marc R. Lambrecht, Benny Van Houdt (2007) εξετάζουν το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» σε ένα μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν ενδιάμεσο κόμβο. Εφαρμόζουν μια ομαλή στρατηγική στην παραγγελία προϊόντων από τον ενδιάμεσο κόμβο στον κατασκευαστή μετατοπίζοντας την επίπτωση του τρόπου παραγγελίας του ενδιάμεσου κόμβου στην παραγωγική διαδικασία του κατασκευαστή. Επίσης, ενσωματώνουν την επίπτωση του τρόπου παραγγελίας του ενδιάμεσου κόμβου στην χρονική καθυστέρηση για να εξομαλύνουν τις διακυμάνσεις στις παραγγελίες.

Οι David Bogataj και Marija Bogataj (2007) χρησιμοποιούν μια παραμετρική προσέγγιση γραμμικού υπολογισμού για την μέτρηση των κινδύνων σε δίκτυα. Η μέτρηση των κινδύνων βασίζεται στην ανάλυση εισόδου-εξόδου και στους μετασχηματισμούς Laplace των μοντέλων εφοδιαστικών αλυσίδων, και στην χρήση στοχαστικών μοντέλων MRP (Manufacturing Resource Planning) -DRP (Distribution Resource Planning).

Οι Yanfeng Ouyang και Carlos Daganzo (2008) σχεδιάζουν μια εφοδιαστική ως ένα Μαρκοβιανό Γραμμικό Σύστημα Άλματος. Παρουσιάζοντας ένα σύνολο από εύρωστες αναλυτικές συνθήκες ανιχνεύουν το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» και υπολογίζουν το μέτρο του. Οι κανόνες παραγγελίας, που περνούν με επιτυχία τα προηγούμενα τεστ, αντιστοιχούν σε εφοδιαστικές αλυσίδες στις οποίες δεν εμφανίζεται το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης».

Στην διατριβή αυτή θα παρουσιαστούν σαφείς μέθοδοι για την ανάλυση και πρόβλεψη του φαινομένου της ενίσχυσης της ζήτησης μέσω της ανάλυσης των τιμών συνδιακύμανσης των ελεγκτών *αναλογίας*, *αναλογίας-ολοκλήρωσης* και *αναλογίας-διαφόρισης* των σχημάτων αυτομάτου ελέγχου που περιγράφουν τα μοντέλα των εφοδιαστικών αλυσίδων με αυθαίρετη πολυπλοκότητα. Επιπλέον θα μελετήσουμε θέματα που σχετίζονται με την απόδοση της εφοδιαστικής αλυσίδας με τη χρήση τέτοιων σχημάτων, τα δυναμικά πλεονεκτήματα της διαμοιραζόμενης πληροφορίας και η δυνατότητα εφαρμογής των τοπικών σχημάτων εκτίμησης βασισμένων σε ιστορικά δεδομένα. Τα πλεονεκτήματα της χρησιμοποίησης μίας state-space

προσέγγισης (και όχι μιας συνάρτησης μεταφοράς) προκύπτουν κυρίως από την καταλληλότητά της για την επαναλαμβανόμενη ενημέρωση του πίνακα συνδιακύμανσης συστημάτων με πολλούς κόμβους σαν αυτά που θα ασχοληθούμε. Επίσης η ανάλυση συνδιακύμανσης παράγει σημαντικές πληροφορίες για τη συνολική σταθερότητα και απόδοση της αλυσίδας, πράγμα το οποίο δεν είναι αμέσως διαθέσιμο από άλλες μορφές ανάλυσης.

Ένα άλλο επιπρόσθετο χαρακτηριστικό είναι ότι το μοντέλο οδηγείται από μια πιθανολογική (στοχαστική) διαδικασία που αντιπροσωπεύει τη ζήτηση των πελατών, η οποία αρχικά θεωρείται ότι είναι «λευκός θόρυβος», δηλαδή μια χρονική σειρά ασύνδετων κανονικά διανεμημένων τυχαίων μεταβλητών. Σε περίπτωση που θέλουμε μια πιο ρεαλιστική απεικόνιση της ζήτησης των πελατών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια φιλτραρισμένη έκδοση του παραπάνω σήματος Avin Y. (2003) και Zipkin P.H. (2000).

Αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι να αντλήσουμε συμπεράσματα βασισμένα σε ένα γενικό μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας, το οποίο είναι εύκολο να αναλυθεί ποσοτικά, αλλά την ίδια στιγμή είναι και αρκετά γενικό για να βάλει τα ουσιαστικά ζητήματα υπό έρευνα, και αυτά είναι:

- a) Η ανάλυση του «Φαινομένου της ενίσχυσης της ζήτησης» σε σειριακές, με πολλούς κόμβους αλυσίδες, που προκύπτει ειδικά λόγω των επιθετικών πολιτικών παραγγελίας
- b) Θέματα βελτιστοποίησης με τη χρήση διαμοιραζόμενων πληροφοριών και μελέτη των επιπτώσεων τους στη συνολική σταθερότητα και απόδοση της αλυσίδας (π.χ. επίπεδα ικανοποίησης των πελατών) και
- c) Την πιθανότητα εκτίμησης των αναλογικών και ολοκληρωτικών συντελεστών των παρακείμενων κόμβων χρησιμοποιώντας μόνο τοπικά ιστορικά δεδομένα. Κατά συνέπεια, δεν εξετάζουμε κατηγορηματικά τους πολλαπλούς προμηθευτές είτε στην προς τα πάνω είτε στην προς τα κάτω πλευρά ενός ιδιαίτερου κόμβου και η ροή των παραγγελιών και των προϊόντων μέσω ενός συγκεκριμένου κόμβου ερμηνεύεται με συνολικούς όρους (δηλ. όπως προκύπτουν από πολλαπλές πηγές).

2 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ

Μια απλή σειριακή εφοδιαστική αλυσίδα με πολλαπλά στάδια παρουσιάζεται στην εικόνα 1.1. Υπάρχουν n μεμονωμένα στάδια ανάμεσα στον Πελάτη και τον Κατασκευαστή και σημειώνουμε με τον δείκτη i τους ενδιάμεσους προμηθευτές $i \geq 1$. Επίσης στην εικόνα 1.1 μπορούμε να δούμε τη ροή των αγαθών και των πληροφοριών (παραγγελίες) διαμέσου της εφοδιαστικής αλυσίδας. Το $I_i(t)$ είναι το επίπεδο αποθέματος στον κόμβο i τη χρονική στιγμή t . Το $Y_{i,i-1}(t)$ δείχνει το ποσό των εμπορευμάτων που παραδίδονται στον κόμβο $i-1$ από τον προς τα πάνω κόμβο i στη χρονική στιγμή t . Επιπλέον εισάγουμε μια χρονική καθυστέρηση L , η οποία είναι η χρονική ανοχή που απαιτείται για να αποστέλλονται τα αγαθά στον προς τα κάτω κόμβο (δηλαδή τα αγαθά που παραγγέλνονται στο χρόνο t παραδίδονται στο χρόνο $t+L$). Για περισσότερη ανάλυση υποθέτουμε ότι το $L=1$. Επιπλέον θεωρούμε το δίκτυο της εφοδιαστικής αλυσίδας σαν ένα αποκεντρωτικό σύστημα ελέγχου, όπου δεν υπάρχει κανένας κύριος επόπτης και οι αποφάσεις παίρνονται τοπικά σε κάθε κόμβο.

Η εξισορρόπηση του αποθέματος $I_i(t)$ του κόμβου i στο χρονικό βήμα t δίνει την παρακάτω εξίσωση:

$$I_i(t) = I_i(t-1) + Y_{i+1,i}(t-L) - Y_{i,i-1}(t) \quad (1)$$

όπου το $I_i(t-1)$ είναι το επίπεδο αποθέματος στο κόμβο i στο χρονικό βήμα $t-1$ και το $Y_{i+1,i}(t-L)$ αναπαριστά τα προϊόντα που αποστέλλονται από τον προς τα πάνω κόμβο $i+1$ στον κόμβο i , τα οποία υποθέτουμε ότι φτάνουν με μια χρονική καθυστέρηση από L χρονικά βήματα.

Παρόλο που το επίπεδο του αποθέματος είναι μια μεταβλητή κλειδί για την λειτουργία τη εφοδιαστικής αλυσίδας, σε κάθε κόμβο i μπορούμε να δούμε καλύτερα τις αλλαγές στο επίπεδο αποθέματος στο χρόνο t χρησιμοποιώντας τη θέση αποθέματος, $IP_i(t)$, η οποία δίνεται από το τύπο:

$$IP_i(t) = IP_i(t-1) + Y_{i+1,i}(t) - Y_{i,i-1}(t) \quad (2)$$

Επιπλέον το $O_{i,i+1}(t)$ δείχνει το ποσό των παραγγελιών που γίνονται από τον κόμβο i στο κόμβο $i+1$, και δίνεται από το τύπο:

$$O_{i,i+1}(t) = k_i(SP_i - IP_i(t)) \quad (3)$$

όπου το SP_i αναπαριστά το σημείο ρύθμισης (στόχος ο οποίος θεωρείται σταθερά) και το k_i είναι ο αντίστοιχος παράγοντας (συντελεστής) κέρδους ανεφοδιασμού του αποθέματος.

Θα πρέπει να εισάγουμε μια τελευταία μεταβλητή την $O_i^*(t)$. Η μεταβλητή περιγράφει την ποσότητα της παραγγελίας προϊόντων ενός κόμβου i την χρονική στιγμή t που θα επεξεργαστεί την χρονική στιγμή $t+1$. Παρόλο που υποθέτουμε ότι οι πληροφορίες της παραγγελίας μεταδίδονται μεταξύ των κόμβων ακαριαία, μια εντολή παραγγελίας την χρονική στιγμή t θα επεξεργαστεί την χρονική στιγμή $t+1$, εξαιτίας καθυστέρησης στον διαχειριστή. Συνεπώς, η έννοια του επιπέδου παραγγελίας για κάθε κόμβο i την χρονική στιγμή t μετριέται ως η ποσότητα της παραγγελίας που θα επεξεργαστεί την χρονική στιγμή $t+1$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μια παραγγελία μπορεί να προστεθεί στην επόμενη χρονική στιγμή σε περίπτωση που δεν υλοποιηθεί η παραγγελία. Αυτό μπορούμε να το υποθέσουμε, καθώς κάθε πελάτης έχει έναν και μόνο προμηθευτή σε μια απλή σειριακή εφοδιαστική αλυσίδα. Η εξίσωση της μεταβλητής $O_i^*(t)$ για ένα κόμβο i την χρονική στιγμή t είναι το άθροισμα της ποσότητας της παραγγελίας, που μόλις έγινε, και οποιασδήποτε άλλης μη υλοποιημένης παραγγελίας της προηγούμενης χρονικής στιγμής.

$$O_i^*(t) = O_{j,i}(t) + O_i^*(t-1) - Y_{i,j}(t)$$

Τέλος, θα πρέπει να εξηγήσουμε λεπτομερώς την μεταβλητή την $Y_{i,j}(t)$, που είδαμε προηγουμένως. Για αυτήν την μεταβλητή ισχύει η παρακάτω εξίσωση.

$$Y_{i,i-1}(t) = \begin{cases} 0 & O_j^*(t-1) \leq 0 \\ O_j^*(t-1) & 0 \leq O_j^*(t-1) \leq I_j(t-1) \\ I_j(t-1) & 0 \leq I_j(t-1) \leq O_j^*(t-1) \end{cases}$$

Για σκοπούς της περαιτέρω ανάλυσης θεωρείται ότι $Y_{i,i-1}(t) = O_i^*(t-1)$. Αυτό υποδηλώνει ότι το ποσό των αγαθών που αποστέλλονται από τον κόμβο i στον προς τα κάτω κόμβο $i-1$ στο χρόνο t είναι το ποσό των παραγγελιών που γίνονται στον κόμβο i στο χρόνο $t-1$. Αυτό είναι ουσιαστικά μια γραμμική υπόθεση δεδομένου ότι υποθέτει πως υπάρχει πάντα αρκετό απόθεμα για να ικανοποιήσει την προς τα κάτω ζήτηση. Αυτή η υπόθεση γίνεται και από τους συγγραφείς Pin-Ho Lin, David Shan-Hill Wong, Shi-Shang Jang, Shyan-Shu Shieh, Ji-Zheng Chu (2004), καθώς απλοποιεί την ανάλυση στα επόμενα στάδια.

Οι παραπάνω εξισώσεις για τον i κόμβο μπορούν να γραφτούν πιο συνεπτυγμένα σε μορφή χώρου κατάστασης επιλέγοντας το $IP_i(t-1)$ και το $Y_{i,i-1}(t)$ ως μεταβλητές χώρου κατάστασης. Οι μεταβλητές εισόδου και εξόδου του κόμβου i επιλέγονται να είναι οι $(O_{i-1,i}(t), Y_{i+1,i}(t))$ και $(Y_{i,i-1}(t), O_{i,i+1}(t))$ αντιστοίχως.

Με αυτή την επιλογή, το μοντέλο χώρου κατάστασης του κόμβου i μπορεί να γραφτεί πιο συνεπτυγμένα ως εξής:

$$\begin{pmatrix} IP_i(t) \\ Y_{i,i-1}(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} IP_i(t-1) \\ Y_{i,i-1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{i-1,i}(t) \\ Y_{i+1,i}(t) \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} Y_{i,i-1}(t) \\ O_{i,i+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_i & k_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} IP_i(t-1) \\ Y_{i,i-1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{i-1,i}(t) \\ Y_{i+1,i}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_i \end{pmatrix} SP_i$$

Το ισοδύναμο μοντέλο χώρου κατάστασης του κατασκευαστή (κόμβος $n+1$) είναι:

$$\begin{aligned}x_{\varphi}(t+1) &= A_{\varphi}x_{\varphi}(t) + B_{\varphi}O_{n,n+1}(t) \\ Y_{n+1,n}(t) &= C_{\varphi}x_{\varphi}(t)\end{aligned}$$

όπου με x_{φ} συμβολίζουμε την κατάσταση του κόμβου $n+1$. Θα υποθέσουμε ότι ο κατασκευαστής ενεργεί με μια ελάχιστη χρονική καθυστέρηση, δηλαδή είναι ικανός να συναντήσει τις παραγγελίες που του γίνονται με μια καθυστέρηση ενός χρονικού βήματος. Συνεπώς, έχουμε απλά ότι $Y_{n+1,n}(t) = O_{n,n+1}(t-1)$ και μπορούμε να επιλέξουμε το $A_{\varphi} = 0$ και $B_{\varphi} = C_{\varphi} = 1$.

Η πραγματοποίηση του χώρου κατάστασης όλης της εφοδιαστικής αλυσίδας ($n+1$) μπορεί να επιτευχθεί δημιουργώντας το συνολικό χώρο κατάστασης όλων των $n+1$ κόμβων. Σαν παράδειγμα η πραγματοποίηση του χώρου κατάστασης μιας αλυσίδας τριών κόμβων δίνεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} IP_1(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ IP_2(t) \\ Y_{2,1}(t+1) \\ Y_{3,2}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SP_1 \\ SP_2 \end{bmatrix}$$

το οποίο είναι της μορφής $x(t+1) = Ax(t) + Be(t) + F(SP)$. Εδώ να σημειωθεί ότι για μια αλυσίδα με $m+1$ κόμβους (περιλαμβάνοντας και τον τελικό κόμβο του κατασκευαστή) οι διαστάσεις των πινάκων A, B και F είναι $(2m+1) \times (2m+1)$, $(2m+1) \times 1$ και $(2m+1) \times m$ αντίστοιχα. Πραγματοποιούμε την εξάρτηση αυτή παρακάτω αναλυτικά (όπου έχουμε μοντέλα με ποικίλους αριθμούς κόμβων) γράφοντας τον πίνακα κατάστασης-μετάβασης ως $A = A_{2m+1}$.

3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Σε αυτό το κομμάτι θα περιγράψουμε μια μέθοδο για τον υπολογισμό του πίνακα συνδιακύμανσης του διανύσματος κατάστασης $x(t)$ του συνολικού μοντέλου που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο χρησιμοποιώντας συμβολικούς υπολογισμούς. Στην εφαρμογή μας, οι συμβολικοί αυτοί υπολογισμοί είναι απαραίτητοι από τη στιγμή που επιθυμούμε να επιτύχουμε τη λύση, ως συνάρτηση των παραμέτρων κέρδους $\{k_i\}$, οι οποίες στη συνέχεια θα μας βοηθήσουν στην έρευνα του «Φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» χρησιμοποιώντας το μοντέλο μας. Πρώτα θα παρουσιάσουμε μια γενική μέθοδο λύσης βασισμένη στα παράγωγα του πίνακα Kronecker και σε λειτουργίες διανυσμάτων (Horn και Johnson 1994) στη συνέχεια, η ειδική δομή του χώρου κατάστασης προτύπου αξιοποιείται για να παράγει μια απλή επαναλαμβανόμενη διαδικασία λύσης η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε μοντέλα με αυθαίρετα υψηλή πολυπλοκότητα.

Θεωρώντας το LTI μοντέλο χώρου κατάστασης διακριτού χρόνου: $x(t+1) = A * x(t) + B * e(t)$, $y(t) = Cx(t)$, όπου το $\{e(t)\}$ δηλώνει μια ακολουθία διανύσματος που αναπαριστά λευκό θόρυβο μοναδιαίας έντασης, που αναπαριστά τη ζήτηση του πελάτη, που υποτίθεται ότι είχε εφαρμοστεί ως εισαγωγή στο μοντέλο από το άπειρο παρελθόν. Μετά υποθέτουμε ότι ο A είναι ασυμπτωτικά σταθερός (όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν συντελεστή <1), η σταθερής κατάστασης συνδιακύμανση του διανύσματος κατάστασης $x(t)$, $E[x(t)x'(t)]$, δίνεται από τη (μοναδική, θετική ημι-ορισμένη) λύση της διακριτής εξίσωσης Lyapunov: $P - APA' - BB' = 0$. Επιπλέον (Davies και Vinter 1985) $E(yy') = CPC'$. Στην περίπτωση μας, ο A εξαρτάται γραμμικά από η παραμέτρους k_1, k_2, \dots, k_n , οι οποίες θεωρούνται σταθερές (αλλά πιθανότατα άγνωστες). Έτσι, η λύση της παραπάνω εξίσωσης Lyapunov είναι ο σταθερής-κατάστασης πίνακας συνδιακύμανσης του $x(t)$ για όλους τους συνδυασμούς του $\{k_i\}$ για τους οποίους ο A είναι ασυμπτωτικά σταθερός. Στη

συνέχεια δείχνεται ότι αυτή η συνθήκη ικανοποιείται αν και μόνο αν το διάνυσμα παραμέτρων $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ βρίσκεται στον Υπέρ-κύβο (n-κύβο):

$$K_n = (0, 2)^n := \{k \in \mathbb{R}^n : 0 < k_i < 2, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Λήμμα 1: Θεωρούμε το μοντέλο με $(m+1)$ κόμβους που εξαρτάται από m αληθείς παραμέτρους κέρδους $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$. Στη συνέχεια το σύστημα είναι ασυμπτωτικά σταθερό αν και μόνο αν $k \in \{K\}_m$. Ειδικότερα, αν $A = A_{2m+1}$ δηλώνει τον πίνακα A του χώρου κατάστασης που περιγράφει στην πραγματικότητα το σύστημα, τότε οι ιδιοτιμές του A είναι $\{1-k_1, 1-k_2, \dots, 1-k_m, 0, \dots, 0\}$, όπου η πολυπλοκότητα της μηδενικής ιδιοτιμής είναι $(m+1)$.

Στη συνέχεια ας αφήσουμε το $A \otimes B$ να δηλώνει το παράγωγο Kronecker δύο πινάκων A και B , και επιπλέον το $\text{vec}(A)$ να είναι η λειτουργία που στοιβάζει τα στοιχεία του πίνακα A σε μία στήλη διανύσματος (διατρέχοντας κατά μήκος των γραμμών του A). Εφαρμόζοντας τη $\text{vec}(\cdot)$ λειτουργία στην εξίσωση Lyapunov έχουμε $(I_{n^2} - A \otimes A)\text{vec}(P) = \text{vec}(BB')$ όπου $n = 2m+1$, η οποία ίσως μπορεί να λυθεί ως: $\text{vec}(P) = (I_{n^2} - A \otimes A)^{-1}\text{vec}(BB')$. Το επόμενο Λήμμα 2 εγγυάται ότι ο αντίστροφος που δηλώνεται παραπάνω υπάρχει στην πραγματικότητα.

Λήμμα 2: Ο πίνακας $I_{n^2} - A \otimes A$ δεν είναι μοναδικός για όλα τα k για τα οποία ισχύει $k \in K_m$. Στην πραγματικότητα, $I_{n^2} - A \otimes A$ είναι μοναδικό αν και μόνο αν $(1-k_i)(1-k_j) = 1$ για οποιουδήποτε δύο δείκτες i και j , για τους οποίους ισχύει ότι $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq m$, όπου $n = 2m+1$.

Ο υπολογισμός του πίνακα συνδιακύμανσης P ουσιαστικά περιλαμβάνει τη λύση του συστήματος n^2 γραμμικών εξισώσεων στα στοιχεία του P , τα οποία εξαρτώνται παραμετρικά από τα k_i . Από τη λύση της εξίσωσης Lyapunov είναι συμμετρικός, όμως, αυτό το σύστημα των εξισώσεων είναι επαναλαμβανόμενο με $n(n-1)/2$ εξισώσεις να

επαναλαμβάνονται (Horn και Johnson 1990). Η λύση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας την παρακάτω διαδικασία: για ένα συμμετρικό πίνακα P , το $\overline{vec}(P)$ δείχνει το $vec(P)$ με όλες τις καταχωρήσεις του πίνακα P κάτω από την κύρια διαγώνιο να αποβάλλονται. Πιο καθαρά, αν $P \in R^{n \times n}$, τότε $\overline{vec}(P) \in R^r$, όπου $r = n(n+1)/2$. Ορίζουμε $W \in R^{n^2 \times r}$, έτσι ώστε $vec(P) = W \overline{vec}(P)$. Επίσης το $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ ως είναι το υποσύνολο των $n(n-1)/2$ δεικτών του $vec(P)$, οι οποίοι αποβάλλονται όταν κατασκευάζουμε το $\overline{vec}(P)$. Μετά μπορούμε να γράψουμε $V(I_{n^2} - A \otimes A)W \overline{vec}(P) = Vvec(BB')$ όπου το $V \in R^{r \times n^2}$ δείχνει τον μοναδιαίο πίνακα με όλες τις γραμμές που αντιστοιχούν στους δείκτες στο S που αποβάλλεται. Ακόμα πιο καθαρά, ο πολλαπλασιασμός από τα δεξιά του πίνακα V αποβάλλει τις $n(n-1)/2$ επαναλαμβανόμενες εξισώσεις. Επιπλέον έχουμε:

Λήμμα 3: Ο πίνακας $V(I_{n^2} - A \otimes A)W$ δεν είναι μοναδικός για όλα τα $k \in K_m$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3, μπορούμε να επιτύχουμε την μοναδική λύση $p = \overline{vec}(P) = [V(I_{n^2} - A \otimes A)W]^{-1} Vvec(BB')$ από την οποία το P μπορεί να ανακτηθεί ως $P = \overline{vec}^{-1}(P)$.

Παράδειγμα: Χρησιμοποιώντας τις δύο μεθόδους που περιγράψαμε προηγουμένως, οι πίνακες συνδιακύμανσης που αντιστοιχούν σε μοντέλα τριών κόμβων επιτυγχάνονται με τη χρήση του συμβολικού toolbox του Matlab, ως

$$P_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k_1(k_1-2)} & 0 & -\frac{k_1-1}{(k_1-2)k} & \frac{1}{(k_1-2)} & \frac{k_2(k_1-1)}{(k_1-2)k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1-1}{(k_1-2)k} & 0 & -\frac{(k+2)k_1}{k_2(k_2-2)(k_1-2)k} & \frac{k_1(k_1-1)}{(k_1-2)k} & \frac{(k+2)k_1}{(k_2-2)(k_1-2)k} \\ \frac{1}{(k_1-2)} & 0 & \frac{k_1(k_1-1)}{(k_1-2)k} & -\frac{k_1}{k_1-2} & -\frac{(k_1-1)k_1k_2}{(k_1-2)k} \\ \frac{k_2(k_1-1)}{(k_1-2)k} & 0 & \frac{(k+2)k_1}{(k_2-2)(k_1-2)k} & -\frac{(k_1-1)k_1k_2}{(k_1-2)k} & -\frac{(k+2)k_1k_2}{(k_2-2)(k_1-2)k} \end{pmatrix}$$

όπου το $k = k_1k_2 - k_2 - k_1$.

Μία καλύτερη μέθοδος για τον υπολογισμό του πίνακα συνδιακύμανσης του διανύσματος κατάστασης είναι να χρησιμοποιηθεί η ειδική δομή του μοντέλου χώρου κατάστασης, η οποία οδηγεί σε έναν απλό επαναλαμβανόμενο αλγόριθμο ενημέρωσης. Αυτό περιγράφεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Λήμμα 4: Το $(A_{2_{j+1}}, B_{2_{j+1}})$ ως δείχνει το χώρο κατάστασης μοντέλο με $(j+1)$ κόμβους, που εξαρτάται από τις j παραμέτρους $\{k_1, k_2, \dots, k_j\}$ όπου $j \geq 1$. Μετά:

- (1) Υπάρχει ένας μετασχηματισμός χώρου κατάστασης που ορίζεται από έναν μεταλλαγμένο πίνακα Q_j , έτσι ώστε

$$Q_j A_{2_{j+1}} Q_j := A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

και $Q_j B_{2_{j+1}} = B_{2_{j+1}} := B$ στο οποίο: (i) $A_{11} = A_{2_{j-1}}$, (ii) A_{21} και A_{22} έχουν rank ένα, και (iii) B είναι της μορφής $[B' \ 0_{2_{j-1}}]'$.

- (2) Η εξίσωση Lyapunov $P - APA' - BB' = 0$ έχει μία μοναδική συμμετρική θετική-ημιορισμένη λύση της P για όλα τα $(k_1, k_2, \dots, k_j) \in (0, 2)^j$. Αφήστε το P να χωριστεί σύμφωνα με το A , δηλαδή,

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

όπου $P_{11} = P_{11}' \in R^{(2j-1) \times (2j-1)}$, $P_{12} \in R^{(2j-1) \times 2}$ και $P_{22} = P_{22}' \in R^{2 \times 2}$. Μετά

$P_{11} = P_{2j-1}$ όπου P_{2j-1} είναι ο πίνακας συνδιακύμανσης του μοντέλου με j κόμβους, δηλαδή η μοναδική λύση της διακριτής εξίσωσης Lyapunov $P_{2j-1} - A_{2j-1}P_{2j-1}A_{2j-1}' - B_{2j-1}B_{2j-1}' = 0$. Επιπλέον τα P_{12} και P_{22}

έχουν rank το πολύ ένα και μπορούν να ληφθούν από τις μοναδικές λύσεις των γραμμικών εξισώσεων: $P_{12} - A_{11}P_{12}A_{22}' = A_{11}P_{11}A_{21}'$ και

$P_{22} - A_{22}P_{22}A_{22}' = A_{21}P_{11}A_{21}' + A_{22}P_{12}'A_{21}' + A_{21}P_{12}A_{22}'$ αντίστοιχα.

- (3) Αν $(k_1, k_2, \dots, k_j) \in (0, 2)^j$, η εξίσωση Lyapunov: $P_{2j-1} - A_{2j-1}P_{2j-1}A_{2j-1}' - B_{2j-1}B_{2j-1}' = 0$ έχει μία συμμετρική θετική ημιορισμένη λύση που δίνεται από το:

$$P_{2j+1} = Q_j \begin{pmatrix} P_{2j-1} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{pmatrix} Q_j$$

Παρατήρηση: Το λήμμα 4 δείχνει ότι ο πίνακας συνδιακύμανσης του μοντέλου με $j+1$ κόμβους μπορεί να προκύψει επαναληπτικά από τη λύση του μοντέλου με j κόμβους με την επίλυση δύο γραμμικών εξισώσεων των παραγγελιών $2(2j-1)$ και 4, αντίστοιχα (στην περίπτωση των παραγγελιών $(2j-1)$ και 2 λαμβάνουμε υπόψη ότι τα P_{12} και P_{22} έχουν rank το πολύ ένα). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί από την διανυσματική προσέγγιση που περιγράφεται νωρίτερα. Ως εκ τούτου, ο όγκος του υπολογισμού που

περιλαμβάνει τη λύση μιας εξίσωσης $(2j-1) \times (2j-1)$ πίνακα αποφεύγεται εντελώς. Αφότου έχει συγκεντρωθεί το P από το P_{2j-1}, P_{12} και το P_{22}, P_{2j+1} μπορεί να ληφθεί με την αντιστροφή της μεταλλαγής μέσω του πίνακα Q_j .

4 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ BULLWHIP EFFECT

Η ανάλυση συνδιακύμανσης του μοντέλου μας επιτρέπει να αναλύσουμε τις επιδράσεις των τεχνικών αναπλήρωσης αποθέματος στο «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (bullwhip effect). Ανακαλώντας ότι η τελική ζήτηση του καταναλωτή $O_{0,1}(t)$ έχει μοντελοποιηθεί ως μία ακολουθία ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών μοναδιαίας συνδιακύμανσης. Έτσι, η διασπορά του σήματος της ζήτησης σε οποιοδήποτε κόμβο της αλυσίδας μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από τον πίνακα συνδιακύμανσης. Θεωρούμε το μοντέλο των τριών κόμβων. Οι παραγγελίες που γίνονται από το δεύτερο κόμβο (στον κατασκευαστή) αντιστοιχούν στο σήμα $O_{2,3}(t)$ και μπορούμε να γράψουμε:

$$O_{2,3}(t) = Y_{3,2}(t+1) = -k_2 IP_2(t-1) + k_2 Y_{2,1}(t) - k_2 Y_{3,2}(t) + k_2 SP_2$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών κατάστασης (και SP_2) στη μορφή $O_{2,3}(t) = C'x(t) + k_2 SP_2$ όπου το $x(t)$ είναι το διάνυσμα κατάστασης του μοντέλου και $C' = (0 \ 0 \ -k_2 k_2 \ -k_2)$. Το «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (bullwhip effect), που αναπαριστά την ενίσχυση των διακυμάνσεων των παραγγελιών που γίνονται στους κόμβους 1 και 3 δίνεται από:

$$\beta = \frac{Var(O_{2,3})}{Var(O_{0,1})} = C'P_5C = \frac{k_1 k_2 (2 + k_1 k_2 - k_1 - k_2)}{(2 - k_1)(2 - k_2)(k_1 + k_2 - k_1 k_2)}$$

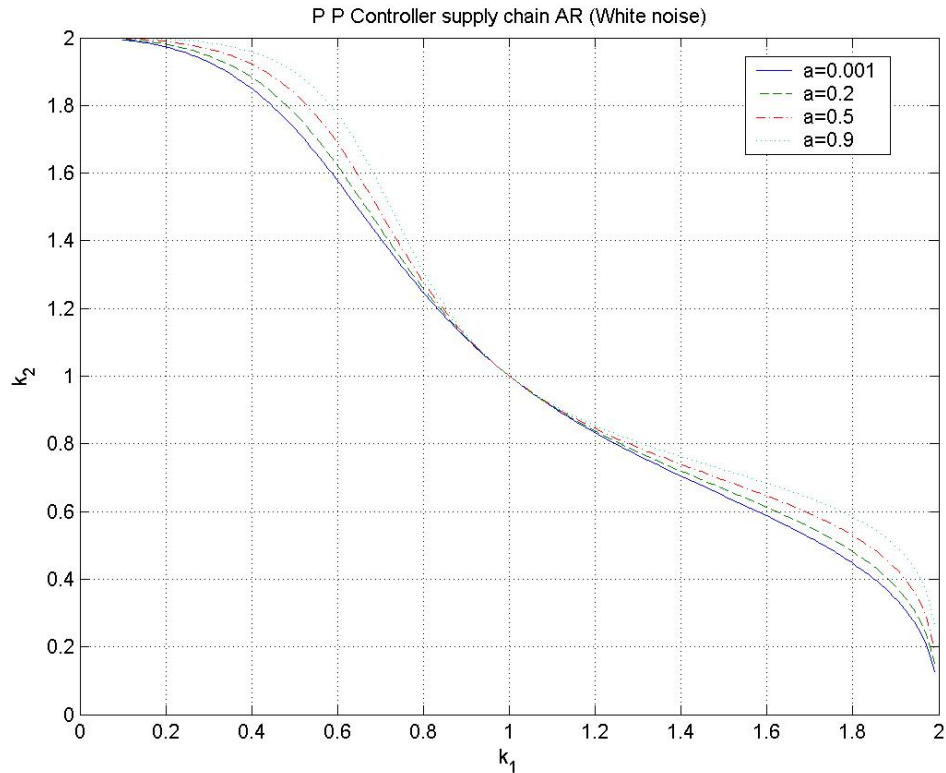
Για να βρούμε τις περιοχές στο οριζόντιο επίπεδο (k_1, k_2) όπου η ενίσχυση της ζήτησης και η μείωσή της εμφανίζονται, θέσαμε το β ένα, και λύσαμε την εξίσωση για να προκύψει το k_2 ως συνάρτηση του k_1 . Αυτό μας δίνει δύο λύσεις:

$$k_2 = f(k_1) = \frac{2 - 5k_1 + 2k_1^2 \pm \sqrt{4 - 12k_1 + 13k_1^2 - 4k_1^3}}{2(k_1 - 1)^2},$$

οι οποίες είναι έγκυρες για $k_1 \neq 1$. Μπορεί εύκολα να φανεί ότι η θετική τετραγωνική ρίζα πρέπει να επιλεγεί, γιατί με αυτήν την επιλογή, οι τιμές του k_1 μέσα στο διάστημα $0 \leq k_1 \leq 2$ χαρτογραφούνται στις τιμές k_2 μέσα στο ίδιο διάστημα. Η καμπύλη που προκύπτει φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (για $\alpha = 0$) και δείχνει το όριο μεταξύ της περιοχής της ενίσχυσης-ζήτησης και της περιοχής της μείωσης-ζήτησης. Όπως περιμέναμε, οι επιθετικές-επαναλαμβανόμενες τεχνικές (δηλαδή μεγάλες τιμές των k_1 και k_2) ενισχύουν το «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (bullwhip effect). Η ανάλυση μπορεί εύκολα να επεκταθεί για τα συσχετισμένα σήματα, που μοντελοποιούνται μέσω αυθαίρετων μοντέλων ARMA καθοδηγούμενα από σήμα λευκού θορύβου μοναδιαίας έντασης $e(t)$. Υποθέτουμε, για παράδειγμα, ότι $O_{0,1}$ είναι ένα σήμα παλινδρόμησης πρώτου βαθμού (AR(1)), δηλαδή

$$O_{0,1}(t+1) = \alpha O_{0,1}(t) + (1 - \alpha)e(t)$$

όπου το α είναι μια (ομαλή) παράμετρος συσχέτισης που βρίσκεται στο διάστημα $-1 \leq \alpha \leq 1$, και μπορεί να δειχθεί ότι η περιοχή της μείωσης-ζήτησης απλώνεται εις βάρος της περιοχής της ενίσχυσης-ζήτησης όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, που σχεδιάζεται για διάφορες τιμές του $\alpha = 0.001, 0.2, 0.5$ και 0.9 . Στην επόμενη εικόνα φαίνεται η καμπύλη του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης» με την εισαγωγή του «λευκού θορύβου». Να σημειωθεί ότι, όπως ήταν αναμενόμενο, «ομαλότερες» διακυμάνσεις στη ζήτηση των πελατών έχουν αποτέλεσμα την ανακούφιση του bullwhip effect.



Εικόνα 4.1 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο αναλογικούς ελεγκτές και με «λευκό θόρυβο»

Το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» μελετάται και από τους Gerard Gaalman, Stephen M. Disney (2006) υποθέτοντας ότι προέρχεται από την αλληλεπίδραση των κανόνων ανατροφοδότησης με μια στοχαστική διαδικασία παραγγελίας προϊόντων ARMA(1,1). Επίσης, οι ίδιοι συγγραφείς το 2009 μελετούν το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» εξετάζοντας την συμπεριφορά της πολιτικής ανατροφοδότησης αποθεματικού επιπέδου (order-up) προϊόντων για ένα σήμα ζήτησης ARMA(2,2) με τυχαίους χρόνους προπορείας.

5 Σχεδιασμός και σύνθεση μοντέλων σειριακής εφοδιαστικής αλυσίδας

Θα εξετάσουμε διάφορες περιπτώσεις εφοδιαστικών αλυσίδων με βάση δύο κριτήρια, τα οποία είναι:

- το πλήθος των κόμβων της εφοδιαστικής αλυσίδας που παρεμβάλλονται μεταξύ του πελάτη και του κατασκευαστή (λιανέμπορος, χονδρέμπορος, κλπ.)
- το είδος του ελεγκτή που θα χρησιμοποιήσουμε στον κάθε κόμβο

5.1 Μοντέλο σειριακής εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν ενδιάμεσο κόμβο (ελεγκτής αναλογίας *P-Controller*)

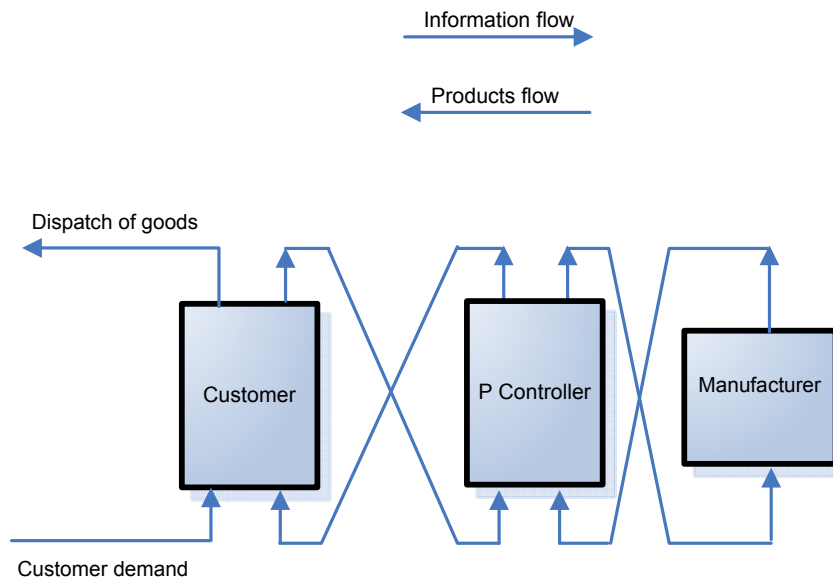
Στην περίπτωση που έχουμε μια εφοδιαστική αλυσίδα με έναν ενδιάμεσο κόμβο (π.χ. λιανέμπορος) και ο οποίος κατευθύνεται από έναν ελεγκτή ολοκλήρωσης. Το παραπάνω μοντέλο της εφοδιαστικής αλυσίδας φαίνεται στην επόμενη εικόνα. Με βάση τις εξισώσεις που υπάρχουν για τον ελεγκτή ολοκλήρωσης και το γεγονός ότι έχουμε μόνον έναν ενδιάμεσο κόμβο, τότε παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$IP(t) = IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t) \quad (1)$$

$$O_{1,2}(t) = k_1 * (SP(t) - IP(t)) \quad (2)$$

$$Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1) \quad (3)$$

$$Y_{2,1}(t) = O_2^*(t-1) \quad (4)$$



Εικόνα 5.1 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με αναλογικό ελεγκτή

5.1.1 Υπολογισμός εξισώσεων και πινάκων συστήματος κατάστασης

Λύνοντας την εξίσωση (2) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (2) &\Rightarrow O_{1,2}(t) = k_1 * (SP(t) - [IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_1 * SP(t) - k_1 * IP(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t) \quad (5)
 \end{aligned}$$

Λύνοντας την εξίσωση (3) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(3) \Rightarrow Y_{1,0}(t) = O_{0,1}(t-1) + O_{1,0}(t-2) - Y_{1,0}(t-1) \quad (6)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (6) &\Leftrightarrow^{(3)} Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + O_{1,0}(t-1) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + Y_{1,0}(t) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) \quad (7)$$

Λύνοντας την εξίσωση (4) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(4) \Rightarrow Y_{2,1}(t) = O_{1,2}(t-1) + O_2^*(t-2) - Y_{2,1}(t-1) \quad (8)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (8) &\Rightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + O_2^*(t-1) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^{(4)} Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + Y_{2,1}(t) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^{(5)} Y_{2,1}(t+1) = k_1 * SP(t) - k_1 * IP(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t) \quad (9) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1),(7) και (9), μπορούμε να δημιουργήσουμε τους πίνακες στον χώρο των καταστάσεων, οι οποίοι είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{bmatrix} IP(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ Y_{2,1}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & -k_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} * SP$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \quad 1 \quad 0] * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με ένα κόμβο είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & -k_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0]$$

$$D = [0]$$

5.1.2 Υπολογισμός πίνακα συνδιακύμανσης

Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A είναι ασυμππτωτικά ευσταθής (όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μικρότερες από ένα), ο πίνακας συμμεταβλητότητας της χώρου καταστάσεων του διανύσματος $x(t)$, υπολογίζεται λύνοντας την γραμμική εξίσωση Lyapunov. Η εξίσωση Lyapunov είναι

$$P - APA' - BB' = 0$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση με βάση τους πίνακες A και B, θα υπολογίσουμε τον πίνακα συμμεταβλητότητας του συγκεκριμένου χώρου καταστάσεων P_3 , ο οποίος είναι

$$P_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k_1 * (k_1 - 2)} & 0 & \frac{1}{k_1 - 2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{k_1 - 2} & 0 & -\frac{k_1}{k_1 - 2} \end{pmatrix}$$

Γνωρίζοντας ότι η τιμή του ελεγκτή k_1 μεγαλύτερη ή ίση από μηδέν και ότι οι τιμές των στοιχείων της διαγωνίου του πίνακα συμμεταβλητότητας P_3

πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από μηδέν, μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο τιμών της μεταβλητής k_1 . Δηλαδή ισχύει

$$0 < k_1 < 2 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{k_1 * (k_1 - 2)} \geq 0 \quad (2)$$

$$-\frac{k_1}{k_1 - 2} \geq 0 \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow k_1 \geq 0 \text{ και } k_1 - 2 \leq 0 \quad \text{ή} \quad k_1 \geq 0 \text{ και } k_1 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow^{(1)} k_1 > 0 \text{ και } k_1 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_1 > 0 \text{ και } k_1 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < k_1 < 2$$

5.1.3 Υπολογισμός «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης»

Οι παραγγελίες, οι οποίες γίνονται από τον ενδιαμέσο κόμβο προς τον κατασκευαστή, αντιστοιχούν στο σήμα $O_{1,2}(t)$, το οποίο μπορεί να γραφτεί και ως

$$O_{1,2}(t) = Y_{2,1}(t-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_1 * (SP_1(t) - IP_1(t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_1 * SP(t) - k_1 * IP(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί και ως εξίσωση των μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και της μεταβλητής $SP_1(t)$. Δηλαδή, μπορεί να γραφτεί και με την μορφή $O_{1,2}(t) = C' * x(t) + k_1 * SP_1(t)$, όπου $x(t)$ είναι το διάνυσμα μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και $C' = (-k_1 \quad k_1 \quad -k_1)$. Το φαινόμενο της ενίσχυσης της ζήτησης, το οποίο

απεικονίζει τις αυξομειώσεις στα επίπεδα ζήτησης των κόμβων 1 (π.χ. πελάτης) και 2 (π.χ. λιανέμπορος) υπολογίζεται από

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{1,2})}{\text{var}(O_{0,1})} \approx C' * P_{3,3} * C$$

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{1,2})}{\text{var}(O_{0,1})} = \frac{P_{3,3}}{P_{3,2}} = P_{3,3} = -\frac{k_1}{k_1 - 2} \quad (4)$$

Γνωρίζοντας ότι το φαινόμενο της ενίσχυσης της ζήτησης εμφανίζεται όταν ο λόγος των διακυμάνσεων των παραγγελιών είναι μεγαλύτερος του ενός. Εμείς πρέπει να εξετάσουμε την περίπτωση που είναι μικρότερος του ένα. Οι τιμές της μεταβλητής k_1 , για τις οποίες ο λόγος αυτός είναι μικρότερος του ένα, είναι και αυτές που θα καθορίσουν το πεδίο τιμών της μεταβλητής. Θα λύσουμε την εξίσωση του φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης θέτοντας την μικρότερη του ένα.

$$(4) \Rightarrow -\frac{k_1}{k_1 - 2} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k_1 \leq k_1 - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 * k_1 \leq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_1 \leq 1$$

Λύνοντας την εξίσωση του φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης, όπως είδαμε παραπάνω, παρατηρούμε ότι η μεταβλητή k_1 πρέπει να παίρνει τιμές μικρότερες της μονάδος για να μην εμφανίζεται το φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το πεδίο ορισμού για να μην υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» της μεταβλητής k_1 είναι $0 < k_1 \leq 1$. Παρόλο που το πεδίο ορισμού της μεταβλητής k_1 για να μην υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» είναι $0 < k_1 \leq 1$, η μεταβλητή k_1 μπορεί να πάρει τιμές $0 < k_1 < 2$.

5.2 Μοντέλο σειριακής εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν ενδιάμεσο κόμβο (ελεγκτής αναλογίας – ολοκλήρωσης PI-Controller)

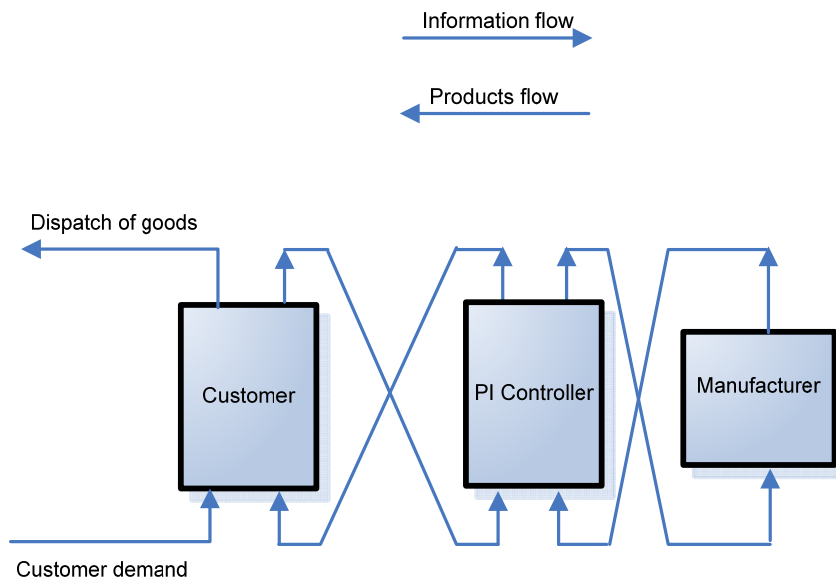
Η δεύτερη περίπτωση είναι να έχουμε πάλι μια εφοδιαστική αλυσίδα με έναν ενδιάμεσο κόμβο (π.χ. λιανέμπορος), άλλα αυτή τη φορά έχουμε έναν ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (PI Controller). Το παραπάνω μοντέλο της εφοδιαστικής αλυσίδας φαίνεται στην επόμενη εικόνα. Εξαιτίας του γεγονότος ότι έχουμε έναν ενδιάμεσο κόμβο και δύο μεταβλητές, οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι παρακάτω:

$$IP(t) = IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t) \quad (1)$$

$$O_{1,2}(t) = \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right) * (SP(t) - IP(t)) \quad (2)$$

$$Y_{1,0}(t) = O_{1,1}^*(t-1) \quad (3)$$

$$Y_{2,1}(t) = O_{2,1}^*(t-1) \quad (4)$$



Εικόνα 5.2 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή

5.2.1 Υπολογισμός εξισώσεων και πινάκων συστήματος κατάστασης

Λύνοντας την εξίσωση (2) και κάνοντας τις κατάλληλες αντικαταστάσεις, έχουμε,

$$\begin{aligned}
 (2) &\Rightarrow O_{1,2}(t) = \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right) * (SP(t) - IP(t)) \\
 &\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right) * (SP(t) - [IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) \\
 &\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_p * (SP(t) - [IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) + \frac{k_i}{s} * (SP(t) - [IP(t-1) + Y_{2,1}(t) \\
 &\quad - Y_{1,0}(t)]) \\
 &\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_p * SP(t) - k_p * IP(t-1) - k_p * Y_{2,1}(t) + k_p * Y_{1,0}(t) + k_i * SP(t) + k_i * SP(t) \\
 &\quad - k_i * IP(t-1) - k_i * Y_{2,1}(t) + k_i * Y_{1,0}(t) + k_i * (IP(t-2) - Y_{2,1}(t-1) + Y_{1,0}(t-1)) \\
 &\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_p * SP(t) - k_p * IP(t-1) - k_p * Y_{2,1}(t) + k_p * Y_{1,0}(t) + k_i * SP(t) + k_i * SP(t-1) \\
 &\quad - k_i * IP(t-1) - k_i * Y_{2,1}(t) + k_i * Y_{1,0}(t) + k_i * IP(t-1) \\
 &\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_p * SP(t) - k_p * IP(t-1) - k_p * Y_{2,1}(t) + k_p * Y_{1,0}(t) + k_i * SP(t) + k_i * SP(t-1) \\
 &\quad - k_i * Y_{2,1}(t) + k_i * Y_{1,0}(t) \\
 &\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = (k_p + k_i) * SP(t) - k_p * IP(t-1) - (k_p + k_i) * Y_{2,1}(t) + (k_p + k_i) * Y_{1,0}(t) \quad (5)
 \end{aligned}$$

Λύνοντας την εξίσωση (3) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (3) &\Rightarrow Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1) \\
 &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t) = O_{0,1}(t-1) + O_1^*(t-2) - Y_{1,0}(t-1)
 \end{aligned}$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + O_1^*(t-1) - Y_{1,0}(t) \\
 &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + Y_{1,0}(t) - Y_{1,0}(t)
 \end{aligned}$$

αφού ($O_1^*(t-1) = Y_{1,0}(t)$), και επομένως:

$$\Rightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) \quad (6)$$

Λύνοντας την εξίσωση (4) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(4) \Rightarrow Y_{2,1}(t) = O_2^*(t-1)$$

$$\Leftrightarrow Y_{2,1}(t) = O_{1,2}(t-1) + O_2^*(t-2) - Y_{2,1}(t-1)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + O_2^*(t-1) - Y_{2,1}(t)$$

$$\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + Y_{2,1}(t) - Y_{2,1}(t)$$

αφού ($O_2^*(t-1) = Y_{2,1}(t)$), και επομένως:

$$\Rightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t)$$

$$\stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} Y_{2,1}(t+1) = (k_p + k_i) * SP(t) - k_p * IP(t-1) - (k_p + k_i) * Y_{2,1}(t) + (k_p + k_i) * Y_{1,0}(t) \quad (7)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1),(6) και (7), μπορούμε να δημιουργήσουμε τους πίνακες στον χώρο των καταστάσεων, οι οποίοι είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{bmatrix} IP(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ Y_{2,1}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_p & (k_p + k_i) & -(k_p + k_i) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * [O_{0,1}(t)] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_p + k_i \end{bmatrix} * SP_1$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0] * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με ένα κόμβο είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_p & (k_p + k_i) & -(k_p + k_i) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0]$$

$$D = [0]$$

5.2.2 Υπολογισμός πίνακα συνδιακύμανσης

Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A είναι ασυμππτωτικά ευσταθής (όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μικρότερες από ένα), ο πίνακας συμμεταβλητότητας της χώρου καταστάσεων του διανύσματος $x(t)$, υπολογίζεται λύνοντας την γραμμική εξίσωση Lyapunov. Η εξίσωση Lyapunov είναι

$$P - APA' - BB' = 0$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση με βάση τους πίνακες A και B, θα υπολογίσουμε τον πίνακα συμμεταβλητότητας του συγκεκριμένου χώρου καταστάσεων P_3 , ο οποίος είναι:

$$P_3 = \begin{pmatrix} \frac{k_i - 1}{k_p * (k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)} & 0 & \frac{1}{(k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{(k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)} & 0 & \frac{-(2 * k_i^2 + k_i * k_p + k_p)}{(k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)} \end{pmatrix}$$

Γνωρίζοντας ότι η τιμή των ελεγκτών k_p και k_i είναι μεγαλύτερη ή ίση από μηδέν και ότι οι τιμές των στοιχείων της διαγωνίου του πίνακα συμμεταβλητότητας P_3 πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από μηδέν, μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο τιμών των μεταβλητών k_p και k_i . Δηλαδή ισχύει:

$$0 < k_p < 2 \quad (1)$$

$$0 < k_i < 2 \quad (2)$$

(αφού αυτά είναι τα διαστήματα που μας ενδιαφέρουν)

$$\frac{k_i - 1}{k_p * (k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)} \geq 0 \quad (3)$$

$$\frac{-(2 * k_i^2 + k_i * k_p + k_p)}{(k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)} \geq 0 \quad (4)$$

Λύνοντας την ανισότητα (3)

$$(3) \Rightarrow \frac{k_i - 1}{k_p * (k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow k_i - 1 \leq 0 \quad \text{και} \quad k_p * (k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2) < 0 \quad \text{ή}$$

$$k_i - 1 \geq 0 \quad \text{και} \quad k_p * (k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow k_i - 1 \leq 0 \Leftrightarrow k_i \leq 1 \quad \text{και}$$

$$k_p * (k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2) < 0 \Leftrightarrow 2 * k_i + k_p - 2 < 0$$

(αφού τα k_p και $k_i + 1$ είναι θετικές ποσότητες)

$$\Leftrightarrow 2 * k_i + k_p - 2 < 0 \Leftrightarrow k_p < 2 - 2 * k_i \Leftrightarrow k_p < 2(1 - k_i)$$

σχέση που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $0 < k_p < 2$, αφού $0 < k_i < 1$. Το k_i δεν μπορεί να πάρει την τιμή 1, καθώς αν συμβεί αυτό, προκύπτει ότι $k_p < 0$, το οποίο δεν ισχύει.

Το $k_i - 1 \geq 0$ και $k_p * (k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2) > 0$ δεν το εξετάζουμε γιατί δεν μπορεί το $k_i \geq 1$, καθώς όταν συμβεί αυτό δεν ισχύει η ανισότητα (4).

Από την ανισότητα (4) έχουμε,

$$(4) \Rightarrow \frac{-(2 * k_i^2 + k_i * k_p + k_p)}{(k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2 * k_i^2 + k_i * k_p + k_p)}{(k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)} \leq 0$$

Ο αριθμητής είναι πάντα θετική ποσότητα άρα πρέπει ο παρονομαστής να είναι μικρότερος του μηδενός.

$$\Leftrightarrow (k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2) < 0 \Leftrightarrow 2 * k_i + k_p - 2 < 0$$

(αφού το k_i δεν μπορεί να είναι μικρότερο του -1)

και έτσι λοιπόν καταλήγουμε ξανά στην ίδια σχέση $k_p < 2(1 - k_i)$. Άρα τα τελικά διαστήματα που προκύπτουν για τα k_p και k_i είναι τα $0 < k_p < 2$ και $0 < k_i < 1$.

5.2.3 Υπολογισμός «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης»

Οι παραγγελίες, οι οποίες γίνονται από τον λιανέμπορο προς τον κατασκευαστή, αντιστοιχούν στο σήμα $O_{1,2}(t)$, που μπορεί να γραφτεί όπως δείξαμε παραπάνω ως:

$$O_{1,2}(t) = (k_p + k_i) * SP(t) - k_p * IP(t-1) - (k_p + k_i) * Y_{2,1}(t) + (k_p + k_i) * Y_{1,0}(t)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί και ως εξίσωση των μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και της μεταβλητής $SP(t)$. Δηλαδή, μπορεί να γραφτεί και με την μορφή $O_{1,2}(t) = C' * x(t) + (k_p + k_i) * SP(t)$, όπου $x(t)$ είναι το διάνυσμα μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και $C' = (-k_p \quad k_p + k_i \quad -(k_p + k_i))$. Το «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (bullwhip effect), που αναπαριστά την ενίσχυση των διακυμάνσεων των παραγγελιών που γίνονται στον λιανέμπορο και στον κατασκευαστή δίνεται από:

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} \approx C' * P_{3,3} * C$$

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} = \frac{P_{3,3,3}}{P_{3,2,2}} = P_{3,3,3} = \frac{-(2 * k_i^2 + k_i * k_p + k_p)}{(k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)}$$

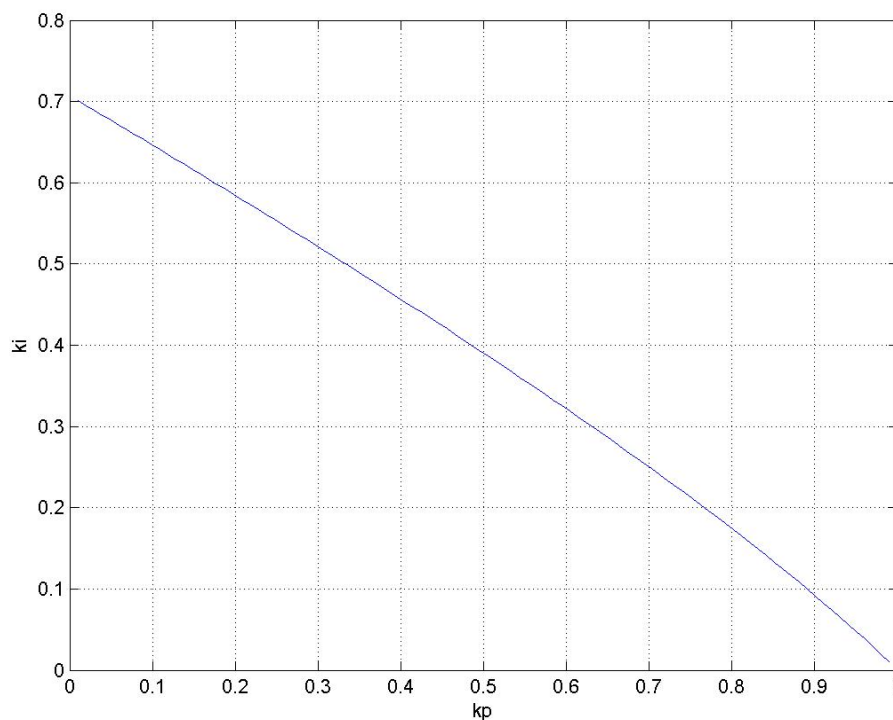
Για να βρούμε τις περιοχές στο οριζόντιο επίπεδο (k_i, k_p) όπου η ενίσχυση της ζήτησης και η μείωσή της εμφανίζονται, θέτουμε το β ίσο με ένα, και λύνουμε την εξίσωση για να προκύψει το k_i ως συνάρτηση του k_p . Αυτό μας δίνει δύο λύσεις:

$$k_i = f(k_p) = \frac{-k_p \pm \sqrt{k_p^2 - 8k_p + 8}}{4}$$

η οποία είναι έγκυρη για $0 < k_p < 4 - 2\sqrt{2}$. Δείξαμε νωρίτερα ότι το διάστημα για το k_p είναι: $0 < k_p < 2$. Επιλέγουμε το θετικό πρόσημο για την τετραγωνική ρίζα που υπάρχει στον αριθμητή, καθώς με αυτή την επιλογή το k_i πιθανόν να πάρει θετικές τιμές. Έτσι:

$$k_i = f(k_p) = \frac{-k_p + \sqrt{k_p^2 - 8k_p + 8}}{4}$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει τη γραμμική σχέση μεταξύ του k_p και του k_i . Μπορούμε να αντλήσουμε όλες τις τιμές του k_i στο διάστημα $0 < k_i < 1$, σύμφωνα με τις τιμές του k_p . Όταν $k_p = 0$, τότε $k_i = \sqrt{2}/2$, που είναι και η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το k_i . Όταν $k_p = 1$, τότε το k_i παίρνει την μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει $k_i = 0$. Η καμπύλη μας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Εικόνα 5.3 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή

Μπορούμε έτσι εύκολα να σχεδιάσουμε την καμπύλη στο οριζόντιο επίπεδο (k_i, k_p) , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, για $0 < k_p < 1$ και $0 < k_i < \sqrt{2}/2$, και να βρούμε τις περιοχές, στις οποίες έχουμε ενίσχυση της ζήτησης (bullwhip effect) και αυτές που έχουμε μείωση της ζήτησης. Παρόλο που τα πεδία ορισμού των μεταβλητών k_p και k_i για να μην εμφανίζεται το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» είναι $0 < k_p < 1$ και $0 < k_i < \sqrt{2}/2$ αντίστοιχα, οι μεταβλητές μπορούν να πάρουν τιμές $0 < k_p < 2$ και $0 < k_i < 2$ αντίστοιχα. Όπως περιμέναμε, οι επιθετικές-επαναλαμβανόμενες τεχνικές (δηλαδή μεγάλες τιμές των k_p και k_i) ενισχύουν το «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (bullwhip effect). Εδώ να σημειωθεί ότι εναλλακτικά, με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, μπορούμε, θέτοντας το $\beta = 1$, να υπολογίσουμε το k_p σαν συνάρτηση του k_i :

$$k_p = f(k_i) = \frac{-2k_i^2 - 1}{1 + k_i}$$

5.3 Μοντέλο σειριακής εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιαμέσους κόμβους (ελεγκτής αναλογίας P-Controller και ελεγκτής αναλογίας P-Controller)

Στην τρίτη περίπτωση έχουμε μια εφοδιαστική αλυσίδα με δύο ενδιαμέσους κόμβους (π.χ. έναν λιανέμπορο και έναν χονδρέμπορο), και οι οποίοι κατευθύνονται από δύο ελεγκτές αναλογίας (P Controller) αντίστοιχα. Το παραπάνω μοντέλο της εφοδιαστικής αλυσίδας φαίνεται στην επόμενη εικόνα. Με βάση τις εξισώσεις που υπάρχουν για τον ελεγκτή αναλογίας και το γεγονός ότι έχουμε δύο ενδιαμέσους κόμβους, τότε παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$IP_1(t) = IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t) \quad (1)$$

$$IP_2(t) = IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t) \quad (2)$$

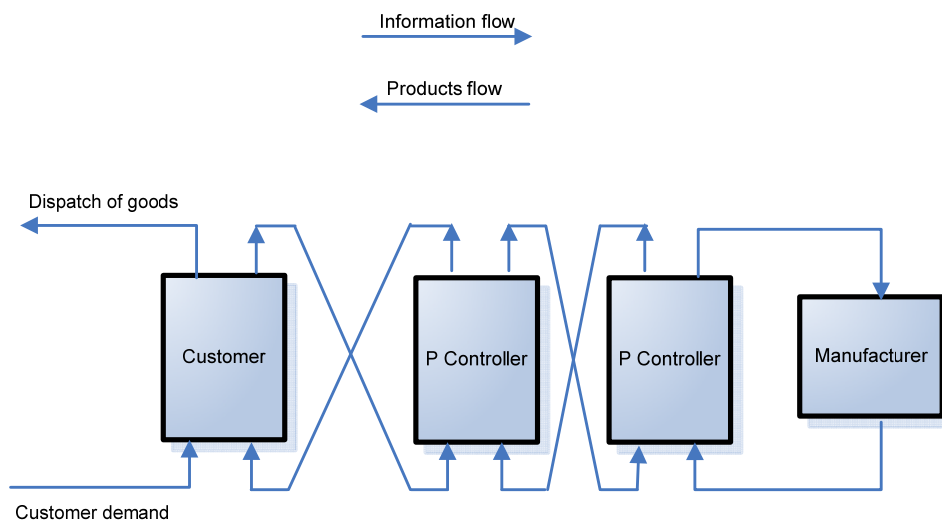
$$O_{1,2}(t) = k_1 * (SP_1(t) - IP_1(t)) \quad (3)$$

$$O_{2,3}(t) = k_2 * (SP_2(t) - IP_2(t)) \quad (4)$$

$$Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1) \quad (5)$$

$$Y_{2,1}(t) = O_2^*(t-1) \quad (6)$$

$$Y_{3,2}(t) = O_3^*(t-1) \quad (7)$$



Εικόνα 5. 4 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο αναλογικούς ελεγκτές

5.3.1 Υπολογισμός εξισώσεων και πινάκων συστήματος κατάστασης

Λύνοντας την εξίσωση (3) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}(3) &\Rightarrow O_{1,2}(t) = k_1 * (SP_1(t) - [IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_1 * SP_1(t) - k_1 * IP_1(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t)\end{aligned}\quad (8)$$

Λύνοντας την εξίσωση (4) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}(4) &\Rightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * (SP_2(t) - [IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t)]) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t)\end{aligned}\quad (9)$$

Λύνοντας την εξίσωση (5) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}(5) &\Rightarrow Y_{1,0}(t) = O_i^*(t-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t) = O_{0,1}(t-1) + O_i^*(t-2) - Y_{1,0}(t-1)\end{aligned}\quad (10)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned}(10) &\Leftrightarrow^{(3)} Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + O_i^*(t-1) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + Y_{1,0}(t) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t)\end{aligned}\quad (11)$$

Λύνοντας την εξίσωση (6) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(6) \Rightarrow Y_{2,1}(t) = O_{1,2}(t-1) + O_2^*(t-2) - Y_{2,1}(t-1)\quad (12)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (12) &\Rightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + O_2^*(t-1) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^{(6)} Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + Y_{2,1}(t) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^{(8)} Y_{2,1}(t+1) = k_1 * SP(t) - k_1 * IP(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t) \quad (13)
 \end{aligned}$$

Λύνοντας την εξίσωση (7) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(7) \Rightarrow Y_{3,2}(t) = O_{2,3}(t-1) + O_3^*(t-2) - Y_{3,2}(t-1) \quad (14)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (12) &\Rightarrow Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) + O_3^*(t-1) - Y_{3,2}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^{(7)} Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) + Y_{3,2}(t) - Y_{3,2}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^{(10)} Y_{3,2}(t+1) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t) \quad (15)
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1),(2), (11), (13) και (15), μπορούμε να δημιουργήσουμε τους πίνακες στον χώρο των καταστάσεων, οι οποίοι είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{bmatrix} IP_1(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ IP_2(t) \\ Y_{2,1}(t+1) \\ Y_{3,2}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} SP_1 \\ SP_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με ένα κόμβο είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$D = [0]$$

5.3.2 Υπολογισμός πίνακα συνδιακύμανσης

Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A είναι ασυμππτωτικά ευσταθής (όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μικρότερες από ένα), ο πίνακας συμμεταβλητότητας της χώρου καταστάσεων του διανύσματος $x(t)$, υπολογίζεται λύνοντας την γραμμική εξίσωση Lyapunov. Η εξίσωση Lyapunov είναι

$$P - APA' - BB' = 0$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση με βάση τους πίνακες A και B, θα υπολογίσουμε τον πίνακα συμμεταβλητότητας του συγκεκριμένου χώρου καταστάσεων P_5 , ο οποίος είναι

$$P_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1 * (k_1 - 2)} & 0 & -\frac{k_1 - 1}{(k_1 - 2) * a} & \frac{1}{(k_1 - 2)} & \frac{k_2 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 - 1}{(k_1 - 2) * a} & 0 & -\frac{(a + 2) * k_1}{k_2 * (k_2 - 2) * (k_1 - 2) * a} & \frac{k_1 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * a} & \frac{(a + 2) * k_1}{(k_2 - 2) * (k_1 - 2) * a} \\ \frac{1}{(k_1 - 2)} & 0 & \frac{k_1 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * a} & -\frac{k_1}{k_1 - 2} & -\frac{(k_1 - 1) * k_1 * k_2}{(k_1 - 2) * a} \\ \frac{k_2 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * a} & 0 & \frac{(a + 2) * k_1}{(k_2 - 2) * (k_1 - 2) * a} & -\frac{(k_1 - 1) * k_1 * k_2}{(k_1 - 2) * a} & -\frac{(a + 2) * k_1 * k_2}{(k_2 - 2) * (k_1 - 2) * a} \end{pmatrix}$$

$$a = k_1 * k_2 - k_1 - k_2$$

Γνωρίζοντας ότι η τιμή του ελεγκτή k_1 μεγαλύτερη ή ίση από μηδέν και ότι οι τιμές των στοιχείων της διαγωνίου του πίνακα συμμεταβλητότητας P_3 πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από μηδέν, μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο τιμών της μεταβλητής k_1 . Δηλαδή ισχύει

$$0 < k_1 < 2 \quad (1)$$

$$0 < k_2 < 2 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{k_1 * (k_1 - 2)} \geq 0 \quad (3)$$

$$-\frac{(a + 2) * k_1}{k_2 * (k_2 - 2) * (k_1 - 2) * a} \geq 0 \quad (4)$$

$$-\frac{k_1}{k_1 - 2} \geq 0 \quad (5)$$

$$-\frac{(a + 2) * k_1 * k_2}{(k_2 - 2) * (k_1 - 2) * a} \geq 0 \quad (6)$$

Λύνοντας την ανισότητα (3)

$$(3) \Rightarrow \frac{1}{k_1 * (k_1 - 2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow^{(1)} k_1 - 2 \leq 0 \text{ και } k_1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_1 < 2 \text{ και } k_1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < k_1 < 2$$

Λύνοντας την ανισότητα (4)

$$(4) \Rightarrow \frac{(a+2) * k_1}{k_2 * (k_2 - 2) * (k_1 - 2) * a} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+2) * k_1 \leq 0 \text{ και } k_2 * (k_2 - 2) * (k_1 - 2) * a \geq 0 \text{ ή}$$

$$(a+2) * k_1 \geq 0 \text{ και } k_2 * (k_2 - 2) * (k_1 - 2) * a \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+2 \leq 0 \text{ και } a \geq 0 \quad \text{ή} \quad a+2 \geq 0 \text{ και } a \leq 0 \quad (7)$$

Η πρώτη περίπτωση δεν μπορεί να ισχύει, γιατί από τη στιγμή που προσθέτεις μια θετική ποσότητα 2 σε μια άλλη θετική ποσότητα a ($a \geq 0$) δεν μπορεί να παίρνεις αρνητικό αποτέλεσμα. Άρα, οι ανισότητες (7) μπορούν να γραφούν

$$(7) \Rightarrow a+2 \geq 0 \text{ και } a \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_1 * k_2 - k_1 - k_2 + 2 \geq 0 \text{ και } k_1 * k_2 - k_1 - k_2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_2 \geq \frac{k_1 - 2}{k_1 - 1} \text{ και } k_2 \leq \frac{k_1}{k_1 - 1}$$

Αντικαθιστώντας τα όρια της μεταβλητής k_1 $0 < k_1 < 2$ στις παραπάνω ανισότητες, μπορούμε να βρούμε τα όρια της μεταβλητής k_2 , τα οποία είναι $0 < k_2 < 1$.

5.3.3 Υπολογισμός «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης»

Οι παραγγελίες, οι οποίες γίνονται από τον δεύτερο κόμβο προς τον κατασκευαστή, αντιστοιχούν στο σήμα $O_{2,3}(t)$, το οποίο μπορεί να γραφτεί και ως

$$O_{2,3}(t) = Y_{3,2}(t-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * (SP_2(t) - [IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t)]) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί και ως εξίσωση των μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και της μεταβλητής $SP_2(t)$. Δηλαδή, μπορεί να γραφτεί και με την μορφή $O_{2,3}(t) = C' * x(t) + k_2 * SP_2(t)$, όπου $x(t)$ είναι το διάνυσμα μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και $C' = (0 \ 0 \ -k_2 \ k_2 \ -k_2)$. Το φαινόμενο της ενίσχυσης της ζήτησης, το οποίο απεικονίζει τις αυξομειώσεις στα επίπεδα ζήτησης των κόμβων 1 (πελάτης) και 3 (χονδρέμπορος) υπολογίζεται από

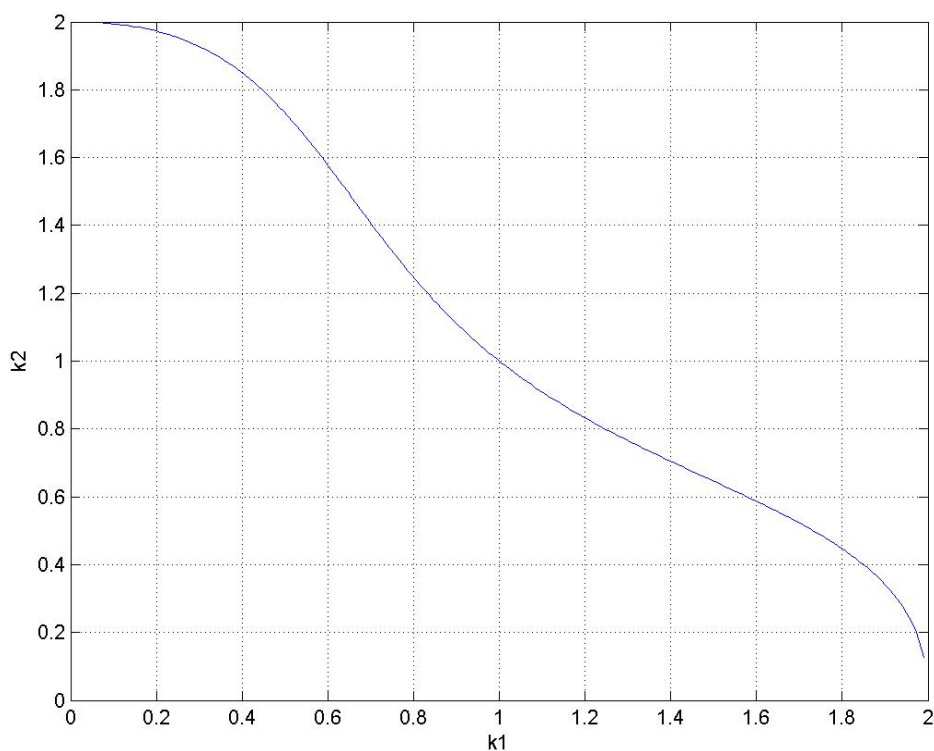
$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} \approx C' * P_{5,5} * C$$

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} = \frac{P_{5,5}}{P_{5,2,2}} = P_{5,5} = \left(-\frac{(k_1 * k_2 - k_1 - k_2 + 2) * k_1 * k_2}{(k_2 - 2) * (k_1 - 2) * (k_1 * k_2 - k_1 - k_2)} \right)$$

Για να υπολογίσουμε τις περιοχές όπου της γραφικής παράστασης μεταξύ του k_1 και k_2 , όπου συμβαίνει η αύξηση και η μείωση της ζήτησης, πρέπει να θέσουμε το β ίσον με 1, και την εξίσωση, που δημιουργήθηκε, την λύνουμε για να βρούμε εξίσωση του k_2 βάσει του k_1 . Αυτό δίνει δύο λύσεις

$$k_2 = f(k_1) = \frac{2 - 5*k_1 + 2*k_1^2 \pm (4 - 12*k_1 + 13*k_1^2 - 4*k_1^3)}{2*(k_1 - 1)^2}$$

Από την παραπάνω εξίσωση επιλέγουμε το θετικό πρόσημο για την τετραγωνική ρίζα που υπάρχει στον αριθμητή, καθώς με αυτήν την επιλογή για τιμές του k_1 στο πεδίο τιμών $0 \leq k_2 < 1$ και $1 < k_2 < 2$, οι υπολογιζόμενες τιμές για την μεταβλητή k_2 ανήκουν στο ίδιο πεδίο τιμών. Στο παρακάτω σχήμα η περιοχή ενίσχυσης της ζήτησης και της μείωσης της ζήτησης, το οποίο παράγεται από την συνάρτηση $k_2 = f(k_1)$, όπου k_1 το $0 \leq k_1 < 1$ και $1 < k_1 < 2$.



Εικόνα 5.5 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο αναλογικούς ελεγκτές

5.4 Μοντέλο σειριακής εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους (ελεγκτής αναλογίας και ελεγκτής αναλογίας-ολοκλήρωσης)

Στην περίπτωση που έχουμε μια εφοδιαστική αλυσίδα με δύο ενδιάμεσους κόμβους (π.χ. ένας λιανέμπορος και ένας χονδρέμπορος), οι οποίοι κατευθύνονται από έναν ελεγκτή αναλογίας (P-Controller και μεταβλητές k_1) και έναν ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (PI-Controller και μεταβλητές k_2 και k_i) αντίστοιχα. Με βάση τις εξισώσεις που υπάρχουν για τους δύο ελεγκτές και το γεγονός ότι έχουμε δύο ενδιάμεσους κόμβους, τότε παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$IP_1(t) = IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t) \quad (1)$$

$$IP_2(t) = IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t) \quad (2)$$

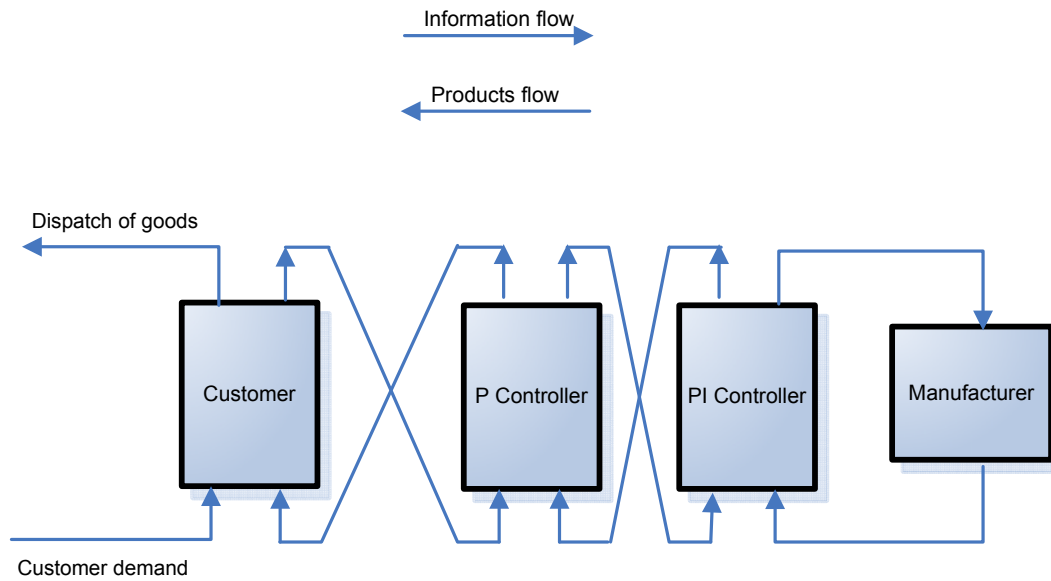
$$O_{1,2}(t) = k_1 * (SP_1(t) - IP_1(t)) \quad (3)$$

$$O_{2,3}(t) = (k_2 + k_i * \frac{1}{s}) * (SP_2(t) - IP_2(t)) \quad (4)$$

$$Y_{1,0}(t) = O_{1,2}^*(t-1) \quad (5)$$

$$Y_{2,1}(t) = O_{2,3}^*(t-1) \quad (6)$$

$$Y_{3,2}(t) = O_{3,4}^*(t-1) \quad (7)$$



Εικόνα 5.6 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό και έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή

5.4.1 Υπολογισμός εξισώσεων και πινάκων συστήματος κατάστασης

Λύνοντας την εξίσωση (3) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (3) &\Rightarrow O_{1,2}(t) = k_1 * (SP_1(t) - [IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_1 * SP_1(t) - k_1 * IP_1(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t) \quad (8)
 \end{aligned}$$

Λύνοντας την εξίσωση (4) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (4) &\Rightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * (SP_2(t) - [IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t)]) + \\
 &+ k_i * (SP_2(t) - [IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t)]) - k_i * (SP_2(t-1) - IP_2(t-1)) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t) + \\
 &+ k_i * SP_2(t) - k_i * IP_2(t-1) - k_i * Y_{3,2}(t) + k_i * Y_{2,1}(t) - k_i * SP_2(t-1) + k_i * IP_2(t-1) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - (k_2 + k_i) * Y_{3,2}(t) + (k_2 + k_i) * Y_{2,1}(t) \quad (9)
 \end{aligned}$$

Λύνοντας την εξίσωση (5) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (5) &\Rightarrow Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t) = O_{0,1}(t-1) + O_1^*(t-2) - Y_{1,0}(t-1) \end{aligned} \quad (10)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (10) &\Leftrightarrow^{(3)} Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + O_1^*(t-1) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + Y_{1,0}(t) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

Λύνοντας την εξίσωση (6) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(6) \Rightarrow Y_{2,1}(t) = O_{1,2}(t-1) + O_2^*(t-2) - Y_{2,1}(t-1) \quad (12)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (12) &\Rightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + O_2^*(t-1) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^{(6)} Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + Y_{2,1}(t) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^{(8)} Y_{2,1}(t+1) = k_1 * SP(t) - k_1 * IP(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα και λύνοντας την εξίσωση (7) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(7) \Leftrightarrow Y_{3,2}(t+1) = O_3^*(t) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) + O_{3^*}(t-1) - Y_{3,2}(t) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^{(7)} Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) + Y_{3,2}(t) - Y_{3,2}(t) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^{(9)} Y_{3,2}(t+1) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - (k_2 + k_i) * Y_{3,2}(t) + (k_2 + k_i) * Y_{2,1}(t) \quad (15)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1),(2), (11), (13) και (15), μπορούμε να δημιουργήσουμε τους πίνακες στον χώρο των καταστάσεων, οι οποίοι είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{bmatrix} IP_1(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ IP_2(t) \\ Y_{2,1}(t+1) \\ Y_{3,2}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 + k_i & -k_2 - k_i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} SP_1 \\ SP_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με ένα κόμβο είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 + k_i & -k_2 - k_i \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$D = [0]$$

5.4.2 Υπολογισμός πίνακα συνδιακύμανσης

Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής (όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μικρότερες από ένα), ο πίνακας συμμεταβλητότητας της χώρας καταστάσεων του διανύσματος $x(t)$, υπολογίζεται λύνοντας την γραμμική εξίσωση Lyapunov. Η εξίσωση Lyapunov είναι

$$P - APA' - BB' = 0$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση με βάση τους πίνακες A και B, θα υπολογίσουμε τον πίνακα συμμεταβλητότητας του συγκεκριμένου χώρου καταστάσεων P_5 , ο οποίος είναι

$$P_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k_1 * (k_1 - 2)} & 0 & -\frac{k_1 - 1}{(k_1 - 2) * x} & \frac{1}{(k_1 - 2)} & \frac{(k_1 * k_i + k_2) * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 - 1}{(k_1 - 2) * x} & 0 & -\frac{z * k_1}{a * x * k_2} & \frac{k_1 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * x} & \frac{k_1 * y}{a * x} \\ \frac{1}{(k_1 - 2)} & 0 & \frac{k_1 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * x} & -\frac{k_1}{k_1 - 2} & -\frac{b}{(k_1 - 2) * x} \\ \frac{(k_1 * k_i + k_2) * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * x} & 0 & \frac{k_1 * y}{a * x} & -\frac{b}{(k_1 - 2) * x} & -\frac{d * k_1}{x * a} \end{pmatrix}$$

$$x = k_1^2 * k_i + k_1 * k_2 - k_1 * k_i - k_1 - k_2$$

$$y = k_1^2 * k_i + 2 * k_1 * k_i^2 + k_1 * k_2 * k_i - k_1 * k_i + k_1 * k_2 - k_1 - 2 * k_i^2 - k_2 * k_i + 2 - k_2$$

$$z = k_1^2 * k_i^2 - k_1^2 * k_i - 3 * k_1 * k_i^2 + 2 * k_1 * k_i - k_1 * k_2 * k_i - k_1 * k_2 + k_1 + 2 * k_i^2 + k_2 * k_i - 2 + k_2$$

$$a = (k_i + 1) * (k_1 - 2) * (2 * k_i + k_2 - 2)$$

$$b = (k_1 - 1) * k_1 * (k_1 * k_i - k_2)$$

$$d = 2 * k_1^2 * k_i^3 + k_1^2 * k_2 * k_i^2 + k_1^2 * k_2 * k_i - 2 * k_1 * k_i^3 + k_1 * k_2 * k_i^2 + 2 * k_1 * k_i^2 + k_1 * k_2^2 * k_i - k_1 * k_2 + k_1 * k_2^2 - 2 * k_2 * k_i^2 - k_2 * k_i + 2 * k_2 - k_2^2$$

Γνωρίζοντας ότι η τιμή του ελεγκτή k_1 , k_2 και k_i μεγαλύτερη ή ίση από μηδέν και ότι οι τιμές των στοιχείων της διαγωνίου του πίνακα συμμεταβλητότητας P_5 πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από μηδέν, μπορούμε να υπολογίσουμε τα πεδία τιμών των μεταβλητών k_1 , k_2 και k_i . Δηλαδή ισχύει

$$0 < k_1 < 2 \quad (1)$$

$$0 < k_2 < 2 \quad (2)$$

$$0 < k_i < 2 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{k_1 * (k_1 - 2)} \geq 0 \quad (4)$$

$$-\frac{z * k_1}{a * x * k_2} \geq 0 \quad (5)$$

$$-\frac{k_1}{k_1 - 2} \geq 0 \quad (6)$$

$$-\frac{d * k_1}{x * a} \geq 0 \quad (7)$$

$$(3) \Rightarrow k_1 \geq 0 \text{ και } k_1 - 2 \geq 0 \quad \text{ή} \quad k_1 \leq 0 \text{ και } k_1 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow^{(1)} k_1 \geq 0 \text{ και } k_1 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_1 \geq 0 \text{ και } k_1 \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_1 \geq 0 \text{ και } k_1 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq k_1 \leq 2$$

5.4.3 Υπολογισμός «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης»

Οι παραγγελίες, οι οποίες γίνονται από τον δεύτερο κόμβο προς τον κατασκευαστή, αντιστοιχούν στο σήμα $O_{2,3}(t)$, το οποίο μπορεί να γραφτεί και ως

$$\begin{aligned} O_{2,3}(t) &= Y_{3,2}(t-1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow O_{2,3}(t) &= (k_2 + \frac{ki}{s}) * (SP_2(t) - [IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t)]) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow O_{2,3}(t) &= k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - (k_2 + ki) * Y_{3,2}(t) + (k_2 + ki) * Y_{2,1}(t) \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί και ως εξίσωση των μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και της μεταβλητής $SP_2(t)$. Δηλαδή, μπορεί να γραφτεί και με την μορφή $O_{2,3}(t) = C' * x(t) + k_2 * SP_2(t)$, όπου $x(t)$ είναι το διάνυσμα μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και $C' = (0 \ 0 \ -k_2 \ k_2 + ki \ -k_2 - ki)$. Το φαινόμενο της ενίσχυσης της ζήτησης, το οποίο απεικονίζει τις αυξομειώσεις στα επίπεδα ζήτησης των κόμβων 1 (π.χ. πελάτης) και 3 (π.χ. χονδρέμπορος) υπολογίζεται από

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} \approx C' * P_{5,5} * C \\ \beta &= \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} = \frac{P_{5,5}}{P_{5,2,2}} = P_{5,5} = -\frac{d * k_1}{x * a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= k_1^2 * k_i + k_1 * k_2 - k_1 * k_i - k_1 - k_2 \\ a &= (k_i + 1) * (k_1 - 2) * (2 * k_i + k_2 - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= 2 * k_1^2 * k_i^3 + k_1^2 * k_2 * k_i^2 + k_1^2 * k_2 * k_i - 2 * k_1 * k_i^3 + k_1 * k_2 * k_i^2 + 2 * k_1 * k_i^2 + k_1 * k_2^2 * k_i \\ &- k_1 * k_2 + k_1 * k_2^2 - 2 * k_2 * k_i^2 - k_2^2 * k_i + 2 * k_2 - k_2^2 \end{aligned}$$

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα μοντέλα σειριακής εφοδιαστικής αλυσίδας, τα οποία είχαν ως αγνώστους μία ή δύο μεταβλητές, σε αυτό το

μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας έχουμε τρεις μεταβλητές. Συνεπώς, ο υπολογισμός των πεδίων ορισμού των τριών μεταβλητών με βάση τις ανισότητες που προκύπτουν από τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα συμμεταβλητότητας Lyapunov παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι τιμές των τριών μεταβλητών αλληλοεπηρεάζονται και το σύστημα είναι πολύπλοκο. Συνεπώς, η επίλυση των ανισοτήτων αυτών μπορεί να είναι αδύνατη ή να οδηγηθούμε σε εσφαλμένα αποτελέσματα.

Μια λύση στο παραπάνω πρόβλημα υπολογισμού των πεδίων ορισμού των μεταβλητών k_1 , k_2 και k_i , είναι λύνοντας την συνάρτηση του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» και αντικαθιστώντας τυχαίες τιμές δύο μεταβλητών, να υπολογίσουμε την τιμή της τρίτης μεταβλητής. Από τις τρεις μεταβλητές επιλέξαμε τις μεταβλητές k_1 και k_2 , επειδή η μεταβλητή k_i είναι αυτή που διαφοροποιεί την εφοδιαστική αλυσίδα μας σε σχέση με αυτήν που είχαμε δύο αναλογικού ελεγκτές. Εξ' ορισμού, τα αρχικά πεδία ορισμού των μεταβλητών k_1 , k_2 και k_i είναι $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ και $k_i > 0$ αντίστοιχα.

Εξισώνοντας την συνάρτηση (8) του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» με τη μονάδα έχουμε την παρακάτω εξίσωση, την οποία μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή k_i (ελεγκτής στον πρώτο ενδιάμεσο κόμβο) δίνοντας κάποιες τιμές στις μεταβλητές k_1 και k_2 . Για μεγαλύτερη ευκολία υπολογισμών, οι υπολογισμοί της εξίσωσης (9) θα γίνουν με τη βοήθεια του Matlab.

$$(8) \Leftrightarrow 1 = -\frac{d^* k_2}{x^* a^* (k_2 - 2)} \quad (9)$$

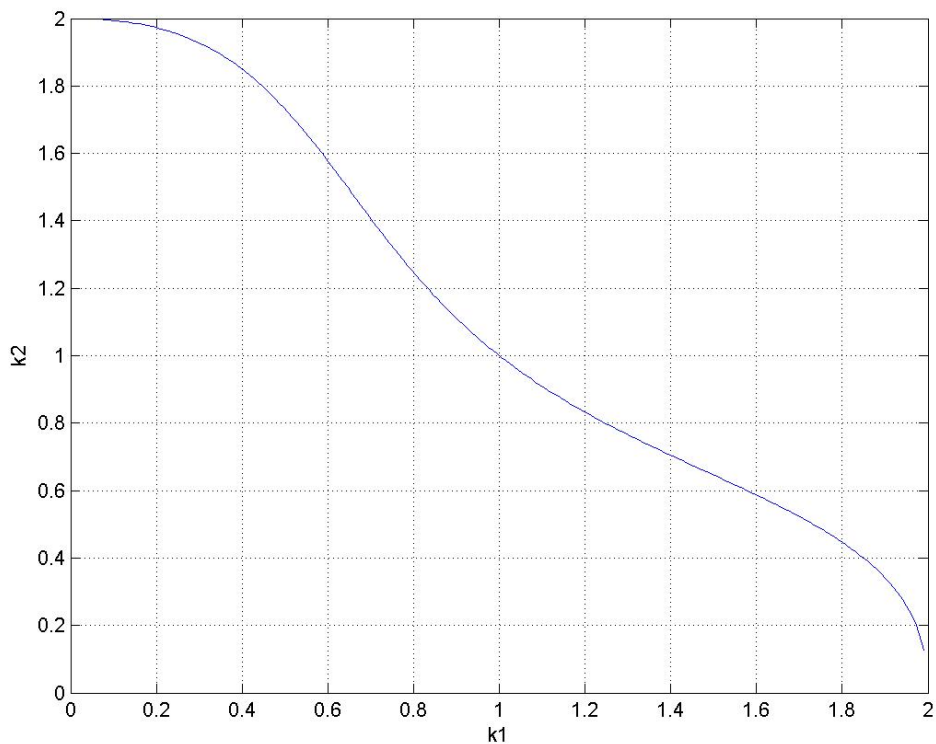
Αρχικά, θα δοθούν στις μεταβλητές k_1 και k_2 είκοσι ισαπέχουσες τιμές. Όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί των τιμών των μεταβλητών k_1 και k_2 θα αντικατασταθούν στην εξίσωση (9). Η εξίσωση, που θα προκύψει, θα έχει ως μοναδικό άγνωστο την μεταβλητή k_i . Λύνοντας αυτήν την εξίσωση ως προς την μεταβλητή k_i , θα μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της μεταβλητή k_i για μια συγκεκριμένη τιμή των μεταβλητών k_1 και k_2 . Η εξίσωση αυτή δεν ξέρουμε τι βαθμού είναι, δηλαδή μπορεί να είναι πρώτου, δευτέρου, τρίτου, κλπ. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η τιμή της μεταβλητής k_i είναι μια θετική τιμή

μεταξύ του 0 και του 2. Συνεπώς, από όσες τιμές προκύπτουν ως λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, θα επιλέξουμε αυτή που πληρεί τις παραπάνω προϋποθέσεις. Παίρνοντας όλους του δυνατούς συνδυασμούς τιμών για τις μεταβλητές k_1 και k_2 και υπολογίζοντας την τιμή της μεταβλητής k_i , μπορούμε να ορίσουμε το πεδίο ορισμού των τριών αυτών μεταβλητών. Γίνεται κατανοητό ότι για όλες αυτές τις πράξεις είναι απαραίτητη η χρήση του Matlab.

Για να μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αυτές οι τιμές ανήκουν και καθορίζουν το πεδίο ορισμού των μεταβλητών k_1 , k_2 και k_i , πρέπει να ελέγξουμε αν κάθε τριάδα αριθμών πληρεί τις προϋποθέσεις του πίνακα συμμεταβλητότητας Lyapunov, δηλαδή ότι με βάση αυτές τις τιμές όλα τα στοιχεία της διαγώνιου του πίνακα είναι θετικά. Από τα στοιχεία αυτά του πίνακα προκύπτουν οι ανισότητες (4), (5), (6) και (7). Ο έλεγχος έδειξε ότι όλες οι τριάδες τιμών των μεταβλητών k_1 , k_2 και k_i ικανοποιούν τις προϋποθέσεις των ανισοτήτων (4), (5), (6) και (7). Αυτός ο έλεγχος θα γίνει με τη βοήθεια του Matlab λόγω των πολλών και δύσκολων πράξεων.

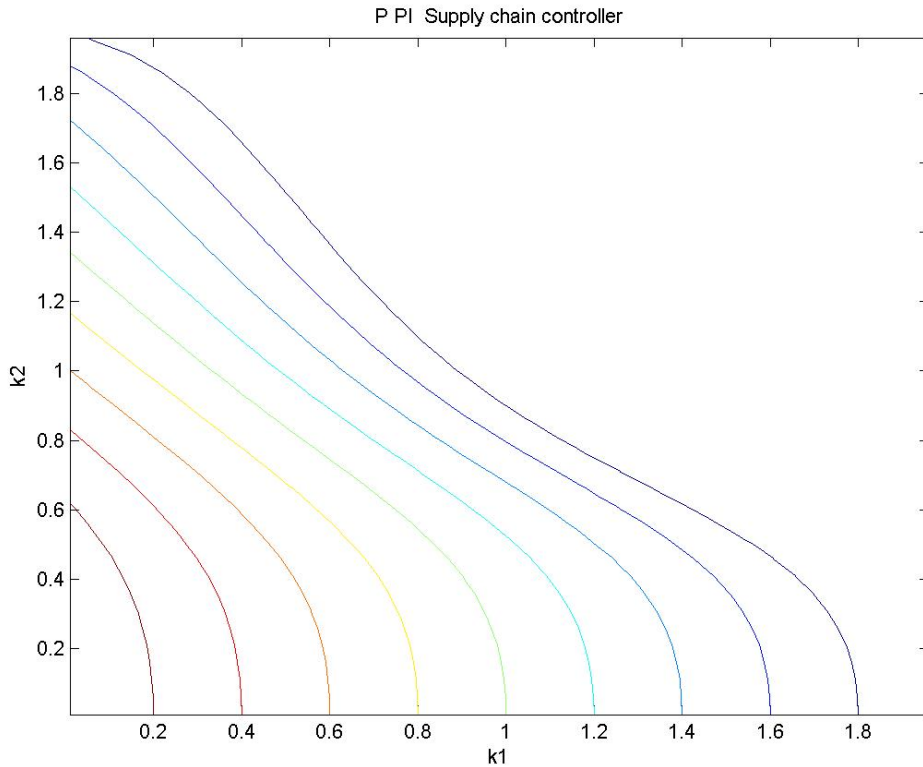
Τέλος, αφού υπολογίσαμε και ελέγξαμε τις τιμές των μεταβλητών k_1 , k_2 και k_i από την συνάρτηση «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης», μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» όπως κάναμε και με τα προηγούμενα μοντέλα εφοδιαστικής αλυσίδας. Το σχήμα θα είναι τρισδιάστατο εξαιτίας των τριών μεταβλητών. Για να μπορούμε να συγκρίνουμε αυτή την εφοδιαστική αλυσίδα σε σχέση με τις προηγούμενες σύμφωνα με τα δεδομένα από τα διαγράμματα του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης», υπάρχουν παρακάτω ορισμένα από συγκεκριμένες γωνίες του τρισδιάστατου σχήματος.

Συγκρίνοντας αυτό το μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με το μοντέλο, το οποίο έχει δύο αναλογικού ελεγκτές, θα πρέπει να παρατηρήσουμε το τρισδιάστατο σχήμα μηδενίζοντας την τιμή της μεταβλητής k_i . Το σχήμα «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» για το μοντέλο με τους δύο αναλογικού ελεγκτές είναι το επόμενο.



Εικόνα 5.7 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο αναλογικούς ελεγκτές

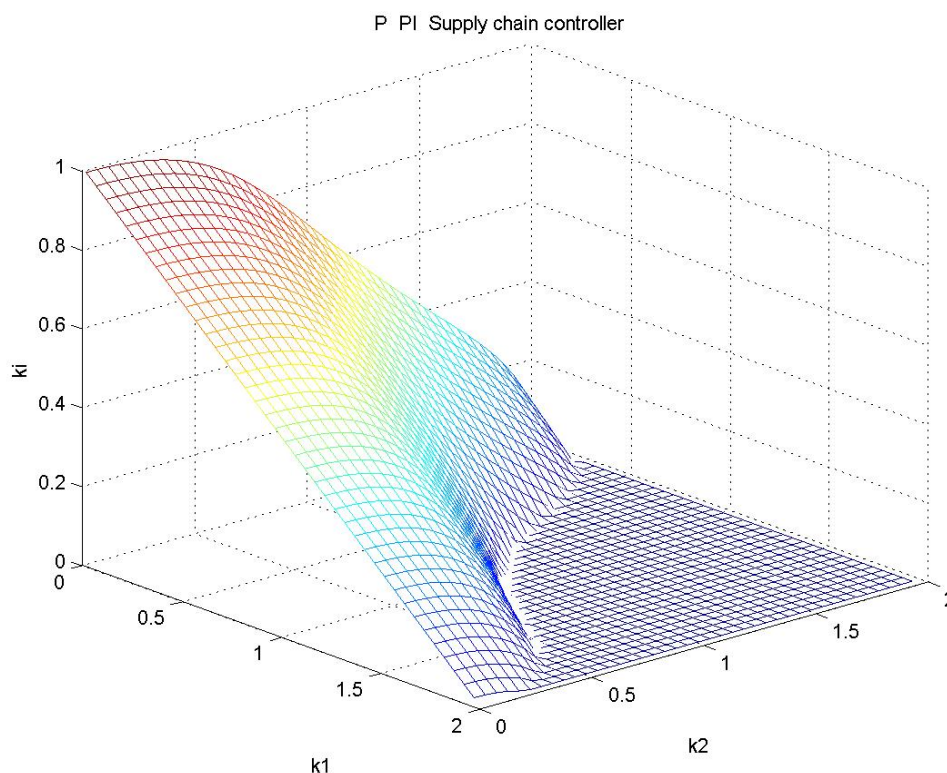
Η επόμενη εικόνα δείχνει ότι μηδενίζοντας την μεταβλητή k_i καταλήγουμε στο προηγούμενο σχήμα. Από αυτήν την εικόνα εμφανές ότι τα σχήματα του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» των δύο μοντέλων εφοδιαστικών αλυσίδων παρουσιάζουν πολλές ομοιότητες. Αυτό σημαίνει ότι η προσθήκη ενός ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης στο μοντέλο δεν διαφοροποιεί το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» σχηματικά, το οποίο είναι πολύ σημαντικό. Για αυτό το σχήμα χρησιμοποιήθηκε η εντολή *contour* της Matlab, η οποία προβάλλει το τρισδιάστατο αυτό σχήμα πάνω στο οριζόντιο επίπεδο χρησιμοποιώντας τις τιμές των δύο οριζόντιων αξόνων (μεταβλητές k_1 και k_2) ως συντεταγμένες. Οι τιμές του οριζόντιου άξονα (μεταβλητή k_i) δεν φαίνονται ουσιαστικά στο σχήμα.



Εικόνα 5.8 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό και έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή και την εντολή `contour` του Matlab

Η επόμενη εικόνα είναι από μια συγκεκριμένη οπτική γωνία του τρισδιάστατου σχήματος του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης». Το τρισδιάστατο σχήμα δημιουργήθηκε με την εντολή `mesh`, η οποία σχεδιάζει ένα διάγραμμα των τριών μεταβλητών αλλάζοντας χρώματα ανάλογα με τη θέση του κάθε σημείου του διαγράμματος. Αυτό θα μας βοηθήσει να παρατηρήσουμε καλύτερα την αλλαγή των τιμών όταν η τιμή της μεταβλητής k_i αρχίζει και παίρνει τιμές μη μηδενικές. Οι μεταβλητές k_1 και k_2 είναι στο οριζόντιο επίπεδο, ενώ η μεταβλητή k_i είναι στο κάθετο επίπεδο. Όταν η μεταβλητή k_i είναι μηδέν, τότε το σχήμα είναι τοποθετημένο πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Όταν η μεταβλητή k_i αρχίζει να παίρνει μη μηδενικές τιμές, τότε το σχήμα αρχίζει ανεβαίνει και στο κάθετο επίπεδο. Όταν οι τιμές των μεταβλητών k_1 και k_2 είναι κοντά στο μηδέν, τότε η μεταβλητή k_i παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές. Όταν μια από τις δυο ή και οι δυο μεταβλητές k_1 και k_2 αρχίζουν να παίρνουν μεγαλύτερες τιμές από το μηδέν, τότε η τιμή της

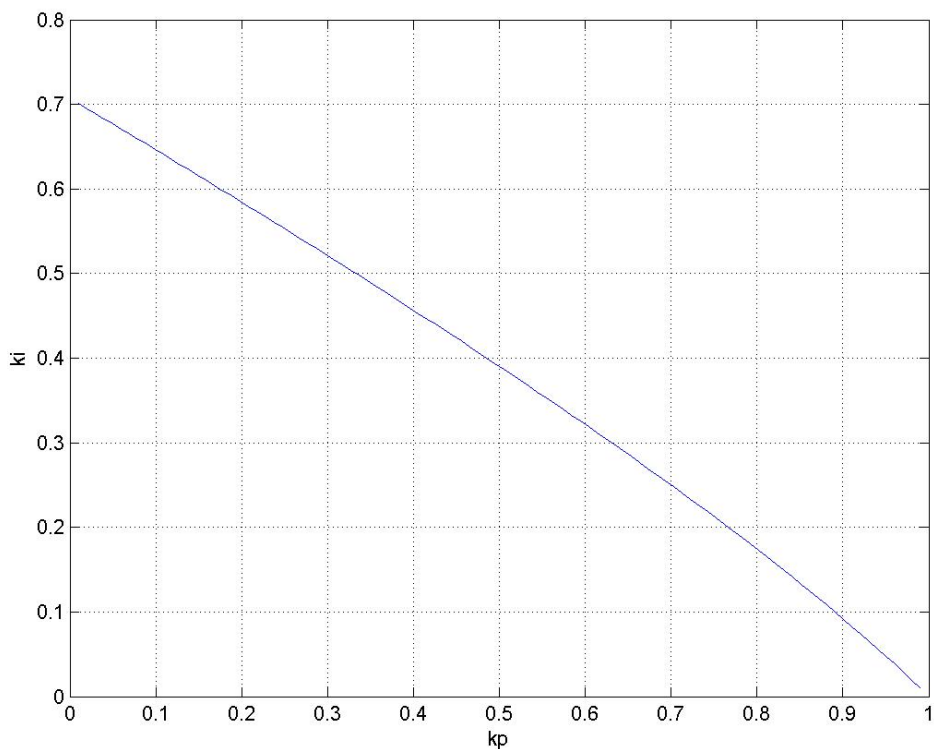
μεταβλητής αρχίζει και μειώνεται σταδιακά. Αυτό φαίνεται και στην επόμενη εικόνα.¹



Εικόνα 5.9 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό και έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή

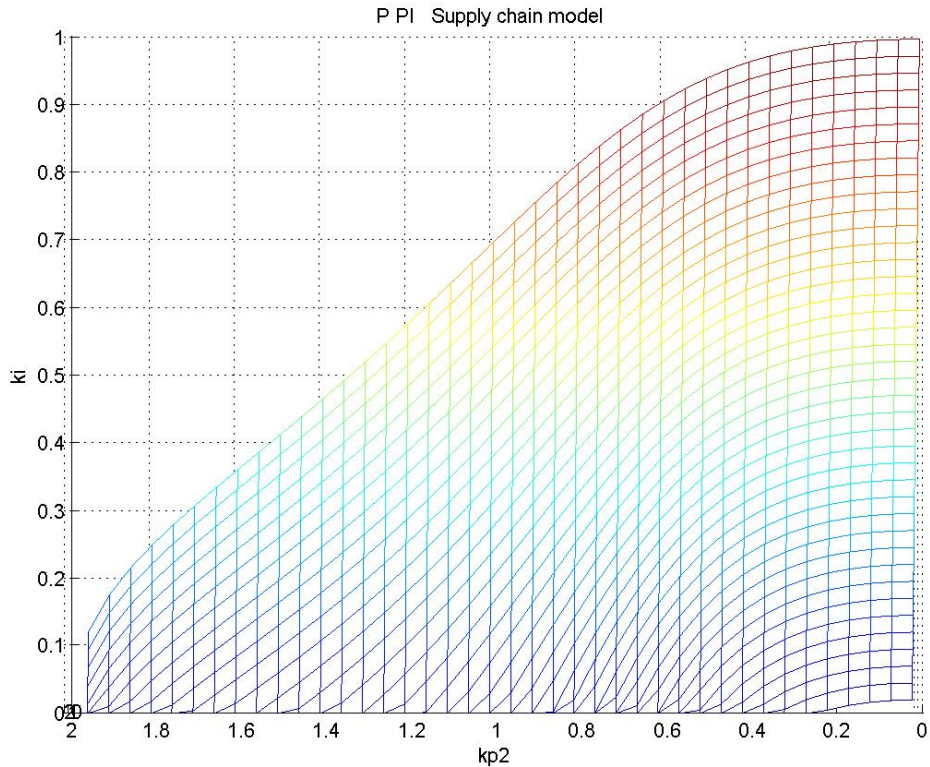
Συγκρίνοντας αυτό το μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με το μοντέλο, το οποίο έχει ένα ενδιάμεσο κόμβο με έναν ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης, θα πρέπει να παρατηρήσουμε το τρισδιάστατο σχήμα μηδενίζοντας την τιμή της μεταβλητής k_2 . Το σχήμα «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» για το μοντέλο με τον ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης είναι το επόμενο.

¹ Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε ότι ενώ οι μεταβλητές k_1 , k_2 και k_i μπορούν να πάρουν τιμές $0 < k_1 < 2$, $0 < k_2 < 2$ και $0 < k_i < 2$ αντίστοιχα, θα πρέπει για να μην εμφανίζονται το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης να παίρνουν τιμές, οι οποίες να ανήκουν ή να είναι κάτω από το τρισδιάστατο πλέγμα του σχήματος της εικόνας 5.9.



Εικόνα 5.10 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή

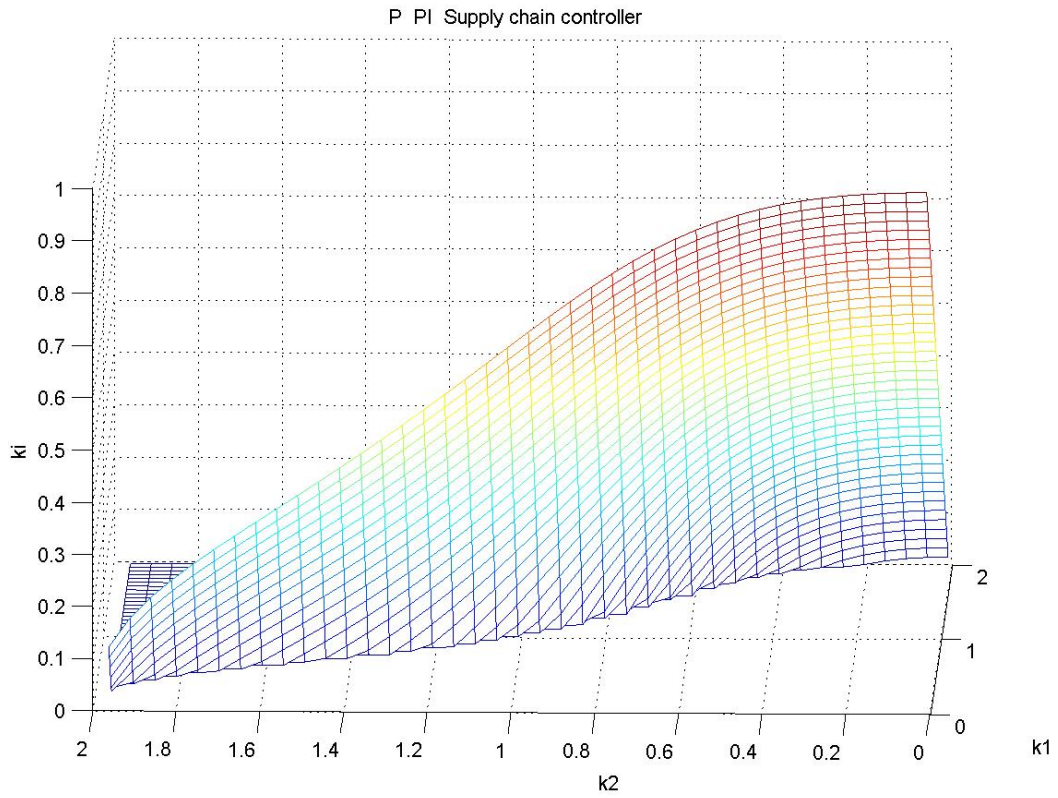
Περιστρέφοντας το τρισδιάστατο σχήμα του μοντέλου μας ώστε να εμφανίζονται μόνο οι άξονες των μεταβλητών kp_2 και k_i , έχουμε το σχήμα που φαίνεται στην επόμενη εικόνα. Από το σχήμα της επόμενης εικόνας παρατηρούμε ότι η μεταβλητή k_i φαίνεται να παίρνει τιμές από μηδέν ως το ένα. Αυτό, όμως, είναι παραπλανητικό, επειδή εξαιτίας του τρισδιάστατου σχήματος δεν γίνεται καλή απεικόνιση όταν μηδενίζουμε την μεταβλητή kp_1 . Αυτό συμβαίνει επειδή το σχήμα αυτής της εικόνας είναι από μια συγκεκριμένη γωνία η οποία δεν είναι πολύ ξεκάθαρη. Εξάλλου, η μεταβλητή k_i παίρνει τιμές κοντά στο ένα για τιμές των μεταβλητών kp_1 και kp_2 κοντά στο μηδέν.



Εικόνα 5.11 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό και έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή

Η λύση στο προηγούμενο πρόβλημα είναι να γυρίσουμε το τρισδιάστατο σχήμα μέχρι το σημείο λίγο πριν μηδενιστεί η μεταβλητή kp_1 . Αυτό θα το κάνουμε για να δούμε ποια είναι η τιμή στην οποία πλησιάζει η μεταβλητή k_i , όταν αρχίζει και μηδενίζεται ο άξονας της μεταβλητής kp_1 . Συνεπώς, όταν αρχίζει και μηδενίζεται ο άξονας της μεταβλητής kp_1 , τότε η μεταβλητή k_i αρχίζει και πλησιάζει την τιμή 0,7. Αυτή η τιμή αντιστοιχεί και στο άνω όριο του πεδίου ορισμού της μεταβλητής k_i του PI (αναλογίας-ολοκλήρωσης) μοντέλου εφοδιαστικής αλυσίδας, δηλαδή $0 < k_i < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$.

Αυτό απεικονίζεται καλύτερα στο σχήμα της εικόνας επόμενης εικόνας.



Εικόνα 5.12 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό και έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή

5.5 Μοντέλο σειριακής εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους (ελεγκτής αναλογίας-ολοκλήρωσης και ελεγκτής αναλογίας)

Στην περίπτωση που έχουμε μια εφοδιαστική αλυσίδα με δύο ενδιάμεσους κόμβους (π.χ. έναν λιανέμπορα και ένα χονδρέμπορο), και οι οποίοι κατευθύνονται από έναν ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (μεταβλητές ελεγκτή k_1 και k_i) και έναν ελεγκτή αναλογίας (μεταβλητή ελεγκτή k_2) αντίστοιχα. Με βάση τις εξισώσεις που υπάρχουν για τους δύο ελεγκτές και το γεγονός ότι έχουμε δύο ενδιάμεσους κόμβους, τότε παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$IP_1(t) = IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t) \quad (1)$$

$$IP_2(t) = IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t) \quad (2)$$

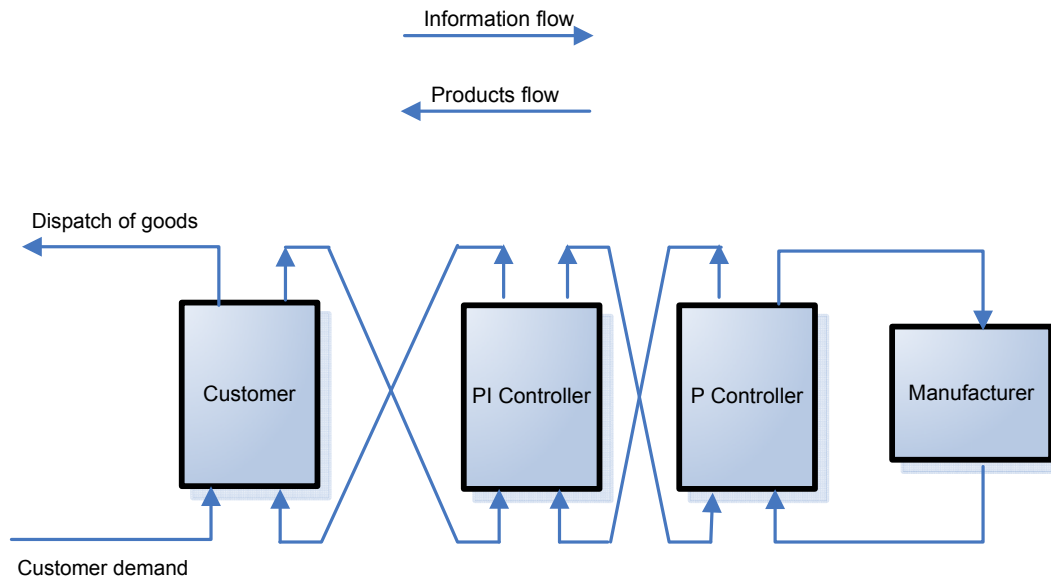
$$O_{1,2}(t) = (k_1 + k_i * \frac{1}{s}) * (SP_1(t) - IP_1(t)) \quad (3)$$

$$O_{2,3}(t) = k_2 * (SP_2(t) - IP_2(t)) \quad (4)$$

$$Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1) \quad (5)$$

$$Y_{2,1}(t) = O_2^*(t-1) \quad (6)$$

$$Y_{3,2}(t) = O_3^*(t-1) \quad (7)$$



Εικόνα 5.13 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό και έναν αναλογικό ελεγκτή

5.5.1 Υπολογισμός εξισώσεων και πινάκων συστήματος κατάστασης

Λύνοντας την εξίσωση (3) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (3) \Rightarrow O_{1,2}(t) &= k_1 * (SP_1(t) - [IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) + \\
 &+ k_i * (SP_1(t) - [IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) - k_i * (SP_1(t-1) - IP_1(t-1)) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow O_{1,2}(t) &= k_1 * SP_1(t) - k_1 * IP_1(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t) + \\
 &+ k_i * SP_1(t) - k_i * IP_1(t-1) - k_i * Y_{2,1}(t) + k_i * Y_{1,0}(t) - k_i * SP_1(t-1) + k_i * IP_1(t-1) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow O_{1,2}(t) &= k_1 * SP_1(t) - k_1 * IP_1(t-1) - (k_1 + k_i) * Y_{2,1}(t) + (k_1 + k_i) * Y_{1,0}(t) \quad (8)
 \end{aligned}$$

Λύνοντας την εξίσωση (4) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (4) \Rightarrow O_{3,2}(t) &= k_2 * (SP_2(t) - [IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t)]) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow O_{3,2}(t) &= k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t) \quad (9)
 \end{aligned}$$

Λύνοντας την εξίσωση (5) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
(5) &\Rightarrow Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow Y_{1,0}(t) = O_{0,1}(t-1) + O_1^*(t-2) - Y_{1,0}(t-1) \quad (10)
\end{aligned}$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
(10) &\Leftrightarrow^{(3)} Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + O_1^*(t-1) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + Y_{1,0}(t) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) \quad (11)
\end{aligned}$$

Λύνοντας την εξίσωση (6) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(6) \Rightarrow Y_{2,1}(t) = O_{1,2}(t-1) + O_2^*(t-2) - Y_{2,1}(t-1) \quad (12)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
(12) &\Rightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + O_2^*(t-1) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^{(6)} Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + Y_{2,1}(t) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^{(8)} Y_{2,1}(t+1) = k_1 * SP_1(t) - k_1 * IP_1(t-1) - (k_1 + k_i) * Y_{2,1}(t) + (k_1 + k_i) * Y_{1,0}(t) \quad (13)
\end{aligned}$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα και λύνοντας την εξίσωση (7) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
(7) &\Leftrightarrow Y_{3,2}(t+1) = O_3^*(t) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) + O_3^*(t-1) - Y_{3,2}(t) \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow^{(7)} Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) + Y_{3,2}(t) - Y_{3,2}(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow^{(9)} Y_{3,2}(t+1) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t) \quad (15)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1),(2), (11), (13) και (15), μπορούμε να δημιουργήσουμε τους πίνακες στον χώρο των καταστάσεων, οι οποίοι είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{bmatrix} IP_1(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ IP_2(t) \\ Y_{2,1}(t+1) \\ Y_{3,2}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1+k_i & 0 & -k_1-k_i & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} SP_1 \\ SP_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με ένα κόμβο είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1+k_i & 0 & -k_1-k_i & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$D = [0]$$

5.5.2 Υπολογισμός πίνακα συνδιακύμανσης

Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής (όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μικρότερες από ένα), ο πίνακας συμμεταβλητότητας της χώρου καταστάσεων του διανύσματος $x(t)$, υπολογίζεται λύνοντας την γραμμική εξίσωση Lyapunov. Η εξίσωση Lyapunov είναι

$$P - APA' - BB' = 0$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση με βάση τους πίνακες A και B , θα υπολογίσουμε τον πίνακα συμμεταβλητότητας του συγκεκριμένου χώρου καταστάσεων P_5 , ο οποίος είναι

$$P_5 = \begin{pmatrix} \frac{k_i - 1}{k_1 * a} & 0 & -\frac{y}{a * x} & \frac{1}{a} & \frac{y * k_2}{a * x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{y}{a * x} & 0 & -\frac{d}{a * (k_2 - 2) * x * k_2} & \frac{z}{a * x} & \frac{d}{a * x} \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{z}{a * x} & -\frac{k_1 + k_1 * k_i + 2 * k_i^2}{a} & -\frac{z * k_2}{a * x} \\ \frac{y * k_2}{a * x} & 0 & \frac{d}{a * x} & -\frac{z * k_2}{a * x} & -\frac{d * k_2}{x * a * (k_2 - 2)} \end{pmatrix}$$

$$x = k_2^2 * k_i + k_1 * k_2 - k_2 * k_i - k_1 - k_2$$

$$y = k_2 * k_i + 2 * k_i^2 + k_1 * k_i - k_i + k_1 - 1$$

$$z = 2 * k_2 * k_i^3 + k_1 * k_2 * k_i^2 + k_2 * k_1 * k_i + 2 * k_1 * k_i^2 - k_1^2 * k_i - k_1 + k_1^2$$

$$a = (k_i + 1) * (2 * k_i + k_1 - 2)$$

$$d = 2 * k_2^2 * k_i^3 + k_2^2 * k_1 * k_i^2 + k_2^2 * k_1 * k_i - 2 * k_2 * k_i^3 + k_1 * k_2 * k_i^2 + 2 * k_2 * k_i^2 + k_2 * k_1^2 * k_i - k_1 * k_2 + k_2 * k_1^2 - 2 * k_1 * k_i^2 - k_1^2 * k_i + 2 * k_1 - k_1^2$$

Γνωρίζοντας ότι η τιμή του ελεγκτή k_1 μεγαλύτερη ή ίση από μηδέν και ότι οι τιμές των στοιχείων της διαγωνίου του πίνακα συμμεταβλητότητας P_5 πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από μηδέν, μπορούμε να υπολογίσουμε τα πεδία τιμών των μεταβλητών k_1 , k_2 και k_i . Δηλαδή ισχύει

$$0 < k_1 < 2 \quad (1)$$

$$0 < k_2 < 2 \quad (2)$$

$$0 < k_i < 2 \quad (3)$$

$$\frac{k_i - 1}{k_1 * a} \geq 0 \quad (4)$$

$$-\frac{d}{a * (k_2 - 2) * x * k_2} \geq 0 \quad (5)$$

$$-\frac{k_1 + k_1 * k_i + 2 * k_i^2}{a} \geq 0 \quad (6)$$

$$-\frac{d * k_2}{x * a * (k_2 - 2)} \geq 0 \quad (7)$$

5.5.3 Υπολογισμός «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης»

Οι παραγγελίες, οι οποίες γίνονται από τον δεύτερο κόμβο προς τον κατασκευαστή, αντιστοιχούν στο σήμα $O_{2,3}(t)$, το οποίο μπορεί να γραφτεί και ως

$$O_{2,3}(t) = Y_{3,2}(t-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * (SP_2(t) - IP_2(t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί και ως εξίσωση των μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και της μεταβλητής $SP_2(t)$. Δηλαδή, μπορεί να γραφτεί και με την μορφή $O_{2,3}(t) = C' * x(t) + k_2 * SP_2(t)$, όπου $x(t)$ είναι το διάνυσμα μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και $C' = (0 \ 0 \ -k_2 \ k_2 \ -k_2)$. Το φαινόμενο της ενίσχυσης της ζήτησης, το οποίο απεικονίζει τις αυξομειώσεις στα επίπεδα ζήτησης των κόμβων 1 (π.χ. πελάτης) και 3 (π.χ. χονδρέμπορος) υπολογίζεται από

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} \approx C' * P_{5,5} * C$$

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} = \frac{P_{5,5,5}}{P_{5,2,2}} = P_{5,5,5} = -\frac{d * k_2}{x * a * (k_2 - 2)} \quad (8)$$

$$x = k_2^2 * k_i + k_1 * k_2 - k_2 * k_i - k_1 - k_2$$

$$a = (k_i + 1) * (2 * k_i + k_1 - 2)$$

$$d = 2 * k_2^2 * k_i^3 + k_2^2 * k_1 * k_i^2 + k_2^2 * k_1 * k_i - 2 * k_2 * k_i^3 + k_1 * k_2 * k_i^2 + 2 * k_2 * k_i^2 + k_2 * k_1^2 * k_i - k_1 * k_2 + k_2 * k_1^2 - 2 * k_1 * k_i^2 - k_1^2 * k_i + 2 * k_1 - k_1^2$$

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα μοντέλα σειριακής εφοδιαστικής αλυσίδας, τα οποία είχαν ως αγνώστους μία ή δύο μεταβλητές, σε αυτό το μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας έχουμε τρεις μεταβλητές. Συνεπώς, ο υπολογισμός των πεδίων ορισμού των τριών μεταβλητών με βάση τις ανισότητες που προκύπτουν από τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα συμμεταβλητότητας Lyapunov παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι τιμές των τριών μεταβλητών αλληλοεπηρεάζονται και το σύστημα είναι πολύπλοκο. Συνεπώς, η επίλυση των ανισοτήτων αυτών μπορεί να είναι αδύνατη ή να οδηγηθούμε σε εσφαλμένα αποτελέσματα.

Μια λύση στο παραπάνω πρόβλημα υπολογισμού των πεδίων ορισμού των μεταβλητών k_1 , k_2 και k_i , είναι λύνοντας την συνάρτηση του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» και αντικαθιστώντας τυχαίες τιμές δύο μεταβλητών, να υπολογίσουμε την τιμή της τρίτης μεταβλητής. Από τις τρεις μεταβλητές επιλέξαμε τις μεταβλητές k_1 και k_2 , επειδή η μεταβλητή k_i είναι αυτή που διαφοροποιεί την εφοδιαστική αλυσίδα μας σε σχέση με αυτήν που είχαμε δύο αναλογικού ελεγκτές. Εξ' ορισμού, τα αρχικά πεδία ορισμού των μεταβλητών k_1 , k_2 και k_i είναι $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ και $k_i > 0$ αντίστοιχα.

$$1 = -\frac{d * k_2}{x * a * (k_2 - 2)} \quad (9)$$

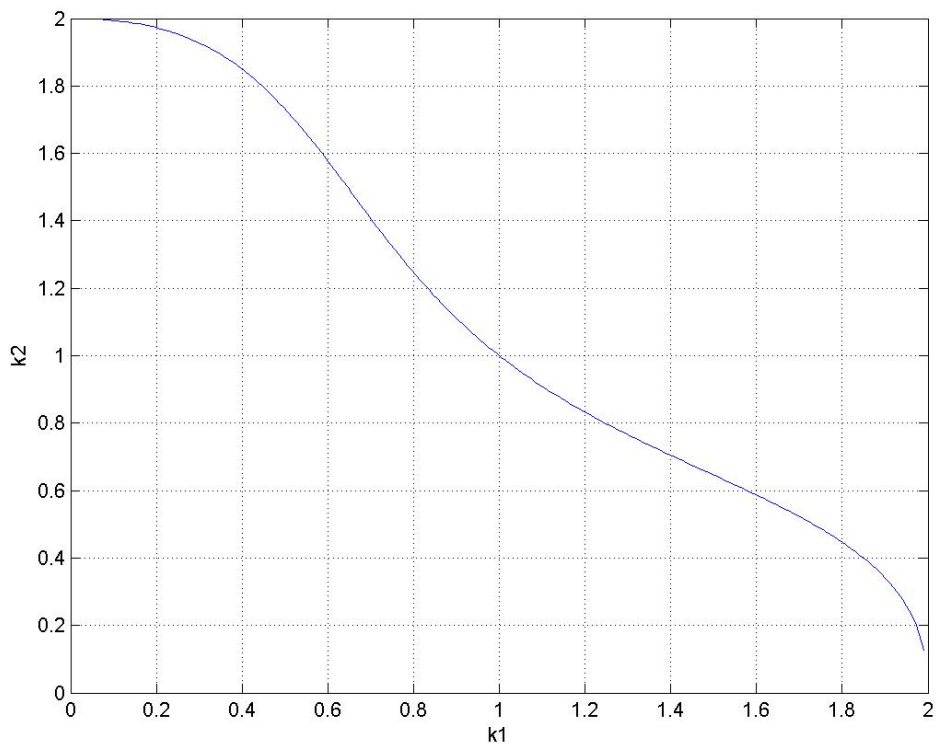
Εξισώνοντας την συνάρτηση (8) του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» με τη μονάδα έχουμε την παραπάνω εξίσωση, την οποία μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή k_i (ελεγκτής στον πρώτο ενδιάμεσο κόμβο) δίνοντας κάποιες τιμές στις μεταβλητές k_1 και k_2 . Για μεγαλύτερη ευκολία υπολογισμών, οι υπολογισμοί της εξίσωσης (9) θα γίνουν με τη βοήθεια του Matlab.

Αρχικά, θα δοθούν στις μεταβλητές k_1 και k_2 είκοσι ισαπέχουσες τιμές. Όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί των τιμών των μεταβλητών k_1 και k_2 θα αντικατασταθούν στην εξίσωση (9). Η εξίσωση, που θα προκύψει, θα έχει ως μοναδικό άγνωστο την μεταβλητή k_i . Λύνοντας αυτήν την εξίσωση ως προς την μεταβλητή k_i , θα μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της μεταβλητή k_i για μια συγκεκριμένη τιμή των μεταβλητών k_1 και k_2 . Η εξίσωση αυτή δεν ξέρουμε τι βαθμού είναι, δηλαδή μπορεί να είναι πρώτου, δευτέρου, τρίτου, κλπ. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η τιμή της μεταβλητής k_i είναι μια θετική τιμή μεταξύ του 0 και του 2. Συνεπώς, από όσες τιμές προκύψουν ως λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, θα επιλέξουμε αυτή που πληρεί τις παραπάνω προϋποθέσεις. Παίρνοντας όλους του δυνατούς συνδυασμούς τιμών για τις μεταβλητές k_1 και k_2 και υπολογίζοντας την τιμή της μεταβλητής k_i , μπορούμε να ορίσουμε το πεδίο ορισμού των τριών αυτών μεταβλητών. Γίνεται κατανοητό ότι για όλες αυτές τις πράξεις είναι απαραίτητη η χρήση του Matlab.

Για να μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αυτές οι τιμές ανήκουν και καθορίζουν το πεδίο ορισμού των μεταβλητών k_1 , k_2 και k_i , πρέπει να ελέγξουμε αν κάθε τριάδα αριθμών πληρεί τις προϋποθέσεις του πίνακα συμμεταβλητότητας Lyapunov, δηλαδή ότι με βάση αυτές τις τιμές όλα τα στοιχεία της διαγώνιου του πίνακα είναι θετικά. Από τα στοιχεία αυτά του πίνακα προκύπτουν οι ανισότητες (4), (5), (6) και (7). Ο έλεγχος έδειξε ότι όλες οι τριάδες τιμών των μεταβλητών k_1 , k_2 και k_i ικανοποιούν τις προϋποθέσεις των ανισοτήτων (4), (5), (6) και (7). Αυτός ο έλεγχος θα γίνει με τη βοήθεια του Matlab λόγω των πολλών και δύσκολων πράξεων.

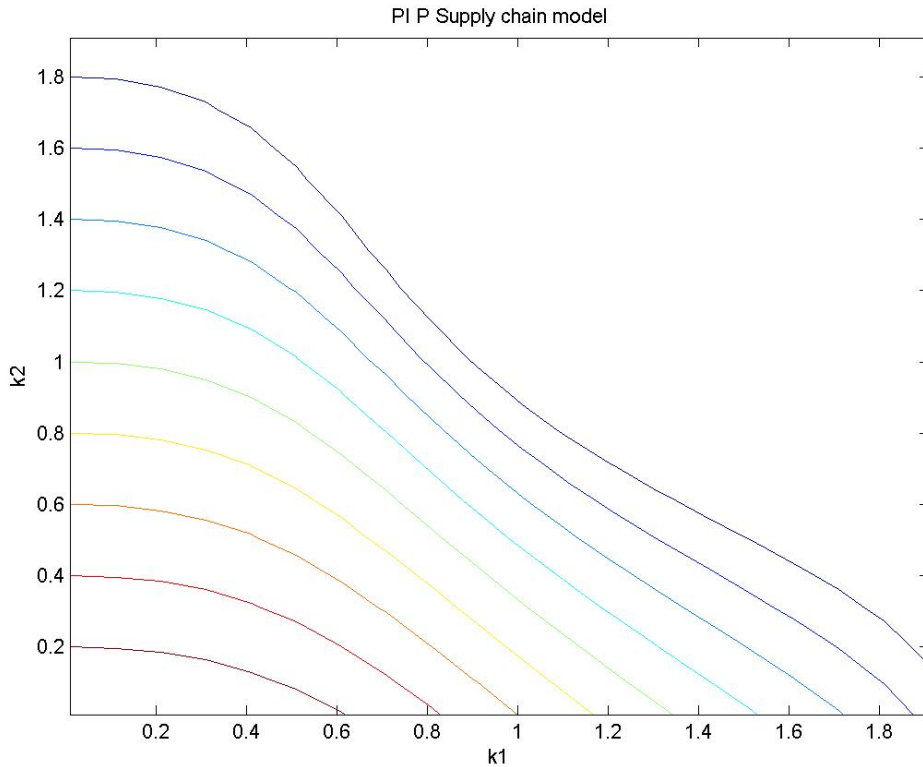
Τέλος, αφού υπολογίσαμε και ελέγξαμε τις τιμές των μεταβλητών k_1 , k_2 και k_i από την συνάρτηση «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης», μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» όπως κάναμε και με τα προηγούμενα μοντέλα εφοδιαστικής αλυσίδας. Το σχήμα θα είναι τρισδιάστατο εξαιτίας των τριών μεταβλητών. Για να μπορούμε να συγκρίνουμε αυτή την εφοδιαστική αλυσίδα σε σχέση με τις προηγούμενες σύμφωνα με τα δεδομένα από τα διαγράμματα του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης», υπάρχουν παρακάτω ορισμένα από συγκεκριμένες γωνίες του τρισδιάστατου σχήματος.

Συγκρίνοντας αυτό το μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με το μοντέλο, το οποίο έχει δύο αναλογικού ελεγκτές, θα πρέπει να παρατηρήσουμε το τρισδιάστατο σχήμα μηδενίζοντας την τιμή της μεταβλητής k_i . Το σχήμα «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» για το μοντέλο με τους δύο αναλογικού ελεγκτές είναι το επόμενο.



Εικόνα 5.14 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο αναλογικούς ελεγκτές

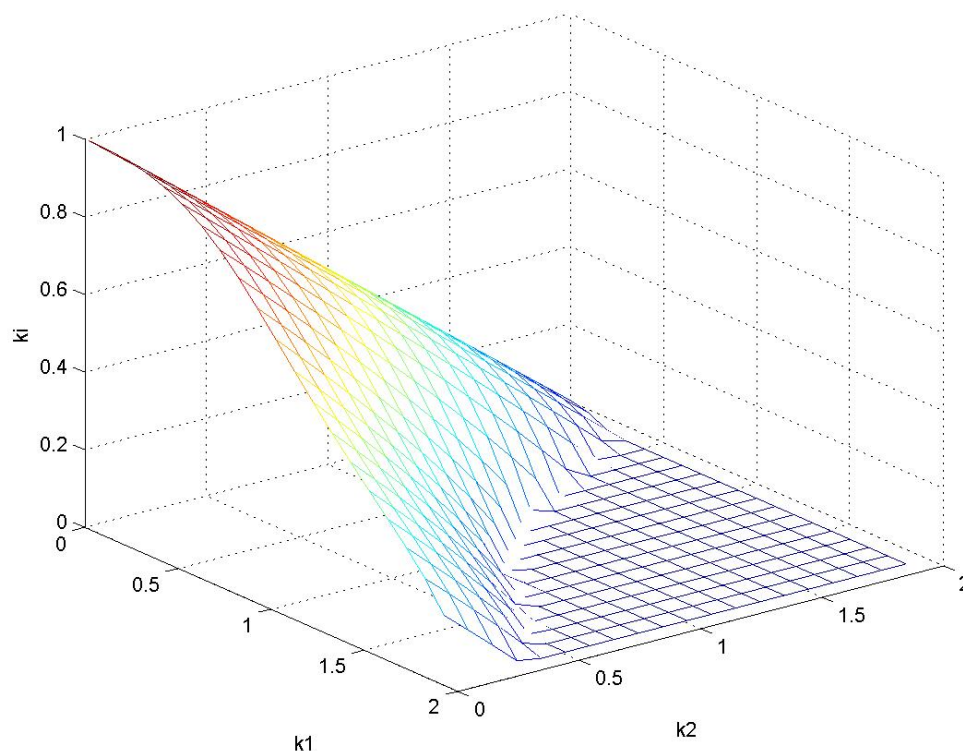
Η επόμενη εικόνα δείχνει ότι μηδενίζοντας την μεταβλητή k_i καταλήγουμε στο προηγούμενο σχήμα. Από αυτήν την εικόνα εμφανές ότι τα σχήματα του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» των δύο μοντέλων εφοδιαστικών αλυσίδων παρουσιάζουν πολλές ομοιότητες. Αυτό σημαίνει ότι η προσθήκη ενός ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης στο μοντέλο δεν διαφοροποιεί το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» σχηματικά, το οποίο είναι πολύ σημαντικό. Για αυτό το σχήμα χρησιμοποιήθηκε η εντολή *contour* της Matlab, η οποία προβάλλει το τρισδιάστατο αυτό σχήμα πάνω στο οριζόντιο επίπεδο χρησιμοποιώντας τις τιμές των δύο οριζόντιων αξόνων (μεταβλητές k_1 και k_2) ως συντεταγμένες. Οι τιμές του οριζόντιου άξονα (μεταβλητή k_i) δεν φαίνονται ουσιαστικά στο σχήμα.



Εικόνα 5.15 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό και έναν αναλογικό ελεγκτή και την εντολή `contour` του Matlab

Η επόμενη εικόνα είναι από μια συγκεκριμένη οπτική γωνία του τρισδιάστατου σχήματος του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης». Το τρισδιάστατο σχήμα δημιουργήθηκε με την εντολή `mesh`, η οποία σχεδιάζει ένα διάγραμμα των τριών μεταβλητών αλλάζοντας χρώματα ανάλογα με τη θέση του κάθε σημείου του διαγράμματος. Αυτό θα μας βοηθήσει να παρατηρήσουμε καλύτερα την αλλαγή των τιμών όταν η τιμή της μεταβλητής k_i αρχίζει και παίρνει τιμές μη μηδενικές. Οι μεταβλητές k_1 και k_2 είναι στο οριζόντιο επίπεδο, ενώ η μεταβλητή k_i είναι στο κάθετο επίπεδο. Όταν η μεταβλητή k_i είναι μηδέν, τότε το σχήμα είναι τοποθετημένο πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Όταν η μεταβλητή k_i αρχίζει να παίρνει μη μηδενικές τιμές, τότε το σχήμα αρχίζει ανεβαίνει και στο κάθετο επίπεδο. Όταν οι τιμές των μεταβλητών k_1 και k_2 είναι κοντά στο μηδέν, τότε η μεταβλητή k_i παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές. Όταν μια από τις δυο ή και οι δυο μεταβλητές k_1 και k_2 αρχίζουν να παίρνουν μεγαλύτερες τιμές από το μηδέν, τότε η τιμή της

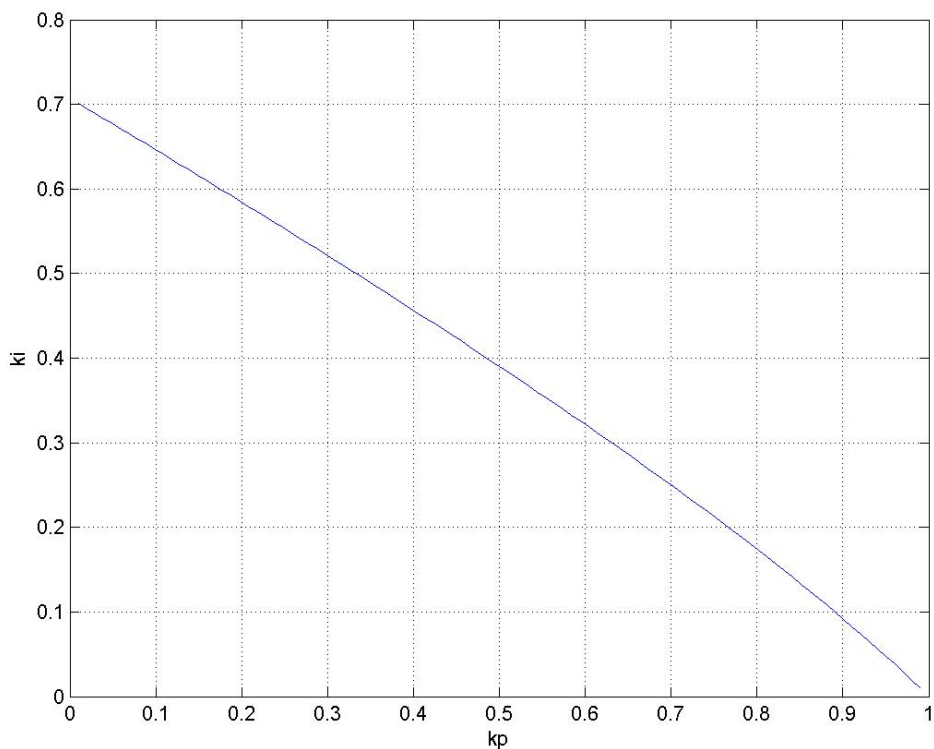
μεταβλητής αρχίζει και μειώνεται σταδιακά. Αυτό φαίνεται και στην επόμενη εικόνα.²



Εικόνα 5.16 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό και έναν αναλογικό ελεγκτή

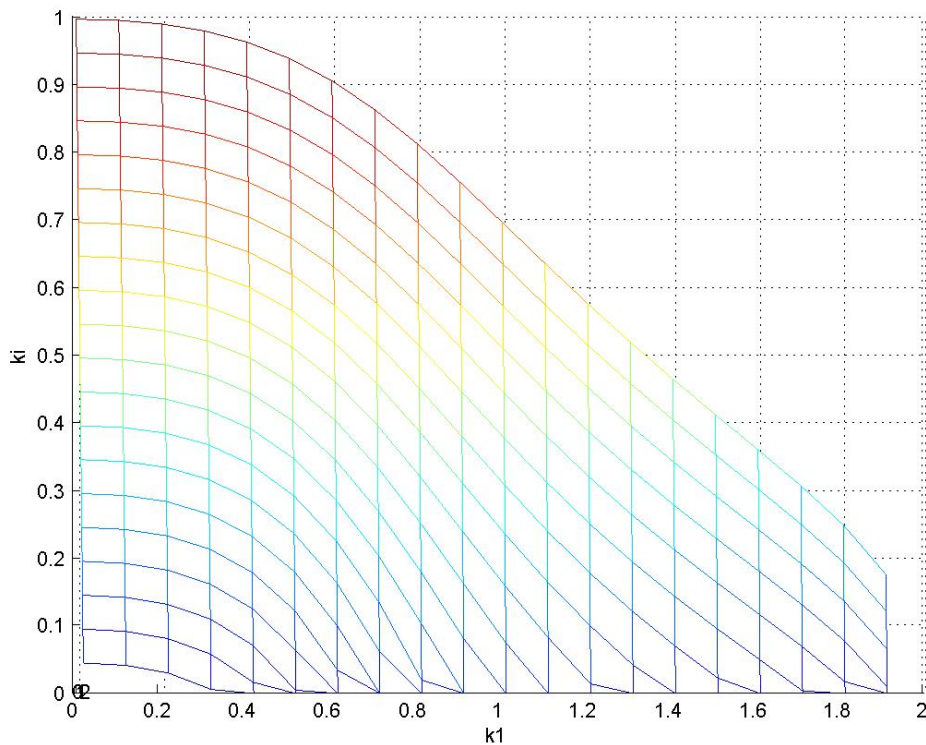
Συγκρίνοντας αυτό το μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με το μοντέλο, το οποίο έχει ένα ενδιάμεσο κόμβο με έναν ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης, θα πρέπει να παρατηρήσουμε το τρισδιάστατο σχήμα μηδενίζοντας την τιμή της μεταβλητής k_2 . Το σχήμα «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» για το μοντέλο με τον ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης είναι το επόμενο.

² Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε ότι ενώ οι μεταβλητές k_1 , k_2 και k_i μπορούν να πάρουν τιμές $0 < k_1 < 2$, $0 < k_2 < 2$ και $0 < k_i < 2$ αντίστοιχα, θα πρέπει για να μην εμφανίζονται το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης να παίρνουν τιμές, οι οποίες να ανήκουν ή να είναι κάτω από το τρισδιάστατο πλέγμα του σχήματος της εικόνας 5.16.



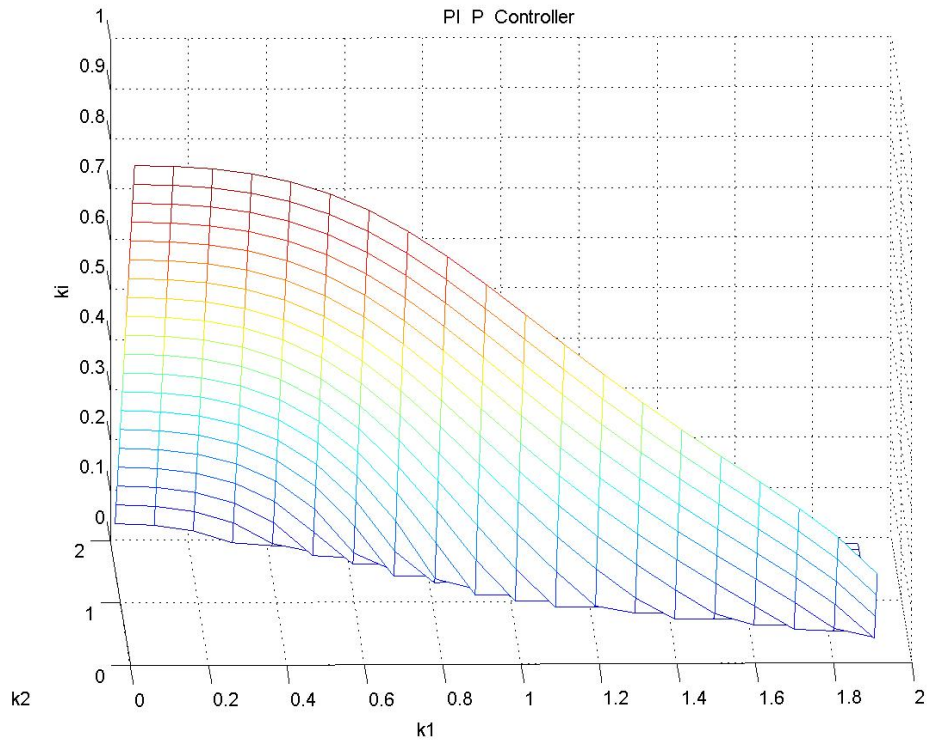
Εικόνα 5.17 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό ελεγκτή

Περιστρέφοντας το τρισδιάστατο σχήμα του μοντέλου μας ώστε να εμφανίζονται μόνο οι άξονες των μεταβλητών $k p_1$ και k_i , έχουμε το σχήμα που φαίνεται στην επόμενη εικόνα. Από το σχήμα της επόμενης εικόνας παρατηρούμε ότι η μεταβλητή k_i φαίνεται να παίρνει τιμές από μηδέν ως το ένα. Αυτό, όμως, είναι παραπλανητικό, επειδή εξαιτίας του τρισδιάστατου σχήματος δεν γίνεται καλή απεικόνιση όταν μηδενίζουμε την μεταβλητή $k p_2$. Αυτό συμβαίνει επειδή το σχήμα αυτής της εικόνας είναι από μια συγκεκριμένη γωνία η οποία δεν είναι πολύ ξεκάθαρη. Εξάλλου, η μεταβλητή k_i παίρνει τιμές κοντά στο ένα για τιμές των μεταβλητών $k p_1$ και $k p_2$ κοντά στο μηδέν.



Εικόνα 5.18 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό και έναν αναλογικό ελεγκτή

Η λύση στο προηγούμενο πρόβλημα είναι να γυρίσουμε το τρισδιάστατο σχήμα μέχρι το σημείο λίγο πριν μηδενιστεί η μεταβλητή kp_2 . Αυτό θα το κάνουμε για να δούμε ποια είναι η τιμή στην οποία πλησιάζει η μεταβλητή k_i , όταν αρχίζει και μηδενίζεται ο άξονας της μεταβλητής kp_2 . Συνεπώς, όταν αρχίζει και μηδενίζεται ο άξονας της μεταβλητής kp_2 , τότε η μεταβλητή k_i αρχίζει και πλησιάζει την τιμή 0,7. Αυτή η τιμή αντιστοιχεί και στο άνω όριο του πεδίου ορισμού της μεταβλητής k_i του PI (αναλογίας-ολοκλήρωσης) μοντέλου εφοδιαστικής αλυσίδας, δηλαδή $0 < k_i < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$. Αυτό απεικονίζεται καλύτερα στο σχήμα της εικόνας επόμενης εικόνας.



Εικόνα 5.19 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-ολοκληρωτικό και έναν αναλογικό ελεγκτή

5.6 Μοντέλο σειριακής εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν ενδιάμεσο κόμβο (ελεγκτής αναλογίας – διαφορίσης PD-Controller)

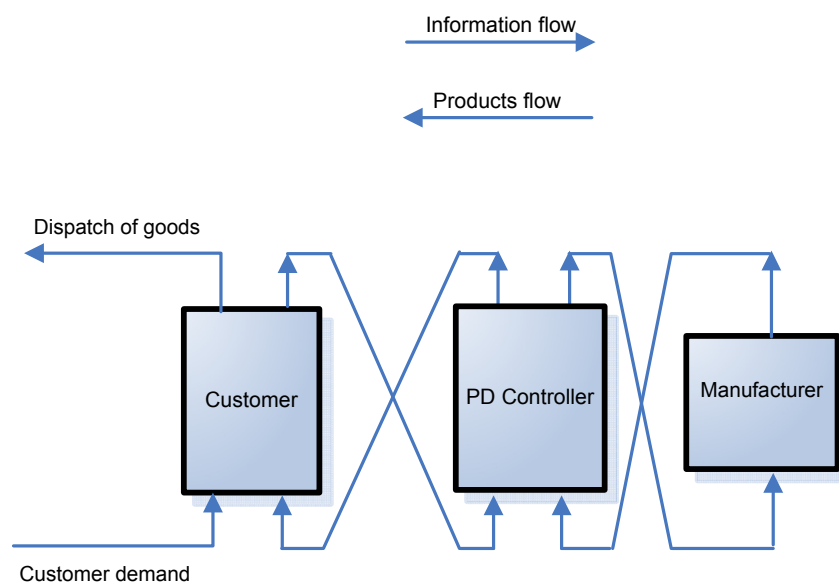
Στην περίπτωση έχουμε μια εφοδιαστική αλυσίδα με έναν ενδιάμεσο κόμβο (π.χ. λιανέμπορος), και ελέγχονται από έναν ελεγκτή ολοκλήρωσης-διαφορίσης. Εξαιτίας του γεγονότος ότι έχουμε έναν ενδιάμεσο κόμβο και έναν ελεγκτή με δύο μεταβλητές οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι παρακάτω:

$$IP(t) = IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t) \quad (1)$$

$$O_{1,2}(t) = (k_p + k_d * s) * (SP(t) - IP(t)) \quad (2)$$

$$Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1) \quad (3)$$

$$Y_{2,1}(t) = O_2^*(t-1) \quad (4)$$



Εικόνα 5.20 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-διαφορικό ελεγκτή

5.6.1 Υπολογισμός εξισώσεων και πινάκων συστήματος κατάστασης

Λύνοντας την εξίσωση (3) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(3) \Rightarrow Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1)$$

$$\Leftrightarrow Y_{1,0}(t) = O_{0,1}(t-1) + O_1^*(t-2) - Y_{1,0}(t-1)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\Rightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + O_1^*(t-1) - Y_{1,0}(t)$$

$$\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + Y_{1,0}(t) - Y_{1,0}(t)$$

αφού ($O_1^*(t-1) = Y_{1,0}(t)$), και επομένως:

$$\Rightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) \quad (5)$$

Λύνοντας την εξίσωση (4) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(4) \Rightarrow Y_{2,1}(t) = O_2^*(t-1)$$

$$\Leftrightarrow Y_{2,1}(t) = O_{1,2}(t-1) + O_2^*(t-2) - Y_{2,1}(t-1)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + O_2^*(t-1) - Y_{2,1}(t)$$

$$\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + Y_{2,1}(t) - Y_{2,1}(t)$$

αφού ($O_2^*(t-1) = Y_{2,1}(t)$), και επομένως:

$$\Rightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) \quad (6)$$

Λύνοντας την εξίσωση (2) και κάνοντας τις κατάλληλες αντικαταστάσεις, έχουμε,

$$(2) \Rightarrow O_{1,2}(t) = (k_p + k_d * s) * (SP(t) - IP(t))$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = (k_p + k_d * s) * (SP(t) - [IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)])$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_p * (SP(t) - [IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) + k_d * s * (SP(t) - [IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)])$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_p * SP(t) - k_p * IP(t-1) - k_p * Y_{2,1}(t) + k_p * Y_{1,0}(t) + k_d * (SP(t+1) - [IP(t) + Y_{2,1}(t+1) - Y_{1,0}(t+1)]) - k_d * (SP(t) - [IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)])$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_p * SP(t) - k_p * IP(t-1) - k_p * Y_{2,1}(t) + k_p * Y_{1,0}(t) + k_d * SP(t+1) - k_d * SP(t) - k_d * IP(t) - k_d * Y_{2,1}(t+1) + k_d * Y_{1,0}(t+1) + k_d * IP(t-1) + k_d * Y_{2,1}(t) - k_d * Y_{1,0}(t)$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_p * SP(t) - k_p * IP(t-1) - k_p * Y_{2,1}(t) + k_p * Y_{1,0}(t) - k_d * [IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)] - k_d * Y_{2,1}(t+1) + k_d * Y_{1,0}(t+1) + k_d * IP(t-1) + k_d * Y_{2,1}(t) - k_d * Y_{1,0}(t)$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_p * SP(t) - k_p * IP(t-1) - k_p * Y_{2,1}(t) + k_p * Y_{1,0}(t) - k_d * Y_{2,1}(t+1) + k_d * Y_{1,0}(t+1)$$

$$\Leftrightarrow^{(5)\&(6)} Y_{2,1}(t+1) = k_p * SP(t) - k_p * IP(t-1) - k_p * Y_{2,1}(t) + k_p * Y_{1,0}(t) - k_d * Y_{2,1}(t+1) + k_d * O_{0,1}(t)$$

$$\Leftrightarrow (1 + k_d)Y_{2,1}(t+1) = k_p * SP(t) - k_p * IP(t-1) - k_p * Y_{2,1}(t) + k_p * Y_{1,0}(t) + k_d * O_{0,1}(t)$$

$$\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = \frac{k_p}{(1+k_d)} * SP(t) - \frac{k_p}{(1+k_d)} * IP(t-1) - \frac{k_p}{(1+k_d)} * Y_{2,1}(t) + \frac{k_p}{(1+k_d)} * Y_{1,0}(t) + \frac{k_d}{(1+k_d)} * O_{0,1}(t) \quad (7)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1),(6) και (7), μπορούμε να δημιουργήσουμε τους πίνακες στον χώρο των καταστάσεων, οι οποίοι είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{bmatrix} IP(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ Y_{2,1}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_p}{(1+k_d)} & \frac{k_p}{(1+k_d)} & -\frac{k_p}{(1+k_d)} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{k_d}{(1+k_d)} \end{bmatrix} * [O_{0,1}(t)] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_p}{(1+k_d)} \end{bmatrix} * SP_1$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0] * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με ένα κόμβο είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_p}{(1+k_d)} & \frac{k_p}{(1+k_d)} & -\frac{k_p}{(1+k_d)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{k_d}{(1+k_d)} \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0]$$

$$D = [0]$$

5.6.2 Υπολογισμός πίνακα συνδιακύμανσης

Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A είναι ασυμππρωτικά ευσταθής (όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μικρότερες από ένα), ο πίνακας συμμεταβλητότητας της χώρου καταστάσεων του διανύσματος $x(t)$, υπολογίζεται λύνοντας την γραμμική εξίσωση Lyapunov. Η εξίσωση Lyapunov είναι

$$P - APA' - BB' = 0$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση με βάση τους πίνακες A και B, θα υπολογίσουμε τον πίνακα συμμεταβλητότητας του συγκεκριμένου χώρου καταστάσεων P_3 , ο οποίος είναι:

$$P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_p * (2 * k_d - k_p + 2)} & 0 & -\frac{1}{(k_d + 1) * (2 * k_d - k_p + 2)} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{(k_d + 1) * (2 * k_d - k_p + 2)} & 0 & \frac{k_p - k_d * k_p + 2 * k_d^2}{(k_d + 1) * (2 * k_d - k_p + 2)} \end{pmatrix}$$

Γνωρίζοντας ότι η τιμή των ελεγκτών k_p και k_d είναι μεγαλύτερη ή ίση από μηδέν και ότι οι τιμές των στοιχείων της διαγωνίου του πίνακα συμμεταβλητότητας P_3 πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από μηδέν, μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο τιμών των μεταβλητών k_p και k_i . Δηλαδή ισχύει:

$$0 < k_p < 2 \quad (1)$$

$$0 < k_d < 2 \quad (2)$$

(αφού αυτά είναι τα διαστήματα που μας ενδιαφέρουν)

$$\frac{1}{k_p * (2 * k_d - k_p + 2)} \geq 0 \quad (3)$$

$$\frac{k_p - k_d * k_p + 2 * k_d^2}{(k_d + 1) * (2 * k_d - k_p + 2)} \geq 0 \quad (4)$$

Λύνοντας την ανισότητα (4)

$$(4) \Rightarrow \frac{k_p - k_d * k_p + 2 * k_d^2}{(k_d + 1) * (2 * k_d - k_p + 2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 * k_p - k_d - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow k_p < \frac{k_d + 1}{2}$$

5.6.3 Υπολογισμός «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης»

Οι παραγγελίες, οι οποίες γίνονται από τον λιανέμπορο προς τον κατασκευαστή, αντιστοιχούν στο σήμα $O_{1,2}(t)$, που μπορεί να γραφτεί όπως δείξαμε παραπάνω ως:

$$O_{1,2}(t) = \frac{k_p}{1-k_d} * SP(t) - \frac{k_p}{1-k_d} * IP(t-1) - \frac{k_p}{1-k_d} * Y_{2,1}(t) + \frac{k_p}{1-k_d} * Y_{1,0}(t) + \frac{k_d}{1-k_d} * O_{0,1}(t)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί και ως εξίσωση των μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και της μεταβλητής $SP_2(t)$. Δηλαδή, μπορεί να γραφτεί και με την μορφή

$$O_{1,2}(t) = C' * x(t) + \frac{k_p}{1-k_d} * SP(t) + \frac{k_d}{1-k_d} * O_{0,1}(t), \text{ όπου } x(t) \text{ είναι το διάνυσμα}$$

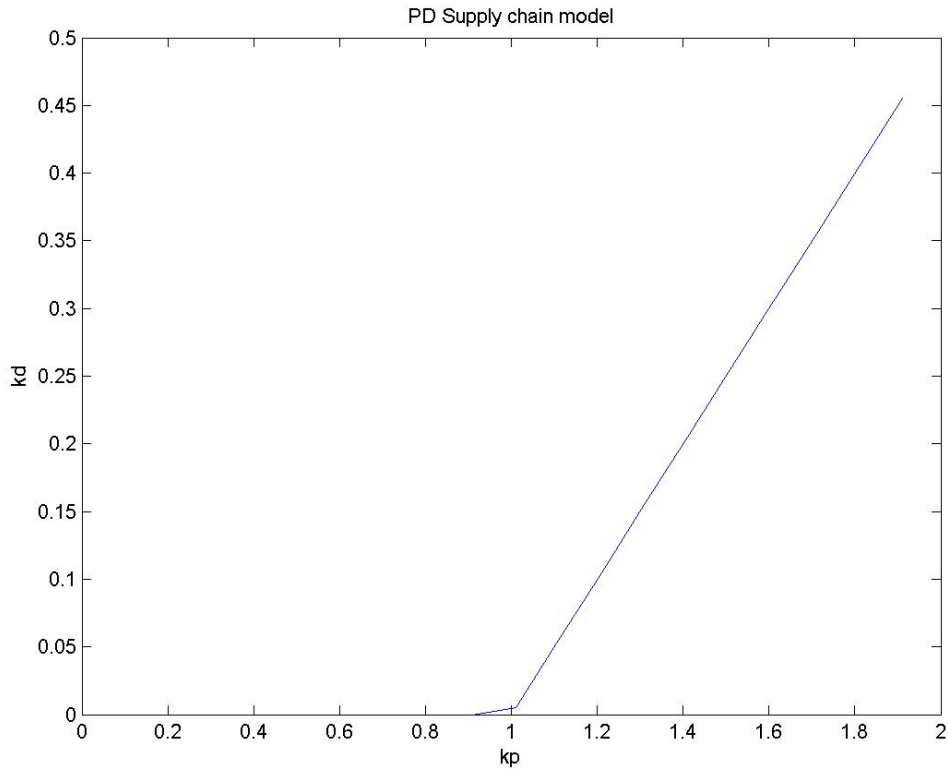
μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και

$$C' = \left(0 \quad 0 \quad -\frac{k_p}{1-k_d} \quad \frac{k_p}{1-k_d} \quad -\frac{k_p}{1-k_d} \right). \text{ Το φαινόμενο της ενίσχυσης της}$$

ζήτησης, το οποίο απεικονίζει τις αυξομειώσεις στα επίπεδα ζήτησης των κόμβων 1 (π.χ. πελάτης) και 2 (π.χ. λιανέμπορος) υπολογίζεται από

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{1,2})}{\text{var}(O_{0,1})} \approx C' * P_{3,3} * C$$

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{1,2})}{\text{var}(O_{0,1})} = \frac{P_{3,3}}{P_{3,2,2}} = P_{3,3} = \frac{k_p - k_d * k_p + 2 * k_d^2}{(k_d + 1) * (2 * k_d - k_p + 2)}$$



Εικόνα 5.21 Σχήμα «Φαινόμενου ενίσχυσης ζήτησης» εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν αναλογικό-διαφορικό ελεγκτή

Παρατηρώντας την παραπάνω εικόνα, φαίνεται κάτω από την γραμμή του σχήματος της παραπάνω εικόνας να υπάρχει εξασθένηση του φαινομένου. Παρόλα αυτά, βλέπουμε ότι είναι δύσκολο να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα για την περιοχές στις οποίες υπάρχει ενίσχυση και εξασθένηση του «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης». Συνεπώς, θα πρέπει να επιβεβαιώσουμε την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων αυτών. Η επιβεβαίωση αυτή των αποτελεσμάτων θα γίνει με τη βοήθεια του Matlab προσομοιώνοντας το μοντέλο της εφοδιαστικής αλυσίδας. Ο σχεδιασμός του μοντέλου της εφοδιαστικής αλυσίδας στο Matlab και η επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων θα γίνουν στο Παράρτημα Β.

5 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκε η χρησιμοποίηση μεθόδων και τεχνικών αυτομάτου ελέγχου στις εφοδιαστικές αλυσίδες. Λόγω της πολυπλοκότητας των αλυσίδων κρίθηκε αναγκαία η μελέτη του δυναμικού χαρακτήρα της και ο υπολογισμός κατάλληλων εξισώσεων-σχέσεων που περιγράφουν πλήρως το ισοζύγιο προϊόντων και παραγγελιών. Πιο συγκεκριμένα, καταρτίστηκε ένα μοντέλο του χώρου κατάστασης με βάση τις κατάλληλες εξισώσεις για διαφορετικές πολιτικές αναπλήρωσης, οι οποίες μοντελοποιήθηκαν με τη βοήθεια κατάλληλων ελεγκτών.

Πιο συγκεκριμένα στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν ελεγκτές αναλογίας (P), αναλογίας-ολοκλήρωσης (PI), αναλογίας-διαφόρισης (PD), αναλογίας-αναλογίας (PP), αναλογίας αναλογίας-ολοκλήρωσης (P-PI), αναλογίας-ολοκλήρωσης αναλογίας (PI-P), χρησιμοποιώντας κατάλληλες παραμέτρους (k_p , k_i , k_d) για τους διάφορους ελεγκτές.

Στη συνέχεια με τη βοήθεια του μοντέλου του χώρου κατάστασης υπολογίστηκαν οι αντίστοιχοι πίνακες συνδιακύμανσης σε παραμετρική μορφή. Στη μελέτη της εφοδιαστικής αλυσίδας, η ζήτηση μελετήθηκε σαν μια στοχαστική ακολουθία κανονικής κατανομής. Αυτό έχει σαν συνέπεια να μελετηθούν φαινόμενα αστάθειας. Οι διακυμάνσεις αυτές μελετούσαν το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» με βάση τις παραμέτρους.

Η συγκεκριμένη εφαρμογή μεθόδων αυτομάτου ελέγχου αποδείχθηκε ένα πολύ χρήσιμο βοήθημα για την μελέτη του δυναμικού χαρακτήρα της εφοδιαστικής αλυσίδας και πιο συγκεκριμένα ο υπολογισμός της ροής των προϊόντων-πληροφορίας καθώς και οι διακυμάνσεις των τιμών των αποθεμάτων σε κάθε κόμβο. Λόγω της απουσίας μέσων εποπτικού ελέγχου το συγκεκριμένο μοντέλο θεωρείται αποκεντρωτικού χαρακτήρα όπου κάθε κόμβος της αλυσίδα αναλαμβάνει ανεξάρτητες αποφάσεις.

Ξεκινώντας με το πρώτο μοντέλο ελεγκτή (P Controller) για την εφοδιαστική αλυσίδα, το πεδίο ορισμού της μεταβλητής k_p του ελεγκτή για να μην εμφανίζεται το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» είναι $0 < k_p < 1$.

Δηλαδή για να είναι ευσταθές το σύστημα της εφοδιαστικής αλυσίδας έχοντας την καλύτερη απόδοση –ελαχιστοποιώντας το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης»-, πρέπει να ο ελεγκτής να παίρνει τιμές μέσα σε αυτό το πεδίο. Παρόλα αυτά, η μεταβλητή kp μπορεί να πάρει τιμές στο πεδίο $0 < kp < 2$, αλλά για τιμές πάνω από ένα δεν θα έχει το μοντέλο επιθυμητά αποτελέσματα.

Προσθέτοντας στο προηγούμενο σύστημα ένα ολοκληρωτικό ελεγκτή, παρατηρούμε ότι η τιμή της μεταβλητής kp για τον αναλογικό ελεγκτή παραμένει σταθερή αυξάνοντας την τιμή της ki για τον ολοκληρωτικό ελεγκτή. Αν η μεταβλητή ki έχει σχεδόν μηδενική τιμή, τότε η μεταβλητή kp έχει σχεδόν την τιμή ένα, η οποία είναι η ανώτερη τιμή που μπορεί να πάρει η ίδια μεταβλητή στο προηγούμενο σύστημα. Τα πεδία ορισμού των μεταβλητών kp και ki για να μην εμφανίζεται το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» είναι $0 < kp < 1$ και $0 < ki < \sqrt{2}/2$ αντίστοιχα. Το πεδίο ορισμού της μεταβλητής ki είναι μικρότερο από αυτό της μεταβλητής kp .

Αλλάζοντας στο προηγούμενο μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας τον ολοκληρωτικό ελεγκτή του με έναν διαφορικό ελεγκτή έχουμε ένα αναλογικό-διαφορικό ελεγκτή (PD controller). Προσθέτοντας σε έναν αναλογικό ελεγκτή έναν διαφορικό ελεγκτή δεν επηρεάζεται το πεδίο τιμών της μεταβλητής kp . Συγκεκριμένα, για το πεδίο τιμών $0 < kp < 1$ της μεταβλητής kp , η τιμή της μεταβλητής kd είναι μηδενική. Η τιμή της μεταβλητής kd αρχίζει να αυξάνεται από τη στιγμή που η τιμή της μεταβλητής kp ξεπεράσει την τιμή ένα.

Μέχρι τώρα εξετάζαμε τα μοντέλα εφοδιαστικής με έναν ενδιάμεσο κόμβο. Προσθέτοντας έναν δεύτερο ενδιάμεσο κόμβο στο πρώτο μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας, δημιουργούμε έναν P-P μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας (αναλογίας-αναλογίας), δηλαδή με δύο ενδιάμεσους κόμβους και οι οποίοι καθοδηγούνται από αναλογικούς ελεγκτές. Παρατηρώντας τα αποτελέσματα για το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» στα δύο μοντέλα εφοδιαστικής αλυσίδας, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το πεδίο τιμών των δύο μεταβλητών kp_1 και kp_2 των δύο αναλογικών ελεγκτών για να μην εμφανίζεται το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» αυξάνεται ως εξής - $0 < k_1 < 1$ και $1 < k_1 < 2$ - και $-0 < k_2 < 1$ και $1 < k_2 < 2$ - αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι για την τιμή ένα δεν ορίζεται καμία μεταβλητή. Αυτή η αύξηση στο πεδίο

ορισμού των δύο μεταβλητών σημαίνει ότι αν μια μεταβλητή έχει τιμές μικρότερες του ένα, τότε η άλλη μεταβλητή παίρνει τιμές μεγαλύτερες του ένα. Αυτό γίνεται για να αντισταθμίζεται η παραγγελία των προϊόντων μεταξύ των δύο κόμβων ώστε να μην εμφανίζεται το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης».

Θα εξετάσουμε το P-PI μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας (αναλογίας αναλογίας-ολοκλήρωσης) σε σχέση με τα P (αναλογίας), PI (αναλογίας-ολοκλήρωσης) και P-P (αναλογίας - αναλογίας) μοντέλα εφοδιαστικής αλυσίδας. Συγκρίνοντας το με το πρώτο μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας, παρατηρούμε ότι επειδή εμφανίζεται δεύτερος ενδιάμεσος κόμβος, το πεδίο ορισμού των μεταβλητών kp_1 και kp_2 αναλογίας των δύο ενδιάμεσων κόμβων ώστε να μην εμφανίζεται το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» αυξάνεται από $0 < kp < 1$ σε $0 < k_1 < 2$ και $0 < k_2 < 2$. Το ίδιο συνέβη όταν προσθέσαμε έναν δεύτερο ενδιάμεσο κόμβο, ο οποίος καθοδηγούνταν από έναν ελεγκτή αναλογίας, δηλαδή είχαμε ένα P-P μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας (αναλογίας-αναλογίας).

Εξετάζοντας το P-PI μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας (αναλογίας αναλογίας-ολοκλήρωσης) με το δεύτερο μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας PI (αναλογίας-ολοκλήρωσης), παρατηρούμε ότι προσθέτοντας ένα ενδιάμεσο κόμβο (καθοδηγούμενο από ένα ελεγκτή αναλογίας) ώστε να μην εμφανίζεται το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» αυξάνονται τα πεδία ορισμού των μεταβλητών k_1 και k_2 αναλογίας των δύο ενδιάμεσων κόμβων από $0 < kp < 1$ σε $0 < k_1 < 2$ και $0 < k_2 < 2$. Αντίθετα, το πεδίο ορισμού της μεταβλητής ki ολοκλήρωσης του δεύτερου ενδιάμεσου κόμβου παραμένει σχεδόν αμετάβλητο, δηλαδή είναι $0 < ki < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Εξετάζοντας το P-PI μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας (αναλογίας αναλογίας-ολοκλήρωσης) με το τρίτο μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας P-P (αναλογίας αναλογίας), παρατηρούμε ότι αλλάζοντας τον δεύτερο ενδιάμεσο κόμβο (καθοδηγούμενο από ένα ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης) τα πεδία ορισμού των μεταβλητών kp_1 και kp_2 αναλογίας των δύο ενδιάμεσων κόμβων ώστε να μην εμφανίζεται το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» παραμένουν αμετάβλητα, δηλαδή $0 < k_1 < 2$ και $0 < k_2 < 2$. Επίσης, το πεδίο ορισμού της

μεταβλητής k_i ολοκλήρωσης του δεύτερου ενδιάμεσου κόμβου είναι

$$0 < k_i < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Τέλος, θα εξετάσουμε το PI-P μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας (αναλογίας-ολοκλήρωσης αναλογίας) σε σχέση με τα P (αναλογίας), PI (αναλογίας-ολοκλήρωσης) και P-P (αναλογίας - αναλογίας) μοντέλα εφοδιαστικής αλυσίδας. Τα αποτελέσματα της σύγκρισης είναι ίδια με το P-PI μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας (αναλογίας αναλογίας-ολοκλήρωσης) όσον αφορά τα πεδία ορισμού των μεταβλητών.

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται ένας συγκεντρωτικός πίνακας με διάφορες τιμές για τις μεταβλητές k_1 (ή k_p), k_2 , k_i και k_d , οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στα προηγούμενα μοντέλα εφοδιαστικών αλυσίδων. Για κάθε εφοδιαστική αλυσίδα χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές, οι οποίες αντιστοιχούν σε αυτήν, και στη συνέχεια υπολογίζεται ο βαθμός του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης» και ο οποίος αναγράφεται στο αντίστοιχο κελί του πίνακα. Όταν αυτός ο βαθμός είναι μικρότερος ή ίσος με τη μονάδα, τότε δεν υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης». Αλλιώς, αν αυτός ο βαθμός είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα, τότε υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης».

	P	PI	P-P	P-PI	PI-P	PD
$k_1=0.1$ $k_2=0.1$ $k_i=0.1$ $K_d=0.1$	0,0526	0,0695	0,0264	0,0242	0,0255	0,0476
$k_1=0.5$ $k_2=0.5$ $k_i=0.7$ $K_d=0.5$	0,3333	10,7647	0,1852	0,9799	1,3508	0,2000
$k_1=0.9$ $k_2=0.9$ $k_i=0.9$ $K_d=0.9$	0,8182	-2,5038	0,6829	-1,4512	-1,4978	0,3103
$k_1=1.1$	1,2222	1,5974	1,5240	2,0961	2,0783	0,3548

k ₂ =1.1 k _i =0.1 K _d =1.1						
k ₁ =1.5 k ₂ =1.5 k _i =0.7 K _d =1.5	3	-2,3072	15	-76,8693	-72,2941	0,4286
k ₁ =1.9 k ₂ =1.9 k _i =0.9 K _d =1.9	19	1,6192	3,4390e+003	109,2237	102,5128	0,4872
k ₁ =0.1 k ₂ =1.9 k _i =0.1 K _d =1.9	0,0526	0,0695	0,1050	-0,0460	0,0329	0,4313
k ₁ =0.5 k ₂ =1.5 k _i =0.7 K _d =1.5	0,3333	10,7647	0,6000	-0,0802	29,7221	0,3778
k ₁ =0.9 k ₂ =1.1 k _i =0.9 K _d =1.1	0,8182	-2,5038	0,9802	-1,2935	-3,3941	0,3362
k ₁ =1.1 k ₂ =0.9 k _i =0.1 K _d =0.9	1,2222	1,5974	0,9802	1,2655	1,5047	0,3372
k ₁ =1.5 k ₂ =0.5 k _i =0.7 K _d =0.5	3	-2,3072	0,6000	84,9067	1,1467e-004	0,5556
k ₁ =1.9 k ₂ =0.1 k _i =0.9 K _d =0.1	19	-1,6192	0,1050	2,2607e+003	0,8880	5,2424

Βιβλιογραφία

- [1] Pin-Ho Lin, David Shan-Hill Wong, Shi-Shang Jang, Shyan-Shu Shieh, Ji-Zheng Chu, Controller design and reduction of bullwhip for a model supply chain system using z-transform analysis, *Journal of Process Control* 14 (2004) 487-499.
- [2] C.I. Papanagnou and G.D. Halikias, Supply-chain modelling and control under proportional inventory-replenishment policies, *International Journal of Systems Science* Vol. 39, No. 7, July 2008, 699–711.
- [3] Symbolic computation of covariance matrices.
- [4] David A. Taylor, Ph.D., *Supply chains: A manager's guide*, Pearson Education Inc., 2004.
- [5] Aviv, Y. (2003), "A Time Series Framework for supply chain Inventory Management," *Operations Research*, 51, 210–227.
- [6] Davies, M.H.A., and Vinter, R.B. (1985), *Stochastic Modelling and Control*, London, England: Chapman and Hall.
- [7] Dejonckheere, J., Disney, S.M., Lambrecht, M.R., and Towhill, D.R. (2003), "Measuring and Avoiding the Bullwhip Effect: A Control-theoretic Approach," *European Journal of Operational Research*, 147, 567–590.
- [8] Forrester, J.W. (1961), *Industrial Dynamics*, New York: John Wiley and Sons Inc.
- [9] Horn, R., and Johnson, C. (1990), *Matrix Analysis*, Cambridge, England: Cambridge University Press.
- [10] (1994), *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge, England: Cambridge University Press.
- [11] H.L. Lee, V. Padmanabhan, S. Whang, The bullwhip effect in supply chains, *Sloan Management Review* 38 (1997) 93–102
- [12] Lee, H.L., Padmanabhan, V., and Whang, S. (1997), "Information Distortion in supply-chain: The Bullwhip Effect," *Management Science*, 43, 546–558.

- [13] (2001), “The Bullwhip Effect in supply-chains,” *Industrial Engineering Chemistry Research*, 40, 3369–3383.
- [14] Mathworks, Matlab Symbolic Toolbox.
- [15] Papanagnou, C., and Halikias, G.D. (2005) “A State-space Approach for Analysing the Bullwhip Effect in Supply Chains”, in Proc. 5th Intern. Conf. on Technology and Automation (ICTA2005), Thessaloniki, Greece, pp. 79–85.
- [16] —, (2006) “Supply Chain Modelling and Control Under Proportional Inventory Replenishment Policies”, in 12th IFAC Conference for Information Control Problems in Manufacturing (INCOM2006), Saint-Etienne, France, pp. 17–19.
- [17] Perea-Lopez, E., Grossmann, I.E., and Ydstie, B.E. (2001), “Dynamic Modeling and Decentralised Control of Supply Chains,” *Ind. Eng. Chem. Res.*, 40, 3369–3383.
- [18] Simchi-Levi, D., Kaminsky, P., and Simchi-Levi, E. (2003), *Designing and Managing the Supply Chain: Concepts, Strategies and Case Studies*, New York: McGraw-Hill.
- [19] Sterman, J.D. (1989), “Modeling Managerial Behaviour: Misperceptions of Feedback in a Dynamic Decision Making Experiment,” *Management Science*, 35(3), 321–339.
- [20] Zipkin, P.H. (2000), *Foundations of Inventory Management*, New York: McGraw-Hill.
- [21] B.M. Beamon, Supply chain design and analysis: Models and methods, *International Journal of Production Economics* 55 (1998) 281–294.
- [22] B. Porter, A. Bradshaw, Modal control of production-inventory systems using piecewise-constant control policies, *International Journal of Systems Science* 5 (1974) 733–742.
- [23] A. Bradshaw, B. Porter, Synthesis of control policies for a production-inventory tracking system, *International Journal of Systems Science* 6 (1975) 225–232.
- [24] K.L. Mak, A. Bradshaw, B. Porter, Stabilizability of production inventory systems with retarded control policies, *International Journal of Systems Science* 7 (1976) 277–288.

- [25] E. Perea, I. Grossmann, E. Ydstie, T. Tahmassebi, Dynamic modeling and classical control theory for supply chain management, *Computers & Chemical Engineering* 24 (2000) 1143–1149.
- [26] F. Chen, Z. Drezner, J.K. Ryan, D. Simchi-Levi, Quantifying the bullwhip effect in a simple supply chain: The impact of forecasting, lead times, and information, *Management Science* 46 (2000) 436–443.
- [27] F. Chen, J.K. Ryan, D. Simchi-Levi, The impact of exponential smoothing forecasts on the bullwhip effect, *Naval Research Logistics* 47 (2000) 269–286.
- [28] D.R. Towill, Dynamic analysis of an inventory and order based production control system, *International Journal of Production Research* 20 (1982) 671–687.
- [29] J. Dejonckheere, S.M. Disney, M.R. Lambrecht, D.R. Towill, Transfer function analysis of forecasting induced bullwhip in supply chains, *International Journal of Production Economics* 24 (2002) 133–144.
- [30] D.R. Coughanowr, L.R. Koppel, *Process Systems Analysis and Control*, McGraw-Hill International, 1965.
- [31] Sheu Jiu-Biing, A multi-layer demand-responsive logistics control methodology for alleviating the bullwhip effect of supply chains, *European Journal of Operational Research* 161 (3) (2005) 797–811.
- [32] J.D. Sterman, Operational and Behavioral Causes of Supply Chain Instability, in: O. Carranza, F. Villegas (Eds.), *The Bullwhip Effect in Supply Chain*, Palgrave McMillan, 2006.
- [33] A. Van Ackere, E.R. Larsen, J.D.W. Morecroft, Systems thinking and business process redesign: An application to the beer game, *European Management Journal* 11 (4) (1993) 412–423.
- [34] S. Geary, S.M. Disney, D.R. Towill, On bullwhip in supply chains-historical review, present practice and expected future impact, *International Journal of Production Economics* 101 (2006) 2–18.
- [35] A. Makui, A. Madadi, The bullwhip effect and Lyapunov exponent, *Applied Mathematics and Computation* 189 (2007) 35–40.
- [36] S. Balan, Prem Vrat, Pradeep Kumar, Information distortion in a supply chain and its mitigation using soft computing approach, *International Journal of Management Science, Omega* 37 (2009) 282 – 299.

- [37] Robert N. Boute, Stephen M. Disney, Marc R. Lambrecht, Benny Van Houdt, An integrated production and inventory model to dampen upstream demand variability in the supply chain, *European Journal of Operational Research* 178 (2007) 121–142.
- [38] Yanfeng Ouyang, Carlos Daganzo, Robust tests for the bullwhip effect in supply chains with stochastic dynamics, *European Journal of Operational Research* 185 (2008) 340–353.
- [39] David Bogataj, Marija Bogataj, Measuring the supply chain risk and vulnerability in frequency space, *Int. J. Production Economics* 108 (2007) 291–301.
- [40] Gerard Gaalman, Stephen M. Disney, State space investigation of the bullwhip problem with ARMA(1,1) demand processes, *Int. J. Production Economics* 104 (2006) 327–339.
- [41] Gerard Gaalmana,_, StephenM.Disney, On bullwhip in a family of order-up-to policies with ARMA(2,2) demand and arbitrary lead-times, *Int. J. Production Economics* 121 (2009) 454–463.

Παράρτημα Α

Συντόμευση

P Controller

PI Controller

P_PI Controller

PI_P Controller

PD Controller

Ορισμός

Proportional controller (Αναλογικός ελεγκτής)

Proportional-Integral controller (Αναλογικός-Ολοκληρωτικός ελεγκτής)

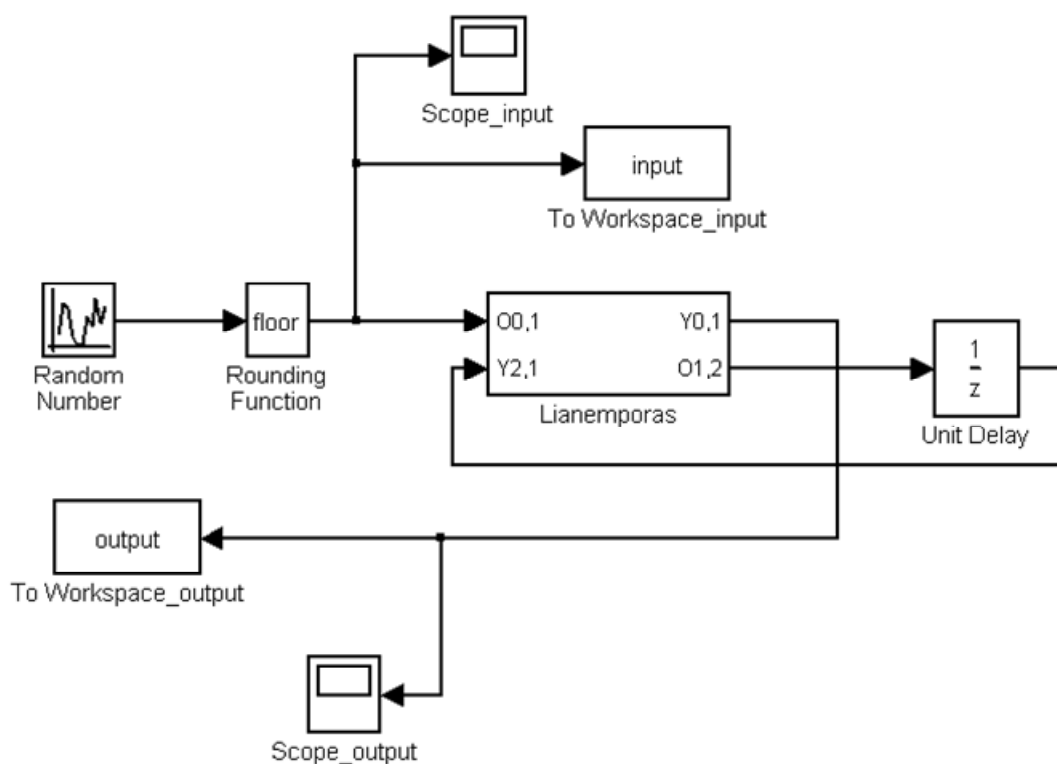
Proportional & Proportional-Integral controller (Αναλογικός & Αναλογικός-Ολοκληρωτικός ελεγκτής)

Proportional-Integral & Proportional controller (Αναλογικός-Ολοκληρωτικός & Αναλογικός ελεγκτής)

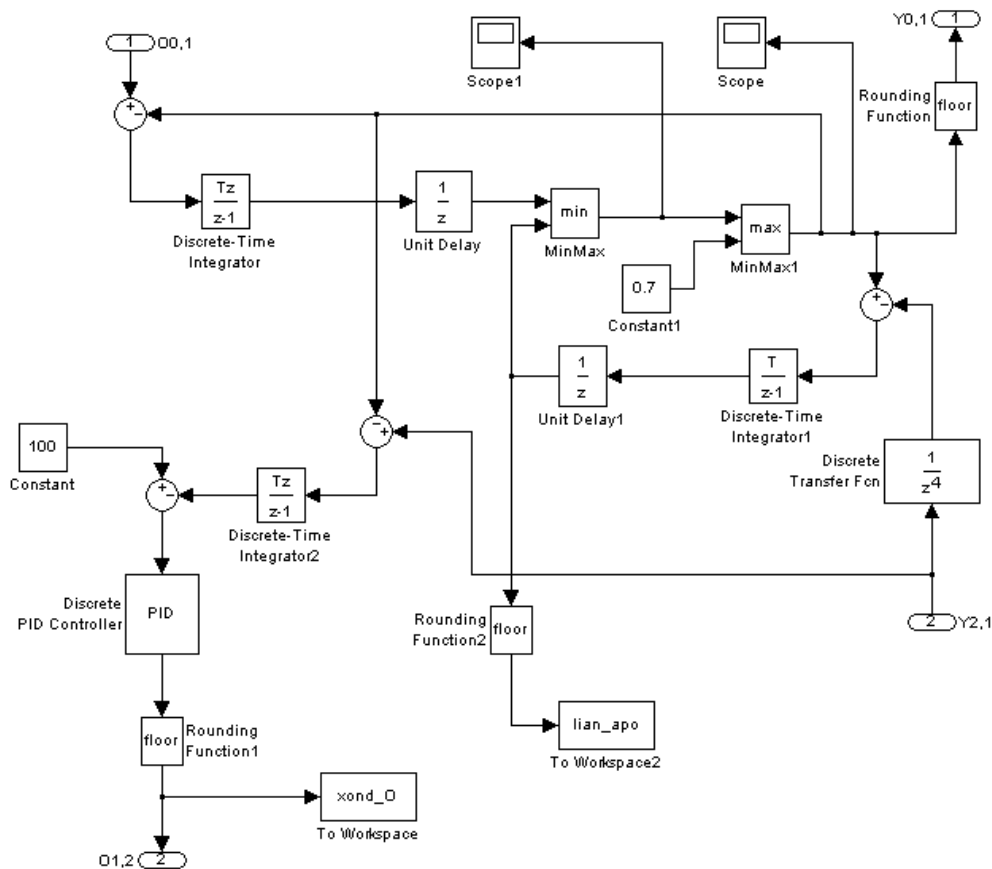
Proportional-Derivative controller (Αναλογικός-Διαφορικός ελεγκτής)

Παράρτημα Β

Στο παράρτημα αυτό θα παρουσιαστεί το μοντέλο προσομοίωσης για το μοντέλο της σειριακής εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν ενδιάμεσο κόμβο, ο οποίος έχει έναν αναλογικό-διαφορικό ελεγκτή (PD Controller). Με βάση τα αποτελέσματα της προσομοίωσης του μοντέλου θα επιβεβαιώσουμε τα αποτελέσματα για το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης». Το μοντέλο προσομοίωσης στο Matlab βασίζεται στο μοντέλο που παρουσίασαν οι Pin-Ho Lin, David Shan-Hill Wong, Shi-Shang Jang, Shyan-Shu Shieh, Ji-Zheng Chu (2004) και το οποίο φαίνεται στις επόμενες εικόνες.

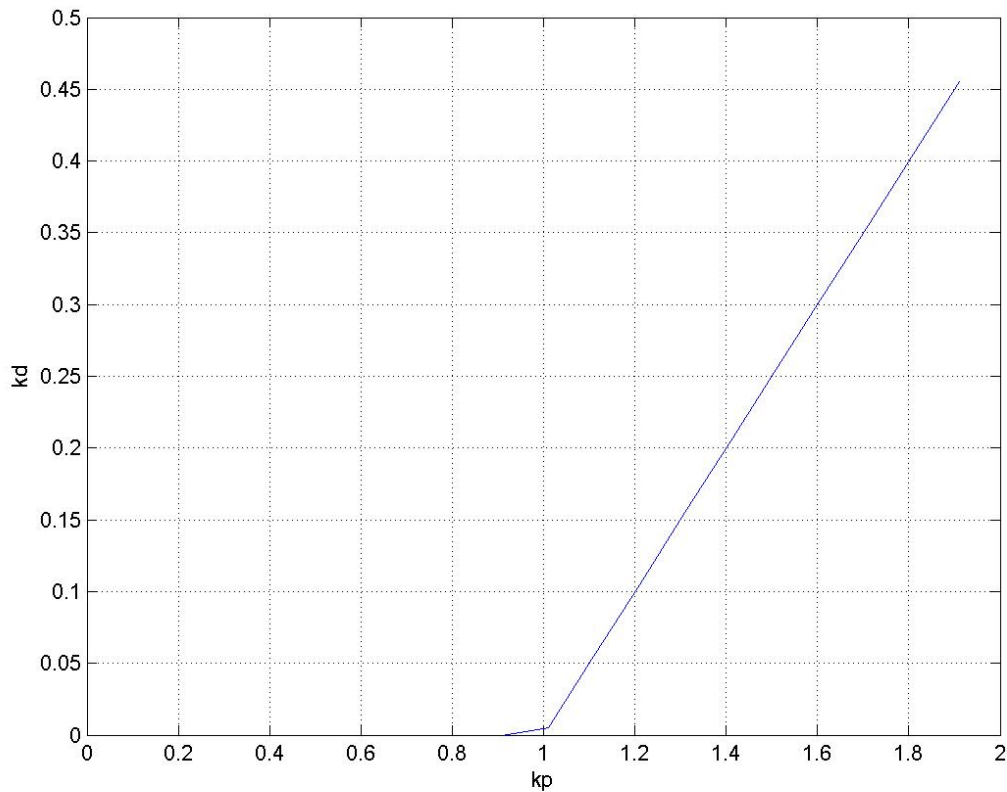


Εικόνα Β.1 Μοντέλο προσομοίωσης εφοδιαστικής αλυσίδας PD Controller στο Matlab



Εικόνα Β.2 Μοντέλο προσομοίωσης ενδιάμεσου κόμβου εφοδιαστικής αλυσίδας PD Controller στο Matlab

Στην εικόνα 2 μπορείτε να δείτε κάτω αριστερά τον αναλογικό-διαφορικό ελεγκτή (PD Controller), τον οποίο θα τον ρυθμίζουμε ανάλογα με τις τιμές των μεταβλητών k_p και k_d του ελεγκτή. Ο ελεγκτής αυτός είναι ένας αναλογικός-ολοκληρωτικός-διαφορικός ελεγκτής. Αυτό σημαίνει ότι έχει τρεις μεταβλητές τις k_p , k_i και k_d , από τις οποίες θα αλλάζουμε τις τιμές των μεταβλητών k_p και k_d , ενώ η μεταβλητή k_i θα έχει τιμή πάντα μηδέν. Τις τιμές αυτές θα τις παίρνουμε από το σχήμα του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης» του μοντέλο της εφοδιαστικής αλυσίδας το οποίο φαίνεται και στην επόμενη εικόνα.



Εικόνα Β.3 Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας αναλογίας-διαφορίσης (PD)

Οι τιμές του ζευγαριού των μεταβλητών (k_p, k_d) θα είναι οι εξής $(1.01,0.01)$, $(1.2,0.1)$, $(1.4,0.2)$, $(1.6,0.3)$, $(1.8,0.4)$, $(1.9,0.45)$. Αυτές οι τιμές προκύπτουν από τη γραμμή του σχήματος της παραπάνω εικόνας. Θα επιλέξουμε και μερικές ακόμα τυχαίες τιμές για τις μεταβλητές για να ελέγξουμε τι γίνεται και στα υπόλοιπα σημεία του σχήματος πάνω και κάτω από την γραμμή και οι οποίες είναι οι $(1.01,0.5)$, $(1.2,0.5)$, $(1.4,0.1)$, $(1.4,0.5)$, $(1.6,0.1)$, $(1.6,0.5)$, $(1.8,0.1)$, $(1.8,0.5)$, $(1.9,0.1)$, $(1.9,0.5)$, $(0.1,0.1)$, $(0.1,0.5)$, $(0.2,0.1)$, $(0.2,0.5)$, $(0.4,0.1)$, $(0.4,0.9)$, $(0.7,0.1)$, $(0.7,0.5)$, $(0.7,0.9)$, $(0.9,0.1)$, $(0.9,0.9)$. Για να βρούμε την εμφάνιση ή όχι του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης» θα πρέπει να υπολογίζουμε και να εξετάζουμε κάθε ζεύγος τιμών των μεταβλητών με τα ακόλουθα βήματα:

[1] Αλλαγή των τιμών του ελεγκτή στο μοντέλο προσομοίωσης

[2] Αποθήκευση και έναρξη της προσομοίωσης του μοντέλου προσομοίωσης

[3] Εύρεση της μέσης τιμής και διασποράς τόσο των τιμών εισόδου³ και εξόδου του μοντέλου προσομοίωσης.

[4] Σύγκριση των αποτελεσμάτων εισόδου και εξόδου με βάση δύο κριτήρια, τα οποία είναι:

- a. Αν η διασπορά της εισόδου είναι μεγαλύτερη ή ίση από την διασπορά εξόδου, τότε αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης». Αυτό συμβαίνει, επειδή η διασπορά των τιμών της εξόδου δεν ξέφυγε από τα όρια των τιμών της εισόδου, και ο ελεγκτής λειτουργεί σωστά με τις τιμές που βάλαμε στις μεταβλητές k_p και k_d του ελεγκτή.
- b. Αντίθετα, αν η διασπορά της εισόδου είναι μικρότερη από την διασπορά εξόδου, τότε αυτό σημαίνει ότι υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης». Αυτό συμβαίνει επειδή η διασπορά των τιμών της εξόδου ξέφυγε από τα όρια των τιμών της εισόδου, και ο ελεγκτής δεν λειτουργεί σωστά.

Θα ξεκινήσουμε τα παραπάνω βήματα της έρευνας του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» με τα ζευγάρια τιμών των μεταβλητών (k_p , k_d), οι οποίες ανήκουν πάνω στη γραμμή του σχήματος της **Εικόνας 2**, (1.01,0.01), (1.2,0.1), (1.4,0.2), (1.6,0.3), (1.8,0.4), (1.9,0.45).

- (1.01,0.01)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4474

Διασπορά τιμών εξόδου: 3.4840

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

³ Είναι αποθηκευμένες στον πίνακα input και output αντίστοιχα, οι οποίοι υπάρχουν στο workspace του Matlab.

- (1.2,0.1)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4474

Διασπορά τιμών εξόδου: 3.4840

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

- (1.4,0.2)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4464

Διασπορά τιμών εξόδου: 3.6762

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

- (1.6,0.3)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 8.9399

Διασπορά τιμών εξόδου: 109.6998

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει μεγάλη ενίσχυση του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης».

- (1.8,0.4)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 8.9449

Διασπορά τιμών εξόδου: 112.2084

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει μεγάλη ενίσχυση του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης».

- (1.9,0.45)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 8.9510

Διασπορά τιμών εξόδου: 112.2371

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει μεγάλη ενίσχυση του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης».

Θα συνεχίσουμε με την έρευνα για την ύπαρξη ή όχι του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης» των επόμενων ζευγαριών τιμών των μεταβλητών (k_p, k_d) (1.01,0.5), (1.2,0.5), (1.4,0.1), (1.4,0.5), (1.6,0.1), (1.6,0.5), (1.8,0.1), (1.8,0.7), (1.9,0.1), (1.9,0.7), (0.1,0.1), (0.1,0.5), (0.2,0.1), (0.2,0.5), (0.4,0.1), (0.4,0.9), (0.7,0.1), (0.7,0.5), (0.7,0.9), (0.9,0.1), (0.9,0.9).

- (1.01,0.5)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.3744

Διασπορά τιμών εξόδου: 8.1523

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε μικρό βαθμό.

- (1.2,0.5)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 8.8949

Διασπορά τιμών εξόδου: 138.1483

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει μεγάλη ενίσχυση του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης».

- (1.4,0.1)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4474

Διασπορά τιμών εξόδου: 3.4840

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

- (1.4,0.5)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 8.9680

Διασπορά τιμών εξόδου: 107.4198

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει μεγάλη ενίσχυση του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης».

- (1.6,0.1)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4464

Διασπορά τιμών εξόδου: 3.5019

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

- (1.6,0.5)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 8.9499

Διασπορά τιμών εξόδου: 115.9754

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει μεγάλη ενίσχυση του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης».

- (1.8,0.1)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4304

Διασπορά τιμών εξόδου: 4.7404

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε μικρό βαθμό.

- (1.8,0.7)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 8.6947

Διασπορά τιμών εξόδου: 226.2804

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει μεγάλη ενίσχυση του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης».

- (1.9,0.1)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 8.8408

Διασπορά τιμών εξόδου: 126.5207

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει μεγάλη ενίσχυση του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης».

- (1.9,0.7)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 8.6947

Διασπορά τιμών εξόδου: 226.4748

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει μεγάλη ενίσχυση του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης».

- (0.1,0.1)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4474

Διασπορά τιμών εξόδου: 3.4840

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

- (0.1,0.5)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4474

Διασπορά τιμών εξόδου: 3.4840

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

- (0.1,0.9)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4444

Διασπορά τιμών εξόδου: 3.9666

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε μικρό βαθμό.

- (0.1,1.1)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.0190

Διασπορά τιμών εξόδου: 358.3594

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει μεγάλη ενίσχυση του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης».

- (0.2,0.1)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4744

Διασπορά τιμών εξόδου: 3.4840

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

- (0.2,0.5)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4744

Διασπορά τιμών εξόδου: 3.4840

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

- (0.2,0.9)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4024

Διασπορά τιμών εξόδου: 12.9281

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε μέτριο βαθμό.

- (0.4,0.1)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4474

Διασπορά τιμών εξόδου: 3.4840

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

- (0.4,0.5)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4474

Διασπορά τιμών εξόδου: 3.4840

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

- (0.4,0.9)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.0140
Διασπορά τιμών εξόδου: 174.1261

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει μεγάλη ενίσχυση του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης».

- (0.7,0.1)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725
Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196
Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4474
Διασπορά τιμών εξόδου: 3.4840

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

- (0.7,0.5)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725
Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196
Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4644
Διασπορά τιμών εξόδου: 3.6822

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

- (0.7,0.9)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725
Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196
Μέση τιμή τιμών εξόδου: 8.9820
Διασπορά τιμών εξόδου: 159.0558

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει μεγάλη ενίσχυση του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης».

- (0.9,0.1)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4474

Διασπορά τιμών εξόδου: 3.4840

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε οριακό βαθμό.

- (0.9,0.5)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 9.4444

Διασπορά τιμών εξόδου: 4.1550

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έστω και σε μικρό βαθμό.

- (0.9,0.9)

Μέση τιμή τιμών εισόδου: 9.4725

Διασπορά τιμών εισόδου: 3.3196

Μέση τιμή τιμών εξόδου: 8.9570

Διασπορά τιμών εξόδου: 133.8308

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται να υπάρχει μεγάλη ενίσχυση του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης».