



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ”

# **Ισοδυναμίες Πολυωνυμικών Πινάκων και Εφαρμογή στην Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Σωτηριάδου Αργυρώ**

**Επιβλέπων:** Νικόλαος Καραμπετάκης  
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2009





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ”

# Ισοδυναμίες Πολυωνυμικών Πινάκων και Εφαρμογή στην Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σωτηριάδου Αργυρώ

**Επιβλέπων:** Νικόλαος Καραμπετάκης  
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

.....  
Α. Βαρδουλάκης  
Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....  
Μ. Γουσίδου  
Αν. Καθηγήτρια Α.Π.Θ

.....  
Ν. Καραμπετάκης  
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2009

.....  
Σωτηριάδου Αργυρώ  
Πτυχιούχος Μαθηματικός - ΑΠΘ

Copyright © Σωτηριάδου Αργυρώ, 2009.  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	5
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	6
ABSTRACT.....	7
ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	8
<b>Κεφάλαιο</b>	<b>Σελίδα</b>
1. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	9
1.1 Μετασχηματισμοί σταθερών πινάκων.....	9
1.1.1 Σχέσεις Ισοδυναμίας.....	9
1.1.2 Ένα αναλλοίωτο στοιχείο στο $R$ .....	10
1.2.3 Ένα πλήρες αναλλοίωτο στο $R$ .....	10
1.2 Πολυωνυμικοί πίνακες.....	11
1.3 Στοιχειώδεις πράξεις πολυωνυμικών πινάκων.....	12
1.4 Γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις πινάκων.....	18
1.5 Κανονική μορφή ενός $\lambda$ -πίνακα.....	28
1.6 Αναλλοίωτα πολυώνυμα και στοιχειώδεις διαιρέτες ενός πολυωνυμικού πίνακα.....	30
1.7 Ισοδυναμία πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων.....	37
1.8 Γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία (Extended unimodular equivalence).....	39
2. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ.....	53
2.1 Εισαγωγή.....	53
2.1.1 Αποσυζευτικά μηδενικά.....	56
2.2 Τύποι συστημάτων και αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων.....	58
2.1.2 Μετασχηματισμός ενός Rosenbrock πίνακα συστήματος στο χώρο καταστάσεων .....	63
2.3 Fuhmann ισοδυναμία συστημάτων.....	67
2.4 Αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων για κλασματικούς πίνακες.....	70
2.5 Πρώτοι κλασματικοί πίνακες.....	75
BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	81

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται σχέσεις ισοδυναμίας και συγκεκριμένα ισοδυναμίες πολυωνυμικών πινάκων καθώς και ισοδυναμίες συστημάτων.

Ειδικότερα στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται λόγος για τη δομή πολυωνυμικών πινάκων, τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς αυτών καθώς και την γεωμετρική ερμηνεία των αναλλοίωτων που διατηρούν οι μετασχηματισμοί αυτοί σε σχέση με το χώρο λύσεων των γραμμικών ομογενών διαφορικών εξισώσεων των πινάκων. Γίνεται εκτενής ανάλυση της αντιστρέψιμης ισοδυναμίας (unimodular equivalence) που αφορά πολυωνυμικούς πίνακες ιδίων διαστάσεων και της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας (extended unimodular equivalence) που αφορά πολυωνυμικούς πίνακες διαφορετικών διαστάσεων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετούνται ισοδυναμίες συστημάτων και συγκεκριμένα η ισοδυναμία στο χώρο καταστάσεων, η Rosenbrock αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων, η αντιστρέψιμη ισοδυναμία συστημάτων και η Fuhrmann ισοδυναμία συστημάτων.

## ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Ισοδυναμίες, Smith μορφή, πολυωνυμικοί πίνακες, αντιστρέψιμη ισοδυναμία, γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία, ισοδυναμίες συστημάτων, ισοδυναμία στο χώρο καταστάσεων, Rosenbrock ισοδυναμία, Fuhrmann ισοδυναμία.

## **ABSTRACT**

The present paper concerns about equivalence relations and moreover about equivalence of polynomial matrices as well as system equivalence.

The paper is divided into two sections. More precisely, the first section deals with the structure of polynomial matrices, the elementary transformation of those as well as the geometric interpretation of invariants that these transformations keep in relation to the solutions of the linear differential equations of the matrices. There is an extensive analysis of the unimodular equivalence which is about polynomial matrices of the same dimension and of the extended unimodular equivalence that is about polynomial matrices of different dimensions.

The second section is about system equivalence and specifically state-space systems equivalence, Rosenbrock's strict system equivalence, unimodular equivalence systems and Fuhrmann's system equivalence.

## **KEY WORDS**

Equivalence, Smith form, polynomial matrix, unimodular equivalence, extended unimodular equivalence, system equivalence, state-space equivalence, Rosenbrock's equivalence, Fuhrmann's equivalence.

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ.Νικόλαο Καραμπετάκη για την βοήθεια, την επιστημονική του καθοδήγηση και τη συνολική επίβλεψη της εργασίας αυτής. Ήταν πάντα διαθέσιμος για συζήτηση, συμβάλλοντας δημιουργικά στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Οφείλω ακόμη να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ.Βαρδουλάκη Αντώνιο και κα.Γουσίδου-Κουτίτα Μαρία για τον χρόνο που αφιέρωσαν στη μελέτη και αξιολόγηση της εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για τη ψυχολογική και οικονομική υποστήριξη καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### Ισοδυναμίες Πολυωνυμικών Πινάκων

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τις βασικές έννοιες που απαιτούνται για την κατανόηση των επόμενων ενοτήτων. Το περιεχόμενο του κεφαλαίου αυτού περιλαμβάνει έννοιες που αφορούν τους μετασχηματισμούς ομοιότητας πινάκων, την δομή πολυωνυμικών πινάκων, τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς αυτών καθώς και την γεωμετρική ερμηνεία των αναλλοίωτων που διατηρούν οι μετασχηματισμοί αυτοί σε σχέση με το χώρο των λύσεων των γραμμικών ομογενών διαφορικών εξισώσεων των πινάκων.

#### 1.1 Μετασχηματισμοί ομοιότητας σταθερών πινάκων

**Ορισμός 1.1** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας με στοιχεία από το  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$  και έστω  $\lambda$  ένας πραγματικός ( μιγαδικός ) αριθμός για τον οποίο η εξίσωση  $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$  έχει μια μη τετριμμένη λύση (δηλ.  $\underline{x} \neq 0$ ). Η τιμή  $\lambda$  ορίζεται ως *ιδιοτιμή* του πίνακα  $A$ . Το μη μηδενικό διάνυσμα που ικανοποιεί την εξίσωση  $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$  ονομάζεται *ιδιοδιάνυσμα* του  $A$  που αντιστοιχεί στην τιμή  $\lambda$ . □

##### 1.1.1 Σχέσεις ισοδυναμίας.

Μια σχέση  $\mathfrak{R}$  πάνω στο σύνολο  $X$ , δηλαδή ένα υποσύνολο  $\mathfrak{R}$  του καρτεσιανού γινομένου  $X \times X$ , ονομάζεται σχέση ισοδυναμίας εάν και μόνο εάν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. **Ανακλαστική ιδιότητα:**  $(x, x) \in \mathfrak{R}$  για κάθε  $x \in X$

Δηλαδή κάθε στοιχείο  $x \in X$  είναι ισοδύναμο με τον εαυτό του.

2. **Συμμετρική ιδιότητα:**  $(x, y) \in \mathfrak{R}$  συνεπάγεται  $(y, x) \in \mathfrak{R}$

Δηλαδή το στοιχείο  $x \in X$  είναι ισοδύναμο με το  $y \in Y$  εάν και μόνο εάν το  $y \in Y$  είναι ισοδύναμο με το  $x \in X$ .

**3. Μεταβατική ιδιότητα:**  $(x, y) \in \mathfrak{R}$  και  $(y, z) \in \mathfrak{R}$  συνεπάγεται ότι  $(x, z) \in \mathfrak{R}$

Δηλαδή αν το στοιχείο  $x \in X$  είναι ισοδύναμο με το στοιχείο  $y \in Y$  και το στοιχείο  $y \in Y$  είναι ισοδύναμο με το στοιχείο  $z \in Z$  τότε και το στοιχείο  $x \in X$  είναι ισοδύναμο με το στοιχείο  $z \in Z$ .  $\square$

### 1.1.2 Ένα αναλλοίωτο στοιχείο στο R.

Αν  $T$  είναι ένα σύνολο τότε μια συνάρτηση  $f: X \rightarrow T$  ονομάζεται αναλλοίωτο στοιχείο του  $R$  όταν

$$x \sim_R y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Με άλλα λόγια η  $f: X \rightarrow T$  είναι ένα αναλλοίωτο στοιχείο του  $R$  εάν όλα τα στοιχεία  $y \in Y$  τέτοια ώστε  $(x, y) \in R$  έχουν την ίδια εικόνα διαμέσου της  $f$ .  $\square$

### 1.1.3 Ένα πλήρες αναλλοίωτο στο R.

Αν  $T$  είναι ένα σύνολο τότε μια συνάρτηση  $f: X \rightarrow T$  ονομάζεται πλήρες αναλλοίωτο στοιχείο στο  $R$  όταν

$$x \sim_R y \Leftrightarrow f(x) = f(y). \quad \square$$

**Ορισμός 1.2** Οι πίνακες  $A'$  και  $A$  λέγονται *όμοιοι* πίνακες όταν υπάρχουν μετασχηματισμοί της μορφής  $A' = T^{-1}AT$  όπου  $T$  αντιστρέψιμος πίνακας. Οι πίνακες αυτοί έχουν την ίδια τάξη και τις ίδιες ιδιοτιμές. Ο πίνακας  $T$  λέγεται πίνακας μετασχηματισμού.  $\square$

Όμοιοι πίνακες παριστάνουν τον ίδιο γραμμικό μετασχηματισμό σε διαφορετικές βάσεις. Οι μετασχηματισμοί ομοιότητας αφήνουν αναλλοίωτες τις ιδιοτιμές του πίνακα.

## 1.2 Πολυωνυμικοί πίνακες.

Έστω  $\mathbb{R}$  το σώμα των πραγματικών αριθμών,  $\mathbb{R}[s]$  ο δακτύλιος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και  $\mathbb{R}(s)$  το σώμα των κλασμάτων στο  $\mathbb{R}[s]$ . Ένας ρητός πίνακας  $T(s)$  του οποίου τα στοιχεία είναι πολυώνυμα καλείται πολυωνυμικός πίνακας. Έστω το σύνολο των  $p \times m$  πολυωνυμικών πινάκων το οποίο συμβολίζουμε με  $\mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Ένας πίνακας  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  αναλύεται συνήθως ως εξής:

$$T(s) = T_0 + T_1s + T_2s^2 + \dots + T_qs^q \quad \text{όπου } T_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

Ο αριθμός  $q$  ονομάζεται *τάξη* του πολυωνυμικού πίνακα  $T(s)$ .

Έστω  $\mathbb{R}^{r \times c}(s)$  το σύνολο των πινάκων που έχουν  $r$  γραμμές και  $c$  στήλες και στοιχεία στο  $\mathbb{R}(s)$ .

**Ορισμός 1.3** (Gantmacher 1959) **Βαθμός** ενός πολυωνυμικού πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ , που συμβολίζεται με  $\deg T(s)$ , είναι ο μέγιστος βαθμός όλων των μέγιστης τάξης (μη μηδενικών) υποοριζουσών του  $T(s)$ . □

**Ορισμός 1.4** (Wolovich 1974) Ορίζουμε ως **πολυπλοκότητα των γραμμών**  $c_r(T)$  (των στηλών  $c_c(T)$ ) του πολυωνυμικού πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ , το άθροισμα των βαθμών των γραμμών (των στηλών) των μη μηδενικών πολυωνυμικών διανυσμάτων δηλαδή:

$$c_r(T) = \sum_{i=1}^p \deg \tilde{t}_i(s) \quad \left( c_c(T) = \sum_{j=1}^m \deg t_j(s) \right) \quad \square$$

**Ορισμός 1.5** (Rosenbrock 1970) Ένας πολυωνυμικός πίνακας  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ονομάζεται **αντιστρέψιμος (unimodular)** εάν και μόνο εάν υπάρχει πολυωνυμικός πίνακας  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  τέτοιος ώστε  $T(s)T(s) = I_p$  ή ισοδύναμα εάν και μόνο εάν  $\det T(s) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ . □

**Ορισμός 1.6** (Wolovich 1974) Έστω  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  με  $\text{rank}T(s) = p (= m)$ . Τότε ο  $T(s)$  είναι **κανονικός ως προς τις γραμμές του** (row proper) [**κανονικός ως προς τις στήλες του** (column proper)] εάν και μόνο εάν η πολυπλοκότητα  $c_r(T)$  των γραμμών ( $c_c(T)$  των στηλών) είναι ίση με το βαθμό του πολυωνυμικού πίνακα  $T(s)$  ( $\text{deg}T(s)$ ).  
 Δηλαδή:

$$T(s) \text{ row proper} \Leftrightarrow c_r(T) = \text{deg}T(s)$$

$$T(s) \text{ column proper} \Leftrightarrow c_c(T) = \text{deg}T(s) \quad \square$$

**Ορισμός 1.7** (Vardulakis 1991) Έστω  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ ,  $T(s) = T_0 + T_1s + T_2s^2 + \dots + T_qs^q$  όπου  $T_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Ο  $T(s)$  θα ονομάζεται **ομαλός** εάν και μόνο εάν  $\text{rank}_R T_q = p$ .  $\square$

### 1.3 Στοιχειώδεις πράξεις πολυωνυμικών πινάκων

Οι στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών και στηλών ενός πολυωνυμικού πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ορίζονται ως εξής:

- 1) Εναλλαγή δυο γραμμών ή στηλών του  $T(s)$
- 2) Πολλαπλασιασμός της  $i$ -γραμμής (στήλης) του  $T(s)$  με οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο του  $\mathbb{R}$  (αντιστρέψιμο στοιχείο).
- 3) Πολλαπλασιασμός της  $i$ -γραμμής ή στήλης του  $T(s)$  με μη μηδενικό στοιχείο  $t(s)$  του  $\mathbb{R}[s]$  και πρόσθεση της σε οποιαδήποτε άλλη γραμμή ή στήλη  $j$  του  $T(s)$ .

Οι στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών (στηλών) του  $T(s)$  επιτυγχάνονται με πολλαπλασιασμό του  $T(s)$  από αριστερά (δεξιά) με τους στοιχειώδεις αντιστρέψιμους (unimodular) πίνακες οι οποίοι παράγονται εκτελώντας τις αντίστοιχες στοιχειώδεις πράξεις στον μοναδιαίο πίνακα  $I_p$  ( $I_m$ ). Μπορεί ακόμη να δειχθεί ότι κάθε αντιστρέψιμος unimodular πίνακας μπορεί να γραφεί ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

**Ορισμός 1.8** (Gantmacher 1959) Δύο πολυωνυμικοί πίνακες  $T_1(s), T_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  καλούνται **αντιστρέψιμα ισοδύναμοι** (unimodular equivalent) αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι unimodular πίνακες  $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times m}, T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε  $T_L(s)T_1(s)T_R(s) = T_2(s)$ . □

**Θεώρημα 1.9** Η αντιστρέψιμη ισοδυναμία (unimodular equivalence) είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των  $p \times m$  πολυωνυμικών πινάκων.

### Απόδειξη

1. Ανακλαστική ιδιότητα:

Έστω  $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Ισχύει  $I_p T_1(s) I_m = T_1(s)$ .

2. Συμμετρική ιδιότητα:

Έστω  $T_1(s), T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (unimodular equivalent) πολυωνυμικοί πίνακες δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}, T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε  $T_L(s)T_1(s)T_R(s) = T_2(s)$ , τότε θα έχουμε  $T_1(s)T_R(s) = T_L^{-1}(s)T_2(s) \Leftrightarrow T_1(s) = T_L^{-1}(s)T_2(s)T_R^{-1}(s)$ , όπου  $T_L^{-1}(s)$  και  $T_R^{-1}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  γιατί είναι αντιστρέψιμοι.

3. Μεταβατική ιδιότητα:

Έστω  $T_1(s), T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  αντιστρέψιμα ισοδύναμοι πίνακες δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}, T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε  $T_L(s)T_1(s)T_R(s) = T_2(s)$  και  $T_2(s), T_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  αντιστρέψιμα ισοδύναμοι δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $T'_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}, T'_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  και  $T'_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε  $T'_L(s)T_2(s)T'_R(s) = T_3(s)$  τότε θα έχουμε  $T_2(s)T'_R(s) = T'^{-1}_L(s)T_3(s) \Leftrightarrow T_2(s) = T'^{-1}_L(s)T_3(s)T'^{-1}_R(s)$ .

Οπότε

$$T_L(s)T_1(s)T_R(s) = T_2(s) \Leftrightarrow T_L(s)T_1(s)T_R(s) = T'^{-1}_L(s)T_3(s)T'^{-1}_R(s) \Leftrightarrow$$

$$T_1(s)T_R(s) = T'^{-1}_L(s)T'^{-1}_R(s)T_3(s)T'^{-1}_R(s) \Leftrightarrow$$

$$T_1(s) = T'^{-1}_L(s)T'^{-1}_R(s)T_3(s)T'^{-1}_R(s) \Leftrightarrow$$

$T_1(s) = [T'_L(s) \cdot T_L(s)]^{-1} T_3(s) [T_R(s) \cdot T'_R(s)]^{-1}$ , όπου  $[T'_L(s) \cdot T_L(s)]^{-1}$  και  $[T_R(s) \cdot T'_R(s)]^{-1} \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  γιατί οι πίνακες αυτοί είναι αντιστρέψιμοι. ■

Περνάμε τώρα στην κανονική μορφή στην οποία ένας ορθογώνιος πίνακας  $A(s)$  μπορεί να έρθει εφαρμόζοντας αριστερά και δεξιά στοιχειώδεις μετασχηματισμούς.

**Θεώρημα 1.10** (Gantmacher 1959) [**Smith μορφή ενός πολυωνυμικού πίνακα**]

Έστω  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  με  $rank_{R(s)} T(s) = r$ ,  $r \leq \min\{p, m\}$ . Τότε ο  $T(s)$  είναι ισοδύναμος με ένα διαγώνιο πίνακα  $S_{T(s)}^C(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  που έχει τη μορφή:

$$S_{T(s)}^C(s) = \text{diag} \left[ \varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \dots, \varepsilon_r(s), \mathbf{0}_{m-r, p-r} \right] \quad (1.1)$$

και ονομάζεται **Smith** μορφή στο  $\mathbb{C}$  του  $T(s)$ , όπου  $\varepsilon_i(s) \in \mathbb{R}[s]$ , έχουν ως μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα, είναι πρώτα μεταξύ τους και ικανοποιούν τις σχέσεις  $\varepsilon_i(s) / \varepsilon_{i+1}(s)$ . Τα πολυώνυμα  $\varepsilon_i(s)$  αποτελούν **αναλλοίωτα πολυώνυμα** του  $T(s)$ .

**Απόδειξη**

Μεταξύ όλων των στοιχείων  $a_{ik}(s)$  του  $T(s)$  που δεν είναι ίσα με το μηδέν διαλέγουμε ένα ελαχίστου βαθμού στο  $s$  και με κατάλληλες μεταθέσεις των γραμμών και στηλών πηγαίνουμε αυτό το στοιχείο στη θέση  $a_{11}(s)$ . Μετά βρίσκουμε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των πολυωνύμων  $a_{i1}(s)$  και  $a_{1k}(s)$  με το  $a_{11}(s)$ :

$$a_{i1}(s) = a_{11}(s)q_{i1}(s) + r_{i1}(s), \quad a_{1k}(s) = a_{11}(s)q_{1k}(s) + r_{1k}(s) \\ (i = 2, 3, \dots, m; k = 2, 3, \dots, n)$$

Αν έστω και ένα από τα υπόλοιπα  $r_{i1}(s), r_{1k}(s)$  ( $i = 2, 3, \dots, m; k = 2, 3, \dots, n$ ) για π.χ. το  $r_{1k}(s)$  δεν είναι ίσο με το μηδέν, τότε με αφαίρεση από την  $k$ -th στήλη της πρώτης στήλης πολλαπλασιασμένη με  $q_{1k}(s)$ , αντικαθιστούμε το  $a_{1k}(s)$  με το υπόλοιπο  $r_{1k}(s)$  που είναι μικρότερου βαθμού από το  $a_{11}(s)$ . Μετά, με την ίδια διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω, μπορούμε να μειώσουμε το βαθμό του στοιχείου στην πάνω αριστερή γωνία του πίνακα βάζοντας στην θέση του ένα στοιχείο μικρότερου βαθμού ως προς  $s$ .

Αλλά εάν όλα τα υπόλοιπα  $r_{21}(s), \dots, r_{m1}(s); r_{12}(s), \dots, r_{1n}(s)$  είναι ίσα με το μηδέν, τότε αφαιρώντας από την  $i$ -th γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με  $q_{i1}(s)$  ( $i = 2, \dots, m$ ) και από την  $k$ -th στήλη την πρώτη πολλαπλασιασμένη με  $q_{1k}(s)$  ( $k = 2, \dots, n$ ) ανάγουμε τον πολυωνυμικό πίνακα στη μορφή

$$\begin{vmatrix} a_{11}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}(s) & \dots & a_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2}(s) & \dots & a_{mn}(s) \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

Εάν έστω και ένα από τα στοιχεία  $a_{ik}(s)$  ( $i = 2, \dots, m; k = 2, \dots, n$ ) δεν είναι διαιρετό χωρίς υπόλοιπο από το  $a_{11}(s)$ , τότε προσθέτουμε στη πρώτη στήλη, αυτή τη στήλη η οποία περιέχει τέτοια στοιχεία στα οποία καταλήξαμε στην προηγούμενη διαδικασία και μπορούμε να αντικαταστήσουμε ξανά το στοιχείο  $a_{11}(s)$  με ένα πολυώνυμο μικρότερου βαθμού.

Εφόσον το αρχικό στοιχείο  $a_{11}(s)$  είχε ένα καθορισμένο βαθμό και εφόσον η διαδικασία μείωσης αυτού του βαθμού δε μπορεί να συνεχιστεί απεριόριστα, πρέπει μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό στοιχειωδών πράξεων να πάρουμε έναν πίνακα της μορφής:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22}(s) & \dots & b_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2}(s) & \dots & b_{mn}(s) \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

Στον οποίο όλα τα στοιχεία  $b_{ik}(s)$  είναι διαιρετά, χωρίς υπόλοιπο, με το  $\varepsilon_1(s)$ . Αν μεταξύ αυτών των στοιχείων  $b_{ik}(s)$  υπάρχει ένα που δεν είναι ίσο με το μηδέν, τότε συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία στον υποπίνακα που προκύπτει από τις γραμμές  $2, \dots, m$  και τις στήλες  $2, \dots, n$ , και ανάγουμε τον πίνακα (1.2) στη μορφή:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}(s) & \dots & c_{3n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{m3}(s) & \dots & c_{mn}(s) \end{vmatrix}$$

όπου  $\varepsilon_2(s)$  είναι διαιρετό χωρίς υπόλοιπο με το  $a_1(s)$  και όλα τα πολυώνυμα  $a_{ik}(s)$  όπου  $i=3, \dots, m$ ,  $k=3, \dots, n$  είναι διαιρετά χωρίς υπόλοιπο με το  $\varepsilon_2(s)$ . Συνεχίζοντας την διαδικασία, τελικά καταλήγουμε σε ένα πίνακα της μορφής:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_s(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

όπου τα πολυώνυμα  $\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \dots, \varepsilon_s(s)$  ( $s \leq \min(m, n)$ ) δεν είναι ίσα με μηδέν και το καθένα είναι διαιρετό με το προηγούμενο.

Πολλαπλασιάζοντας τις πρώτες  $s$  γραμμές με τους κατάλληλους μη-μηδενικούς παράγοντες, μπορούμε να συμφωνήσουμε ότι οι μεγαλύτεροι συντελεστές των πολυωνύμων  $\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \dots, \varepsilon_s(s)$  είναι ίσοι με 1. ■

**Ορισμός 1.11** (Gantmacher 1959) Έστω  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Τότε τα **μηδενικά** του πολυωνυμικού πίνακα  $T(s)$  ορίζονται ως τα μηδενικά των πολυωνύμων  $\varepsilon_i(s)$ ,  $i \in r$ , που ορίστηκαν από τη σχέση (1.1). □

**Παράδειγμα 1.12** Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την Smith μορφή του

$$A(s) = \begin{pmatrix} s^2 + s & s^2 - 1 \\ s + 1 & s + 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2 \times 2}$$

Μεταξύ όλων των στοιχείων του  $A(s)$  που δεν είναι ίσα με το μηδέν διαλέγουμε αυτό που είναι ελάχιστης τάξης και το πηγαίνουμε με εναλλαγές γραμμών στην θέση (1,1)  $a_{11}(s)$ . Έτσι με εναλλαγή της πρώτης και δεύτερης γραμμής παίρνουμε:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{v}_1} \begin{pmatrix} s^2 + s & s^2 - 1 \\ s + 1 & s + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 1 & s + 1 \\ s^2 + s & s^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Μετά βρίσκουμε τα πηλίκια και τα υπόλοιπα των πολυωνύμων  $a_{21}(s)$  και  $a_{12}(s)$  με το  $a_{11}(s)$ . Οπότε  $a_{21}(s) = a_{11}(s)q_{21}(s) + r_{21}(s) \Leftrightarrow s^2 + s = (s + 1)s + 0$  και



$a_{12}(s) = a_{11}(s)q_{12}(s) + r_{12} \Leftrightarrow s+1 = (s+1) \cdot 1 + 0$ . Επειδή όλα τα υπόλοιπα είναι ίσα με μηδέν αφαιρούμε τη δεύτερη γραμμή από την πρώτη πολλαπλασιασμένη με το  $q_{21}(s)$  δηλαδή με το  $s$ .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}}_{U_2} \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ s^2+s & s^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & -s-1 \end{pmatrix}$$

Έπειτα αφαιρούμε τη δεύτερη στήλη από την πρώτη πολλαπλασιασμένη με το  $q_{12}(s)$  δηλαδή με το 1.

$$\begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & -s-1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_1} = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & -s-1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -1.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U_3} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & -s-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} = S_{T(s)}^C$$

$$S_{T(s)}^C = U_L(s)A(s)U_R(s)$$

Όπου  $U_L(s)$  το γινόμενο:

$$U_L(s) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}}_{U_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}$$

Και  $U_R(s)$  ο πίνακας:

$$U_R(s) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_1}$$

□

### 1.4 Γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις πινάκων

Έστω η γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση

$$A(\rho)\beta(t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (1.5)$$

όπου  $\rho = \frac{d}{dt}$  είναι ο διαφορικός τελεστής,  $A(\rho)$  είναι ένας  $r \times r$  ομαλός πολυωνυμικός πίνακας δηλαδή  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times r}$  και  $\beta(t) : (0-, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^r$  δηλαδή ένα  $r$ -διάστατο διάνυσμα που περιέχει ως στοιχεία συναρτήσεις και το οποίο αναζητούμε. Υποθέτουμε ότι το  $\beta(t)$  ανήκει στον χώρο των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων, έτσι ώστε  $\beta^{(q)}(0-) = \beta^{(q)}(0+) = \beta^{(q)}(0)$  με  $q = 0, 1, 2, \dots$  και όπου  $\beta^{(q)}(t)$  δηλώνει την παράγωγο τάξης  $q$  του  $\beta(t)$  ως προς  $t$ . Έστω:

$$A(\rho) = A_k \rho^k + A_{k-1} \rho^{k-1} + \dots + A_1 \rho + A_0 \quad (1.6)$$

όπου  $A_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$  και έστω  $\beta(0-), \beta^{(1)}(0-), \dots, \beta^{(k-1)}(0-)$  είναι οι 'αρχικές συνθήκες' του διανύσματος  $\beta(t)$  και των παραγώγων του τάξης  $1, 2, \dots, k-1$  στο σημείο  $t=0-$ .

Έστω  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  ένα πεπερασμένο μηδενικό του  $A(\rho)$  πρδ έστω  $|A(\lambda_0)| = 0$ , τότε έχουμε

**Πρόταση 1.13** Έστω

$$\beta(t) = \left[ \frac{t^\mu}{\mu!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_1 + \dots + \frac{t}{1!} \beta_{\mu-1} + \beta_\mu \right] e^{\lambda_0 t} \quad (1.7)$$

όπου  $\beta_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 0, 1, \dots, \mu$  και  $\beta_0 \neq 0$ . Τότε η  $\beta(t)$  ικανοποιεί την γραμμική ομογενή διαφορική εξίσωση (1.5) εάν και μόνο εάν οι επόμενες εξισώσεις ικανοποιούνται:

$$\begin{aligned} A(\lambda_0)\beta_0 &= 0 \\ A^{(1)}(\lambda_0)\beta_0 + A(\lambda_0)\beta_1 &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{1}{\mu!} A^{(\mu)}(\lambda_0)\beta_0 + \frac{1}{(\mu-1)!} A^{(\mu-1)}(\lambda_0)\beta_1 + \dots + A^{(1)}(\lambda_0)\beta_{\mu-1} + A(\lambda_0)\beta_\mu &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

**Απόδειξη**

Παρατηρούμε ότι

$$A(\rho)\beta(t) =$$

$$\begin{aligned}
& A_0 \left[ \frac{t^\mu}{\mu!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_1 + \dots + \beta_\mu \right] e^{\lambda_0 t} + \\
& A_1 \lambda_0 \left[ \frac{t^\mu}{\mu!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_1 + \dots + \beta_\mu \right] e^{\lambda_0 t} + A_1 \left[ \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} \beta_1 \dots + \beta_{\mu-1} \right] e^{\lambda_0 t} + \\
& A_2 \lambda_0^2 \left[ \frac{t^\mu}{\mu!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_1 + \dots + \beta_\mu \right] e^{\lambda_0 t} + 2A_2 \lambda_0 \left[ \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} \beta_1 \dots + \beta_{\mu-1} \right] e^{\lambda_0 t} + \\
& A_2 \left[ \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-3}}{(\mu-3)!} \beta_1 \dots + \beta_{\mu-2} \right] e^{\lambda_0 t} + \\
& A_3 \lambda_0^3 \left[ \frac{t^\mu}{\mu!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_1 + \dots + \beta_\mu \right] e^{\lambda_0 t} + 3A_3 \lambda_0^2 \left[ \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} \beta_1 \dots + \beta_{\mu-1} \right] e^{\lambda_0 t} + \\
& \frac{1}{2!} 3A_3 \lambda_0 \left[ \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-3}}{(\mu-3)!} \beta_1 \dots + \beta_{\mu-2} \right] e^{\lambda_0 t} + \dots + \\
& A_\mu \lambda_0^\mu \left[ \frac{t^\mu}{\mu!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_1 + \dots + \beta_\mu \right] e^{\lambda_0 t} + \mu A_\mu \lambda_0^{\mu-1} \left[ \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} \beta_1 \dots + \beta_{\mu-1} \right] e^{\lambda_0 t} \\
& + \dots = \\
& \left[ \underbrace{A_0 + A_1 \lambda_0 + A_2 \lambda_0^2 + \dots + A_\mu \lambda_0^\mu}_{A(\lambda_0)} \right] \frac{t^\mu}{\mu!} \beta_0 e^{\lambda_0 t} + \\
& \left[ A_0 + A_1 \lambda_0 + A_2 \lambda_0^2 + \dots + A_\mu \lambda_0^\mu \right] \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_1 e^{\lambda_0 t} + \dots + \left[ A_0 + A_1 \lambda_0 + A_2 \lambda_0^2 + \dots + A_\mu \lambda_0^\mu \right] \beta_\mu e^{\lambda_0 t} + \\
& \left[ \underbrace{A_1 + 2A_2 \lambda_0 + \dots + \mu A_\mu \lambda_0^{\mu-1}}_{A^{(1)}(\lambda_0)} \right] \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_0 e^{\lambda_0 t} + \dots + \left[ A_1 + 2A_2 \lambda_0 + \dots + \mu A_\mu \lambda_0^{\mu-1} \right] \beta_{\mu-1} e^{\lambda_0 t} + \\
& + \dots + \frac{1}{\mu!} \left[ \underbrace{A_{\mu-1} + \mu A_\mu \lambda_0}_{A^{(\mu)}(\lambda_0)} \right] \beta_0 e^{\lambda_0 t} = \\
& \frac{t^\mu}{\mu!} A(\lambda_0) \beta_0 e^{\lambda_0 t} + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} A(\lambda_0) \beta_1 e^{\lambda_0 t} + \dots + A(\lambda_0) \beta_\mu e^{\lambda_0 t} + \\
& \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} A^{(1)}(\lambda_0) \beta_0 e^{\lambda_0 t} + \dots + \frac{1}{\mu!} A^{(\mu)}(\lambda_0) \beta_0 e^{\lambda_0 t}. \tag{1.9}
\end{aligned}$$

Αν λοιπόν θέλουμε  $A(\rho)\beta(t) = 0$ , τότε επειδή τα πολυώνυμα  $\{e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, \dots, t^m e^{\lambda_0 t}\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θα πρέπει οι συντελεστές των πολυωνύμων αυτών να είναι μηδέν οπότε και αποδεικνύονται οι ζητούμενες σχέσεις (1.8). ■

**Παράδειγμα 1.14** Έστω  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  ιδιοτιμή του πίνακα  $A(\rho)$  πολλαπλότητας 1. Εφόσον η ιδιοτιμή  $\lambda_0 = c_R + ic_I$  είναι μιγαδική και ο συζυγής του  $\bar{\lambda}_0 = c_R - ic_I$  είναι επίσης ιδιοτιμή του  $A(\rho)$  πολλαπλότητας 1. Το ιδιοδιάνυσμα  $\beta_0$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  είναι και αυτό μιγαδικός αριθμός και γράφεται στη μορφή  $\beta_0 = \beta_R + i\beta_I$ , αντίστοιχα ο συζυγής του γράφεται  $\bar{\beta}_0 = \beta_R - i\beta_I$ . Τα  $e^{(c_R + ic_I)t}$  και  $e^{(c_R - ic_I)t}$  αποτελούν λύση της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης  $A(\rho)\beta(t) = 0$  όπως δείξαμε στην σχέση (1.9), το ίδιο θα ισχύει και για τον γραμμικό τους συνδυασμό:

$$\begin{aligned} \beta_{01}(t) &= \frac{1}{2}(\beta_0 e^{\lambda_0 t} + \bar{\beta}_0 e^{\bar{\lambda}_0 t}) = \\ &= \frac{1}{2}[(\beta_R + i\beta_I)e^{(c_R + ic_I)t} + (\beta_R - i\beta_I)e^{(c_R - ic_I)t}] \\ &= \frac{1}{2}[(\beta_R + i\beta_I)e^{c_R t} \cdot e^{ic_I t} + (\beta_R - i\beta_I)e^{c_R t} \cdot e^{-ic_I t}] = \\ &= \frac{1}{2}[(\beta_R + i\beta_I)e^{c_R t} \cdot (\cos(c_I t) + i \sin(c_I t)) + (\beta_R - i\beta_I)e^{c_R t} \cdot (\cos(-c_I t) + i \sin(c_I t))] = \\ &= \frac{1}{2}[\beta_R \cos(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_R \sin(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_I \cos(c_I t)e^{c_R t} - \beta_I \sin(c_I t)e^{c_R t} + \\ &\quad + \beta_R \cos(-c_I t)e^{c_R t} + i\beta_R \sin(-c_I t)e^{c_R t} - i\beta_I \cos(-c_I t)e^{c_R t} + \beta_I \sin(-c_I t)e^{c_R t}] = \\ &= \frac{1}{2}[\beta_R \cos(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_R \sin(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_I \cos(c_I t)e^{c_R t} - \beta_I \sin(c_I t)e^{c_R t} + \\ &\quad + \beta_R \cos(c_I t)e^{c_R t} - i\beta_R \sin(c_I t)e^{c_R t} - i\beta_I \cos(c_I t)e^{c_R t} - \beta_I \sin(c_I t)e^{c_R t}] = \\ &= \frac{1}{2}[2\beta_R \cos(c_I t)e^{c_R t} - 2\beta_I \sin(c_I t)e^{c_R t}] = \\ &= \beta_R \cos(c_I t)e^{c_R t} - \beta_I \sin(c_I t)e^{c_R t}. \end{aligned}$$

Ομοίως λύση της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης  $A(\rho)\beta(t) = 0$  θα αποτελεί και το διάνυσμα:

$$\begin{aligned}
 \beta_{02}(t) &= \frac{1}{2i}(\beta_0 e^{\lambda_0 t} - \bar{\beta}_0 e^{\bar{\lambda}_0 t}) = \\
 &= \frac{1}{2i}[(\beta_R + i\beta_I)e^{(c_R + ic_I)t} - (\beta_R - i\beta_I)e^{(c_R - ic_I)t}] \\
 &= \frac{1}{2i}[(\beta_R + i\beta_I)e^{c_R t} \cdot e^{ic_I t} - (\beta_R - i\beta_I)e^{c_R t} \cdot e^{-ic_I t}] = \\
 &= \frac{1}{2i}[(\beta_R + i\beta_I)e^{c_R t} \cdot (\cos(c_I t) + i\sin(c_I t)) - (\beta_R - i\beta_I)e^{c_R t} \cdot (\cos(-c_I t) + i\sin(c_I t))] \\
 &= \frac{1}{2i}[\beta_R \cos(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_R \sin(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_I \cos(c_I t)e^{c_R t} - \beta_I \sin(c_I t)e^{c_R t} - \\
 &\quad -\beta_R \cos(-c_I t)e^{c_R t} - i\beta_R \sin(-c_I t)e^{c_R t} + i\beta_I \cos(-c_I t)e^{c_R t} - \beta_I \sin(-c_I t)e^{c_R t}] \\
 &= \frac{1}{2i}[\beta_R \cos(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_R \sin(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_I \cos(c_I t)e^{c_R t} - \beta_I \sin(c_I t)e^{c_R t} \\
 &\quad -\beta_R \cos(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_R \sin(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_I \cos(c_I t)e^{c_R t} + \beta_I \sin(c_I t)e^{c_R t}] = \\
 &= \frac{1}{2i}[2i\beta_R \sin(c_I t)e^{c_R t} + 2i\beta_I \cos(c_I t)e^{c_R t}] = \\
 &= \beta_R \sin(c_I t)e^{c_R t} + \beta_I \cos(c_I t)e^{c_R t}.
 \end{aligned}$$

Επομένως από τα δυο διανύσματα προκύπτει η λύση της  $A(\rho)\beta(t) = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \beta(t) &= [\beta_R \quad \beta_I] \begin{bmatrix} e^{c_R t} \cos(c_I t) & e^{c_R t} \sin(c_I t) \\ -e^{c_R t} \sin(c_I t) & e^{c_R t} \cos(c_I t) \end{bmatrix} = \\
 &= [\beta_R \quad \beta_I] e^{\begin{bmatrix} c_R & c_I \\ -c_I & c_R \end{bmatrix} t}.
 \end{aligned}$$

□

**Παράδειγμα 1.15** Θα δούμε τώρα τι συμβαίνει εάν έχουμε γεωμετρική πολλαπλότητα 2. Έστω λοιπόν  $\beta_0 = \beta_{R0} + i\beta_{I0}$ ,  $\beta_1 = \beta_{R1} + i\beta_{I1}$ ,  $\lambda_0 = c_R + ic_I$  και τα συζυγή τους  $\bar{\beta}_0 = \beta_{R0} - i\beta_{I0}$ ,  $\bar{\beta}_1 = \beta_{R1} - i\beta_{I1}$ ,  $\bar{\lambda}_0 = c_R - ic_I$ . Τα διανύσματα  $\beta_0 e^{\lambda_0 t}$ ,  $(t\beta_0 + \beta_1)e^{\lambda_0 t}$  καθώς και τα συζυγή τους  $\bar{\beta}_0 e^{\bar{\lambda}_0 t}$ ,  $(t\bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1)e^{\bar{\lambda}_0 t}$  αποτελούν λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης  $A(\rho)\beta(t) = 0$ . Το ίδιο θα ισχύει και για τον γραμμικό τους συνδυασμό:

$$\beta_{01}(t) = \frac{1}{2}(\beta_0 e^{\lambda_0 t} + \bar{\beta}_0 e^{\bar{\lambda}_0 t}) \quad \text{και} \quad \beta_{02}(t) = \frac{1}{2i}(\beta_0 e^{\lambda_0 t} - \bar{\beta}_0 e^{\bar{\lambda}_0 t})$$

τα οποία όπως αποδείχθηκε στο παράδειγμα 1.14 ισούνται με  $\beta_{01}(t) = \beta_{R0} \cos(c_I t) - \beta_{I0} \sin(c_I t)$  και  $\beta_{02}(t) = \beta_R \sin(c_I t) e^{c_R t} + \beta_I \cos(c_I t) e^{c_R t}$  αντίστοιχα. Ας δούμε τώρα τι γίνεται με τον γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων  $(t\beta_0 + \beta_1)e^{\lambda_0 t}$  και  $(t\bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1)e^{\bar{\lambda}_0 t}$ :

$$\begin{aligned} \beta_{03}(t) &= \frac{1}{2} \left[ (t\beta_0 + \beta_1)e^{\lambda_0 t} + (t\bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1)e^{\bar{\lambda}_0 t} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (t\beta_{R0} + it\beta_{I0} + \beta_{R1} + i\beta_{I1})e^{(c_R + ic_I)t} + (t\beta_{R0} - it\beta_{I0} + \beta_{R1} - i\beta_{I1})e^{(c_R - ic_I)t} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (t\beta_{R0} + it\beta_{I0} + \beta_{R1} + i\beta_{I1})e^{c_R t} e^{c_I t} + (t\beta_{R0} - it\beta_{I0} + \beta_{R1} - i\beta_{I1})e^{c_R t} e^{-ic_I t} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (t\beta_{R0} + it\beta_{I0} + \beta_{R1} + i\beta_{I1})e^{c_R t} (\cos(c_I t) + i \sin(c_I t)) + \right. \\ &\quad \left. (t\beta_{R0} - it\beta_{I0} + \beta_{R1} - i\beta_{I1})e^{c_R t} (\cos(-c_I t) + i \sin(-c_I t)) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ t\beta_{R0} \cos(c_I t) e^{c_R t} + it\beta_{R0} \sin(c_I t) e^{c_R t} + it\beta_{I0} \cos(c_I t) e^{c_R t} - t\beta_{I0} \sin(c_I t) e^{\lambda_0 t} \right. \\ &\quad \left. \beta_{R1} \cos(c_I t) e^{\lambda_0 t} + i\beta_{R1} \sin(c_I t) e^{\lambda_0 t} + i\beta_{I1} \cos(c_I t) - \beta_{I1} \sin(c_I t) + t\beta_{R0} \cos(-c_I t) + it\beta_{R0} \sin(-c_I t) \right. \\ &\quad \left. - it\beta_{I0} \cos(-c_I t) e^{c_R t} + t\beta_{I0} \sin(-c_I t) e^{c_R t} + \beta_{R1} \cos(-c_I t) e^{c_R t} + i\beta_{R1} \sin(-c_I t) e^{c_R t} \right. \\ &\quad \left. - i\beta_{I1} \cos(-c_I t) e^{c_R t} + \beta_{I1} \sin(-c_I t) e^{c_R t} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ t\beta_{R0} \cos(c_I t) e^{c_R t} + it\beta_{R0} \sin(c_I t) e^{c_R t} + it\beta_{I0} \cos(c_I t) e^{c_R t} - t\beta_{I0} \sin(c_I t) e^{c_R t} + \right. \\ &\quad \left. \beta_{R1} \cos(c_I t) e^{c_R t} + i\beta_{R1} \sin(c_I t) e^{c_R t} + i\beta_{I1} \cos(c_I t) e^{c_R t} - \beta_{I1} \sin(c_I t) + \right. \\ &\quad \left. t\beta_{R0} \cos(c_I t) e^{c_R t} - it\beta_{R0} \sin(c_I t) e^{c_R t} - it\beta_{I0} \cos(c_I t) e^{c_R t} - t\beta_{I0} \sin(c_I t) e^{c_R t} + \right. \\ &\quad \left. \beta_{R1} \cos(c_I t) e^{c_R t} - i\beta_{R1} \sin(c_I t) e^{c_R t} - i\beta_{I1} \cos(c_I t) e^{c_R t} - \beta_{I1} \sin(c_I t) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2t\beta_{R0} \cos(c_I t) e^{c_R t} - 2t\beta_{I0} \sin(c_I t) e^{c_R t} + 2\beta_{R1} \cos(c_I t) e^{c_R t} - 2\beta_{I1} \sin(c_I t) e^{c_R t} \right] = \\ &= t\beta_{R0} \cos(c_I t) e^{c_R t} - t\beta_{I0} \sin(c_I t) e^{c_R t} + \beta_{R1} \cos(c_I t) e^{c_R t} - \beta_{I1} \sin(c_I t) e^{c_R t}. \end{aligned}$$

Ακόμη έχουμε:

$$\begin{aligned} \beta_{04}(t) &= \frac{1}{2} \left[ (t\beta_0 + \beta_1)e^{\lambda_0 t} - (t\bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1)e^{\bar{\lambda}_0 t} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[ (t\beta_{R0} + it\beta_{I0} + \beta_{R1} + i\beta_{I1})e^{(c_R + ic_I)t} - (t\beta_{R0} - it\beta_{I0} + \beta_{R1} - i\beta_{I1})e^{(c_R - ic_I)t} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2i} \left[ (t\beta_{R0} + it\beta_{I0} + \beta_{R1} + i\beta_{I1})e^{c_R t} e^{c_I t} - (t\beta_{R0} - it\beta_{I0} + \beta_{R1} - i\beta_{I1})e^{c_R t} e^{-ic_I t} \right] \\
 & \frac{1}{2i} \left[ (t\beta_{R0} + it\beta_{I0} + \beta_{R1} + i\beta_{I1})e^{c_R t} (\cos(c_I t) + i \sin(c_I t)) - \right. \\
 & \left. (t\beta_{R0} - it\beta_{I0} + \beta_{R1} - i\beta_{I1})e^{c_R t} (\cos(-c_I t) + i \sin(-c_I t)) \right] = \\
 & \frac{1}{2i} \left[ t\beta_{R0} \cos(c_I t)e^{c_R t} + it\beta_{R0} \sin(c_I t)e^{c_R t} + it\beta_{I0} \cos(c_I t)e^{c_R t} - t\beta_{I0} \sin(c_I t)e^{c_R t} \right. \\
 & \left. \beta_{R1} \cos(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_{R1} \sin(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_{I1} \cos(c_I t) - \beta_{I1} \sin(c_I t) - t\beta_{R0} \cos(-c_I t) - it\beta_{R0} \sin(-c_I t) \right. \\
 & \left. + it\beta_{I0} \cos(-c_I t)e^{c_R t} - t\beta_{I0} \sin(-c_I t)e^{c_R t} - \beta_{R1} \cos(-c_I t)e^{c_R t} - i\beta_{R1} \sin(-c_I t)e^{c_R t} \right. \\
 & \left. + i\beta_{I1} \cos(-c_I t)e^{c_R t} - \beta_{I1} \sin(-c_I t)e^{c_R t} \right] = \\
 & \frac{1}{2i} \left[ t\beta_{R0} \cos(c_I t)e^{c_R t} + it\beta_{R0} \sin(c_I t)e^{c_R t} + it\beta_{I0} \cos(c_I t)e^{c_R t} - t\beta_{I0} \sin(c_I t)e^{c_R t} + \right. \\
 & \left. \beta_{R1} \cos(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_{R1} \sin(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_{I1} \cos(c_I t)e^{c_R t} - \beta_{I1} \sin(c_I t) - \right. \\
 & \left. t\beta_{R0} \cos(c_I t)e^{c_R t} + it\beta_{R0} \sin(c_I t)e^{c_R t} + it\beta_{I0} \cos(c_I t)e^{c_R t} + t\beta_{I0} \sin(c_I t)e^{c_R t} - \right. \\
 & \left. \beta_{R1} \cos(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_{R1} \sin(c_I t)e^{c_R t} + i\beta_{I1} \cos(c_I t)e^{c_R t} + \beta_{I1} \sin(c_I t) \right] = \\
 & \frac{1}{2i} \left[ 2it\beta_{R0} \sin(c_I t)e^{c_R t} + 2it\beta_{I0} \cos(c_I t)e^{c_R t} + 2i\beta_{R1} \sin(c_I t)e^{c_R t} + 2i\beta_{I1} \cos(c_I t)e^{c_R t} \right] = \\
 & = t\beta_{R0} \sin(c_I t)e^{c_R t} + t\beta_{I0} \cos(c_I t)e^{c_R t} + \beta_{R1} \sin(c_I t)e^{c_R t} + \beta_{I1} \cos(c_I t)e^{c_R t}.
 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
 & [\beta_{01}(t) \quad \beta_{02}(t) \quad \beta_{03}(t) \quad \beta_{04}(t)] = \\
 & [\beta_{R0} \quad \beta_{I0} \quad \beta_{R1} \quad \beta_{I1}] \cdot \begin{bmatrix} \cos(c_I t)e^{c_R t} & \sin(c_I t)e^{c_R t} & t \cos(c_I t)e^{c_R t} & t \sin(c_I t)e^{c_R t} \\ -\sin(c_I t)e^{c_R t} & \cos(c_I t)e^{c_R t} & -t \sin(c_I t)e^{c_R t} & t \cos(c_I t)e^{c_R t} \\ 0 & 0 & \cos(c_I t)e^{c_R t} & \sin(c_I t)e^{c_R t} \\ 0 & 0 & -\sin(c_I t)e^{c_R t} & \cos(c_I t)e^{c_R t} \end{bmatrix} = \\
 & [\beta_{R0} \quad \beta_{I0} \quad \beta_{R1} \quad \beta_{I1}] \cdot e^{\begin{bmatrix} c_R & c_I & 1 & 0 \\ -c_I & c_R & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c_R & c_I \\ 0 & 0 & -c_I & c_R \end{bmatrix} t}. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Ορισμός 1.16** Η ακολουθία

$$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\mu \quad (1.10)$$

η οποία ικανοποιεί τις εξισώσεις (1.8) είναι γνωστή ως *Jordan αλυσίδα* μήκους  $\mu+1$  που αντιστοιχεί στο μηδενικό  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  του πίνακα  $A(\rho)$ . Το διάνυσμα  $\beta_0 \in \mathbb{R}^r$ ,  $\beta_0 \neq 0$  είναι γνωστό ως *ιδιοδιάνυσμα* που αντιστοιχεί στο μηδενικό  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  του πίνακα  $A(\rho)$ . Τα διανύσματα  $\beta_1, \dots, \beta_\mu$  ονομάζονται *γενικευμένα ιδιοδιανύσματα* που αντιστοιχούν στο μηδενικό  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  του πίνακα  $A(\rho)$ . Ένα διάνυσμα  $\beta(t)$  όπως αυτό της σχέσης (1.7) ονομάζεται λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (1.5).  $\square$

Είναι φανερό ότι εάν για κάποια  $\mu > 0$ ,  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\mu$  είναι μια αλυσίδα Jordan τότε από τις σχέσεις (4.4) προκύπτει ότι οι ακολουθίες:

$$\begin{aligned} &\beta_0 \\ &\beta_0, \beta_1 \\ &\vdots \\ &\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{\mu-1} \end{aligned} \quad (1.11)$$

είναι επίσης αλυσίδες Jordan μήκους  $1, 2, \dots, \mu$  αντίστοιχα, που αντιστοιχούν στο μηδενικό  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  του πίνακα  $A(\rho)$  και συνεπώς τα διανύσματα  $\beta_j(t)$ ,  $j=0, 1, \dots, \mu$  που ορίζονται από την σχέση

$$\beta_j(t) = [\rho I_r - \lambda_0 I_r]^j \beta(t) \quad (1.12)$$

είναι επίσης λύσεις της (1.5). Οι εξισώσεις της μορφής (1.11) μπορούν να γραφούν υπό την μορφή πινάκων ως:

$$[\beta_\mu(t), \beta_{\mu-1}(t), \dots, \beta_1(t), \beta_0(t)] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} & \frac{t^\mu}{\mu!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} & \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_0 t}$$

$$\Psi(t) = C e^{Jt}$$



Όπου  $C = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\mu] \in \mathbb{R}^{r \times (\mu+1)}$  ,  $\Psi(t) = [\beta_\mu(t), \beta_{\mu-1}(t), \dots, \beta_0(t)]$  και

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\mu+1) \times (\mu+1)}$$

**Λήμμα 1.17** Έστω το σύνολο  $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$  από διανύσματα με στοιχεία συναρτήσεις  $f_i(t) : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^r$  και έστω ότι έχουν συνεχείς παραγώγους εως και την  $(n-1)$  τάξη στο διάστημα  $[t_1, t_2]$ . Συμβολίζουμε με  $F(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]$  δηλαδή τον  $r \times n$  πίνακα με  $f_i(t)$  την  $i$ -στήλη του και με  $F^{(i)}(t)$  την  $i$ -παράγωγο του  $F(t)$ . Τότε εάν για κάποιο  $t_0 \in [t_1, t_2]$

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} F(t_0) \\ F^{(1)}(t_0) \\ \vdots \\ F^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} = n \quad (1.13)$$

οι συναρτήσεις  $f_i(t)$ ,  $i \in n$  είναι  $\mathbb{C}$ -γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα  $[t_1, t_2]$ .  $\square$

**Πρόταση 1.18** Τα διανύσματα  $\beta_j(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, \mu$  που ορίζονται στη σχέση (1.11) είναι  $\mathbb{C}$ -γραμμικά ανεξάρτητα στο διάστημα  $[0, t_2]$  με  $t_2 > 0$ .  $\square$

**Πρόταση 1.19** Ο χώρος  $X$  των λύσεων της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (1.5) είναι ένας  $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος.

**Απόδειξη** Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι εάν  $\beta_1(t), \beta_2(t)$  είναι δύο λύσεις της (1.5) τότε από την γραμμικότητα του  $A(p)$  συνεπάγεται ότι για κάθε  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  :

$$A(p)[\alpha_1 \beta_1(t) + \alpha_2 \beta_2(t)] = 0$$

Εξετάζουμε τώρα την διάσταση του  $X$ . Ας υποθέσουμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$  έχει  $\ell$  διαφορετικές ιδιοτιμές στο  $\mathbb{C}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$  όπου για να μην υπάρχει δυσκολία έκφρασης υποθέτουμε ότι  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \ell$  και έστω

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}} = \text{diag}[1, 1, \dots, f_k(s), f_{k+1}(s), \dots, f_r(s)] \in \mathbb{R}[s]^{r \times r} \quad (1.14)$$

με  $1 \leq k \leq r$ , είναι η Smith μορφή του  $A(s)$  στο  $\mathbb{C}$  όπου  $f_i \in \mathbb{R}[s]$  είναι τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του  $A(s)$  και  $f_j(s)/f_{j+1}(s)$ ,  $j = k, k+1, \dots, r-1$ . Ας υποθέσουμε ότι κάθε αναλλοίωτο πολυώνυμο  $f_k(s), \dots, f_r(s)$  αναλύεται ως γινόμενο πρώτων μεταξύ τους πολυωνύμων στο  $\mathbb{R}$ , δηλαδή έστω

$$\begin{aligned} f_k(s) &= (s - \lambda_1)^{\sigma_{1k}} (s - \lambda_2)^{\sigma_{2k}} \dots (s - \lambda_\ell)^{\sigma_{\ell k}} \\ f_{k+1}(s) &= (s - \lambda_1)^{\sigma_{1,k+1}} (s - \lambda_2)^{\sigma_{2,k+1}} \dots (s - \lambda_\ell)^{\sigma_{\ell,k+1}} \\ &\vdots \\ f_r(s) &= (s - \lambda_1)^{\sigma_{1r}} (s - \lambda_2)^{\sigma_{2r}} \dots (s - \lambda_\ell)^{\sigma_{\ell r}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

όπου

$$0 \leq \sigma_{ik} \leq \sigma_{i,k+1} \leq \dots \leq \sigma_{ir} \quad i = 1, 2, \dots, \ell$$

Είναι οι πολλαπλότητες των μηδενικών  $\lambda_i$ ,  $i \in \ell$ . Οι σχέσεις (1.14) γράφονται επίσης

$$\begin{aligned} f_k(s) &= (s - \lambda_i)^{\sigma_{ik}} \widehat{f}_k(s) \\ f_{k+1}(s) &= (s - \lambda_i)^{\sigma_{i,k+1}} \widehat{f}_{k+1}(s) \\ &\vdots \\ f_r(s) &= (s - \lambda_i)^{\sigma_{ir}} \widehat{f}_r(s) \end{aligned}$$

Όπου  $\widehat{f}_k(\lambda_i) \neq 0$ ,  $\widehat{f}_{k+1}(\lambda_i) \neq 0, \dots, \widehat{f}_r(\lambda_i) \neq 0$ . Έστω  $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ ,  $U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$  unimodular πίνακες οι οποίοι αναγάγουν τον πίνακα  $A(s)$  στη Smith μορφή  $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}$

$$U_L(s)A(s)U_R(s) = S_{A(s)}^{\mathbb{C}}$$

Και γράφουμε

$$A(s)U_R(s) = U_L(s)^{-1} S_{A(s)}^{\mathbb{C}} \quad (1.16)$$

Έστω  $u_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times 1}$ ,  $v_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times 1}$ ,  $j = r$  είναι οι πρώτες στήλες των  $U_R(s)$  και  $U_L(s)^{-1}$ . Τότε από τη σχέση (1.15) έχουμε ότι:

$$A(s)u_j(s) = v_j(s)f_j(s) \quad j = k, k+1, \dots, r \quad \blacksquare$$

**Πρόταση 1.20** Έστω  $u_j^{(q)}(s) = (d^q / ds^q)u_j(s)$ ,  $q = 0, 1, \dots, (\sigma_{ij} - 1)$ . Έστω επίσης

$$\beta_{jq}^i = \frac{1}{q!} u_j^{(q)}(\lambda_i) \quad i \in \ell \quad \text{και} \quad j = k, k+1, \dots, r \quad (1.17)$$

Τότε για κάθε  $i \in \ell$  και  $j = k, k+1, \dots, r$  τα διανύσματα:

$$\beta_{j0}^i, \beta_{j1}^i, \dots, \beta_{j(\sigma_{ij}-1)}^i$$

Δημιουργούν μια αλυσίδα Jordan που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$  του  $A(s)$  με μήκος  $\sigma_{ij}$ .

**Παράδειγμα 1.21** Έστω ο πίνακας του παραδείγματος (1.12)  $A(s) = \begin{pmatrix} s^2 + s & s^2 - 1 \\ s + 1 & s + 1 \end{pmatrix}$

και έστω η Smith μορφή του  $S_{A(s)}^c = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$ , δηλαδή  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\sigma_{11} = 1$ ,

$$\sigma_{12} = 1, \quad k = 1, \quad k+1 = 2 = r.$$

Ισχύει

$$U_L(s)A(s)U_R(s) = S_{A(s)}^c(s) \quad (1.18)$$

όπου

$U_L(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s & -1 \end{pmatrix}$  και  $U_R(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  οι πίνακες που ανάγουν τον πίνακα  $A(s)$  στη

Smith μορφή.

Από τη σχέση (4.13) έχουμε  $A(s)U_R(s) = U_L^{-1}(s)S_{A(s)}^c$  δηλαδή

$$A(s) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U_L^{-1}(s) \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Έχουμε  $u_1^{(0)}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  και από τη σχέση (1.16) παίρνουμε

$$\beta_{10}^1 = \frac{1}{0!} u_1^{(0)}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε τις παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις

$$\beta_{jq}^i(t) = \left[ \frac{t^{\sigma_{ij}-1-q}}{(\sigma_{ij}-1-q)!} \beta_{j0}^i + \frac{t^{\sigma_{ij}-2-q}}{(\sigma_{ij}-2-q)!} \beta_{j1}^i + \dots + \frac{t}{1!} \beta_{j(\sigma_{ij}-2-q)}^i + \beta_{j(\sigma_{ij}-1-q)}^i \right] e^{\lambda t}$$

όπου  $i \in \ell, j = k, k+1, \dots, r, q = 0, 1, \dots, \sigma_{ij} - 1$

$$\text{Άρα } \beta_{10}^1(t) = \left[ \frac{t^0}{0!} \beta_{10}^1 \right] e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Έχουμε  $u_2^{(0)}(s) = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$  και από τη σχέση (1.17) παίρνουμε

$$\beta_{20}^1 = \frac{1}{0!} u_2^{(0)}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα } \beta_{20}^1(t) = \left[ \frac{t^0}{0!} \beta_{20}^1 \right] e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Επομένως ο χώρος λύσεων είναι ο εξής:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}, \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} e^{-t} \right\rangle$$

□

### 1.5 Κανονική μορφή ενός $\lambda$ -πίνακα

Για αρχή θα εξετάσουμε ποια μορφή μπορούμε να πάρουμε από έναν ορθογώνιο πολυωνυμικό πίνακα  $A(\lambda)$  με μόνο αριστερά-στοιχειώδεις πράξεις και με μόνο δεξιά στοιχειώδεις πράξεις.

**Θεώρημα 1.22** Ένας τυχαίος ορθογώνιος πολυωνυμικός πίνακς τάξης  $m \times n$ , μπορεί πάντα να έρθει στη μορφή

$$\left\| \begin{array}{cccccc} b_{11}(\lambda) & b_2(\lambda) & \dots & b_{1m}(\lambda) & \dots & b_{1n}(\lambda) \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \dots & b_{2m}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{mm}(\lambda) & \dots & b_{mn}(\lambda) \end{array} \right\| \quad \left\| \begin{array}{cccc} b_{11}(\lambda) & b_{12}(\lambda) & \dots & b_{1n}(\lambda) \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn}(\lambda) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 0 \end{array} \right\| \quad (1.19)$$

$(m \leq n)$

$(m \geq n)$

με αριστερά στοιχειώδεις πράξεις όπου τα πολυώνυμα  $b_{1k}(\lambda), b_{2k}(\lambda), \dots, b_{k-1,k}(\lambda)$  είναι βαθμού μικρότερου του  $b_{kk}(\lambda)$ , εφόσον  $b_{kk}(\lambda) \neq 0$  και είναι όλα ίσα με το μηδέν αν  $b_{kk}(\lambda) = \text{σταθ.} \neq 0$ .

**Θεώρημα 1.23** Ένας τυχαίος ορθογώνιος πολυωνυμικός πίνακας τάξης  $m \times n$  μπορεί πάντα να έρθει στη μορφή

$$\left\| \begin{array}{cccccc} c_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21}(\lambda) & c_{22}(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1}(\lambda) & c_{m2}(\lambda) & \dots & c_{mm}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| \quad \left\| \begin{array}{cccc} c_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ c_{21}(\lambda) & c_{22}(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}(\lambda) & c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1}(\lambda) & c_{m2}(\lambda) & \dots & c_{mn}(\lambda) \end{array} \right\| \quad (1.20)$$

$(m \leq n) \qquad \qquad \qquad (m \geq n)$

με δεξιά στοιχειώδεις πράξεις, όπου τα πολυώνυμα  $c_{k1}(\lambda), c_{k2}(\lambda), \dots, c_{k,k-1}(\lambda)$  είναι βαθμού μικρότερου του  $c_{kk}(\lambda)$ , εφόσον  $c_{kk}(\lambda) \neq 0$  και είναι όλα ίσα με το μηδέν αν  $c_{kk}(\lambda) = \text{σταθ.} \neq 0$ . □

**Πόρισμα 1.24** Αν η ορίζουσα ενός τετράγωνου πολυωνυμικού πίνακα  $P(\lambda)$  δεν εξαρτάται από το  $\lambda$ , και είναι διαφορετική του μηδενός, τότε ο πίνακας μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή ενός γινομένου πεπερασμένων στοιχειωδών πινάκων. □

Από το θεώρημα (1.22) ο πίνακας  $P(\lambda)$  μπορεί να έρθει στη μορφή

$$\left\| \begin{array}{cccc} b_{11}(\lambda) & b_{12}(\lambda) & \dots & b_{1n}(\lambda) \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn}(\lambda) \end{array} \right\| \quad (1.21)$$

με αριστερά στοιχειώδεις πράξεις, όπου  $n$  είναι η τάξη του  $P(\lambda)$ . Εφόσον στην εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων σε ένα τετράγωνο πολυωνυμικό πίνακα η ορίζουσα του πίνακα είναι πολλαπλασιασμένη μόνο με σταθερούς μη-μηδενικούς συντελεστές, η

ορίζουσα του προηγούμενου πίνακα, όπως αυτή του  $P(\lambda)$ , δεν εξαρτάται από το  $\lambda$  και είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή:

$$b_{11}(\lambda), b_{22}(\lambda), \dots, b_{nn}(\lambda) = \text{σταθ.} \neq 0$$

$$b_{kk}(\lambda) = \text{σταθ.} \neq 0$$

Επίσης από το θεώρημα (1.22) ο πίνακας έχει τη διαγώνια μορφή και μπορεί να αναχθεί στον μοναδιαίο πίνακα  $E$  με αριστερά στοιχειώδεις πράξεις. Τότε όμως αντίστοιχα ο μοναδιαίος πίνακας  $E$  μπορεί να μετασχηματιστεί σε  $P(\lambda)$  με αριστερά στοιχειώδεις πράξεις των οποίων οι πίνακες είναι  $S_1, S_2, \dots, S_p$ . Κατά συνέπεια  $P(s) = S_p S_{p-1} \cdots S_1 E = S_p S_{p-1} \cdots S$ .

**Ορισμός 1.25** Ένας ορθογώνιος πολυωνυμικός πίνακας καλείται κανονικός διαγώνιος πίνακας αν είναι στη μορφή (1.4) όπου 1) τα πολυώνυμα  $\varepsilon_1(\lambda), \varepsilon_2(\lambda), \dots, \varepsilon_s(\lambda)$  δεν είναι ίσα με το μηδέν και 2) καθένα από τα πολυώνυμα  $\varepsilon_2(\lambda), \dots, \varepsilon_s(\lambda)$  είναι διαιρετό με το προηγούμενο. Επιπλέον θεωρείται δεδομένο ότι οι μεγαλύτεροι συντελεστές των πολυωνύμων  $\varepsilon_1(\lambda), \varepsilon_2(\lambda), \dots, \varepsilon_s(\lambda)$  είναι ίσοι με 1.

## 1.6 Αναλλοίωτα πολυώνυμα και στοιχειώδεις διαιρέτες ενός πολυωνυμικού πίνακα

Έστω ένας πολυωνυμικός πίνακας τάξης  $r$ , δηλαδή ο πίνακας έχει υποορίζουσες τάξης  $r$  διάφορες του μηδενός, αλλά όλες οι υποορίζουσες τάξης μεγαλύτερης της  $r$  είναι ίσες με το μηδέν. Συμβολίζουμε με  $D_j(s)$  το Μ.Κ.Δ όλων των υποοριζουσών τάξης  $j$  στο  $A(s)$  ( $j=1, 2, \dots, r$ ). Τότε είναι εύκολο να δειχτεί ότι στις σειρές  $D_r(s), D_{r-1}(s), \dots, D_1(s), D_0(s) \equiv 1$  κάθε πολυώνυμο είναι διαιρετό από το προηγούμενο. Τα αντίστοιχα πηλίκα συμβολίζονται με  $i_1(s), i_2(s), \dots, i_r(s)$ :

$$i_1(s) = \frac{D_r(s)}{D_{r-1}(s)}, i_2(s) = \frac{D_{r-1}(s)}{D_{r-2}(s)}, \dots, i_r(s) = \frac{D_1(s)}{D_0(s)} = D_1(s) \quad (1.22)$$

**Πρόταση 1.26** Τα πολυώνυμα  $i_1(s), i_2(s), \dots, i_r(s)$  που ορίζονται από την (1.22) αποτελούν αναλλοίωτα πολυώνυμα του ορθογώνιου πίνακα  $A(s)$  στον χώρο των αντιστρέψιμων ισοδύναμων πολυωνυμικών πινάκων. □

Ο όρος αναλλοίωτα πολυώνυμα εξαρτάται από τα ακόλουθα. Έστω  $A(\lambda)$  και  $B(\lambda)$  δύο αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι πολυωνυμικοί πίνακες. Τότε παράγεται ο ένας από τον άλλο με στοιχειώδεις πράξεις. Μια εύκολη επαλήθευση δείχνει αμέσως ότι οι στοιχειώδεις πράξεις δεν αλλάζουν ούτε την τάξη του  $A(\lambda)$  ούτε τα πολυώνυμα  $D_1(s), D_2(s), \dots, D_r(s)$ . Υπάρχουν ομαλοί πίνακες  $P(\lambda)$  και  $Q(\lambda)$  τέτοιοι ώστε

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) \quad (1.23)$$

Από την σχέση αυτή παίρνουμε (τύπος Binet-Cauchy)

$$B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} ; \lambda = \sum_{\substack{1 \leq a_1 < \dots < a_p \leq m \\ 1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_p \leq m}} P \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_p \end{pmatrix} ; \lambda Q \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix}$$

$$p = (1, 2, \dots, \min(m, n)).$$

Από την παραπάνω σχέση η τυχαία υποορίζουσα τάξης  $p$  του  $B(\lambda)$  εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός υποορίζουσών του  $A(\lambda)$  της ίδιας τάξης. Άρα θα είναι  $\text{rank}(B(\lambda)) \leq \text{rank}(A(\lambda))$ . Από τη σχέση (1.23) έχουμε  $A(\lambda) = P^{-1}(\lambda)B(\lambda)Q^{-1}(\lambda)$  και με τον ίδιο συλλογισμό όπως προηγουμένως παίρνουμε  $\text{rank}(A(\lambda)) \leq \text{rank}(B(\lambda))$ . Έτσι τελικά προκύπτει ότι  $\text{rank}(A(\lambda)) = \text{rank}(B(\lambda))$ .

Επιπλέον προκύπτει από τον ίδιο τύπο ότι οι μέγιστοι κοινοί διαιρέτες των υποορίζουσών τάξης  $p$  ( $p = (1, 2, \dots, \min(m, n))$ ) των  $A(\lambda)$  και  $B(\lambda)$  είναι ίδιοι. Άρα οι πίνακες  $A(\lambda)$  και  $B(\lambda)$  έχουν τα ίδια αναλλοίωτα πολυώνυμα  $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$ .

Αν ο πολυωνυμικός πίνακας έχει την κανονική διαγώνια μορφή (1.21) τότε είναι φανερό ότι:

$$D_1(\lambda) = \alpha_1(\lambda), \quad D_2(\lambda) = \alpha_1(\lambda)\alpha_2(\lambda), \dots, \quad D_r(\lambda) = \alpha_1(\lambda)\alpha_2(\lambda)\dots\alpha_r(\lambda).$$

Αλλά από την (4) τα διαγώνια πολυώνυμα στην (3)  $\alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda), \dots, \alpha_r(\lambda)$  ταυτίζονται με τα αναλλοίωτα πολυώνυμα:

$$i_1(\lambda) = \alpha_r(\lambda), \quad i_2(\lambda) = \alpha_{r-1}(\lambda), \quad \dots, \quad i_r(\lambda) = \alpha_1(\lambda). \quad (1.24)$$

Εδώ τα  $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$  είναι ταυτόχρονα τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του αρχικού πίνακα  $A(\lambda)$ , γιατί είναι ισοδύναμος με την (3).

**Θεώρημα 1.27** Ο ορθογώνιος πολυωνυμικός πίνακας  $A(\lambda)$  είναι πάντα ισοδύναμος με ένα κανονικό, διαγώνιο πίνακα

$$\left\| \begin{array}{cccccc} i_r(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i_{r-1}(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & i_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| \quad (1.25)$$

Επιπλέον  $r$  είναι η τάξη του πίνακα  $A(\lambda)$  και  $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$  τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του  $A(\lambda)$  που ορίζονται από την (1.22). □

**Πόρισμα 1.28** Δύο ορθογώνιοι πίνακες της ίδιας διάστασης  $A(\lambda)$  και  $B(\lambda)$  είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν έχουν τα ίδια αναλλοίωτα πολυώνυμα.

**Πόρισμα 1.29** Σε μια ακολουθία αναλλοίωτων πολυωνύμων

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \dots, i_r(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} = D_1(\lambda) \quad (D_0(\lambda) \equiv 1)$$

κάθε πολυώνυμο από το δεύτερο και μετά διαιρεί το προηγούμενο. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι τα πολυώνυμα  $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$  ταυτίζονται με τα πολυώνυμα  $\alpha_r(\lambda), \alpha_{r-1}(\lambda), \dots, \alpha_1(\lambda)$  του κανονικού διαγώνιου πίνακα (3).

Τώρα θα δείξουμε μια μέθοδο υπολογισμού των αναλλοίωτων πολυωνύμων ενός ημι-διαγώνιου  $\lambda$ -πίνακα αν τα αναλλοίωτα πολυώνυμα των πινάκων στα διαγώνια blocks είναι γνωστά.





**Ορισμός 1.31** Όλοι οι παράγοντες των  $[\phi_1(\lambda)]^{c_1}, \dots, [\phi_s(\lambda)]^{c_s}$  στην (1.27) εφόσον είναι διαφορετικοί του μηδενός καλούνται στοιχειώδεις διαιρέτες του  $A(\lambda)$  στο σώμα  $F$ .  $\square$

**Θεώρημα 1.32** Το σύνολο των στοιχειωδών διαιρετών του ορθογώνιου ημι-διαγώνιου πίνακα

$$C(\lambda) = \begin{vmatrix} A(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{vmatrix}$$

παράγεται πάντα από συνδυασμό όλων των στοιχειωδών διαιρετών του  $A(\lambda)$  με αυτούς του  $B(\lambda)$ .

**Απόδειξη** Αναλύουμε τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του  $A(\lambda)$  και  $B(\lambda)$  σε γινόμενα δυνάμεων ανάγωγων πολυωνύμων στο σώμα  $F$ :

$$\begin{aligned} i_1'(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{c_1} [\phi_2(\lambda)]^{c_2} \dots [\phi_s(\lambda)]^{c_s}, & i_1''(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{c_1} [\phi_2(\lambda)]^{c_2} \dots [\phi_s(\lambda)]^{c_s} \\ i_2'(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{d_1} [\phi_2(\lambda)]^{d_2} \dots [\phi_s(\lambda)]^{d_s}, & i_2''(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{d_1} [\phi_2(\lambda)]^{d_2} \dots [\phi_s(\lambda)]^{d_s} \\ &\dots & &\dots \\ i_r'(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{h_r} [\phi_2(\lambda)]^{h_2} \dots [\phi_s(\lambda)]^{h_s}, & i_r''(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{q_r} [\phi_2(\lambda)]^{q_2} \dots [\phi_s(\lambda)]^{q_s} \end{aligned}$$

Συμβολίζουμε με  $c_1 \geq d_1 \geq \dots \geq \ell_1 > 0$ , όλους τους μη μηδενικούς αριθμούς μεταξύ  $c_1', d_1', \dots, h_1', c_1'', d_1'', \dots, q_1''$ .

Τότε ο πίνακας  $C(\lambda)$  είναι ισοδύναμος με τον πίνακα (7) και με μια μετάθεση των γραμμών και των στηλών μπορεί να έρθει στη διαγώνια μορφή:

$$\{[\phi_1(\lambda)]^{c_1} (*), [\phi_1(\lambda)]^{d_1} (*), \dots, [\phi_1(\lambda)]^{\ell_1} (*), (**), \dots, (**)\} \quad (1.28)$$

όπου έχουμε συμβολίσει με  $(*)$  πολυώνυμα που είναι είτε πρώτα με το  $\phi_1(\lambda)$  και με  $(**)$  πολυώνυμα που είναι είτε πρώτα με το  $\phi_1(\lambda)$  είτε ίσα με το μηδέν. Από τη μορφή του πίνακα (1.28) παίρνουμε αμέσως την ακόλουθη παραγοντοποίηση των πολυωνύμων  $D_r(\lambda), D_{r-1}(\lambda), \dots$  και  $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots$  του πίνακα  $C(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} D_r(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{c_1+d_1+\dots+\ell_1} (*), & D_{r-1}(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{d_1+\dots+\ell_1} (*), \\ i_1(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{c_1} (*), & i_2(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{d_1} (*) \end{aligned}$$

Προκύπτει ότι  $[\phi_1(\lambda)]^{c_1}, [\phi_2(\lambda)]^{d_1}, \dots, [\phi_1(\lambda)]^{\ell_1}$ , δηλαδή όλοι οι παράγοντες  $[\phi_1(\lambda)]^{c_1}, [\phi_1(\lambda)]^{h_1}, [\phi_1(\lambda)]^{c_1}, \dots, [\phi_1(\lambda)]^{q_1}$  όσο είναι διάφοροι του 1, είναι στοιχειώδεις

διαιρέτες του  $C(\lambda)$ . Οι στοιχειώδεις διαιρέτες του  $C(\lambda)$  που είναι παράγοντες του  $\phi_2(\lambda)$  καθορίζονται ομοίως. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. ■

Υποθέτουμε ότι  $A = \|a_{ik}\|_1^n$  είναι ένας πίνακας με στοιχεία στο σώμα  $F$ .

Σχηματίζουμε τον χαρακτηριστικό πίνακα

$$\lambda E - A = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.29)$$

ο χαρακτηριστικός πίνακας είναι ένας  $\lambda$ -πίνακας τάξης  $n$ . Τα αναλλοίωτα πολυώνυμα

$$i_1(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}, i_2 = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)}, \dots, i_n(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} \quad (D_0(\lambda) \equiv 1) \quad (1.30)$$

καλούνται αναλλοίωτα πολυώνυμα του πίνακα  $A$  και οι αντίστοιχοι στοιχειώδεις διαιρέτες στο  $F$  καλούνται στοιχειώδεις διαιρέτες του πίνακα  $A$  στο σώμα  $F$ . Η γνώση των αναλλοίωτων πολυωνύμων (και των στοιχειωδών διαιρετών) του  $A$  μας δίνει τη δυνατότητα να ανακαλύψουμε τη δομή του. Επομένως πρακτικοί μέθοδοι υπολογισμού αναλλοίωτων πολυωνύμων ενός πίνακα είναι ενδιαφέρουσες. Οι τύποι (11) μας δίνουν έναν αλγόριθμο υπολογισμού αυτών των πολυωνύμων, αλλά για μεγάλο  $n$  αυτός ο αλγόριθμος είναι πολύπλοκος.

Το θεώρημα 1.32 δίνει μια άλλη μέθοδο υπολογισμού αναλλοίωτων πολυωνύμων βασισμένη στην παραγωγή του χαρακτηριστικού πίνακα (1.29) σε κανονική διαγώνια μορφή με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς.

**Παράδειγμα 1.33** Έστω

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \lambda E - A = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 14 & 5 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

Στον χαρακτηριστικό πίνακα  $\lambda E - A$  προσθέτουμε στην τέταρτη γραμμή την τρίτη πολλαπλασιασμένη με το  $\lambda$ :

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 14-6\lambda & 5-\lambda & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \end{vmatrix}$$

Προσθέτουμε στις πρώτες τρεις στήλες την τέταρτη, πολλαπλασιασμένη με  $-6$ ,  $-1$  και  $\lambda-2$  αντίστοιχα, παίρνουμε:

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 14-6\lambda & 5-\lambda & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \end{vmatrix}$$

Προσθέτουμε στην πρώτη στήλη τη δεύτερη πολλαπλασιασμένη με  $\lambda-3$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\lambda^2+2\lambda-1 & 5-\lambda & -2\lambda+1 & 0 \end{vmatrix}$$

Στην δεύτερη και τέταρτη γραμμή προσθέτουμε την πρώτη πολλαπλασιασμένη με  $\lambda+1$  και  $5-\lambda$  αντίστοιχα, παίρνουμε:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\lambda^2+2\lambda-1 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \end{vmatrix}$$

Στην δεύτερη γραμμή προσθέτουμε την τέταρτη μετά πολλαπλασιάζουμε την πρώτη και τρίτη γραμμή με  $-1$ . Μετά από μετάθεση μερικών γραμμών και στηλών παίρνουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{vmatrix}$$

Ο πίνακας έχει δύο στοιχειώδεις διαιρέτες  $(\lambda-1)^2$  και  $(\lambda-1)^2$ . □

### 1.7 Ισοδυναμία πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων

Στις προηγούμενες ενότητες θεωρούσαμε ορθογώνιους  $\lambda$ -πίνακες. Σε αυτήν θεωρούμε δύο τετράγωνους  $\lambda$ -πίνακες  $A(\lambda)$  και  $B(\lambda)$  τάξης  $n$ , στους οποίους όλα τα στοιχεία είναι τάξης όχι μεγαλύτερης από 1. Αυτοί οι πολυωνυμικοί πίνακες μπορούν να αναπαρασταθούν στη μορφή πολυωνυμικών πινάκων:  $A(\lambda) = A_0\lambda + A_1$ ,  $B(\lambda) = B_0\lambda + B_1$ . Θα υποθέσουμε ότι αυτά τα πολυώνυμα είναι βαθμού 1 και ομαλά: δηλαδή ότι  $|A_0| \neq 0$ ,  $|B_0| \neq 0$ . Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ένα κριτήριο για την ισοδυναμία τέτοιων πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων.

**Θεώρημα 1.34** Αν δύο ομαλά πολυώνυμα πρώτου βαθμού  $A_0\lambda + A_1$  και  $B_0\lambda + B_1$  είναι ισοδύναμα, τότε είναι αυστηρά ισοδύναμα δηλαδή στην ταυτότητα

$$B_0\lambda + B_1 = P(\lambda)(A_0\lambda + A_1)Q(\lambda) \quad (1.31)$$

οι πίνακες  $P(\lambda)$  και  $Q(\lambda)$ - με σταθερές μη-μηδενικές ορίζουσες- μπορούν να αντικατασταθούν από σταθερούς ομαλούς πίνακες  $P$  και  $Q$ :

$$B_0\lambda + B_1 = P(A_0\lambda + A_1)Q \quad (1.32)$$

#### Απόδειξη

Εφόσον η ορίζουσα του  $P(\lambda)$  δεν εξαρτάται από το  $\lambda$  και είναι διαφορετική από το μηδέν, ο αντίστροφος πίνακας  $M(\lambda) = P^{-1}(\lambda)$  είναι επίσης πολυωνυμικός πίνακας. Με τη βοήθεια αυτού του πίνακα γράφουμε την (1.31) στη μορφή

$$M(\lambda)(B_0\lambda + B_1) = (A_0\lambda + A_1)Q(\lambda) \quad (1.33)$$

Διαιρούμε τους πολυωνυμικούς πίνακες  $M(\lambda)$  και  $Q(\lambda)$  διαιρούμε τον  $M(\lambda)$  από αριστερά με τον  $A_0\lambda + A_1$  και από δεξιά αντίστοιχα με τον  $B_0\lambda + B_1$ :

$$M(\lambda) = (A_0\lambda + A_1)S(\lambda) + M \quad (1.34)$$

$$Q(\lambda) = T(\lambda)(B_0\lambda + B_1) + Q \quad (1.35)$$

Εδώ οι  $M$  και  $Q$  είναι σταθεροί τετράγωνοι πίνακες (ανεξάρτητοι του  $\lambda$ ) τάξης  $n$ .

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.34), (1.35) στην σχέση (1.33) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} [(A_0\lambda + A_1)S(\lambda) + M](B_0\lambda + B_1) &= (A_0\lambda + A_1)[T(\lambda)(B_0\lambda + B_1) + Q] \Leftrightarrow \\ (A_0\lambda + A_1)[T(\lambda) - S(\lambda)](B_0\lambda + B_1) &= M(B_0\lambda + B_1) - (A_0\lambda + A_1)Q \end{aligned} \quad (1.36)$$

Οι διαφορές στις αγκύλες πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν, διαφορετικά το γινόμενο στο αριστερό μέλος της πρέπει να είναι βαθμού μεγαλύτερου του 2, καθώς το πολυώνυμο στο δεξιά μέλος της εξίσωσης είναι βαθμού όχι μεγαλύτερου του 1.

Επομένως  $S(\lambda) = T(\lambda)$ . Αλλά τότε παίρνουμε από την (1.36)

$$M(B_0\lambda + B_1) = (A_0\lambda + A_1)Q \quad (1.37)$$

Θα δείξουμε ότι ο  $M$  είναι ομαλός πίνακας. Γι' αυτό το σκοπό διαρούμε τον  $P(\lambda)$  από τα αριστερά με  $B_0\lambda + B_1$ :

$$P(\lambda) = (B_0\lambda + B_1)U(\lambda) + P \quad (1.38)$$

Από τις (1.33), (1.34) και (1.38) συμπεραίνουμε:

$$\begin{aligned} I &= M(\lambda)P(\lambda) = M(\lambda)(B_0\lambda + B_1)U(\lambda) + M(\lambda)P \\ &= (A_0\lambda + A_1)Q(\lambda)U(\lambda) + (A_0\lambda + A_1)S(\lambda) + MP \\ &= (A_0\lambda + A_1)[Q(\lambda)U(\lambda) + S(\lambda)P] + MP \end{aligned} \quad (1.39)$$

Εφόσον ο τελευταίος όρος αυτής της (1.39) πρέπει να είναι βαθμού μηδενικού (γιατί είναι ίσος με  $I$ ), η σχέση στις αγκύλες πρέπει να είναι ίση με το 0.

Συνεπώς από την (1.39) έχουμε

$$MP = I \quad (1.40)$$

Άρα  $|M| \neq 0$  και  $M^{-1} = P$ .

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1.37) από τα αριστερά με  $P$ , παίρνουμε :

$$B_0\lambda + B_1 = P(A_0\lambda + A_1)Q. \quad (1.41)$$

Το γεγονός ότι ο  $P$  είναι ομαλός προκύπτει από την (1.40). Ότι οι  $P$  και  $Q$  είναι ομαλοί προκύπτει απευθείας από την (1.32), εφόσον αυτή η ταυτότητα δείχνει:

$$B_0 = PA_0Q$$

και συνεπώς  $|P| |A_0| |Q| = |B_0| \neq 0$ . ■

**Παρατήρηση:** Από την απόδειξη προκύπτει ότι οι σταθεροί πίνακες  $P$  και  $Q$  με τους οποίους έχουμε αντικαταστήσει τους  $\lambda$ -πίνακες  $P(\lambda)$  και  $Q(\lambda)$  στην (1), μπορούν να ληφθούν ως τα αριστερά και δεξιά υπόλοιπα αντίστοιχα των  $P(\lambda)$  και  $Q(\lambda)$  στην διαίρεση με  $B_0\lambda + B_1$ .

## 1.8 Γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία (Extended unimodular equivalence)

Σ' αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε μια καινούρια ισοδυναμία που υπερτερεί από την αντιστρέψιμη ισοδυναμία, με την οποία ασχοληθήκαμε στις προηγούμενες ενότητες και αυτό γιατί αναφέρεται σε πολυωνυμικούς πίνακες διαφορετικών διαστάσεων. Πριν όμως θα αναφέρουμε κάποιους ορισμούς απαραίτητους για την κατανόηση αυτής της ισοδυναμίας.

Δεδομένων τριών πολυωνυμικών πινάκων  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times q}$ ,  $C(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times m}$  που ικανοποιούν τη σχέση  $A(s) = B(s)C(s)$ , τότε λέμε ότι ο  $B(s)$  είναι αριστερός διαιρέτης του  $A(s)$ , ο  $C(s)$  είναι δεξιός διαιρέτης του  $A(s)$  και  $A(s)$  είναι αριστερό πολλαπλάσιο του  $C(s)$  ή δεξιό πολλαπλάσιο του  $B(s)$ . Θεωρούμε τώρα δύο πολυωνυμικούς πίνακες  $T_1(s)$ ,  $T_2(s)$  με τον ίδιο αριθμό γραμμών (στηλών) δηλαδή έστω  $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times l}$  ( $\in \mathbb{R}[s]^{l \times m}$ ),  $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t}$  ( $\in \mathbb{R}[s]^{t \times m}$ ) και έστω  $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ( $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ) ένας αριστερός (δεξιός) διαιρέτης του  $T_1(s)$  και του  $T_2(s)$ , δηλαδή έστω

$$T_1(s) = T_L(s)\bar{T}_1(s) \quad \text{και} \quad T_2(s) = T_L(s)\bar{T}_2(s)$$

$$T_1(s) = \bar{T}_1(s)T_R(s) \quad T_2(s) = \bar{T}_2(s)T_R(s)$$

$$\text{όπου } \bar{T}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times l} \quad (\in \mathbb{R}[s]^{l \times m}) \quad \text{και} \quad \bar{T}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t} \quad (\in \mathbb{R}[s]^{t \times m})$$

**Ορισμός 1.35** Ο  $T_L(s)$  ( $T_R(s)$ ) ονομάζεται κοινός αριστερός (δεξιός) διαιρέτης των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$ . Αν  $T_L(s)$  ( $T_R(s)$ ) είναι δεξιό (αριστερό) πολλαπλάσιο κάθε κοινού αριστερού (δεξιού) διαιρέτη  $\bar{T}_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ( $\bar{T}_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ) των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$  αν δηλαδή  $T_L(s) = \bar{T}_L(s)T_3(s)$  ( $T_R(s) = T_3(s)\bar{T}_R(s)$ ) για κάποιο  $T_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ( $\in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ )

τότε ο  $T_L(s)$  ( $T_R(s)$ ) ονομάζεται **μέγιστος κοινός αριστερός (δεξιός) διαιρέτης** των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$ . □

**Ορισμός 1.36** Δύο πολυωνυμικοί πίνακες με τον ίδιο αριθμό γραμμών,  $T_1(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times l}$ ,  $T_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times t}$  και  $l+t \geq p = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)} [T_1(s) \ T_2(s)]$  ονομάζονται **αριστερά πρώτοι (left coprime)** αν ο μέγιστος αριστερός κοινός διαιρέτης των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$  είναι αντιστρέψιμος (unimodular). □

**Ορισμός 1.37** Δύο πολυωνυμικοί πίνακες με τον ίδιο αριθμό στηλών,  $T_1(s) \in \mathbb{R}(s)^{l \times m}$ ,  $T_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{t \times m}$  και  $l+t \geq m = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix}$  ονομάζονται **δεξιά πρώτοι (right coprime)** αν ο μέγιστος δεξιός κοινός διαιρέτης των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$  είναι αντιστρέψιμος (unimodular). □

**Λήμμα 1.38** Έστω ο διαχωρισμένος τετράγωνος πολυωνυμικός πίνακας

$$\begin{pmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι αντιστρέψιμος (unimodular), τότε οι

- α)  $A(s), B(s)$  ( αντίστοιχα  $C(s), D(s)$  ) είναι αριστερά πρώτοι
- β)  $A(s), C(s)$  (αντίστοιχα  $B(s), D(s)$  ) είναι δεξιά πρώτοι. □

Έστω  $P(m, \ell)$  η τάξη των  $(r+m) \times (r+\ell)$  πολυωνυμικών πινάκων όπου  $\ell$  και  $m$  είναι σταθεροί ακέραιοι και ο  $r$  παίρνει τιμές μεταξύ των ακέραιων που είναι μεγαλύτεροι από το  $\max(-m, -\ell)$ . Έστω  $P(s), P_1(s) \in P(m, \ell)$  και θεωρούμε την σχέση που παράγεται από την

$$M(s)P(s) = P_1(s)N(s) \tag{1.42}$$

όπου  $P_1$  και  $M$  είναι αριστερά πρώτοι και  $P$  και  $N$  είναι δεξιά πρώτοι.



**Θεώρημα 1.39** Η σχέση που παράγεται από την (1.42) είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

**Απόδειξη**

α) Ανακλαστική ιδιότητα:

Η σχέση είναι ανακλαστική εφόσον η (1.42) ισχύει για  $P_1 = P$  όπου  $M$  και  $N$  μοναδιαίοι πίνακες κατάλληλων μεγεθών.

β) Συμμετρική ιδιότητα:

Για την συμμετρικότητα έχουμε ότι οι  $P$  και  $P_1$  ικανοποιούν την (1.42) η οποία μπορεί να γραφεί

$$(M \ P_1) \begin{pmatrix} P \\ -N \end{pmatrix} = 0 \quad (1.43)$$

Εφόσον  $M$ ,  $P_1$  είναι αριστερά πρώτοι, θα υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $X_1$  και  $X_2$  (οι οποίοι μεταξύ τους είναι δεξιά πρώτοι) τέτοιοι ώστε

$$(M \ P_1) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = I_{r_1+m} \quad (1.44)$$

Ομοίως υπάρχουν αριστερά πρώτοι πολυωνυμικοί πίνακες  $\widehat{X}_3$ ,  $\widehat{X}_4$  τέτοιοι ώστε

$$(\widehat{X}_3, \widehat{X}_4) \begin{pmatrix} P \\ -N \end{pmatrix} = I_{r+\ell} \quad (1.45)$$

Θεωρούμε τώρα το ζεύγος πινάκων  $X_3, X_4$  που ορίζεται από τη σχέση

$$(X_3, X_4) = (\widehat{X}_3, \widehat{X}_4) \left[ I_{r_1+r+\ell+m} - \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} (M \ P_1) \right] \quad (1.46)$$

Τότε

$$\begin{aligned} (X_3, X_4) \begin{pmatrix} P \\ -N \end{pmatrix} &= (\widehat{X}_3, \widehat{X}_4) \begin{pmatrix} P \\ -N \end{pmatrix} - (\widehat{X}_3, \widehat{X}_4) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} (M \ P_1) \begin{pmatrix} P \\ -N \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(1.43)}{=} \\ &\stackrel{(1.45)}{=} I_{r+\ell} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} (X_3, X_4) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &= (\widehat{X}_3, \widehat{X}_4) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - (\widehat{X}_3, \widehat{X}_4) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} (M \ P_1) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(1.44)}{=} 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

Οι σχέσεις (1.43), (1.44),(1.47) και (1.48) μπορούν να συγκεντρωθούν στη σχέση

$$\begin{pmatrix} M & P_1 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & P \\ X_2 & -N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r+m} & 0 \\ 0 & I_{r+\ell} \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

Αλλά οι δύο πίνακες στο αριστερό μέλος της (1.49) είναι και οι δύο τετράγωνοι και της ίδιας διάστασης. Συνεπώς ο ένας είναι ο αντίστροφος του άλλου. Επίσης εφόσον και οι δύο είναι πολυωνυμικοί, είναι και οι δύο αντιστρέψιμοι. Από τις ιδιότητες της αντιστρεψιμότητας

$$\begin{pmatrix} X_1 & P \\ X_2 & -N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & P_1 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r+m} & 0 \\ 0 & I_{r+\ell} \end{pmatrix}$$

Από τις (1.42) και (1.43) παίρνουμε

$$(X_1, P) \begin{pmatrix} P_1 \\ X_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.50)$$

Επίσης από το Λήμμα 1.38, οι  $X_1$  και  $X_4$  είναι πρώτοι μεταξύ τους εφόσον

$$\begin{pmatrix} X_1 & P \\ X_2 & -N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M & P_1 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμοι (unimodular). Έτσι η συμμετρικότητα της (1.42) αποδείχτηκε.

γ) Μεταβατική ιδιότητα:

Για την μεταβατικότητα της (1.42) υποθέτουμε

$$MP = P_1N \quad (1.51\alpha)$$

$$M'P_1 = P_2N' \quad (1.51\beta)$$

Από την (1.51α) έχουμε

$$M'MP = M'P_1N$$

και αντικαθιστώντας το  $M'P_1$  στην (1.51β) έχουμε

$$M'MP = P_2N'N \quad (1.52)$$

Πρέπει τώρα να δειχθεί ότι οι απαιτούμενες συνθήκες των πρώτων εμφανίζονται.

Από τις ιδιότητες των πρώτων σε συνδυασμό με την (1.51), υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  τέτοιοι ώστε

$$MQ_1 + P_1Q_2 = I_{r+m} \quad (1.53)$$

$$M'Q_3 + P_2Q_4 = I_{r+m} \quad (1.54)$$

Από την (1.53)

$$M'MQ_1 + M'P_1Q_2 = M'$$

Δηλαδή από (1.51β):

$$M'MQ_1 + P_2N'Q_2 = M'$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με  $Q_3$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} M'MQ_1Q_3 + P_2N'Q_2Q_3 &= M'Q_3 \stackrel{(1.54)}{=} I_{r_2+m} - P_2Q_4, \\ M'MQ_1Q_3 + P_2(N'Q_2Q_3 - Q_4) &= I_{r+m} \end{aligned} \quad (1.55)$$

Η (1.55) δείχνει ότι οι πολυωνυμικοί πίνακες  $M'M$  και  $P_2$  είναι αριστερά πρώτοι. Ομοίως οι  $P$  και  $N'N$  αποδεικνύει ότι είναι δεξιά πρώτοι, και η μεταβατικότητα προκύπτει από την (1.52). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

Η σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από την (1.42) καλείται **γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία (extended unimodular ισοδυναμία)**. ■

**Πρόταση 1.40** Οι πολυωνυμικοί πίνακες ίδιας διάστασης που είναι αντιστρέψιμα (unimodular) ισοδύναμοι είναι επίσης και γενικευμένοι αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (extended unimodular equivalent). □

Ως αποτέλεσμα αυτής της πρότασης και του θεωρήματος 1.39 έχουμε:

**Πρόταση 1.41** Αν δύο πολυωνυμικοί πίνακες στο  $P(m, \ell)$  είναι γενικευμένοι αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (extended unimodular equivalent) τότε το ίδιο είναι και οι αντίστοιχες Smith μορφές τους.

**Απόδειξη** Υποθέτουμε ότι  $P(s), P_1(s) \in P(m, \ell)$  είναι γενικευμένοι αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (extended unimodular equivalent). Τότε

$$MP = P_1N \quad (1.56)$$

με τις συνηθισμένες ιδιότητες των πρώτων να ισχύουν.

Έστω  $S(P)$  και  $S(P_1)$  οι Smith μορφές των  $P(s)$  και  $P_1(s)$  αντίστοιχα, τότε

$$P = LS(P)R, \quad P_1 = L_1S(P_1)R_1 \quad (1.57)$$

για αντιστρέψιμους πίνακες  $L, L_1, R, R_1$ . Αντικαθιστώντας την (1.57) στην (1.56) παίρνουμε

$$MLS(P)R = L_1S(P_1)R_1N$$

δηλαδή

$$L_1^{-1}MLS(P) = S(P_1)R_1NR^{-1} \quad (1.58)$$

Τώρα οι  $L_1^{-1}ML$  και  $S(P_1)$  είναι αριστερά πρώτοι εφόσον

$$(L_1^{-1}ML, S(P_1)) = L_1^{-1}(M \ P_1) \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & R_1^{-1} \end{pmatrix}$$

με τον πρώτο και τρίτο πίνακα στο δεξιό μέλος να είναι αντιστρέψιμοι και  $M, P_1$  να είναι αριστερά πρώτοι. Ομοίως  $S(P)$  και  $R_1NR^{-1}$  είναι δεξιά πρώτοι, και έτσι η (1.58) αποδεικνύει την πρόταση. ■

**Θεώρημα 1.42** Αν ο  $(r+m) \times (r+l)$  πίνακας  $P$  και ο  $(r_1+m) \times (r_1+l)$  πίνακας  $P_1$  είναι γενικευμένοι αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι (extended unimodular equivalent), τότε

$$\left. \begin{aligned} S(P_1) &= I_{r_1-r} \oplus S(P), r_1 > r \\ S(P_1) &= S(P), r_1 = r \\ S(P) &= I_{r-r_1} \oplus S(P_1), r > r_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

όπου  $S(P)$  και  $S(P_1)$  είναι οι αντίστοιχες Smith μορφές των  $P$  και  $P_1$ .

**Απόδειξη** Από την Πρόταση 1.40, οι Smith μορφές  $S(P)$  και  $S(P_1)$  είναι γενικευμένοι αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι

$$MS(P) = S(P_1)N \quad (1.60)$$

για τους πολυωνυμικούς πίνακες  $M$  και  $N$  που είναι πρώτοι μεταξύ τους. Το θεώρημα θα αποδειχθεί για  $r_1 > r$ .

Υποθέτουμε ότι  $m < l$ , τότε

$$\left. \begin{aligned} S(P) &= (Q(P), 0_{r+m, l-m}) \\ S(P_1) &= (Q(P_1), 0_{r_1+m, l-m}) \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

όπου

$$\left. \begin{aligned} Q(P) &= \text{diag}\{\varepsilon_1(P), \dots, \varepsilon_{r+m}(P)\} \\ Q(P_1) &= \text{diag}\{\varepsilon_1(P), \dots, \varepsilon_{r_1+m}(P_1)\} \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

και

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i(P) &| \varepsilon_{i+1}(P), i = 1, \dots, r+m-1 \\ \varepsilon_i(P_1) &| \varepsilon_{i+1}(P_1), i = 1, \dots, r_1+m-1 \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

Υποθέτουμε ότι τα πρώτα  $p$  αναλλοίωτα πολυώνυμα του  $P$  είναι μη μηδενικά. Τότε ο  $S(P)$  μπορεί να διαχωριστεί με αυτόν τον τρόπο

$$S(P) = \begin{pmatrix} Q_1(P) & 0_{p,r+m-p} & 0_{p,\ell-m} \\ 0_{r+m-p,p} & 0_{r+m-p,r+m-p} & 0_{r+m-p,\ell-m} \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

Τώρα διαχωρίζουμε τον  $S(P_1)$

$$S(P_1) = \begin{pmatrix} Q_1(P_1) & 0_{\eta_1-r+p,r+m-p} & 0_{\eta_1-r+p,\ell-m} \\ 0_{r+m-p,\eta_1-r+p} & Q_2(P_1) & 0_{r+m-p,\ell-m} \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

και στην (1.60) γράφουμε

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

έτσι ώστε αυτός ο διαχωρισμός συμπίπτει με αυτούς των (2.23) και (2.24). Οι εξισώσεις (2.19) δίνουν τον ακόλουθο σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} M_{11}Q_1(P) &= Q_1(P_1)N_{11}; & 0_{\eta_1-r+p,r+m-p} &= Q_1(P_1)N_{12}; & 0_{\eta_1-r+p,\ell-m} &= Q_1(P_1)N_{13} \\ M_{21}Q_1(P) &= Q_2(P_1)N_{21}; & 0_{r+m-p,r+m-p} &= Q_2(P_1)N_{22}; & 0_{r+m-p,\ell-m} &= Q_2(P_1)N_{23} \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Οι εξισώσεις (1.67) δίνουν

$$N_{12} = 0; \quad N_{13} = 0 \quad (1.68)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο

$$\begin{pmatrix} N_{22} & N_{23} \\ N_{32} & N_{33} \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

είναι ένας τετράγωνος πίνακας διάστασης  $r + \ell - p$ , και είναι αντιστρέψιμος (unimodular) αν η συνθήκη ότι ο  $S(P)$  είναι δεξιά πρώτος με τον  $N$  ισχύει. Αν υποθέσουμε ότι  $Q_2(P_1) \neq 0$ , τότε από τις ιδιότητες διαιρετότητας (1.63),

$$\varepsilon_{\eta_1-r+p+1}(P_1) \neq 0 \quad (1.70)$$

Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις στην (1.67) δείχνουν ότι η πρώτη γραμμή του πίνακα (1.69) είναι μηδέν, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος (unimodular). Έτσι η (1.70) είναι ψευδής και επομένως

$$Q_2(P_1) \equiv 0 \quad (1.71)$$

Εφόσον αυτή είναι η υπόθεση η (1.67) δίνει

$$M_{21} = 0$$

και έτσι οι εξισώσεις (1.67) δίνουν

$$M_{11}Q_1(P) = Q_1(P_1)N_{11} \quad (1.72)$$

με τις προϋποθέσεις ότι οι  $M_{11}$  και  $Q_1(P_1)$  είναι αριστερά πρώτοι, και οι  $Q_1(P)$  και  $N_{11}$  είναι δεξιά πρώτοι.

Ωστόσο εάν  $\ell > m$  η σχέση (1.60) μπορεί να αντικατασταθεί από τη σχέση (1.72) στην οποία οι πίνακες  $Q_1(P)$  και  $Q_1(P_1)$  είναι τετράγωνοι. Ομοίως, αυτό είναι δυνατό εάν  $\ell < m$ , ενώ εάν  $\ell = m$  η εξίσωση (1.60) είναι ήδη σε αυτή τη μορφή. Στην (1.72) ας συμβολίσουμε τους  $M_{11}$  και  $N_{11}$  με  $M$  και  $N$  αντίστοιχα. Θεωρούμε τώρα την (1.72) και έστω

$$M = (m_{ij}), \quad N = (n_{ij}) \quad (1.73)$$

τότε οι εξισώσεις για την (1.72) γίνονται

$$m_{ij}\varepsilon_j(P) - n_{ij}\varepsilon_i(P_1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r_1 - r + p, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (1.74)$$

Θεωρούμε ότι  $\varepsilon_p(P) \neq 0$  και έτσι η (1.74) μπορεί να γραφεί

$$m_{ij} = \frac{\varepsilon_i(P_1)n_{ij}}{\varepsilon_j(P)}, \quad i = 1, 2, \dots, r_1 - 1 + p, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (1.75)$$

Υπάρχουν δύο σημαντικά σημεία για να παρατηρήσουμε σε αυτές τις σχέσεις.

- (i) Αρχικά υποθέτουμε ότι για κάποια  $i_0, j_0$ , ο  $\varepsilon_{i_0}(P_1)$  δεν είναι ένας διαιρέτης του  $\varepsilon_{j_0}(P)$  ( $\varepsilon_{i_0}(P_1)/\varepsilon_{j_0}(P)$ ). Τότε φανερά ο  $m_{i_0, j_0}$  έχει έναν κοινό διαιρέτη  $q(s)$ , με τον  $\varepsilon_{i_0}(P_1)$ . Από τις ιδιότητες της διαιρετότητας του  $\varepsilon_j(P)$ , αυτός ο διαιρέτης  $q(s)$  μπορεί επίσης να υπάρχει στο  $m_{i_0, j}$  για όλα τα  $j \leq j_0$ . Επιπλέον, από τις ιδιότητες της διαιρετότητας του  $\varepsilon_i(P_1)$ , ο ίδιος διαιρέτης  $q(s)$  υπάρχει επίσης στο  $m_{ij}$  για όλα τα  $i \geq i_0$  και  $j \leq j_0$ . Ωστόσο, εάν  $\varepsilon_{i_0}(P_1)/\varepsilon_{j_0}(P)$ , τότε κάθε  $m_{ij}$  για  $i \geq i_0$  και  $j \leq j_0$  έχει έναν κοινό διαιρέτη με τον  $\varepsilon_{i_0}(P_1)$ .
- (ii) Έπειτα, υποθέτουμε ότι  $\varepsilon_{j_0}(P)/\varepsilon_{i_0}(P_1)$  για κάποια  $i_0, j_0$ . Τότε, εφόσον  $m_{i_0, j_0}$  είναι ένα πολυώνυμο,  $n_{i_0, j_0}$  έχει τον ίδιο κοινό διαιρέτη  $p(s)$  με

τον  $\varepsilon_{j_0}(P)$ . Από τις ίδιες ιδιότητες διαιρετότητας όπως στην (i) ο διαιρέτης  $p(s)$  υπάρχει στο  $n_{ij}$  για όλα τα  $i \leq i_0$  και  $j \geq j_0$ . Ωστόσο, εάν  $\varepsilon_{j_0}(P) / \varepsilon_{i_0}(P_1)$  τότε ο  $n_{ij}$  ( $i \leq i_0, j \geq j_0$ ) και ο  $\varepsilon_{j_0}(P)$  έχουν έναν κοινό διαιρέτη.

Αυτές οι δύο παρατηρήσεις είναι πολύ σημαντικές για αυτά που ακολουθούν.

(α) Θεωρούμε  $\varepsilon_p(P)$ . Τότε  $\varepsilon_{r_1-r+p}(P_1) / \varepsilon_p(P)$ , το επιχείρημα (i) δείχνει ότι  $m_{i,p}$  ( $i = 1, 2, \dots, r_1 - r + p$ ) έχει έναν κοινό διαιρέτη  $q(s)$  με τον  $\varepsilon_{r_1-r+p}(P_1)$ . Συνεπώς  $M$  και  $Q_1(P_1)$  δεν είναι αριστερά πρώτοι, εφόσον η γραμμή του

$$(M, Q_1(P_1)) \quad (1.76)$$

είναι διαιρετή με το  $q(s)$ , παρέχοντας την απαιτούμενη αντίφαση.

Από την άλλη μεριά, αντλώντας επιχειρήματα από την (ii) και από το γεγονός ότι οι  $Q_1(P)$  και  $N$  είναι δεξιά πρώτοι δείχνουν ότι  $\varepsilon_p(P) / \varepsilon_{r_1-r+p}(P_1)$ . Γι'αυτόν τον λόγο

$$\varepsilon_p(P) = \varepsilon_{r_1-r+p}(P_1) \quad (1.77)$$

(β) Για δοσμένο  $j_0$ ,  $\varepsilon_{r_1-r+p-j}(P_1) / \varepsilon_{p-j_0}(P)$ , τότε ο  $m_{ij}$  ( $i = p - j_0, p - j_0 + 1, \dots, p; j = 1, 2, \dots, r_1 - r + p - j_0$ ) έχει έναν κοινό διαιρέτη με τον  $\varepsilon_{r_1-r+p-j_0}(P_1)$ . Αυτός ο διαιρέτης περιέχεται επίσης στον  $\varepsilon_{r_1-r+p-j_0+1}(P_1), \dots, \varepsilon_{r_1-r+p}(P_1)$  και έτσι για κάποια  $s_0$ , τέτοια ώστε  $q(s_0) = 0$ , ο πίνακας (2.35) γίνεται

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & Q'(P_1) & 0_{r_1-r+p-j_0-1, j_0+1} \\ 0_{j_0+1, r_1-r+p-j_0} & M_{22} & 0_{j_0+1, r_1-r+p-j_0-1} & 0_{j_0+1, j_0+1} \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

όπου  $M_{22}$  είναι ένας  $(j_0 + 1) \times (j_0 - (r_1 - r))$  πίνακας. Εφόσον  $r_1 > r$ , ο  $M_{22}$  έχει περισσότερες γραμμές από στήλες και συνεπώς οι γραμμές της (1.78) δεν μπορούν να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή οι  $M$  και  $Q_1(P_1)$  δεν είναι αριστερά πρώτοι. Αυτό αποδεικνύει την απαιτούμενη αντίφαση και έτσι  $\varepsilon_{r_1-r+p-j_0}(P_1) / \varepsilon_{p-j_0}(P)$ .

Από την άλλη, αντλώντας επιχειρήματα από την (ii) και από το γεγονός ότι οι  $Q_1(P)$  και  $N$  δείχνουν ότι  $\varepsilon_{p-j_0}(P) / \varepsilon_{r_1-r+p-j_0}(P_1)$ . Γι'αυτόν τον λόγο

$$\varepsilon_{p-j_0}(P) = \varepsilon_{r_1-r+p-j_0}(P_1) \quad j_0 = 0, 1, \dots, p-1 \quad (1.79)$$

Έχουμε έτσι αποδείξει ότι

$$Q_1(P_1) = Q'(P_1) \oplus Q_1(P) \quad (1.80)$$

όπου

$$Q'(P_1) = \text{diag}\{\varepsilon_1(P_1), \dots, \varepsilon_{r_1-r}(P_1)\} \quad (1.81)$$

Χρησιμοποιώντας την (1.80) στην (1.72) έχουμε

$$\begin{pmatrix} M^{(1)} \\ M^{(2)} \end{pmatrix} Q_1(P) = \begin{pmatrix} Q'(P_1) & 0 \\ 0 & Q_1(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N^{(1)} \\ N^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

όπου,  $M = \begin{pmatrix} M^{(1)} \\ M^{(2)} \end{pmatrix}$  και  $Q_1(P_1)$  είναι αριστερά πρώτοι, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} M^{(1)} & Q'(P_1) & 0_{r_1-r,p} \\ M^{(2)} & 0_{p,r_1-r} & Q_1(P) \end{pmatrix} \quad (1.83)$$

έχει πλήρης τάξη για όλα τα  $s$ . Εφόσον η (1.83) έχει περισσότερες στήλες από ότι γραμμές, οι γραμμές του (1.83) πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες για όλα τα  $s$ . Αλλά παρατηρούμε ότι στην (1.83),  $M^{(2)}$  είναι ένας  $p \times p$  πίνακας. Θεωρούμε τώρα ένα  $s_0$  τέτοιο ώστε

$$\varepsilon_{r_1-r}(P_1)|_{s_0} = 0 \quad (1.84)$$

τότε από τις ιδιότητες της διαιρετότητας του  $\varepsilon_j(P)$ , και τις σχέσεις (1.79),

$$Q_1(P)|_{s_0} = 0 \quad (1.85)$$

Συνεπώς οι τελευταίες  $p+1$  γραμμές της (1.83) για ένα τέτοιο  $s_0$  δε μπορούν να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, εφόσον τα μοναδικά μη-μηδενικά στοιχεία σε αυτές τις γραμμές παρουσιάζονται στις πρώτες  $p$  στήλες. Γι'αυτό δεν υπάρχει τέτοιο  $s_0$  για το οποίο η (1.84) ισχύει. Οπότε  $\varepsilon_{r_1-r}(P_1) \equiv 1$  και σε αυτήν την περίπτωση

$$\varepsilon_1(P_1) \equiv \dots \equiv \varepsilon_{r_1-r}(P_1) \equiv 1 \quad (1.86)$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. Το αντίστροφο του θεωρήματος ισχύει. ■

**Θεώρημα 1.43** Έστω ο  $(r+m) \times (r+\ell)$  πίνακας  $P$  και ο  $(r_1+m) \times (r_1+\ell)$  πίνακας  $P_1$  που έχουν Smith μορφές  $S(P)$  και  $S(P_1)$  αντίστοιχα. Τότε οι  $P$  και  $P_1$  είναι



γενικευμένοι αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι αν οι  $S(P)$  και  $S(P_1)$  σχετίζονται όπως στην (1.59).

**Απόδειξη** Υποθέτουμε ότι  $r < r_1$  ( η περίπτωση που  $r > r_1$  είναι ίδια) και έστω

$$P = LS(P)R; \quad P_1 = L_1S(P_1)R_1 \quad (1.87)$$

όπου οι  $L, L_1, R, R_1$  είναι αντιστρέψιμοι (unimodular). Εφόσον

$$S(P_1) = I_{r_1-r} \oplus S(P)$$

Έχουμε

$$M'S(P) = S(P_1)N' \quad (1.88)$$

$$M' \begin{pmatrix} 0 \\ I_{r_1+m} \end{pmatrix}; \quad N' = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{r+\ell} \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

Παρατηρούμε ότι οι  $M'$  και  $S(P_1)$  είναι αριστερά πρώτοι και  $S(P)$  και  $N'$  είναι δεξιά πρώτοι. Από τις (1.87) και (1.88),  $P$  και  $P_1$  συνδέονται με τη σχέση

$$MP = P_1N'$$

όπου

$$M = L_1M'L^{-1}; \quad N = R_1^{-1}N'R \quad (1.90)$$

Παρατηρούμε ότι οι  $M$  και  $L$  είναι πρώτοι μεταξύ τους για τον ίδιο λόγο που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη της Πρότασης 1.38, το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα. ■

**Παράδειγμα 1.44** Έστω ο πίνακας  $A(s) = \begin{pmatrix} s^2 + s & s^2 - 1 \\ s + 1 & s + 1 \end{pmatrix}$  του παραδείγματος 1.12.

Τότε υπάρχουν πίνακες  $U_1, V_1$  τέτοιοι ώστε:  $U_1AV_1 = S_A$

$$\text{όπου } U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad S_A = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}.$$

Θα υπάρξει πίνακας  $B(s)$  του οποίου η Smith μορφή θα είναι  $S_B = I \oplus S_A$  δηλαδή

$$S_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix}. \text{ Για να βρω τον } S_B \text{ κάνω στοιχειώδεις πράξεις στον } S_A.$$

- Πολλαπλασιάζω την δεύτερη στήλη με  $s$  και την προσθέτω στην πρώτη:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s^2+s & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

- Πολλαπλασιάζω την δεύτερη γραμμή με 2 και την προσθέτω στην πρώτη:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s^2+s & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s^2+2s+1 & 2s+2 & 0 \\ s^2+s & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

- Προσθέτω την τρίτη στήλη στην πρώτη:

$$\begin{pmatrix} 2s^2+2s+1 & 2s+2 & 0 \\ s^2+s & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s^2+2s+1 & 2s+2 & 0 \\ s^2+s & s+1 & 0 \\ s+1 & 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

- Προσθέτω την τρίτη γραμμή στην δεύτερη:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2s^2+2s+1 & 2s+2 & 0 \\ s^2+s & s+1 & 0 \\ s+1 & 0 & s+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s^2+2s+1 & 2s+2 & 0 \\ s^2+2s+1 & s+1 & s+1 \\ s+1 & 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

- Πολλαπλασιάζω την τρίτη στήλη με -2 και την προσθέτω στην δεύτερη:

$$\begin{pmatrix} 2s^2+2s+1 & 2s+2 & 0 \\ s^2+2s+1 & s+1 & s+1 \\ s+1 & 0 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s^2+2s+1 & 2s+2 & 0 \\ s^2+2s+1 & -s-1 & s+1 \\ s+1 & -2s-2 & s+1 \end{pmatrix} = B(s)$$

Επομένως υπάρχουν πίνακες  $U_2, V_2$  που ανάγουν τον πίνακα  $S_B$  στον  $B(s)$ ,

όπου

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Επομένως οι  $U_2^{-1}, V_2^{-1}$  θα ανάγουν τον πίνακα  $B(s)$  στην Smith μορφή του, δηλαδή:

$$U_2^{-1}B(s)V_2^{-1} = S_B$$

όπου

$$U_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ -2s-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι  $S_A, S_B$  είναι γενικευμένοι αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι (extended unimodular equivalent), οπότε υπάρχουν πίνακες  $M$  και  $N$  οι οποίοι συνδέουν τις Smith μορφές τους,

όπου

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ισχύει δηλαδή η σχέση

$$MS_B = S_A N$$

$$MU_2^{-1}BV_2^{-1} = U_1AV_1N$$

$$MU_2^{-1}B = U_1AV_1NV_2$$

$$U_1^{-1}MU_2^{-1}B = AV_1NV_2$$

Και από την τελευταία σχέση είναι φανερό ότι οι πίνακες  $A, B$  είναι γενικευμένοι αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι. □



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Ισοδυναμίες Συστημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε ισοδυναμίες συστημάτων που έχουν ως σκοπό να διατηρήσουν αναλλοίωτη την δομή ενός συστήματος, παράδειγμα την τάξη, τον βαθμό, τα αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου, εξόδου και εισόδου- εξόδου.

#### 2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε το σύνολο των state – space εξισώσεων:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + E(d/dt)u(t) \end{aligned} \right\} \Sigma \quad (2.1)$$

όπου  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $E[\cdot] \in \mathbb{R}^{p \times m}[\cdot]$ . Αν  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι ομαλός, τότε η σχέση  $z(t) = H^{-1}x(t)$  εκφράζει μια αλλαγή εσωτερικής συντεταγμένης στις state-space εξισώσεις. Με τον μετασχηματισμό αυτό το σύνολο των εξισώσεων γίνεται:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}(t) &= H^{-1}AHz(t) + H^{-1}Bu(t) \\ y(t) &= CHz(t) + E(d/dt)u(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Θεωρούμε ότι το νέο σύνολο εξισώσεων αντιπροσωπεύει το ίδιο σύστημα. Αυτός ο μετασχηματισμός οδηγεί σε μια φυσική σχέση ισοδυναμίας για state-space συστήματα την οποία καλούμε *ομοιότητα συστημάτων* (System Similarity (SS)).

Ας θεωρήσουμε τώρα έναν πίνακα συνάρτησης μεταφοράς  $G(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  και ένα ζεύγος πολυωνυμικών πινάκων  $N_R(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$ ,  $D_R(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  (όπου  $\det D_R(s) \neq 0$ ) που ικανοποιούν τη σχέση  $G(s) = N_R(s)D_R(s)^{-1}$ . Το ζεύγος  $\{N_R(s), D_R(s)\}$  καλείται δεξιά κλασματική περιγραφή πίνακα (MFD) του  $G(s)$ , και δεν είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε ότι  $N_R(s)$  και  $D_R(s)$  είναι δεξιά πρώτοι. Μπορούμε να θεωρήσουμε την δεξιά MFD σε ένα διαφορικό τελεστή ως ακολούθως:

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= D_R(d/dt)\xi(t) \\ y(t) &= N_R(d/dt)\xi(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Και μπορούμε να δούμε ότι ο μετασχηματισμός  $\xi(t) = U(d/dt)n(t)$  όπου  $U(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times m}[\cdot]$  unimodular, ορίζει μια εσωτερική αλλαγή συντεταγμένης με τον ίδιο τρόπο που η ομοιότητα συστημάτων (SS) έκανε για την περίπτωση του χώρου καταστάσεων (state-space). Έτσι έχουμε μια φυσική σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται στους δεξιά κλασματικούς πίνακες και θα θέλαμε να θεωρήσουμε το μετασχηματισμένο σύνολο εξισώσεων

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= D_R(d/dt)U(d/dt)n(t) \\ y(t) &= N_R(d/dt)U(d/dt)n(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

ως μια περιγραφή ισοδυναμίας των εξισώσεων του συστήματος (2.3). Καλούμε αυτή τη σχέση ισοδυναμίας **αντιστρέψιμη ισοδυναμία (Unimodular Equivalence UE)**.

Με έναν αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε αντιστρέψιμη ισοδυναμία για αριστερές κλασματικές περιγραφές πινάκων (Matrix Fraction Decompositions MFDs). Έστω το ζεύγος των πολυωνυμικών πινάκων  $M_L(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$  και  $D_L(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}[s]$  ( όπου  $\det D_L(s) \neq 0$  ) που ικανοποιούν τη σχέση  $G(s) = D_L(s)^{-1}N_L(s)$ . Τότε το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από τις διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$\left. \begin{aligned} D_L(d/dt)\xi(t) &= N_L(d/dt)u(t) \\ y(t) &= \xi(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Αν  $U(\cdot) \in \mathbb{R}^{p \times p}[\cdot]$  είναι αντιστρέψιμος, τότε θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την περιγραφή του συστήματος ισοδυναμίας:

$$\left. \begin{aligned} U(d/dt)D_L(d/dt)\xi(t) &= U(d/dt)N_L(d/dt)u(t) \\ y(t) &= \xi(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

και έτσι ορίζουμε αντιστρέψιμη ισοδυναμία (UE) για αριστερά MFDs.

Θεωρούμε τώρα ένα μεγαλύτερο τύπο συστημάτων που ονομάζεται **Rosenbrock περιγραφή πολυωνυμικών πινάκων (Polynomial Matrix Description PMD)** η οποία περιέχει τις αναπαραστάσεις των κλασματικών πινάκων και του χώρου καταστάσεων ως ειδικές περιπτώσεις. Η PMD έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\left. \begin{aligned} T(d/dt)\xi(t) &= Q(d/dt)u(t) \\ y(t) &= R(d/dt)\xi(t) + W(d/dt)u(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

όπου  $T(\cdot) \in \mathbb{R}^{r \times r}[\cdot]$ ,  $Q(\cdot) \in \mathbb{R}^{r \times m}[\cdot]$ ,  $R(\cdot) \in \mathbb{R}^{p \times r}[\cdot]$  και  $W(\cdot) \in \mathbb{R}^{p \times m}[\cdot]$  και με σκοπό να πάρουμε διαφορετικά είδη μοντέλων δεν θα θεωρούμε τον  $r$  ως σταθερό. Ωστόσο θα θεωρούμε τους  $m$ =αριθμό εισόδων και  $p$ =αριθμό εξόδων σταθερούς.

Παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace της (2.7) και συγκεντρώνοντας τους σε ένα πίνακα έχουμε:

$$P(s) \begin{bmatrix} \hat{\xi}(s) \\ \hat{u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & -Q(s) \\ R(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}(s) \\ \hat{u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

και ο  $P(s)$  καλείται Rosenbrock πίνακας συστήματος (Rosenbrock system matrix) της (2.7). Το σύστημα στο χώρο καταστάσεων μπορεί να γραφεί στη μορφή (2.8) παίρνοντας  $r=n$  και

$$T(s) = sI - A, \quad R(s) = C, \quad Q(s) = B, \quad W(s) = E(s) \quad (2.9)$$

και οι δεξιοί και αριστεροί κλασματικοί πίνακες μπορούν να έρθουν στη γενική μορφή παίρνοντας αντίστοιχα:

$$r = m \text{ και } T(s) = D_R(s), \quad R(s) = N_R(s), \quad Q(s) = I_m, \quad W(s) = 0 \quad (2.10)$$

$$r = p \text{ και } T(s) = D_L(s), \quad Q(s) = N_L(s), \quad R(s) = I_p, \quad W(s) = 0 \quad (2.11)$$

Συγκεντρώνοντας τις (2.9) σε μορφή Rosenbrock πίνακα παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & E(s) \end{bmatrix}$$

και για τις (2.10), (2.11) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} D_R(s) & -I_m \\ N_R(s) & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} D_L(s) & -N_L(s) \\ I_p & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13), (2.14)$$

Κάποιες φορές είναι βολικό να αντικαταστήσουμε τις (2.13), (2.14) από τους ακόλουθους πίνακες:

$$\begin{bmatrix} D_R(s) \\ N_R(s) \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} D_R(s) & -N_L(s) \end{bmatrix} \quad (2.15), (2.16)$$

Ο Rosenbrock (1970) πρότεινε μια σχέση ισοδυναμίας για PMDs που καλείται αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων (strict system equivalent SSE) και έδειξε ότι η ομοιότητα συστημάτων (SS) και η αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων (SSE) ταυτίζονται για συστήματα στο χώρο καταστάσεων (state-space).

**Ορισμός 2.1** Ο πολυωνυμικός πίνακας

$$G(s) = R(s)T(s)^{-1}Q(s) + W(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m} \quad (2.17)$$

καλείται συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος  $\Sigma$ . □

**Ορισμός 2.2** Η τάξη  $n$  ενός συστήματος  $\Sigma$  που περιγράφεται από μια πολυωνυμική περιγραφή πινάκων  $[T(s), Q(s), R(s), W(s)]$ , (PMD) ορίζεται ως ο βαθμός του  $T(s)$  δηλαδή

$$n = \deg |T(s)|. \quad (2.18)$$

### 2.1.1 Αποσυζευτικά Μηδενικά (Decoupling zeros)

Έστω

$$P(s) = \begin{bmatrix} T(s) & -Q(s) \\ R(s) & W(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(r+p) \times (r+m)} \quad (2.19)$$

ένας Rosenbrock πίνακας συστήματος που περιγράφει ένα γραμμικό πολυμεταβλητό σύστημα. Έστω  $G_L(s) \in \mathbb{R}[[s]^{r \times r}]$  ένας μέγιστος αριστερός διαιρέτης των  $T(s)$  και  $Q(s)$ , δηλαδή έστω

$$[T(s), Q(s)] = G_L(s)[\bar{T}(s), \bar{Q}(s)] \quad (2.20)$$

όπου  $\bar{T}(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ ,  $\bar{Q}(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times m}$  αριστερά πρώτοι.

**Ορισμός 2.3** Τα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου του συστήματος είναι τα μηδενικά του  $G_L(s)$ . □

Ομοίως έστω  $G_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  ένας μέγιστος δεξιός διαιρέτης των  $T(s)$  και  $R(s)$ , δηλαδή έστω

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{T}(s) \\ \hat{R}(s) \end{bmatrix} G_R(s) \quad (2.21)$$

όπου  $\hat{T}(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ ,  $\hat{R}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times r}$  είναι δεξιά πρώτοι.



**Ορισμός 2.4** Τα αποσυζευτικά μηδενικά εξόδου του συστήματος είναι τα μηδενικά του  $G_R(s)$ . □

Έστω  $G_L(s)$  ο μέγιστος αριστερός διαιρέτης των  $T(s)$  και  $Q(s)$  όπως είναι στη σχέση (2.20). Τότε

$$\begin{bmatrix} T(s) & -Q(s) \\ R(s) & W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_L(s) & 0_{r,p} \\ 0_{p,r} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}(s) & -\bar{Q}(s) \\ R(s) & W(s) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Έστω τώρα  $\bar{G}_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$  ένας μέγιστος δεξιός διαιρέτης των  $\bar{T}(s)$  και  $R(s)$  δηλαδή έστω

$$\begin{bmatrix} \bar{T}(s) \\ R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}(s) \\ \tilde{R}(s) \end{bmatrix} \bar{G}_R(s) \quad (2.23)$$

όπου  $\tilde{T}(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ ,  $\tilde{R}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times r}$  είναι αριστερά πρώτοι.

**Ορισμός 2.5** Τα αυστηρά αποσυζευτικά μηδενικά εξόδου του συστήματος είναι τα μηδενικά του  $\bar{G}_R(s)$ . □

Έστω  $G_R(s)$  ο μέγιστος δεξιός διαιρέτης των  $T(s)$  και  $R(s)$  όπως είναι στη σχέση (2.21). Τότε

$$\begin{bmatrix} T(s) & -Q(s) \\ R(s) & W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{T}(s) & -Q(s) \\ \hat{R}(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_R(s) & 0_{r,m} \\ 0_{m,r} & I_m \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Έστω  $\bar{G}_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$  ένας μέγιστος αριστερός διαιρέτης των  $\hat{T}(s)$  και  $Q(s)$ , δηλαδή έστω

$$[\hat{T}(s), Q(s)] = \bar{G}_L(s) [\hat{T}(s), \hat{Q}(s)] \quad (2.25)$$

όπου  $\hat{T}(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ ,  $\hat{Q}(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times m}$  είναι αριστερά πρώτοι.

**Ορισμός 2.6** Τα αυστηρά αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου του συστήματος είναι τα μηδενικά του  $\overline{G_L}(s)$ . □

**Ορισμός 2.7** Τα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου-εξόδου του συστήματος είναι αυτά τα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου τα οποία δεν είναι αυστηρά αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου. Ισοδύναμα τα αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου-εξόδου του συστήματος είναι αυτά τα αποσυζευτικά μηδενικά εξόδου τα οποία δεν είναι αυστηρά αποσυζευτικά μηδενικά εξόδου. □

## 2.1 Τύποι συστημάτων και αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων

Υπάρχουν τέσσερις τύποι για τις αναπαραστάσεις συστημάτων: i) το σύστημα στο χώρο καταστάσεων (**S**), ii) η δεξιά κλασματική περιγραφή πίνακα (MFD) (**R**), iii) η αριστερή κλασματική περιγραφή πίνακα MFD (**L**) και iv) η πολωνυμική περιγραφή πίνακα (PMD) (**P**).

### Ορισμός 2.8

Έστω  $m, n$  και  $p$  σταθεροί θετικοί ακέραιοι και  $r$  ένας τυχαίος θετικός ακέραιος. Ορίζουμε:

$$\mathbf{S} = \left\{ \begin{array}{l} \{sI - A, B, C, E(s)\} \\ \text{όπου } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, E(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s] \end{array} \right\} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{l} \{N_R(s), D_R(s)\} \\ \text{όπου } N_R(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s], D_R(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s] \text{ και } \det D_R(s) \neq 0 \end{array} \right\} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{L} = \left\{ \begin{array}{l} \{N_L(s), D_L(s)\} \\ \text{όπου } N_L(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s], D_L(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}[s] \text{ και } \det D_L(s) \neq 0 \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{l} \{T(s), Q(s), R(s), W(s)\} \\ \text{όπου } T(s) \in \mathbb{R}^{r \times r}[s], Q(s) \in \mathbb{R}^{r \times m}[s], R(s) \in \mathbb{R}^{p \times r}[s], \\ W(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s], \det T(s) \neq 0 \end{array} \right\} \quad (2.29)$$

Αν και έχουμε ορίσει την MFDs ως ζευγάρια πολωνυμικών πινάκων, συχνά θα τους θεωρούμε ως τετράδα. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούμε να μιλάμε για αυστηρή

ισοδυναμία συστημάτων (SSE) για τις κλασματικές περιγραφές πινάκων (MFDs) εφόσον η τετραπλή αναπαράσταση θα είναι στοιχείο του  $\mathbf{P}$ .

Συμβολίζουμε με  $\sim_s$ , και  $\sim_u$  την ομοιότητα συστημάτων (SS) και την αντιστρέψιμη ισοδυναμία (UE) αντίστοιχα.

### Ορισμός 2.9 (state-space ομοιότητα)

Έστω  $F_i = \{sI - A_i, B_i, C_i, E_i(s)\} \in \mathbf{S}$  για  $i=1,2$ . Τότε  $F_1 \sim_s F_2$  αν και μόνο αν υπάρχει ομαλός πίνακας  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  τέτοιος ώστε:

$$\begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A_1 & -B_1 \\ C_1 & E_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A_2 & -B_2 \\ C_2 & E_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

### Ορισμός 2.10 αντιστρέψιμη ισοδυναμία για δεξιά MFDs)

Έστω  $\mathfrak{R}_i = \{N_i(s), D_i(s)\} \in \mathbf{R}$  για  $i=1,2$ . Τότε  $\mathfrak{R}_1 \sim_u \mathfrak{R}_2$  αν και μόνο αν υπάρχει ένας unimodular πίνακας  $U(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$  τέτοιος ώστε:

$$\begin{bmatrix} D_1(s) \\ N_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2(s) \\ N_2(s) \end{bmatrix} U(s) \quad (2.31)$$

### Ορισμός 2.11 (αντιστρέψιμη ισοδυναμία για αριστερές MFDs)

Έστω  $L_i(s) = \{N_i(s), D_i(s)\} \in \mathbf{L}$  για  $i=1,2$ . Τότε  $L_1 \sim_u L_2$  αν και μόνο αν υπάρχει unimodular πίνακας  $U(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}[s]$  τέτοιος ώστε:

$$[D_1(s) \quad -N_1(s)] = U(s)[D_2(s) \quad -N_2(s)] \quad (2.32)$$

Επεκτείνουμε τον πίνακα συστήματος  $P(s)$  προσθέτοντας  $q-r \geq 0$  μοναδιαία στοιχεία κατά μήκος της διαγωνίου με τον ακόλουθο τρόπο:

$$P_e(s) = \left[ \begin{array}{c|c} T(s) & -Q(s) \\ \hline R(s) & W(s) \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{c|c|c} I_{q-r} & 0 & 0 \\ \hline 0 & T(s) & -Q(s) \\ \hline 0 & R(s) & W(s) \end{array} \right] \quad (2.33)$$

Θα συμβολίζουμε την SSE Rosenbrock με  $\sim_R$ .

**Ορισμός 2.12 (Rosenbrock αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων SSE)**

Έστω  $P_i = \{T_i(s), Q_i(s), R_i(s), W_i(s)\} \in \mathbf{P}$  για  $i=1,2$  και υποθέτουμε ότι  $T_i(s) \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}[s]$  για  $i=1,2$ . Τότε  $P_1 \sim_R P_2$  αν και μόνο αν υπάρχουν unimodular πίνακες  $M(s), N(s)$  και πολωνυμικοί πίνακες  $X_1(s), X_2(s)$  τέτοιοι ώστε:

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X_1(s) & I_p \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|cc} I_{q-r_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & T_1(s) & -Q_1(s) \\ 0 & R_1(s) & W_1(s) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} I_{q-r_2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & T_2(s) & -Q_2(s) \\ 0 & R_2(s) & W_2(s) \end{array} \right] \begin{bmatrix} N(s) & X_2(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

όπου ο  $q$  επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιεί την σχέση  $q \geq \deg \det T_1(s), \deg \det T_2(s)$ .

Ο εκτεταμένος πίνακας της (2.33) είναι επίσης στοιχείο του  $\mathbf{P}$ .  $\square$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η Rosenbrock ισοδυναμία διατηρεί αναλλοίωτες την τάξη  $n$  ενός συστήματος και τη συνάρτηση μεταφοράς του.

**Θεώρημα 2.13** Έστω  $P_1(s), P_2(s)$  δύο Rosenbrock πίνακες συστήματος και υποθέτουμε ότι είναι αυστηρά ισοδύναμοι. Τότε  $\deg |T_1(s)| = \deg |T_2(s)|$  και  $G_1(s) = R_1(s)T_1(s)^{-1}Q_1(s) + W_1(s) = R_2(s)T_2(s)^{-1}Q_2(s) + W_2(s) = G_2(s)$ .

**Απόδειξη**

Πρώτα παρατηρούμε από το γεγονός ότι ο  $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times q}$  είναι αντιστρέψιμος ότι η σχέση (2.30) μπορεί να γραφεί

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X_1(s) & I_p \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|cc} I_{q-r_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & T_1(s) & -Q_1(s) \\ 0 & R_1(s) & W_1(s) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{N}(s) & \bar{X}_2(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q-r_2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & T_2(s) & -Q_2(s) \\ 0 & R_2(s) & W_2(s) \end{array} \right] \quad (2.35)$$

όπου  $(\Leftrightarrow) \bar{N}(s) = N(s)^{-1} \in \mathbb{R}[s]^{q \times q}$  και  $\bar{X}_2(s) = -N(s)^{-1}X_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times m}$ .

Ξαναγράφουμε τώρα την σχέση (2.35) ως εξής

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X_1(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1(s) & -\bar{Q}_1(s) \\ \bar{R}_1(s) & \bar{W}_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}(s) & \bar{X}_2(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T}_2(s) & -\bar{Q}_2(s) \\ \bar{R}_2(s) & \bar{W}_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες στην (2.36) παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M(s)\bar{T}_1(s)\bar{N}(s) & -M(s)[\bar{T}_1(s)\bar{X}_2(s) + \bar{Q}_1(s)] \\ [X_1(s)\bar{T}_1(s) + \bar{R}_1(s)]\bar{N}(s) & X_1(s)\bar{T}_1(s)\bar{X}_2(s) + \bar{R}_1(s)\bar{X}_2(s) - X_1(s)\bar{Q}_1(s) + \bar{W}_1(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{T}_2(s) & -\bar{Q}_2(s) \\ \bar{R}_2(s) & \bar{W}_2(s) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Από την (2.37) έχουμε  $M(s)\bar{T}_1(s)\bar{N}(s) = \bar{T}_2(s)$  η οποία δείχνει ότι  $\deg |T_1(s)| = \deg |T_2(s)|$  εφόσον  $M(s)$ ,  $\bar{N}(s)$  είναι αντιστρέψιμοι και  $\bar{T}_i(s) = \text{block diag}[I_{q-r_i}, T_i(s)]$ ,  $i = 1, 2$ . Ακόμη από τις (2.34) και (2.37) έχουμε

$$\begin{aligned} G_2(s) &= \bar{R}_2(s)\bar{T}_2(s)^{-1}\bar{Q}_2(s) + \bar{W}_2(s) = [0, R_2(s)] \begin{bmatrix} I_{q-r_2} & 0 \\ 0 & T_2(s)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2(s) \end{bmatrix} + W_2(s) \quad (2.38) \\ &= R_2(s)T_2(s)^{-1}Q_2(s) + W_2(s) \\ &= [\bar{R}_1(s) - X_1(s)\bar{T}_1(s)]\bar{N}(s)\bar{N}(s)^{-1}\bar{T}_1(s)^{-1}M(s)^{-1}M(s)[\bar{T}_1(s)\bar{X}_2(s) + \bar{Q}_1(s)] \\ &\quad + X_1(s)\bar{T}_1(s)X_2(s) - \bar{R}_1(s)\bar{X}_2(s) + X_1(s)\bar{Q}_1(s) + \bar{W}_1(s) \\ &= \bar{R}_1(s)\bar{T}_1(s)^{-1}\bar{Q}_1(s) + \bar{W}_1(s) = R_1(s)T_1(s)^{-1}Q_1(s) + W_1(s) = G_1(s). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι δύο state-space συστήματα τα οποία είναι SS είναι επίσης Rosenbrock SSE εφόσον η (2.30) είναι μια ειδική περίπτωση της (2.34) που παράγεται παίρνοντας  $q = n$ ,  $M_1(s) = M_2(s) = H$ ,  $X_1(s) = 0$ ,  $X_2(s) = 0$ . Ο Rosenbrock απέδειξε επίσης το αντίστροφο και έτσι έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

### Θεώρημα 2.14

Έστω  $F_i \in \mathbf{S}$  για  $i = 1, 2$ . Τότε  $F_1 \sim_s F_2 \Leftrightarrow F_1 \sim_R F_2$

#### Απόδειξη

Αν οι πίνακες συστήματος  $F_1, F_2$  είναι στο χώρο καταστάσεων και ικανοποιούν την (2.30) τότε προφανώς είναι αυστηρά ισοδύναμοι (SSE).

Υποθέτουμε τώρα ότι είναι αυστηρά ισοδύναμοι (SSE). Τότε από την (2.34) θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X_1(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & -B_1 \\ C_1 & E_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A & -B_2 \\ C_2 & E_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & X_2(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Εφόσον  $G_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + E_1(s) = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + E_2(s) = G_2(s)$ , προκύπτει ότι  $G_1(s) = G_2(s)$ . Τώρα από την (2.35) έχουμε

$$M(s)(sI - A_1) = (sI - A_2)N(s) \quad (2.36)$$

και θεωρώντας την αριστερή διαίρεση του  $M(s)$  με τον  $sI - A_2$

$$M(s) = (sI - A_2)Q(s) + R \quad (2.37)$$

όπου  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Αντικαθιστώντας την (2.37) στην (2.36) παίρνουμε

$$R(sI - A_1) = (sI - A_2)[N(s) - Q(s)(sI - A_1)] = (sI - A_2)\bar{R}(s) \quad (2.38)$$

όπου  $\bar{R}(s) = [N(s) - Y(s)(sI - A_1)] \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$ . Η εξίσωση (2.38) μπορεί να γραφεί  $(sI - A_2)^{-1}R = \bar{R}(s)(sI - A_1)^{-1}$ . Τώρα εφόσον ο  $(sI - A_2)^{-1}R$  είναι αυστηρά κανονικός το ίδιο πρέπει να είναι και ο  $\bar{R}(s)(sI - A_1)^{-1}$  το οποίο ισχύει αν και μόνο αν ο  $\bar{R}(s)$  είναι ανεξάρτητος του  $s$ , δηλαδή  $\bar{R}(s) = \bar{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Έτσι η (2.38) δίνει

$$Rs - A_1 = s\bar{R} - A_2\bar{R} \quad \text{ή} \quad R = \bar{R} \quad \text{και} \quad RA_1 = A_2R. \quad (2.39)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι ο  $R$  είναι ομαλός. Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα  $M(s)^{-1}$  (ο  $M(s)$  είναι αντιστρέψιμος) και την αριστερή διαίρεση

$$M(s)^{-1} = (sI - A)Q_1(s) + R_1 \quad (2.40)$$

όπου ο  $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Πολλαπλασιάζοντας τις (2.36) και (2.40) παίρνουμε

$$M(s)M(s)^{-1} = (sI - A_2)Q(s)(sI - A_1)Q_1(s) + (sI - A_2)Q(s)R_1 + R(sI - A_1)Q_1(s) + RR_1 \quad (2.41)$$

η οποία σε συνδυασμό με την (2.39) δίνει

$$I - RR_1 = (sI - A_2)[Q(s)(sI - A_1)Q_1(s) + Q(s)R_1 + RQ_1(s)] \quad (2.42)$$

ή

$$(sI - A_2)^{-1}(I - RR_1) = Q(s)(sI - A_1)Q_1(s) + Q(s)R_1 + RQ_1(s) \quad (2.43)$$

Το αριστερό μέλος της (2.43) είναι αυστηρά κανονικός, ενώ το δεξιό μέλος είναι πολυώνυμο. Αυτό δείχνει ότι και τα δύο μέλη είναι ίσα με τον μηδενικό  $n \times n$  πίνακα.

Έτσι  $I = RR_1$  και συνεπώς  $R = R^{-1}$  είναι ομαλός.

Τώρα θα δείξουμε ότι  $B_2 = RB_1$ ,  $C_2 = CR^{-1}$ . Από την σχέση (2.35) έχουμε

$$M(s)B_1 = (sI - A_2)X_2(s) + B_2 \quad (2.44)$$

η οποία σε συνδυασμό με την (2.37) δίνει

$$(sI - A_2)Q(s)B_1 + RB_1 = (sI - A_2)X_2(s) + B_2 \quad (2.46)$$

ή

$$Q(s)B_1 - X_2(s) = (sI - A_2)^{-1}(B_2 - RB_1) \quad (2.48)$$

Το αριστερό μέλος της (2.46) είναι πολυώνυμο, ενώ το δεξιό μέλος της είναι ρητός. Αυτό δείχνει ότι  $B_2 - RB_1 = 0$  ή  $B_2 = RB_1$ . Το γεγονός ότι  $C_2 = C_1R^{-1}$  μπορεί να δειχθεί με τον ίδιο τρόπο. ■

### 2.1.2 Μετασχηματισμός ενός Rosenbrock πίνακα συστήματος στο χώρο καταστάσεων

Έστω ένας Rosenbrock πίνακας συστήματος

$$P(s) = \begin{bmatrix} T(s) & -Q(s) \\ R(s) & W(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(r+p) \times (r+m)} \quad (2.49)$$

με  $r \leq n = \deg |T(s)|$  και έστω ένας εκτεταμένος πίνακας  $P_e(s) \in \mathbb{R}[s]^{(n+p) \times (n+m)}$  όπως αυτός της σχέσης (2.33) όπου ( $q = n$ ) έτσι ώστε  $\bar{T}(s) = \text{diag}[I_{n-r}, T(s)] \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$ . Έστω οι αντιστρέψιμοι πολυωνυμικοί πίνακες  $U_L(s), U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$  τέτοιοι ώστε

$$U_L(s)\bar{T}(s)U_R(s) = S_{\bar{T}(s)}^{\mathbb{C}} = \text{diag}[I_{n-r}, \varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \dots, \varepsilon_r(s)] \quad (2.50)$$

Είναι η Smith μορφή του  $\bar{T}(s)$ ,  $\varepsilon_i(s) = s^{n_i} + a_{i,n_i-1}s^{n_i-1} + \dots + a_{i,1}s + a_{i,0}$ ,  $n_i \geq 0$ ,  $i \in r$ , τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του  $T(s)$ . Έστω  $T_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $i \in r$  ομάδα πινάκων που αντιστοιχούν στα  $\varepsilon_i(s)$ ,  $i \in r$ , δηλαδή έστω

$$T_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{i,0} & -a_{i,1} & \cdots & -a_{i,n_i-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \quad i \in r \quad (2.51)$$

έτσι ώστε  $|sI_{n_i} - T| = \varepsilon_i(s)$  και  $\deg |S_{\bar{T}(s)}^C| = \sum_{i=1}^r n_i = n$  και ορίζω

$$T = \text{blockdiag}[T_1, T_2, \dots, T_r] \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (2.52)$$

Τώρα οι πίνακες  $\bar{T}(s)$  και  $sI_n - T$  έχουν από κατασκευής τα ίδια αναλλοίωτα πολυώνυμα  $\varepsilon_i(s)$ , εφόσον είναι αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι, δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $\bar{U}_L(s), \bar{U}_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$  τέτοιοι ώστε

$$\bar{U}_L(s)\bar{T}(s)\bar{U}_R(s) = sI_n - T. \quad (2.53)$$

Θεωρούμε τώρα το γινόμενο των πινάκων

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \bar{U}_L(s) & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}(s) & -\bar{Q}(s) \\ \bar{R}(s) & \bar{W}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_R(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}_L(s)\bar{T}(s)\bar{U}_R(s) & -\bar{U}_L(s)\bar{Q}(s) \\ \bar{R}(s)\bar{U}_R(s) & \bar{W}(s) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} sI_n - T & -Q_1(s) \\ R_1(s) & W_1(s) \end{bmatrix} = P_{e1}(s) \end{aligned} \quad (2.54)$$

όπου  $Q_1(s) = \bar{U}_L(s)\bar{Q}(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times m}$ ,  $R_1(s) = \bar{R}(s)\bar{U}_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times n}$ .

Από το θεώρημα της διαίρεσης για πολυωνυμικούς πίνακες δεδομένων πινάκων  $sI_n - T$  και  $Q_1(s)$  υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $A_1(s)$  και  $B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times m}$  τέτοιοι ώστε

$$Q_1(s) = (sI_n - T)A_1(s) + B_1(s) \quad (2.55)$$

και (εφόσον ο  $sI_n - T$  είναι κανονικός ως προς τις γραμμές και στήλες)

$$\deg \text{ith γραμμή του } B_1(s) < \deg \text{ith γραμμή του } sI_n - T = 1 \quad i \in n$$

δηλαδή  $\{\deg \text{ith γραμμή του } B_1(s)\} = 0$ , το οποίο δείχνει ότι  $B_1(s) = B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Ξαναγράφοντας την (2.55) ως  $\tilde{Q}_1(s) - (sI_n - T)A_1(s) = B_1$  μπορούμε να παρουσιάσουμε αυτή την πράξη στο  $P_{e1}(s)$  με

$$\begin{bmatrix} sI_n - T & -Q_1(s) \\ R_1(s) & W_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -A_1(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI_n - T & B_1 \\ R_1(s) & \tilde{W}_1(s) \end{bmatrix}$$

όπου  $\tilde{W}_1(s) = W_1(s) + R_1(s)A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Ακόμη δεδομένων πινάκων  $sI_n - T$  και  $R_1(s)$  υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $A_2(s)$  και  $B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times n}$  τέτοιοι ώστε

$$R_1(s) = A_2(s)(sI_n - T) + B_2(s) \quad (2.56)$$

και



$\deg$   $j$ th στήλη του  $B_2(s) < \deg$   $j$ th στήλη του  $sI_n - T = 1 \quad j \in n$

δηλαδή  $\{\deg$   $j$ th στήλη του  $B_2(s)\} = 0$ , το οποίο δείχνει ότι  $B_2(s) = B_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ .

Ξαναγράφοντας την (2.56) ως  $R_1(s) - A_2(s)(sI_n - T) = B_2$  έχουμε

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A_2(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - T & B_1 \\ R_1(s) & \widetilde{W}_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI_n - T & B_1 \\ B_2 & \overline{W}(s) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

όπου  $\overline{W}(s) = \widetilde{W}_1(s) - A_2(s)B_1 \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Συνδυάζοντας τις αριστερές και δεξιές αντιστρέψιμες πράξεις στο  $P_{e1}(s)$  έχουμε

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A_2(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_L(s) & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{U}_L(s) & 0 \\ X_1(s) & I_p \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{U}_R(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & A_1(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{U}_R(s) & X_2(s) \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Οπότε

$$\begin{bmatrix} \overline{U}_L(s) & 0 \\ X_1(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{T}(s) & -\overline{Q}(s) \\ \overline{R}(s) & \overline{W}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_R(s) & X_2(s) \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI_n - T & B_1 \\ -B_2 & \overline{W}(s) \end{bmatrix} = P_1(s) \quad (2.60)$$

Αν ονομάσουμε τον  $B_1 = Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$  και  $B_2 = R \in \mathbb{R}^{p \times n}$  τότε ο  $P_1(s)$  είναι στο χώρο καταστάσεων. Έτσι αποδείξαμε το ακόλουθο θεώρημα

**Θεώρημα 2.15** Κάθε εκτεταμένος πίνακας συστήματος  $P_e(s) \in \mathbb{R}[s]^{(n+p) \times (n+m)}$  είναι αυστηρά ισοδύναμος με ένα πίνακα συστήματος στο χώρο καταστάσεων.  $\square$

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση ενός πίνακα συστήματος  $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{(r+p) \times (r+m)}$  τέτοιο ώστε  $r > n = \deg |T(s)|$  και έστω  $U_L(s), U_R(s)$  αντιστρέψιμοι πίνακες τέτοιοι ώστε

$$U_L(s)T(s)U_R(s) = S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \text{diag}[I_{r-n}, \varepsilon_{r-n+1}(s), \dots, \varepsilon_r(s)] \in \mathbb{R}[s]^{r \times r} \quad (2.61)$$

είναι η Smith μορφή του  $T(s)$  (έτσι σ' αυτή την περίπτωση θα υπάρχουν τουλάχιστον  $r - n$  μοναδιαίοι είσοδοι στον  $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$  και  $n$  αναλλοίωτα πολυώνυμα  $\varepsilon_{r-n+1}(s), \dots, \varepsilon_r(s)$ ).

Θεωρούμε τώρα το γινόμενο των πινάκων

$$\begin{bmatrix} U_L(s) & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) & -Q(s) \\ R(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_R(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{r-n} & 0 & \\ \hline 0 & \bar{T}(s) & -Q(s) \\ R(s) & & W(s) \end{array} \right] = \tilde{P}(s) \quad (2.62)$$

όπου  $\bar{T}(s) = \text{diag}[\varepsilon_{r-n+1}(s), \varepsilon_{r-n+2}(s), \dots, \varepsilon_r(s)] \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$ . Προφανώς οι  $P(s)$  και  $\tilde{P}(s)$  είναι αυστηρά ισοδύναμοι. Διαχωρίζουμε τώρα τους πίνακες  $R(s)$  και  $Q(s)$

$$R(s) = [\tilde{R}(s), \bar{R}(s)], \quad \tilde{R}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times (r-n)}, \quad \bar{R}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times n}, \quad Q(s) = \begin{bmatrix} \tilde{Q}(s) \\ \bar{Q}(s) \end{bmatrix},$$

$\tilde{Q}(s) \in \mathbb{R}[s]^{(r-n) \times m}$ ,  $\bar{Q}(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times m}$  και θεωρούμε το γινόμενο των πινάκων

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_{r-n} & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ \tilde{R}(s) & 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r-n} & 0 & -\tilde{Q}(s) \\ 0 & \bar{T}(s) & -\bar{Q}(s) \\ \hline \tilde{R}(s) & \bar{R}(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r-n} & 0 & -\tilde{Q}(s) \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} I_{r-n} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{T}(s) & -\bar{Q}(s) \\ 0 & \bar{R}(s) & \bar{W}(s) \end{bmatrix} = P_2(s) = \begin{bmatrix} I_{r-n} & 0 \\ 0 & \bar{P}_1(s) \end{bmatrix} \quad (2.63) \end{aligned}$$

όπου  $\bar{W}(s) = \tilde{R}(s)\tilde{Q}(s) + W(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  και  $\bar{P}_1(s) = \begin{bmatrix} \bar{T}(s) & -\bar{Q}(s) \\ \bar{R}(s) & \bar{W}(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(n+p) \times (n+m)}$ .

Από την τελευταία σχέση οι  $\tilde{P}(s)$  και  $P_2(s)$  είναι αυστηρά ισοδύναμοι επιπλέον ο υποπίνακας  $\bar{P}_1(s)$  του  $P_2(s)$  έχει  $\bar{T}(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$  και  $\deg |\bar{T}(s)| = n$ . Από το θεώρημα ο  $\bar{P}_1(s)$  είναι αυστηρά ισοδύναμος με ένα πίνακα συστήματος στο χώρο καταστάσεων. Συνδυάζοντας τους αντιστρέψιμους μετασχηματισμούς και με αυτούς που παράγουν τον  $\bar{P}_1(s)$  στο χώρο καταστάσεων τελικά παίρνουμε:

**Θεώρημα 2.16** Κάθε πίνακας συστήματος  $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{(r+p) \times (r+m)}$  με  $r > n = \deg |T(s)|$

είναι αυστηρά ισοδύναμος με ένα πίνακα συστήματος

$$P_2(s) = \begin{bmatrix} I_{r-n} & 0 \\ 0 & \hat{P}_1(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(r+p) \times (r+m)} \quad (2.64)$$

όπου  $\hat{P}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{(n+p) \times (n+m)}$  είναι στο χώρο καταστάσεων.  $\square$

## 2.3 Fuhrmann ισοδυναμία συστημάτων

### Ορισμός 2.17 (Fuhrmann SSE)

Έστω  $P_i = \{T_i(s), Q_i(s), R_i(s), W_i(s)\} \in \mathbf{P}$  για  $i=1,2$  και υποθέτουμε ότι  $T_i(s) \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}[s]$  για  $i=1,2$ . Τότε  $P_1 \sim_F P_2$  αν και μόνο αν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s), N(s), X_1(s), X_2(s)$  τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X_1(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(s) & -Q_1(s) \\ R_1(s) & W_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2(s) & -Q_2(s) \\ R_2(s) & W_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & X_2(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

όπου

$M(s)$  και  $T_2(s)$  είναι αριστερά πρώτοι

$T_1(s)$  και  $N(s)$  είναι δεξιά πρώτοι (2.66)

Αν  $r_1 \neq r_2$  τότε οι  $X_1(s), X_2(s), M(s)$  και  $N(s)$  είναι μη τετράγωνοι πολυωνυμικοί πίνακες και ακόμη και αν  $r_1 = r_2$  (σε αυτή την περίπτωση είναι τετράγωνοι) τότε δεν χρειάζεται να είναι unimodular. □

Ο Levy (1977) απέδειξε ότι οι ορισμοί του SSE που δόθηκαν από τον Rosenbrock και Fuhrmann οδηγούν στην ίδια σχέση ισοδυναμίας.

### Θεώρημα 2.18

Έστω  $P_i \in \mathbf{P}$  για  $i=1,2$ . Τότε

$$P_1 \sim_F P_2 \Leftrightarrow P_1 \sim_R P_2.$$

Δηλαδή δύο πίνακες συστήματος είναι FSE αν και μόνο αν είναι SSE.

#### Απόδειξη

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι  $P_1 \sim_F P_2 \Rightarrow P_1 \sim_R P_2$ . (2.67)

Από τον ορισμό η  $P_1 \sim_F P_2$  δείχνει ότι οι σχέσεις (2.65) και (2.66) είναι αληθείς. Από την (2.65) έχουμε  $M(s)T_1(s) = T_2(s)N(s)$  η οποία μαζί με τις συνθήκες (2.66) δείχνει

ότι υπάρχουν  $\widetilde{X}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_1 \times r_2}$ ,  $\widetilde{X}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_1 \times r_1}$ ,  $\widehat{X}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_2 \times r_2}$ ,  $\widehat{X}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_1 \times r_2}$  τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} -\widetilde{X}_1(s) & \widehat{X}_2(s) \\ T_2(s) & M_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N(s) & \widehat{X}_1(s) \\ T_1(s) & \widehat{X}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r_1} & 0_{r_1, r_2} \\ 0_{r_2, r_1} & I_{r_2} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

έτσι οι πίνακες αυτής της σχέσης είναι αντιστρέψιμοι.

Οι σχέσεις που παράγονται από την (2.65) μπορούν να γραφούν:

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc|c} -\widetilde{X}_1(s) & \widetilde{X}_2(s) & 0 \\ T_2(s) & M(s) & 0 \\ \hline R_2(s) & X_1(s) & I_p \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} I_{r_2} & 0 & 0 \\ 0 & T_1(s) & -Q_1(s) \\ \hline 0 & R_1(s) & W_1(s) \end{array} \right] = \\ \left[ \begin{array}{cc|c} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & T_2(s) & -Q_2(s) \\ \hline 0 & R_2(s) & W_2(s) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} -\widetilde{X}_1(s) & \widetilde{X}_2(s)T_1(s) & \widetilde{X}_2(s)(-Q_1(s)) \\ I_{r_2} & N(s) & X_2(s) \\ \hline 0 & 0 & I_m \end{array} \right] \end{array} \quad (2.69)$$

όπου

$$\begin{bmatrix} I_{r_1} & \widetilde{X}_1(s) \\ 0 & I_{r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\widetilde{X}_1(s) & \widetilde{X}_2(s)T_1(s) \\ I_{r_2} & N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_1} \\ I_{r_2} & N(s) \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

οι πίνακες στην (2.70) είναι αντιστρέψιμοι. Τώρα η (2.69) με τους αντιστρέψιμους πίνακες

$$\begin{bmatrix} -\widetilde{X}_1(s) & \widetilde{X}_2(s) \\ T_2(s) & M_1(s) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\widetilde{X}_1(s) & \widetilde{X}_2(s)T_1(s) \\ I_{r_2} & N(s) \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

δείχνει ότι οι γενικευμένοι πίνακες συστήματος

$$P_{e1}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{r_2} & 0 & 0 \\ 0 & T_1(s) & -Q_1(s) \\ \hline 0 & R_1(s) & W_1(s) \end{array} \right] \quad P_{e2}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & T_2(s) & -Q_2(s) \\ \hline 0 & R_2(s) & W_2(s) \end{array} \right] \quad (2.72)$$

Ικανοποιούν την (2.34) οπότε οι  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$  είναι SSE δηλαδή η (2.67) ικανοποιείται.

Τώρα θα δείξουμε το αντίστροφο δηλαδή ότι  $P_1 \sim_R P_2 \Rightarrow P_1 \sim_F P_2$ . (2.73)

Από τον ορισμό της  $P_1 \sim_R P_2$  φαίνεται ότι η (2.34) ικανοποιείται με τους αντιστρέψιμους πίνακες  $M(s)$ ,  $N(s)$ . Γράφουμε τη σχέση (2.34) ως εξής

$$\left[ \begin{array}{cc|c} M_{11}(s) & M_{12}(s) & 0 \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) & 0 \\ \hline X_{11}(s) & X_{12}(s) & I_p \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} I_{q-r_1} & 0 & 0 \\ 0 & T_1(s) & -Q_1(s) \\ \hline 0 & R_1(s) & W_1(s) \end{array} \right] =$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} I_{q-r_2} & 0 & 0 \\ 0 & T_2(s) & -Q_2(s) \\ \hline 0 & R_2(s) & W_2(s) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} N_{11}(s) & N_{12}(s) & X_{21}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) & X_{22}(s) \\ \hline 0 & 0 & I_m \end{array} \right] \quad (2.74)$$

η οποία δείχνει ότι

$$\left[ \begin{array}{cc} M_{22}(s) & 0_{r_2,p} \\ X_{12}(s) & I_p \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} T_1(s) & -Q_1(s) \\ R_1(s) & W_1(s) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} T_2(s) & -Q_2(s) \\ R_2(s) & W_2(s) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} N_{22}(s) & X_{22}(s) \\ 0_{m,r_1} & I_m \end{array} \right] \quad (2.75)$$

Από την (2.74) έχουμε

$$M_{12}(s)T_1(s) = N_{12}(s) \quad (2.76)$$

$$M_{21}(s) = T_2(s)N_{21}(s) \quad (2.77)$$

έτσι

$$M(s) = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ T_2(s)N_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}(s) & M_{12}(s)T_1(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Τώρα η αντιστρεψιμότητα των  $M(s)$  και  $N(s)$  δείχνει αντίστοιχα ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2(s) \text{ και } M_{22}(s) \text{ είναι αριστερά πρώτοι} \\ N_{22}(s) \text{ και } T_1(s) \text{ είναι δεξιά πρώτοι} \end{array} \right\} \quad (2.80)$$

Αυτό συμβαίνει γιατί αν οι  $T_2(s)$  και  $M_{22}(s)$  δεν είναι αριστερά πρώτοι τότε

$$[T_2(s) \quad M_{22}(s)] = Y(s)[\bar{T}_2(s) \quad \bar{M}_{22}(s)] \quad (2.81)$$

για κάποια  $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_2 \times r_2}$  και μη αντιστρέψιμοι αριστεροί κοινοί διαιρέτες των  $T_2(s)$

και  $M_{22}(s)$ , και έτσι ο  $M_1(s)$  μπορεί να γραφεί ως

$$M_1(s) = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ T_2(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q-r_2} & 0 \\ 0 & Y(s) \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ \bar{T}_2(s)N_{21}(s) & \bar{M}_{22}(s) \end{array} \right] \quad (2.82)$$

το οποίο δείχνει ότι σε αυτήν την περίπτωση ο  $M(s)$  θα έχει έναν μη αντιστρέψιμο αριστερό παράγοντα και το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι ο  $M(s)$  είναι

αντιστρέψιμος. Όμοια συμπεράσματα προκύπτουν και για την δεύτερη συνθήκη στην (2.80). Τώρα οι σχέσεις (2.75) και (2.80) δείχνουν ότι  $P_1 \sim_F P_2$ . ■

Από το θεώρημα 2.13 και 2.18 παίρνουμε ακόλουθο πόρισμα

**Πόρισμα 2.19** Έστω  $P_i(s) \sim_F P_2(s)$ ,  $i=1,2$ . Τότε τα ακόλουθα είναι αναλλοίωτες της ισοδυναμίας αυτής. i)  $\deg |T_i(s)| = n$ ,  $i=1,2$  ii) η συνάρτηση μεταφοράς  $G_i(s) = R_i(s)T_i(s)^{-1}Q_i(s) + W_i(s)$  iii) τα μη μοναδιαία αναλλοίωτα πολυώνυμα στις Smith μορφές των  $T_i(s)$ ,  $[T_i(s), Q_i(s)]$ ,  $\begin{bmatrix} T_i(s) \\ R_i(s) \end{bmatrix}$  και  $P_i(s)$ ,  $i=1,2$ .

## 2.4 Αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων για κλασματικούς πίνακες

Έστω  $\mathfrak{R}_i = \{N_i(s), D_i(s)\} \in \mathbf{R}$  για  $i=1,2$  και υποθέτουμε ότι  $\mathfrak{R}_1 \sim_u \mathfrak{R}_2$ .

Υπάρχει δηλαδή ένας unimodular πίνακας  $U(s)$  τέτοιος ώστε

$$\begin{bmatrix} D_1(s) & -I \\ N_1(s) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2(s) & -I \\ N_2(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

**Θεώρημα 2.20** Έστω

Έστω  $\mathfrak{R}_i = \{D_i(s), N_i(s)\} \in \mathbf{R}$  για  $i=1,2$ . Τότε

$$\mathfrak{R}_1 \sim_u \mathfrak{R}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{R}_1 \sim_{SSE} \mathfrak{R}_2. \quad (2.84)$$

Δηλαδή δύο πίνακες συστήματος είναι αντιστρέψιμα ισοδύναμοι για δεξιά MFDs αν και μόνο αν είναι SSE.

**Απόδειξη**

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι  $\mathfrak{R}_1 \sim_u \mathfrak{R}_2 \Rightarrow \mathfrak{R}_1 \sim_{SSE} \mathfrak{R}_2$ . Από τον ορισμό της αντιστρέψιμης ισοδυναμίας για δεξιά MFDs φαίνεται ότι η σχέση (2.83) ισχύει. Τώρα θεωρούμε ότι  $D_1(s)$  και  $U_R(s)$  είναι δεξιά πρώτοι και  $I$ ,  $D_2(s)$  είναι αριστερά πρώτοι δηλαδή  $\mathfrak{R}_1 \sim_{SSE} \mathfrak{R}_2 \equiv \mathfrak{R}_1 \sim_F \mathfrak{R}_2$ .

Θα αποδείξουμε τώρα ότι  $\mathfrak{R}_1 \sim_F \mathfrak{R}_2 \equiv \mathfrak{R}_1 \sim_{SSE} \mathfrak{R}_2 \Rightarrow \mathfrak{R}_1 \sim_u \mathfrak{R}_2$ . Από τον ορισμό (2.17) η ισοδυναμία  $\mathfrak{R}_1 \sim_F \mathfrak{R}_2$  δείχνει την ύπαρξη των πολυωνυμικών πινάκων  $M(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ,  $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ,  $X_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  και  $X_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X_1(s) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(s) & -I \\ N_1(s) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2(s) & -I \\ N_2(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & X_2(s) \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

με  $\begin{bmatrix} M(s) & D_2(s) \end{bmatrix}$  αριστερά πρώτοι (2.86)

και  $\begin{bmatrix} N(s) \\ D_1(s) \end{bmatrix}$  δεξιά πρώτοι (2.87)

Ορίζω τον πολυωνυμικό πίνακα  $U_R(s) = N(s) + X_2(s)D_1(s)$

Από την (2.85) έχουμε

$$M(s)D_1(s) = D_2(s)N(s) \quad (2.88)$$

$$-M(s) = D_2(s)X_2(s) - I \quad (2.89)$$

$$X_1(s)D_1(s) + N_1(s) = N_2(s)N(s) \quad (2.90)$$

$$-X_1(s) = N_2(s)X_2(s) \quad (2.91)$$

Τότε

$$\begin{aligned} D_1(s) - D_2(s)U_R(s) &= D_1(s) - D_2(s)N(s) - D_2(s)X_2(s)D_1(s) \\ &\stackrel{(2.88)}{=} [I - M(s) - D_2(s)X_2(s)]D_1(s) \\ &\stackrel{(2.89)}{=} 0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

και

$$\begin{aligned} N_1(s) - N_2(s)U_R(s) &= N_1(s) - N_2(s)N(s) - N_2(s)X_2(s)D_1(s) \\ &\stackrel{(2.90)}{=} [-X_1(s) - N_2(s)X_2(s)]D_1(s) \\ &\stackrel{(2.91)}{=} 0 \end{aligned} \quad (2.93)$$

έτσι

$$D_1(s) = D_2(s)U_R(s) \quad (2.94)$$

$$N_1(s) = N_2(s)U_R(s) \quad (2.95)$$

Εφόσον  $\mathfrak{R}_1 \sim_F \mathfrak{R}_2$  προκύπτει ότι  $D_2(s) \deg |D_1(s)| = \deg |D_2(s)|$  και από την σχέση (2.94) προκύπτει ότι  $\deg |U_R(s)| = 0$  δηλαδή  $U_R(s)$  είναι αντιστρέψιμος. Από τις σχέσεις (2.94) και (2.95) παίρνουμε την (2.83) δηλαδή  $\mathfrak{R}_1 \sim_u \mathfrak{R}_2$ . ■

Έχουμε έτσι αποδείξει ότι η αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων (strict system equivalence) ταυτίζεται με την αντιστρέψιμη ισοδυναμία (unimodular equivalence) για δεξιά MFDs. Το ίδιο ισχύει και για τα αριστερά MFDs. Έτσι έχουμε το ακόλουθο θεώρημα

### Θεώρημα 2.21

Έστω  $\mathfrak{L}_i = \{D_i(s), N_i(s)\} \in \mathbf{L}$  για  $i = 1, 2$ . Τότε

$$\mathfrak{L}_1 \sim_u \mathfrak{L}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{L}_1 \sim_{SSE} \mathfrak{L}_2. \quad (2.96)$$

Δηλαδή δύο πίνακες συστήματος είναι αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι για αριστερά MFDs αν και μόνο αν είναι SSE. □

Για να ολοκληρώσουμε αυτή την ενότητα θα δώσουμε μια συνθήκη έτσι ώστε μια αριστερή MFD και μια δεξιά MFD να είναι SSE. Ορίζουμε ένα σύστημα

$$P = \{T(s), Q(s), R(s), W(s)\}$$

Είναι ελάχιστης τάξης αν και μόνο αν  $P$  δεν έχει αποσυζευτικά μηδενικά. Ισοδύναμα ο  $P$  είναι ελάχιστης τάξης αν  $T(s), Q(s)$  είναι αριστερά πρώτοι και  $T(s), R(s)$  είναι δεξιά πρώτοι. Αυτό είναι ένα σημαντικό αποτέλεσμα του Rosenbrock για συστήματα ελάχιστης τάξης.

### Θεώρημα 2.22

Έστω  $P_i = \{T_i(s), Q_i(s), R_i(s), W_i(s)\} \in \mathbf{P}$  για  $i = 1, 2$  το οποίο είναι ελάχιστης τάξης. Τότε

$$P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow G_1(s) = G_2(s) \quad (2.97)$$

όπου  $G_i(s) = R_i(s)T_i(s)^{-1}Q_i(s) + W_i(s)$ .



Δηλαδή αν  $P_1(s), P_2(s)$  είναι δύο Rosenbrock πίνακες συστήματος ελάχιστης τάξης (δεν έχουν αποσυζευτικά μηδενικά) τότε είναι FSE (ισοδύναμα SSE) αν και μόνο αν έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς.

**Απόδειξη** (Rosenbrock 1970) ( $\Rightarrow$ ) Αν  $P_1 \underset{SSE}{\sim} P_2$  τότε από το θεώρημα 2.13 προκύπτει ότι  $G_1(s) = G_2(s)$ .

( $\Leftarrow$ ) Έστω  $G_1(s) = G_2(s)$ . Ο Rosenbrock πίνακας συστήματος  $P_1(s) \in \mathbf{P}$  είναι Fuhrmann ισοδύναμος (FSE ή ισοδύναμα SSE) με έναν πίνακα συστήματος σε δεξιά κλασματική περιγραφή  $P_3(s) \in \mathbf{R}$ . Το ίδιο ισχύει και για έναν πίνακα συστήματος  $P_2(s) \in \mathbf{P}$  είναι FSE με έναν πίνακα  $P_4(s) \in \mathbf{L}$ . Έστω

$$G_1(s) = N_2(s)D_2(s)^{-1} = D_1(s)^{-1}N_1(s) = G_2(s) \quad P_i(s) = \begin{bmatrix} D_{Ri}(s) & -I_m \\ N_{Ri}(s) & 0_{p,m} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}$$

$$i = 3, 4$$

Τότε  $P_1(s) \underset{SSE}{\sim} P_3(s) \Rightarrow G_1(s) = G_3(s) = N_{R3}(s)D_{R3}(s)^{-1}$  και  $P_2(s) \underset{SSE}{\sim} P_4(s) \Rightarrow G_2(s) = G_4(s) = N_{R4}(s)D_{R4}(s)^{-1}$ . Τώρα  $G_1(s) = G_2(s)$  δείχνει ότι  $G_3(s) = G_4(s)$  το οποίο δείχνει ότι  $D_{R3}(s) = D_{R4}(s)U_R(s)$ ,  $N_{R3}(s) = N_{R4}(s)U_R(s)$  για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα  $U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ . Από την σχέση (2.83) προκύπτει ότι  $P_3(s) \underset{u}{\sim} P_4(s)$  και από το θεώρημα (2.20) ότι  $P_3(s) \underset{SSE}{\sim} P_4(s)$ . Έτσι  $P_1(s) \underset{SSE}{\sim} P_4(s)$  και  $P_2(s) \underset{SSE}{\sim} P_4(s)$  δηλαδή  $P_1(s) \underset{SSE}{\sim} P_2(s)$ . ■

Θεωρώντας τα ζευγάρια πινάκων  $R = \{D_R(s), N_R(s)\} \in \mathbf{R}$  και  $L = \{D_L(s), N_L(s)\} \in \mathbf{L}$  και γράφοντας το καθένα σε πλήρη μορφή συστημάτων

$$\begin{bmatrix} D_R(s) & -I \\ N_R(s) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} D_L(s) & -N_L(s) \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο εξετάζει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες οι δύο πίνακες συστήματος, ο ένας σε δεξιά κλασματική μορφή πίνακα και ο άλλος σε

αριστερή κλασματική μορφή πίνακα, είναι Fuhrmann ισοδύναμοι ή αυστηρά ισοδύναμοι.

### Θεώρημα 2.23

Έστω  $R = \{D_R(s), N_R(s)\} \in \mathbf{R}$  και  $L = \{D_L(s), N_L(s)\} \in \mathbf{L}$ .

$$\text{Τότε } R \underset{SSE}{\sim} L \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_L(s)D_R(s) = D_L(s)N_R(s) \\ [D_L(s) \quad -N_L(s)] \text{ αριστερά πρώτοι} \\ \left[ \begin{array}{c} D_R(s) \\ N_R(s) \end{array} \right] \text{ δεξιά πρώτοι} \end{array} \right\} \quad (2.99)$$

### Απόδειξη

( $\Rightarrow$ ) Υποθέτουμε ότι  $R \underset{SSE}{\sim} L$ . Τότε από τον ορισμό 2.17

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X_1(s) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_R(s) & -I \\ N_R(s) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_L(s) & -N_L(s) \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & X_2(s) \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

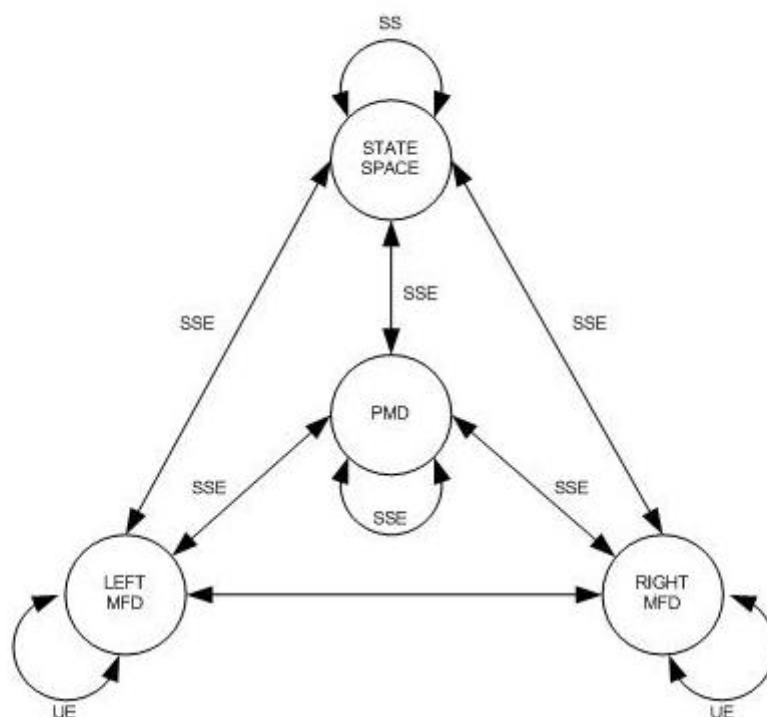
Τώρα σύμφωνα με το πόρισμα 2.19 τα μη μοναδιαία αναλλοίωτα πολυώνυμα των  $[D_R(s) \quad I_m]$  και  $[D_L(s) \quad N_L(s)]$  ταυτίζονται. Εφόσον οι  $D_R(s), I$  είναι αριστερά πρώτοι τα αναλλοίωτα πολυώνυμα των  $[D_R(s) \quad I_m]$  είναι όλα μονάδες και το ίδιο ισχύει και γι' αυτά των  $[D_L(s) \quad N_L(s)]$ . Έτσι οι  $D_L(s), N_L(s)$  είναι αριστερά πρώτοι. Ομοίως αποδεικνύεται ότι οι  $D_R(s), N_R(s)$  είναι δεξιά πρώτοι. Έτσι  $R$  οι  $L$  είναι ελάχιστης τάξης και  $R \underset{SSE}{\sim} L$ . Από το θεώρημα 2.22 έχουμε

$$G_1(s) = N_R(s)D_R(s)^{-1} = D_L(s)^{-1}N_L(s) = G_2(s) \quad (2.101)$$

το οποίο οδηγεί στη σχέση  $D_L(s)^{-1}N_L(s) = N_R(s)D_R(s)^{-1}$ .

( $\Leftarrow$ ) Τα ζευγάρια πινάκων  $R$  και  $L$  είναι ελάχιστης τάξης και έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς. Συνεπώς από το προηγούμενο θεώρημα (2.22) προκύπτει ότι  $R \underset{SSE}{\sim} L$ . ■

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η συνθήκη (2.99) είναι ακριβώς ίδια με τη συνθήκη (2.83) που περιγράφει την extend unimodular equivalence (EUE). Ωστόσο δε μπορούμε να ορίσουμε μια ειδική σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα στις αριστερές και δεξιές MFDs αφού αναφερόμαστε σε δύο διαφορετικά σύνολα  $\mathbf{R}$  και  $\mathbf{L}$ . Το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι ότι  $\mathbf{R}$  και  $\mathbf{L}$  είναι SSE αν και μόνο αν η συνθήκη (2.99) ικανοποιείται.



Σε αυτό το σχήμα φαίνονται οι ειδικές μορφές της αυστηρής ισοδυναμίας συστημάτων για συστήματα στο χώρο καταστάσεων και για κλασματικές περιγραφές πινάκων.

### 2.3 Πρώτοι κλασματικοί πίνακες

Αποδείξαμε στη προηγούμενη ενότητα ότι η σχέση της SSE όταν περιορίζεται στην τάξη μιας δεξιάς ή αριστερής κλασματικής αναπαράστασης πίνακα, ταυτίζεται με την UE. Έτσι συμπεραίνουμε ότι οποιοδήποτε ζεύγος δεξιάς ή αριστερής MFDs της  $G(s)$  που είναι πρώτοι είναι αντιστρέψιμο ισοδύναμοι (UE). Χρησιμοποιώντας αυτό θα δημιουργήσουμε την σύνδεση μεταξύ των αναλλοίωτων παραγόντων της Smith-McMillan μορφής της  $G(s)$  και της Smith μορφής των αριθμητών και παρονομαστών των πινάκων μιας MFD.

Έστω  $G(s)$  μια  $p \times m$  ρητή συνάρτηση μεταφοράς και έστω ότι έχει την Smith-McMillan μορφή:

$$S_m(s) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\varepsilon_t(s)}{\psi_t(s)} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

όπου  $t \leq \min(p, m)$  και  $\varepsilon_i(s)$ ,  $\psi_i(s)$  είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους όπου ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής είναι μονάδα.

Έτσι για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες  $L(s)$  και  $R(s)$  ισχύει

$$G(s) = L(s)S_m(s)R(s) \quad (2.103)$$

Ο διαγώνιος πίνακας  $S_m(s)$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί με τους ακόλουθους δύο τρόπους:

$$S_m(s) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon_t(s) & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \psi_1(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \psi_t(s) \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$





Το αποτέλεσμα προκύπτει από την (2.105).

Στην (2.103) μια διαφορετική επιλογή των  $L(s)$  και  $R(s)$  οδηγούν σε διαφορετικές παραγοντοποιήσεις στην (2.104). Δύο τέτοιες παραγοντοποιήσεις είναι  
UE. ■





## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- [1] A.I.G. Vardulakis (1991) *Linear Multivariable Control. Algebraic Analysis and Synthesis Methods.*
- [2] Wolovich W.A (1974) *Linear Multivariable Systems* Springer-Verlag, New York.
- [3] Furhmann (1977) On strict system equivalence and similarity, *Int.J.Control.*
- [4] Levy at.al. (1977) A unification of system equivalence definitions, *Proceedings of the 1977 IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans.*
- [5] Pugh & Shelton (1978) On a new definition of strict system equivalence, *Int.J.Control.*
- [6] Smith (1981) Matrix fraction and strict system equivalence, *Int.J.Control.*
- [7] Gantmacher F.R (1959) *The Theory of Matrices, Vols. 1 and 2* Chelsea Publishing Co. New York.
- [8] Rosenbrock H.H (1970) *State Space and Multivariable Theory* Nelson, London.
- [9] Rosenbrock (1977) The transformation of strict system equivalence, *Int.J.Control.*
- [10] Kailath Thomas (1980) *Linear Systems*, Prentice-Hall, London.
- [11] Antoulas A.C. (1981) *Int.J.Control.*