Υπολογισμός Μηδενικών Πολυωνυμικών Πινάκων

Τιφτίκογλου Ιορδάνης

Επιβλέπων: Αναπ. Καθηγητής Ν. Καραμπετάκης

Τμήμα Μαθηματικών, Α.Π.Θ

15 Δεκεμβρίου 2012

Περιεχόμενα

Ανάλυση Ιδιαζόντων Τιμών (ΑΙΤ)

1. Οι ιδιάζουσες τιμές σ ενός πίνακα A είναι οι μη αρνητικές τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών των πινάκων $A^{\intercal}A$ και $AA^{\intercal}$, δηλαδή
$$A^{\intercal}Ax = \lambda x \text{ με } \sigma = \sqrt{\lambda}$$

2. Παρατηρούμε ότι
$$A^{\intercal}Ax = \lambda x \Leftrightarrow x^{\intercal}A^{\intercal}Ax = \lambda x^{\intercal}x \Leftrightarrow \|Ax\|^2 = \lambda\|x\|^2 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \geq 0$$

3. Τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα u ενός πίνακα A είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $AA^{\intercal}$, δηλαδή $AA^{\intercal}u = \sigma^2 u$ και τα δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα v του ίδιου πίνακα είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A^{\intercal}A$, δηλαδή $A^{\intercal}Av = \sigma^2 v$, όπως προκύπτει από τον ορισμό
$$Av = \sigma u \text{ και } A^{\intercal}u = \sigma v$$

1. Για κάθε $m \times n$ πίνακα A υπάρχει η ανάλυση ιδιαζόντων τιμών, δηλαδή $A = U\Sigma V^{\mathsf{T}}$, όπου $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ και $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι οι ορθογώνιοι πίνακες με στήλες τα αριστερά και δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα και $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ο πίνακας των ιδιαζόντων τιμών.
2. Η ΑΙΤ χρησιμοποιείται για την εύρεση ορθοκανονικών βάσεων των θεμελιωδών υποχώρων ενός πίνακα. Από τους πίνακες U και V μπορούμε να εξαγάγουμε ορθοκανονικές βάσεις ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ως ακολούθως.
    - Βάση μηδενοχώρου: τελευταίες $n - r$ στήλες του πίνακα V,
    - βάση αριστερού μηδενοχώρου: τελευταίες $m - r$ στήλες του πίνακα U,
    - βάση χώρου στηλών: πρώτες r στήλες του πίνακα U,
    - βάση χώρου στηλών ανάστροφου: πρώτες r στήλες του πίνακα V,

    όπου $r = \operatorname{rank}(A)$ η τάξη του πίνακα A.

Ανάλυση QR

1. Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ του οποίου οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες μπορεί να παραχθεί από τον πολλαπλασιασμό ενός ορθογώνιου πίνακα $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ με έναν άνω τριγωνικό πίνακα $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$, δηλαδή $A = QR$.
2. Αν $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα, ορίζουμε ως πίνακα Householder τον $n \times n$ πίνακα

$$H = I - \frac{2}{v^\intercal v} v v^\intercal$$

3. Οι πίνακες Householder μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση της ανάλυσης QR ενός πίνακα A όπως περιγράφουμε στην επόμενη διαφάνεια.

1. Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ με $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ του οποίου αναζητάμε την ανάλυση QR
2. Θέλουμε να βρούμε τον πίνακα Householder $\overline{H_1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ο οποίος μετασχηματίζει την πρώτη στήλη του πίνακα A ως ακολούθως

$$\overline{H_1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \end{pmatrix}^{\intercal} = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\intercal}$$

3. Αν απαιτούνται n εφαρμογές της παραπάνω διαδικασίας θέτουμε $H_n = \mathrm{diag}(I_{n-1}, \overline{H_n})$ ώστε ο πίνακας A να μετασχηματιστεί σε άνω τριγωνικό, τότε θα έχουμε

$$H_n H_{n-1} \cdots H_1 A = R, \quad Q = H_1 \cdots H_{n-1} H_n, \quad A = QR$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $H^{-1} = H^{\intercal} = H$.

Αλγόριθμος υπολογισμού της ΑΙΤ

1. Θεωρούμε ότι έχουμε στη διάθεση μας μία συνάρτηση qr η οποία υλοποιεί κάποια μέθοδο ανάλυσης QR.
2. Θέτουμε τους πίνακες U, V ίσους με τους μοναδιαίους πίνακες κατάλληλων διαστάσεων.
3. Υπολογίζουμε την ανάλυση QR του πίνακα A του οποίου αναζητάμε την ΑΙΤ και θέτουμε $U = UQ$.
4. Υπολογίζουμε την ανάλυση QR του πίνακα $R^{\top}$ και θέτουμε $V = VQ$.

Η επαναληπτική αυτή διαδικασία τερματίζεται όταν η νόρμα του διανύσματος $\vec{r}_{\mathrm{u}}$ με στοιχεία r_{ij} του πίνακα R για τα οποία $i < j$ είναι αγνοήσιμη σε σχέση με τη νόρμα του διανύσματος $\vec{r}_{\mathrm{d}}$ με στοιχεία r_{ii}, δηλαδή

$$\|r_{\mathrm{u}}\| \ll \|r_{\mathrm{d}}\| \Leftrightarrow \|r_{\mathrm{u}}\| = \epsilon\|r_{\mathrm{d}}\| \Leftrightarrow \|r_{\mathrm{u}}\|/\|r_{\mathrm{d}}\| = \epsilon, \quad \epsilon \ll 1,$$

όπου ο αριθμός ανοχής ϵ καθορίζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων και απαιτούμε τουλάχιστον ένα από τα στοιχεία r_{ii} να είναι διάφορο του μηδενός ώστε $\|r_{\mathrm{d}}\| \neq 0$. Αν $\|r_{\mathrm{d}}\| = 0$ θέτουμε $\|r_{\mathrm{d}}\| = 1$.

Αλγόριθμος I

Συνάρτηση $[U, S, V] \leftarrow \mathsf{qrbsvd}(A)$

$U \leftarrow I_m,\ S \leftarrow A^{\mathsf{T}},\ V \leftarrow I_n,\ E \leftarrow max(fl(x)),\ \epsilon \leftarrow a \ll 1,\ i \leftarrow 0$

όσο $E > \epsilon$

$[Q, S] \leftarrow \mathrm{qr}(S^{\mathsf{T}}), \quad U \leftarrow UQ$

$[Q, S] \leftarrow \mathrm{qr}(S^{\mathsf{T}}), \quad V \leftarrow VQ$

$r_{\mathrm{u}} \leftarrow \mathrm{upper}(S),\ r_{\mathrm{d}} \leftarrow \mathrm{diag}(S)$

$E \leftarrow \|r_{\mathrm{u}}\| / \|r_{\mathrm{d}}\|$ αν $\|r_{\mathrm{d}}\| \neq 0$ και $E \leftarrow \|r_{\mathrm{u}}\|$ αν $\|r_{\mathrm{d}}\| = 0$

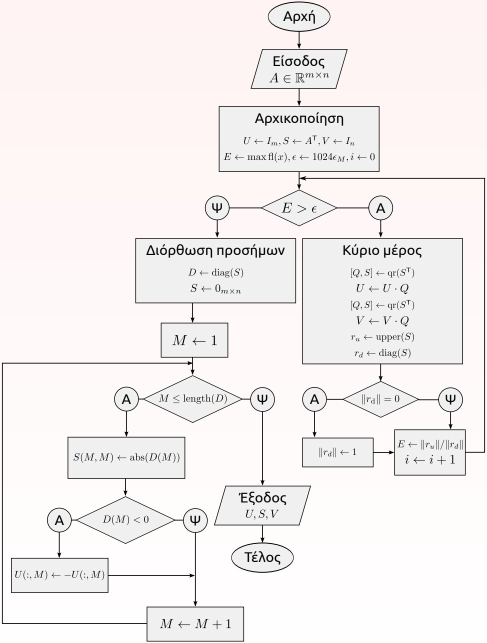
$i \leftarrow i + 1$

τέλος όσο

διόρθωση προσήμων

τέλος συνάρτησης

Η ρουτίνα διόρθωσης προσήμων αλλάζει κάθε αρνητικό στοιχείο της κύριας διαγωνίου του πίνακα S σε θετικό με ταυτόχρονη αλλαγή των προσήμων των στοιχείων της αντίστοιχης στήλης του πίνακα U.



Αρχή
Είσοδος
$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
Αρχικοποίηση
$U \leftarrow I_m, S \leftarrow A^\mathsf{T}, V \leftarrow I_n$
$E \leftarrow \max \mathrm{fl}(x), \epsilon \leftarrow 1024\epsilon_M, i \leftarrow 0$
Ψ
$E > \epsilon$
Α
Διόρθωση προσήμων
$D \leftarrow \mathrm{diag}(S)$
$S \leftarrow 0_{m\times n}$
Κύριο μέρος
$[Q,S] \leftarrow \mathrm{qr}(S^\mathsf{T})$
$U \leftarrow U \cdot Q$
$[Q,S] \leftarrow \mathrm{qr}(S^\mathsf{T})$
$V \leftarrow V \cdot Q$
$r_u \leftarrow \mathrm{upper}(S)$
$r_d \leftarrow \mathrm{diag}(S)$
$M \leftarrow 1$
Α
$M \leq \mathrm{length}(D)$
Ψ
Α
$\|r_d\| = 0$
Ψ
$S(M,M) \leftarrow \mathrm{abs}(D(M))$
$\|r_d\| \leftarrow 1$
$E \leftarrow \|r_u\|/\|r_d\|$
$i \leftarrow i+1$
Έξοδος
U, S, V
Α
$D(M) < 0$
Ψ
Τέλος
$U(:,M) \leftarrow -U(:,M)$
$M \leftarrow M+1$

Εφαρμογή

Στο ακόλουθο παράδειγμα εκτελούμε μία επανάληψη του παραπάνω αλγόριθμου για τον υπολογισμό της ΑΙΤ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{\intercal}$$

Θέτουμε $U = I_3$ και $V = I_2$ και υπολογίζουμε την ανάλυση QR του πίνακα $S^{\intercal} = A$,

$$Q = \begin{pmatrix} -0.33333 & 0.80845 & 0.48507 \\ -0.66667 & 0.16169 & -0.72761 \\ -0.66667 & -0.56592 & 0.48507 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} -3.00000 & -2.66667 \\ 0.00000 & 1.37437 \\ 0.00000 & 0.00000 \end{pmatrix}$$

και θέτουμε $U = UQ = Q$, δηλαδή

$$U = \begin{pmatrix} -0.33333 & 0.80845 & 0.48507 \\ -0.66667 & 0.16169 & -0.72761 \\ -0.66667 & -0.56592 & 0.48507 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε την ανάλυση QR του πίνακα $S^\intercal$,

$$Q = \begin{pmatrix} -0.74741 & -0.66436 \\ -0.66436 & 0.74741 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 4.01386 & -0.91308 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.02722 & 0.00000 \end{pmatrix}$$

και στη συνέχεια θέτουμε $V = VQ = Q$, δηλαδή

$$V = \begin{pmatrix} -0.74741 & -0.66436 \\ -0.66436 & 0.74741 \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε τα διανύσματα

$$r_u = \begin{pmatrix} -0.91308 & 0.00000 & 0.00000 \end{pmatrix}^{\intercal},$$

$$r_d = \begin{pmatrix} 4.0139 & 1.0272 \end{pmatrix}^{\intercal}$$

και υπολογίζουμε τη νόρμα τους,

$$\|r_u\| = 0.91308, \quad \|r_d\| = 4.1432$$

Τέλος, υπολογίζουμε το πηλίκο $E = \|r_u\|/\|r_d\| = 0.22038$ και επαναλαμβάνουμε όλη τη διαδικασία όσο η συνθήκη $E > \epsilon$ παραμένει αληθής. Τελικά η διαδικασία διακόπτεται μετά από έντεκα επαναλήψεις όταν το πηλίκο E λαμβάνει την τιμή $1.1004 \cdot 10^{-13}$ και ο αλγόριθμος επιστρέφει τους πίνακες

$$U = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5.1450 & 7.0711 & 4.8507 \\ -6.8599 & \frac{8.2466}{10^{13}} & -7.2761 \\ -5.1450 & -7.0711 & 4.8507 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4.12311 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 \end{pmatrix}$$

και

$$V = \begin{pmatrix} -0.70711 & -0.70711 \\ -0.70711 & 0.70711 \end{pmatrix}$$

Στοιχεία πολυωνυμικών πινάκων

1. Κάθε απεικόνιση $C : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ της οποίας οι τιμές δίνονται από μία σχέση της μορφής

$$C(s) = \sum_{i=0}^{\ell} C_i s^i$$

όπου $C_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι σταθεροί πίνακες και $s \in \mathbb{C}$ η ανεξάρτητη μεταβλητή, ονομάζεται πολυωνυμικός πίνακας βαθμού ℓ.

2. Ως εναδικούς (monic) ορίζουμε τους πολυωνυμικούς πίνακες για τους οποίους ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι ο μοναδιαίος πίνακας, $C_\ell = I$.

1. Θεωρούμε έναν $n \times n$ εναδικό πολυωνυμικό πίνακα C βαθμού ℓ του οποίου οι τιμές είναι

$$C(s) = Is^{\ell} + \sum_{i=0}^{\ell-1} C_i s^i$$

και ορίζουμε το συνοδεύων πίνακα $C_{(1)}$

$$C_{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & I & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & I \\ -C_0 & -C_1 & -C_2 & \cdots & -C_{\ell-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\ell \times n\ell}$$

2. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $C_{(1)}$ ισούται με την ορίζουσα του $C(s)$, δηλαδή

$$\det\left(Is - C_{(1)}\right) = \det C(s)$$

Μηδενικά πολυωνυμικών πινάκων

1. Ως μηδενικά ενός $n \times n$ πολυωνυμικού πίνακα $C(s)$ βαθμού ℓ ορίζουμε τους αριθμούς z_i, $i = 1, \ldots, k \leq n\ell$ που επαληθεύουν την εξίσωση
$$p(s) = \det\left(C(s)\right) = 0$$
2. Δοθέντος μηδενικού z ενός πολυωνυμικού πίνακα $C(s)$ βαθμού ℓ για κάθε διάνυσμα $e \in \mathcal{N}(C(z))$ έχουμε $C(z)e = 0$ ή ισοδύναμα
$$(C_0 + C_1 z + \cdots + C_\ell z^\ell)e = 0$$
Ορίζοντας τα διανύσματα $e_k = z^k e$, $k = 0, \ldots, \ell - 1$ και $e_k = z e_{k-1}$, $k = 1, \ldots, \ell - 1$ η παραπάνω σχέση γράφεται
$$C_0 e_0 + C_1 e_1 + \cdots + C_{\ell-1} e_{\ell-1} + z C_\ell z^{\ell-1} e = 0 \Leftrightarrow$$
$$-C_0 e_0 - C_1 e_1 - \cdots - C_{\ell-1} e_{\ell-1} = z C_\ell e_{\ell-1}$$

1. Είναι προφανές ότι έχουμε
$$C_{(1)} \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{\ell-1} \end{pmatrix} = zD \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{\ell-1} \end{pmatrix}$$
ή
$$C_{(1)} v = zDv$$
όπου
$$D = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C_\ell \end{pmatrix}$$
δηλαδή τα μηδενικά του $C(s)$ είναι οι ιδιοτιμές του παραπάνω γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών.
2. Αν $\det(C_\ell) \neq 0$ υπάρχει ο αντίστροφος D^{-1} του πίνακα D και τα μηδενικά του $C(s)$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $D^{-1}C_{(1)}$,
$$C_{(1)} v = zDv \Leftrightarrow D^{-1} C_{(1)} v = zv$$

Μηδενικά ευθέως και δυϊκού πολυωνυμικού πίνακα

1. Ονομάζουμε δυϊκό πολυωνυμικό πίνακα $\tilde{C}$ του ευθέως πολυωνυμικού πίνακα C τον πολυωνυμικό πίνακα με τιμές $\tilde{C}(s) = s^\ell C(1/s)$.
2. Θεωρούμε τους πολυωνυμικούς πίνακες $C, \tilde{C} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ βαθμού ℓ με τιμές

$$C(s) = C_\ell s^\ell + \cdots + C_1 s + C_0, \quad \tilde{C}(s) = C_0 s^\ell + \cdots + C_{\ell-1} s + C_\ell$$

και μη ιδιάζοντες συντελεστές C_ℓ, C_0. Βάση των παραπάνω τα μηδενικά των πολυωνύμων $C, \tilde{C}$ είναι οι ιδιοτιμές p, q των προβλημάτων

$$D^{-1} C_{(1)} v = pv, \quad \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{(1)} w = qw$$

Για να είναι $p = q$ πρέπει

$$\det\left(D^{-1} C_{(1)} - pI\right) = \det\left(\tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{(1)} - qI\right)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός $n \times n$ πίνακα A μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$p(s) = \det(A - sI) = (-1)^n (s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_{n-1} s + c_n)$$

με

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \det \begin{pmatrix} t_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_2 & t_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ t_3 & t_2 & t_1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{k-1} & t_{k-2} & t_{k-3} & t_{k-4} & \cdots & k-1 \\ t_k & t_{k-1} & t_{k-2} & t_{k-3} & \cdots & t_1 \end{pmatrix}$$

όπου $t_k = tr(A^k)$ και $k = 1, \ldots, n$. Παρατηρούμε ότι

$$c_1 = -t_1, \quad c_2 = \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2), \ldots, c_n = (-1)^n \det(A)$$

Δύο προβλήματα ιδιοτιμών $Ax = ax$ και $By = by$ έχουν ίδια σύνολα ιδιοτιμών, δηλαδή $\sigma(A) = \sigma(B)$, αν και μόνο αν τα χαρακτηριστικά τους πολυώνυμα

$$p(a) = \det(A - aI) = (-1)^n(a^n + p_1 a^{n-1} + \cdots + p_{n-1}a + p_n)$$

$$q(b) = \det(B - bI) = (-1)^n(b^n + q_1 b^{n-1} + \cdots + q_{n-1}b + q_n)$$

είναι ίσα, δηλαδή

$$p(s) = q(s) \Leftrightarrow p_k = q_k, k = 1, \dots, n$$

Από όπου παρατηρούμε ότι το πλήθος n των αναγκαίων συνθηκών ισούται με το βαθμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του αντίστοιχου πίνακα, δηλαδή έχουμε

$$tr(A) = tr(B), \quad tr(A^2) = tr(B^2), \dots, \det(A) = \det(B)$$

Για την περιπωση του ευθέως και του δυϊκού του πολυωνυμικού πίνακα πρέπει να ικανοποιούνται οι n σε πλήθος συνθήκες

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B), \quad \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(B^2), \ldots, \det(A) = \det(B)$$

όπου $A = D^{-1}C_{(1)}$ και $B = \tilde{D}^{-1}\tilde{C}_{(1)}$. Η συνθήκη $\det(A) = \det(B)$ (ισότητα σταθερών όρων) γράφεται

$$|\tilde{D}^{-1}\tilde{C}_{(1)}| = |D^{-1}C_{(1)}| \Leftrightarrow \frac{|\tilde{C}_{(1)}|}{|\tilde{D}|} = \frac{|C_{(1)}|}{|D|}$$

όπου $|\cdot| \equiv \det(\cdot)$. Επειδή

$$|\tilde{D}| = |I|\cdots|I|\cdot|C_0| = |C_0|, \quad |D| = |I|\cdots|I|\cdot|C_\ell| = |C_\ell|$$

η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\frac{|\tilde{C}_{(1)}|}{|C_0|} = \frac{|C_{(1)}|}{|C_\ell|}$$

Γενικά έχουμε ότι

$$C_{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & I \\ -C_0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & I \\ I & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C_0 & R \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix}$$

όπου

$$R = \begin{pmatrix} -C_1 & -C_2 & \cdots & -C_{\ell-1} \end{pmatrix}$$

Από την τελευταία σχέση με χρήση του τύπου του Leibniz παίρνουμε

$$|C_{(1)}| = \underbrace{\begin{vmatrix} \mathbb{O} & I \\ I & \mathbb{O} \end{vmatrix}}_{=\mathbb{I}} \cdot \det \begin{pmatrix} -C_0 & R \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix} = \mathbb{I}(-1)^n |C_0|, |\tilde{C}_{(1)}| = \mathbb{I}(-1)^n |C_\ell|$$

Τελικά με χρήση όλων των παραπάνω, η συνθήκη για την ισότητα του σταθερού όρου των χαρακτηριστικών πολυωνύμων γράφεται

$$|C_0| = \pm |C_\ell|$$

Από τη συνθήκη $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ παίρνουμε

$$\mathrm{tr}(D^{-1}C_{(1)}) = \mathrm{tr}(\tilde{D}^{-1}\tilde{C}_{(1)})$$

Αλλά έχουμε ότι

$$D^{-1}C_{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & & I \\ -C_\ell^{-1}C_0 & \cdots & -C_\ell^{-1}C_{\ell-1} \end{pmatrix}$$

και

$$\tilde{D}^{-1}\tilde{C}_{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & & I \\ -C_0^{-1}C_\ell & \cdots & -C_0^{-1}C_1 \end{pmatrix}$$

Τελικά η συνθήκη των ιχνών γράφεται

$$\mathrm{tr}(-C_\ell^{-1}C_{\ell-1}) = \mathrm{tr}(-C_0^{-1}C_1)$$

Παρατηρούμε ότι αν ο αριθμός $z \neq 0$ είναι μηδενικό του πολυωνυμικού πίνακα $C(s)$, τότε ο αριθμός $1/z$ είναι μηδενικό του δυϊκού πολυωνυμικού πίνακα $\tilde{C}(s)$, δηλαδη

$$\det\left(C(z)\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\tilde{C}(1/z)\right) = 0$$

και προφανώς ισχύει

$$z \to 0 \Leftrightarrow 1/z \to \pm\infty$$

δηλαδή αν το ευθύ πολυώνυμο εμφανίζει μηδενικό ίσο με μηδέν, τότε το δυικό εμφανίζει μηδενικό το ∞.

Παρατηρούμε ότι η αντιστροφή των πινακών $D, \tilde{D}$ προϋποθέτει την αντιστροφή των πινάκων C_ℓ και C_0 αντίστοιχα, δηλαδή $|C_\ell| \neq 0$ και $|C_0| \neq 0$. Αλλά για να είναι το $z = 0$ μηδενικό του πολυωνυμικού πίνακα $C(s)$ πρέπει ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα $D^{-1}C_{(1)}$ να είναι ίσος με μηδέν, δηλαδή

$$p(s) = 0 \Rightarrow (-1)^n(s^n + p_1 s^{n-1} + \cdots + p_{n-1}s) = 0 \Rightarrow$$

$$(-1)^n s(s^{n-1} + p_1 s^{n-2} + \cdots + p_{n-1}) = 0 \Rightarrow \{s = 0 \text{ ή } \ldots\}$$

με $p_n \propto |C_{(1)}| \propto |C_0| = 0$. Η σχέση αυτή όμως δηλώνει ότι ο πίνακας C_0 είναι ιδιάζων, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση της ύπαρξης του $\tilde{D}^{-1}$, συνεπώς ο πολυωνυμικός πίνακας $C(s)$ δεν εμφανίζει μηδενικό το $z = 0$ και ως εκ τούτου ο δυϊκός πολυωνυμικός πίνακας δεν εμφανίζει μηδενικό το ∞.

Εφαρμογή

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα C με τιμές

$$C(s) = \begin{pmatrix} s^2+s+3 & 2s^2+s+1 \\ 2s^2+2s+1 & 2s^2+s+1 \end{pmatrix} = C_2 s^2 + C_1 s + C_0$$

όπου

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \text{και } C_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο δυϊκός πολυωνυμικός πίνακας $\tilde{C}(s)$ του $C(s)$ είναι

$$\tilde{C}(s) = s^2 C(1/s) = C_0 s^2 + C_1 s + C_2$$

Τα μηδενικά των πολυωνυμικών πινάκων $C(s)$ και $\tilde{C}(s)$ δίνονται από τη λύση των εξισώσεων

$$\det(C(s)) = 0 \Leftrightarrow 2s^4 + 3s^3 - 2s^2 - s - 2 = 0$$

και

$$\det(\tilde{C}(s)) = 0 \Leftrightarrow 2s^4 + s^3 + 2s^2 - 3s - 2 = 0$$

Υπολογίζουμε τα σύνολα Z και $\tilde{Z}$ των ριζών των παραπάνω εξισώσεων και παίρνουμε

$$Z = \{-2, 1, -0.25 \pm 0.66144\}, \quad \tilde{Z} = \{-0.5, 1, -0.5 \mp 1.32288\}$$

Παρατηρούμε ότι επειδή $z_i \neq 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, 4$, κάθε ρίζα $z_i \in Z$ του ευθέως πολυωνυμικού πίνακα συνδέεται με τη ρίζα $\tilde{z}_i \in \tilde{Z}$ του δυϊκού πολυωνυμικού πίνακα με τη σχέση $\tilde{z}_i = 1/z$ για $i = 1, \ldots, 4$.

Εφαρμογή

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\Pi_1(s) = \begin{pmatrix} 4s^3 + 2s + 1 & 5s^3 + 4s^2 + 2 \\ 6s^3 + 4s + 3 & 7s^3 + 6s^2 + 4 \end{pmatrix}$$

ο οποίος γράφεται στη μορφή

$$\Pi_1(s) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} s^3 + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} s^2 + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$P_3 s^3 + P_2 s^2 + P_1 s + P_0$$

με ιδιάζοντες παράγοντες P_1,P_2. Επιπλέον, ορίζουμε το δυϊκό πολυωνυμικό πίνακα

$$\Pi_2(s) = s^3 \Pi_1(1/s) = P_0 s^3 + P_1 s^2 + P_2 s + P_3$$

Με άμεσο υπολογισμό της ορίζουσας παίρνουμε

$$\{\det(\Pi_1(s)) = 0, \det(\Pi_2(s)) = 0\} \Leftrightarrow s^6 + 3s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 1 = 0$$

Για να ελέγξουμε την ισχύ των κριτηρίων ισότητας των χαρακτηριστικών πολυωνύμων κατασκευάζουμε τους πίνακες $C_{(1)}$, D του ευθέως πολυωνυμικού πίνακα, καθώς και τους $\tilde{C}_{(1)}$, $\tilde{D}$, δηλαδή

$$C_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ -3 & -4 & -4 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

και

$$\tilde{C}_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ -6 & -7 & 0 & -6 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Με υπολογισμό των δυνάμεων του πίνακα $D^{-1}C_{(1)}$ στο Matlab λαμβάνουμε την ισχύ των $n = 6$ απαιτούμενων συνθηκών,

$$\det P_0 = \det P_3 = -2$$

$$\operatorname{tr}(P_3^{-1}P_2) = \operatorname{tr}(P_0^{-1}P_1) = \operatorname{tr}(D^{-1}C_{(1)}) = \operatorname{tr}(\tilde{D}^{-1}\tilde{C}_{(1)}) = 0,$$

$$\operatorname{tr}((D^{-1}C_{(1)})^2) = \operatorname{tr}((\tilde{D}^{-1}\tilde{C}_{(1)})^2) = -6$$

$$\operatorname{tr}((D^{-1}C_{(1)})^3) = \operatorname{tr}((\tilde{D}^{-1}\tilde{C}_{(1)})^3) = -12$$

$$\operatorname{tr}((D^{-1}C_{(1)})^4) = \operatorname{tr}((\tilde{D}^{-1}\tilde{C}_{(1)})^4) = 6$$

$$\operatorname{tr}((D^{-1}C_{(1)})^5) = \operatorname{tr}((\tilde{D}^{-1}\tilde{C}_{(1)})^5) = 60$$

Πιο συγκεκριμένα οι ρίζες των Π_1 και Π_2 είναι

$$\{0.62996 \pm 1.85754i, -0.79370 \pm 0.60831i, 0.16374 \pm 0.48281i\}$$

Μορφή Smith

Για κάθε μη μηδενικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}[s]$ υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $M \in \mathbb{R}^{m\times m}[s]$ και $N \in \mathbb{R}^{n\times n}[s]$, ώστε

$$S^{\mathbb{C}}_{A(s)}(s) = M(s)A(s)N(s) = \begin{pmatrix} S(s) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

όπου $S(s) = \mathrm{diag}(a_1(s), a_2(s), \dots, a_r(s))$ και οι αριθμοί $a_i(s)$, $i = 1, \dots, r$ όπου r ο μέγιστος ακέραιος για τον οποίο υπάρχει μη μηδενική $r \times r$ ελάσσονα, ονομάζονται *πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες*, ικανοποιούν τη σχέση $a_i(s)|a_{i+1}(s)$ για κάθε $i \in \{1, \dots, r-1\}$ και δίνονται από το πηλίκο

$$a_i(s) = \frac{D_i(A(s))}{D_{i-1}(A(s))}$$

όπου $D_i(A(s))$ παριστάνει το μέγιστο κοινό διαιρέτη όλων των $i \times i$ ελασσόνων οριζουσών του πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$. Η μορφή $S^{\mathbb{C}}_{A(s)}(s)$ ονομάζεται *μορφή Smith* του πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$.

Εφαρμογή

Δοθέντος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

αναζητάμε τη Smith μορφή του χαρακτηριστικού πίνακα $sI - A$, δηλαδή

$$B(s) = sI - A = \begin{pmatrix} s-2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-2 \end{pmatrix}$$

Οι στοιχειώδεις διαιρέτες του πίνακα αυτού είναι

$$a_1(s) = 1,\ a_2(s) = 1,\ a_3(s) = 1,\ a_4(s) = (s-2)^2,\ a_5(s) = (s-2)^3$$

όπου, για παράδειγμα, ο στοιχειώδης διαιρέτης $a_5(s)$ υπολογίζεται ως ακολούθως. Η ορίζουσα του πολυωνυμικού πίνακα $B(s)$ είναι $D_5(s) = (s-2)^5$ και οι 4×4 ελάσσονες ορίζουσες του πολυωνυμικού πίνακα $B(s)$ είναι

$$|B_{11}| = (s-2)^4,\ |B_{12}| = |B_{13}| = |B_{14}| = |B_{15}| = 0,$$

$$|B_{21}| = -(s-2)^3,\ |B_{22}| = (s-2)^4,\ |B_{23}| = |B_{24}| = |B_{25}| = 0,$$

$$|B_{31}| = 0,\ |B_{32}| = 0,\ |B_{33}| = (s-2)^4,\ |B_{34}| = |B_{35}| = 0,$$

$$|B_{41}| = |B_{42}| = 0,\ |B_{43}| = -(s-2)^3,\ |B_{44}| = (s-2)^4,\ |B_{45}| = 0,$$

$$|B_{51}| = |B_{52}| = 0,\ |B_{53}| = (s-2)^2,\ |B_{54}| = -(s-2)^3,\ |B_{55}| = (s-2)^4$$

των οποίων ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι $(s-2)^2$, δηλαδή $D_4(s) = (s-2)^2$. Τελικά $a_5(s) = D_5(s)/D_4(s) = (s-2)^3$. Τελικά η Smith μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $B(s) = sI - A$ είναι

$$S^{\mathbb{C}}_{B(s)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (s-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (s-2)^3 \end{pmatrix}$$

Αλγόριθμος υπολογισμού μηδενικών

Δοθέντος πολυωνυμικού πίνακα $C : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{p\times m}$ βαθμού n και τη γραμμικοποίηση αυτού $E_0 s - F_0$ με

$$E_0 = \begin{pmatrix} C_n & \mathbb{O}_{p\times(k-m)} \\ \mathbb{O}_{(k-m)\times m} & I_{k-m} \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} -C_{n-1} & \cdots & -C_0 \\ I_{k-m} & & \mathbb{O}_{(k-m)\times m} \end{pmatrix}$$

ο παρακάτω αλγόριθμος υπολογίζει τα μηδενικά $z_i \in \mathbb{C}$ του πίνακα $C(s)$

Διάβασε $C_n, C_{n-1}, \ldots, C_0$
$i \leftarrow 0, \ell_0 \leftarrow p + (n-1)m, k_0 \leftarrow mn$
Όσο $\neg\mathrm{exists}(z)$ **επανέλαβε**
  $[U_i, S_i, V_i] \leftarrow \mathrm{svd}(E_i)$
  $r_i \leftarrow \mathrm{rank}(E_i)$
  Αν $r_i = 0$ **τότε**
    Αν $E_i = 0$ **τότε**
      $z \leftarrow []$

Αλλιώς

$z \leftarrow \mathrm{eig}(E_i^{-1} F_i)$

Τέλος_αν

Αλλιώς_αν $r_i = \ell_i$ **τότε**

Αν $r_i = k_i$ **τότε**

Αν $E_i = 0$ **τότε**

$z \leftarrow []$

Αλλιώς

$z \leftarrow \mathrm{eig}(E_i^{-1} F_i)$

Τέλος_αν

Αλλιώς

$F_i' \leftarrow (F_i V_i^{\intercal})(:, \mathrm{last}(k_i - r_i))$

$T_i \leftarrow \mathcal{K}(F_i')_{\mathrm{SVD}}$

$i \leftarrow i+1, \ell_i \leftarrow j_{i-1}, k_i \leftarrow r_{i-1}$

$E_i \leftarrow (T_{i-1} E_{i-1} V_{i-1}^{\intercal})(:, \mathrm{first}(r_{i-1}))$

$F_i \leftarrow (T_{i-1} F_{i-1} V_{i-1}^{\intercal})(:, \text{first}(r_{i-1}))$

Τέλος_αν

Αλλιώς

$F_i' \leftarrow (U_i^{\intercal} F_i)(\text{last}(\ell_i - r_i), :)$

$W_i \leftarrow \mathcal{N}(F_i')_{\text{SVD}}$

$i \leftarrow i + 1, \ell_i \leftarrow r_{i-1}, k_i \leftarrow j_{i-1}$

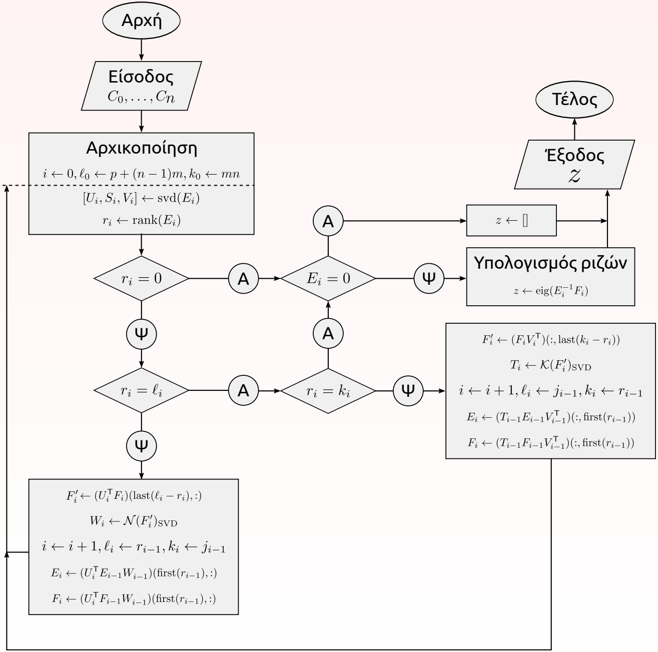
$E_i \leftarrow (U_{i-1}^{\intercal} E_{i-1} W_{i-1})(\text{first}(r_{i-1}), :)$

$F_i \leftarrow (U_{i-1}^{\intercal} F_{i-1} W_{i-1})(\text{first}(r_{i-1}), :)$

Τέλος_αν

Τέλος_επανάληψης

Παρατήρηση. Υπενθυμίζουμε ότι δοθέντος $m \times n$ πίνακα $A = U\Sigma V^{\intercal}$ τάξης r οι τελευταίες $n - r$ στήλες του πίνακα V αποτελούν βάση του μηδενοχώρου $\mathcal{A}$ και οι τελευταίες $m - r$ στήλες του πίνακα U αποτελούν βάση του αριστερού μηδενοχώρου $\mathcal{K}(A) = \mathcal{N}(A^{\intercal})$


Αρχή
Είσοδος
$C_0, \ldots, C_n$
Αρχικοποίηση
$i \leftarrow 0, \ell_0 \leftarrow p + (n-1)m, k_0 \leftarrow mn$
$[U_i, S_i, V_i] \leftarrow \mathrm{svd}(E_i)$
$r_i \leftarrow \mathrm{rank}(E_i)$
$r_i = 0$
Α
Ψ
$E_i = 0$
Α
Ψ
$z \leftarrow []$
Υπολογισμός ριζών
$z \leftarrow \mathrm{eig}(E_i^{-1} F_i)$
Έξοδος
z
Τέλος
$r_i = \ell_i$
Α
Ψ
$r_i = k_i$
Α
Ψ
$F_i' \leftarrow (F_i V_i^{\mathsf{T}})(:, \mathrm{last}(k_i - r_i))$
$T_i \leftarrow \mathcal{K}(F_i')_{\mathrm{SVD}}$
$i \leftarrow i+1, \ell_i \leftarrow j_{i-1}, k_i \leftarrow r_{i-1}$
$E_i \leftarrow (T_{i-1} E_{i-1} V_{i-1}^{\mathsf{T}})(:, \mathrm{first}(r_{i-1}))$
$F_i \leftarrow (T_{i-1} F_{i-1} V_{i-1}^{\mathsf{T}})(:, \mathrm{first}(r_{i-1}))$
$F_i' \leftarrow (U_i^{\mathsf{T}} F_i)(\mathrm{last}(\ell_i - r_i), :)$
$W_i \leftarrow \mathcal{N}(F_i')_{\mathrm{SVD}}$
$i \leftarrow i+1, \ell_i \leftarrow r_{i-1}, k_i \leftarrow j_{i-1}$
$E_i \leftarrow (U_i^{\mathsf{T}} E_{i-1} W_{i-1})(\mathrm{first}(r_{i-1}), :)$
$F_i \leftarrow (U_i^{\mathsf{T}} F_{i-1} W_{i-1})(\mathrm{first}(r_{i-1}), :)$

Εφαρμογή

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$C(s) = \begin{pmatrix} 6s^3 + 4s^2 + s + 6 & 8s^3 + 7s^2 + 3s + 5 \\ 3s^3 + 4s^2 + 4s + 8 & 4s^3 + 7s^2 + 5s + 1 \end{pmatrix}$$

του οποίου αναζητάμε τα μηδενικά. Με άμεσο υπολογισμό της ορίζουσας του παραπάνω πίνακα παίρνουμε το πολυώνυμο

$$\det(C(s)) = 5s^5 - 7s^4 - 62s^3 - 37s^2 - 13s - 34$$

και τα μηδενικά του πίνακα $C(s)$ είναι

$$z_1 = 4.537, \quad z_2 = -2.433, \quad z_3 = -1.103, \quad z_{\pm} = 0.1996 \pm i0.7202$$

Για να υπολογίσουμε τα μηδενικά του πολυωνύμικού πίνακα $C(s)$ με χρήση του αλγόριθμου που παρουσιάσαμε τον γράφουμε στη μορφή πολυωνύμου με συντελεστές πίνακες, δηλαδή

$$C(s) = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} s^3 + \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} s^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$C_3 s^3 + C_2 s^2 + C_1 s + C_0$$

Ο βαθμός του πολυωνυμικού πίνακα είναι $n = 3$. Επιπλέον έχουμε $p = 2$, $m = 2$, $k = nm = 6$ και $\ell_0 = 6$.

Ορίζουμε τους πίνακες

$$E_0 = \begin{pmatrix} C_3 & \mathbb{O}_{2\times 4} \\ \mathbb{O}_{4\times 2} & I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_0 = \begin{pmatrix} -C_2 & -C_1 & -C_0 \\ I_4 & & \mathbb{O}_{4\times 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & -1 & -3 & -6 & -5 \\ -4 & -7 & -4 & -5 & -8 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε την ΑΙΤ του πίνακα $E_0 = U_0 \Sigma_0 V_0^{\mathsf{T}}$ στο Matlab και λαμβάνουμε

$$U_0 = \begin{pmatrix} -0.89443 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & -0.44721 \\ -0.44721 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.89443 \\ -0.00000 & 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & -0.00000 & 1.00000 & 0.00000 \\ -0.00000 & 1.00000 & -0.00000 & -0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 11.18001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$V_0 = \begin{pmatrix} -0.60000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.80000 \\ -0.80000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & -0.60000 \\ -0.00000 & 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & -0.00000 & 1.00000 & 0.00000 \\ -0.00000 & 1.00000 & -0.00000 & -0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \end{pmatrix},$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η τάξη του πίνακα E_0 είναι $r_0 = \text{rank}(E_0) = 5$ και επειδή είναι $r_0 = 5 < \ell_0 = 6$ υπολογίζουμε τον πίνακα $U_0^\intercal F_0$ του οποίου τις τελευταίες $l_0 - r_0 = 1$ γραμμές ορίζουμε ως F_0' και υπολογίζουμε τη βάση του W_0 με χρήση της AIT στον F_0', δηλαδή

$$F_0' = \begin{pmatrix} -1.7889 - 3.1305 - 3.1305 - 3.1305 - 4.47211.3416 \end{pmatrix}$$

και $F_0' = U_F \Sigma_F V_F^\intercal$, με

$$V_F = \begin{pmatrix} -0.242536 & -0.424437 & -0.424437 & -0.424437 & -0.606339 & 0.181902 \\ -0.424437 & 0.855017 & -0.144983 & -0.144983 & -0.207119 & 0.062136 \\ -0.424437 & -0.144983 & 0.855017 & -0.144983 & -0.207119 & 0.062136 \\ -0.424437 & -0.144983 & -0.144983 & 0.855017 & -0.207119 & 0.062136 \\ -0.606339 & -0.207119 & -0.207119 & -0.207119 & 0.704115 & 0.088765 \\ 0.181902 & 0.062136 & 0.062136 & 0.062136 & 0.088765 & 0.973370 \end{pmatrix}$$

και η βάση $W_0 = \mathcal{N}(F_0')$ σχηματίζεται από τις τελευταίες $j_0 = 5$ στήλες του V_F, όπου j_0 είναι οι στήλες του F_0' ελαττωμένες κατά την τάξη του $\mathrm{rank}(F_0')$, δηλαδή

$$W_0 = \begin{pmatrix} -0.424437 & -0.424437 & -0.424437 & -0.606339 & 0.181902 \\ 0.855017 & -0.144983 & -0.144983 & -0.207119 & 0.062136 \\ -0.144983 & 0.855017 & -0.144983 & -0.207119 & 0.062136 \\ -0.144983 & -0.144983 & 0.855017 & -0.207119 & 0.062136 \\ -0.207119 & -0.207119 & -0.207119 & 0.704115 & 0.088765 \\ 0.062136 & 0.062136 & 0.062136 & 0.088765 & 0.973370 \end{pmatrix}$$

Έπειτα αυξάνουμε το μετρητή κατά μία μονάδα $i = 1$, έχουμε δηλαδή $l_1 = r_0 = 5$, $k_1 = j_0 = 5$ και υπολογίζουμε τους πίνακες E_1, F_1 από τις πρώτες $r_0 = 5$ γραμμές των πινάκων $U_0^{\mathsf{T}} E_0 W_0$ και $U_0^{\mathsf{T}} F_0 W_0$ αντίστοιχα, δηλαδή

$$E_1 = \begin{pmatrix} -4.800289 & 4.143983 & 4.143983 & 5.919976 & -1.775993 \\ 0.062136 & 0.062136 & 0.062136 & 0.088765 & 0.973370 \\ -0.144983 & 0.855017 & -0.144983 & -0.207119 & 0.062136 \\ -0.144983 & -0.144983 & 0.855017 & -0.207119 & 0.062136 \\ -0.207119 & -0.207119 & -0.207119 & 0.704115 & 0.088765 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 3.102988 & -3.605216 & -1.369148 & -0.039296 & 7.614420 \\ -0.144983 & -0.144983 & 0.855017 & -0.207119 & 0.062136 \\ -0.424437 & -0.424437 & -0.424437 & -0.606339 & 0.181902 \\ 0.855017 & -0.144983 & -0.144983 & -0.207119 & 0.062136 \\ -0.144983 & 0.855017 & -0.144983 & -0.207119 & 0.062136 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε την ΑΙΤ του πίνακα E_1 στο Matlab και λαμβάνουμε

$$U_1 = \begin{pmatrix} -9.9878 \cdot 10^{-1} & -8.6653 \cdot 10^{-18} & 4.3326 \cdot 10^{-19} & 6.2390 \cdot 10^{-17} & -4.9436 \cdot 10^{-2} \\ 1.0308 \cdot 10^{-2} & 9.5820 \cdot 10^{-1} & 1.8921 \cdot 10^{-1} & -5.0662 \cdot 10^{-2} & -2.0826 \cdot 10^{-1} \\ -2.4052 \cdot 10^{-2} & 2.4086 \cdot 10^{-1} & -7.7207 \cdot 10^{-1} & -3.3042 \cdot 10^{-1} & 4.8594 \cdot 10^{-1} \\ -2.4052 \cdot 10^{-2} & 1.5398 \cdot 10^{-1} & -1.3363 \cdot 10^{-2} & 8.5988 \cdot 10^{-1} & 4.8594 \cdot 10^{-1} \\ -3.4361 \cdot 10^{-2} & 1.1075 \cdot 10^{-2} & 6.0657 \cdot 10^{-1} & -3.8583 \cdot 10^{-1} & 6.9420 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 9.788892 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.069253 \end{pmatrix}$$

και

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0.49129 & 0.00000 & -0.00000 & -0.00000 & -0.87100 \\ -0.42377 & 0.24086 & -0.77207 & -0.33042 & -0.23903 \\ -0.42377 & 0.15398 & -0.01336 & 0.85988 & -0.23903 \\ -0.60539 & 0.01108 & 0.60657 & -0.38583 & -0.34147 \\ 0.18162 & 0.95820 & 0.18921 & -0.05066 & 0.10244 \end{pmatrix}$$

Η τάξη του πίνακα E_1 είναι $r_1 = \text{rank}(E_1) = 5$ και επειδή $r_1 = \ell_1 = 5$ και $k_1 = j_0 = 5$ υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα E_1^{-1} και στη συνέχεια τον πίνακα $E_1^{-1}F_1$ του οποίου οι ιδιοτιμές είναι τα μηδενικά του πολυωνυμικού πίνακα, δηλαδή

$$E_1^{-1}F_1 = \begin{pmatrix} 0.027972 & -6.426520 & 6.204239 & 6.216227 & 2.481099 \\ -0.307121 & -2.561613 & 1.469145 & 1.337521 & 1.224710 \\ 0.972333 & -2.282159 & 1.748599 & 1.736741 & 1.104944 \\ 0.022611 & -2.198092 & 2.560134 & 2.569824 & 1.551862 \\ -0.195262 & 0.770949 & 0.043481 & -1.040202 & -0.384782 \end{pmatrix}$$

Τελικά τα μηδενικά του πολυωνύμικού πίνακα $C(s)$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $E_1^{-1}F_1$, δηλαδή

$$z_1 = 4.537, \quad z_2 - 2.433, \quad z_3 = -1.103, \quad z_{4,5} = 0.1996 \pm \mathrm{i}0.7202$$

Αριθμητικά πειράματα - AIT

```
> A = [1, 2, 3; 4, 5, 6];
> [U, S, V] = svd (A)
U =
  -0.38632  -0.92237
  -0.92237   0.38632
S =
   9.50803         0         0
         0   0.77287         0
V =

  -0.42867   0.80596   0.40825
  -0.56631   0.11238  -0.81650
  -0.70395  -0.58120   0.40825
```

Αριθμητικά πειράματα - AIT

```
> [U, S, V] = qrbsvd (A)
U =
  -0.38632  -0.92237
  -0.92237   0.38632

S =
   9.50803   0.00000   0.00000
   0.00000   0.77287   0.00000

V =
  -0.42867   0.80596   0.40825
  -0.56631   0.11238  -0.81650
  -0.70395  -0.58120   0.40825
```

Αριθμητικά πειράματα - Μηδενικά

Θεωρούμε πολυωνυμικούς πίνακες της μορφής

$$C(s) = \begin{pmatrix} 0 & s+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

με μοναδικό μηδενικό $z = -a$.

```
> z = zersvd ([0, 1; 0, 0], [0, 1; 0, 0])
z = -1

> z = zersvd ([0, 1; 0, 0], [0, -1; 0, 0])
z =  1

> z = zersvd ([0, 1; 0, 0], [0, 7.89; 0, 0])
z = -7.8900
```

Αριθμητικά πειράματα - Μηδενικά

```
> C3 = [6, 8; 3, 4];
> C2 = [4, 7; 4, 7];
> C1 = [1, 3; 4, 5];
> C0 = [6, 5; 8, 1];

> z = zersvd (C3, C2, C1, C0)
z =
   4.53670 + 0.00000i
  -2.43297 + 0.00000i
   0.19964 + 0.72020i
   0.19964 - 0.72020i
  -1.10301 + 0.00000i
```

Αριθμητικά πειράματα - Μηδενικά $C(s)$ και $s^{\ell}C(1/s)$

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\Pi_1(s) = \begin{pmatrix} 4s^3+2s+1 & 5s^3+4s^2+2 \\ 6s^3+4s+3 & 7s^3+6s^2+4 \end{pmatrix}$$

ο οποίος γράφεται

$$\Pi_1(s) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} s^3 + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} s^2 + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$P_3 s^3 + P_2 s^2 + P_1 s + P_0$$

με ιδιάζοντες παράγοντες P_1,P_2.

Αριθμητικά πειράματα - Μηδενικά $C(s)$ και $s^{\ell}C(1/s)$

Ορίζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\Pi_2(s) = s^3\Pi(1/s) = P_0 s^3 + P_1 s^2 + P_2 s + P_3$$

Με άμεσο υπολογισμό της ορίζουσας των παραπάνω πινάκων πολυωνύμων λαμβάνουμε την κοινή εξίσωση

$$\{\det(\Pi_1(s)) = 0, \det(\Pi_2(s)) = 0\} \Leftrightarrow s^6 + 3s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 1 = 0$$

που σημαίνει ότι τα πολυώνυμα Π_1, Π_2 έχουν κοινά μηδενικά. Πιο συγκεκριμένα οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$\{0.62996 \pm 1.85754i, -0.79370 \pm 0.60831i, 0.16374 \pm 0.48281i\}$$

Αριθμητικά πειράματα - Μηδενικά $C(s)$ και $s^{\ell}C(1/s)$

```
> P0 = [1, 2; 3, 4];
> P1 = [2, 0; 4, 0];
> P2 = [0, 4; 0, 6];
> P3 = [4, 5; 6, 7];
> zersvd (P3, P2, P1, P0)
ans =

   0.62996 + 1.85754i
   0.62996 - 1.85754i
   0.16374 + 0.48281i
   0.16374 - 0.48281i
  -0.79370 + 0.60831i
  -0.79370 - 0.60831i
```

$$\{0.62996 \pm 1.85754i, -0.79370 \pm 0.60831i, 0.16374 \pm 0.48281i\}$$

Αριθμητικά πειράματα - Μηδενικά $C(s)$ και $s^{\ell}C(1/s)$

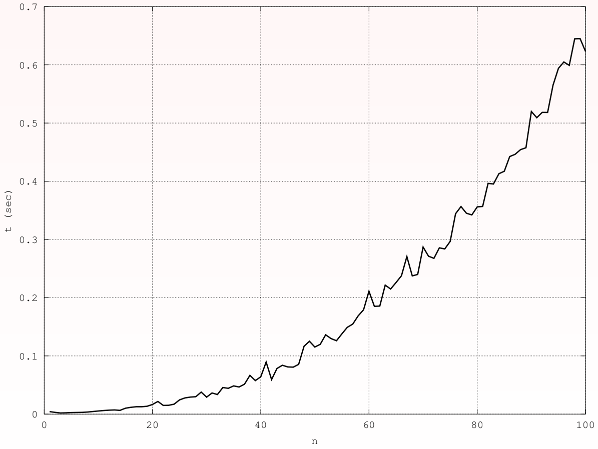
```
> zersvd (P0, P1, P2, P3)
ans =

  -0.79370 + 0.60831i
  -0.79370 - 0.60831i
   0.16374 + 0.48281i
   0.16374 - 0.48281i
   0.62996 + 1.85754i
   0.62996 - 1.85754i
```

$$\{0.62996 \pm 1.85754i, -0.79370 \pm 0.60831i, 0.16374 \pm 0.48281i\}$$

Αριθμητικά πειράματα - Χρόνος υπολογισμού μηδενικών $t \propto n^3$

Παρακάτω παρουσιάζουμε το χρόνο εκτέλεσης σαν συνάρτηση της διάστασης n τυχαίου $n \times n$ πολυωνυμικού πίνακα βαθμού $\ell = 3$.



Αριθμητικά πειράματα - Πορτρέτο απόδοσης για $n = 100$

#	Function Attr	Time (s)	Calls
38	eig	0.401	1
25	svd	0.167	2
37	inv	0.057	1
5	binary *	0.032	5
1	zersvd	0.005	1
10	cell2mat	0.001	1
7	zeros	0.001	3
15	binary ==	0.001	8
26	rank	0.000	1
36	zersvd>casevii	0.000	1
16	cellfun	0.000	6

Αριθμητικά πειράματα - Πορτρέτο απόδοσης για $n = 100$ (συνέχεια)

#	Function	Attr	Time (s)	Calls
23	cat		0.000	1
24	prefix	–	0.000	1
28	isa		0.000	1
39	profile		0.000	1
21	num2cell		0.000	1
20	sort		0.000	1
8	eye		0.000	2
3	binary	–	0.000	8
11	nargin		0.000	4

Αριθμητικά πειράματα - Συνθήκη ιχνών

```
> P0 = [1, 2; 3, 4];
> P1 = [2, 0; 4, 0];
> P2 = [0, 4; 0, 6];
> P3 = [4, 5; 6, 7];
> condtest(P3, P2, P1, P0)
ans =  1
> P0 = [2, 0; 4, 0];
> P1 = [1, 2; 3, 4];
> condtest(P3, P2, P1, P0)
warning: inverse: matrix singular to machine
precision, rcond = 0
ans = 0
```

Συζήτηση - Συμπεράσματα

- Χρησιμότητα εύρεσης μηδενικών πολυωνυμικών πινάκων στην αριθμητική επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων, για παράδειγμα

$$\{M\ddot{z} + D\dot{z} + Kz = 0, \quad z(0) = a, \quad \dot{z}(0) = b\} \Rightarrow$$

$$(Ms^2 + Ds + K)u = 0$$

- Μελετήσαμε τους βασικούς αλγόριθμους της ανάλυσης QR και AIT.
- Παρουσιάσαμε έναν αλγόριθμο για την εύρεση των μηδενικών πολυωνυμικών πινάκων.
- Ο αλγόριθμος αυτός συνδυάζει τη γραμμικοποίηση και την AIT ώστε να ανάγει το αρχικό πρόβλημα σε πρόβλημα ιδιοτιμών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για πολυωνυμικούς πίνακες αυθαίρετου βαθμού, τάξης και διάστασης.

Συμπεράσματα (συνέχεια)

- Το πλεονέκτημα είναι ότι χρησιμοποιεί θεμελιώδεις ιδιότητες των πολυωνυμικών πινάκων.
- Το υπολογιστικό κόστος του αλγόριθμου αυτού καθορίζεται από το υπολογιστικό κόστος της εύρεσης των ιδιοτιμών και από αυτό του υπολογισμό της AIT.
- Μελετήθηκαν οι συνθήκες ισότητας των μηδενικών του ευθέως πολυωνυμικού πίνακα και του δυϊκού του και εξήχθησαν αναγκαίες συνθήκες μεταξύ των συντελεστών τους ώστε τα μηδενικά αυτών να ταυτίζονται.
- Παρουσιάσαμε πλήθος παραδειγμάτων και κώδικα ώστε να στηρίξουμε τα θεωρητικά μας ευρήματα.

Ευχαριστώ για την παρακολούθηση!