Θεωρ. Πληροφ. και Θεωρία Συστ. & Ελέγχου

- Τμήμα Μαθηματικών Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Υπολογιστικές Μέθοδοι για την Επίλυση Προβλημάτων του Λογισμού Μεταβολών

- Νίκος Τογανίδης
  - Επιβλέπων Καθηγητής: Ν. Καραμπετάκης

09 Ιουλίου 2013

Τι θα δούμε

- Σύντομη ανάπτυξη της βασικής θεωρίας
- Αναφορά των μεθόδων προσέγγισης και σύντομη περιγραφή τους
- Παρουσίαση προγραμμάτων που αυτοματοποιούν τη διαδικασία προσέγγισης των συναρτησιακών προβλημάτων

Βασική Θεωρία

- Δίνεται ένα συναρτησιακό πρόβλημα
- Επιζητούμε την άκρα καμπύλη του προβλήματος

Βασική Θεωρία

συναρτησιακό

Βασική Θεωρία

Συναρτησιακό

Έστω το ανοιχτό σύνολο

$$\mathbb{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \mathbb{E}$$

και η συνάρτηση κλάσης C^k

$$F: \quad \mathbb{U} \to \mathbb{R}$$

η οποία παίρνει στο σημείο $(t, y, z) \in \mathbb{U}$ την τιμή $F(t, y, z) \in \mathbb{R}$.

Βασική Θεωρία

Συναρτησιακό

Θεωρώντας την καμπύλη κλάσης C^1

$$x : \ \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{E}$$

τέτοια ώστε να ισχύει

$$\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) \in \mathbb{U}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{I}$$

έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε το παρακάτω ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\boxed{J(x) = \int_{\alpha}^{\beta} F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)dt} \ \in \mathbb{R}\,.$$

Βασική Θεωρία

Συναρτησιακό

$$J(x) = \int_{\alpha}^{\beta} F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)dt$$

Αν συλλέξουμε όλες τις καμπύλες $x \in C^1(\mathbb{I}, \mathbb{E})$ για τις οποίες ισχύει

$$\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) \in \mathbb{U}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{I}$$

και τις τοποθετήσουμε σ' ένα σύνολο, έστω Ω, τότε η συνάρτηση κλάσης C^k

$$J:\ \Omega \to \mathbb{R}$$

ονομάζεται ***συναρτησιακό*** επί του συνόλου καμπυλών Ω.

Βασική Θεωρία

Γιατί καταφεύγουμε σε προσεγγίσεις;

Γνωρίζουμε ήδη ότι με τη βοήθεια της διαφορικής εξίσωσης των Euler – Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{I}$$

μπορούμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του συναρτησιακού.

Βασική Θεωρία

Γιατί καταφεύγουμε σε προσεγγίσεις;

- Υπάρχουν, όμως, πολλές περιπτώσεις στις οποίες δε μπορεί να λυθεί αναλυτικά η διαφορική εξίσωση των Euler – Lagrange.

- Θεωρούμε το συναρτησιακό πρόβλημα ως **οριακή περίπτωση κάποιου προβλήματος μεγίστης ή/και ελαχίστης τιμής συνάρτησης πεπερασμένου αριθμού μεταβλητών**. Αναγάγουμε, δηλαδή, το συναρτησιακό πρόβλημα σε πρόβλημα ευρέσεως μεγίστου ή ελαχίστου συνάρτησης.

Μέθοδοι Προσέγγισης

Θα παρουσιάσουμε τρεις μεθόδους προσέγγισης:

- Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς του Euler
- Μέθοδος του Ritz
- Μέθοδος του Kantorovich

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler

Έχουμε να βρούμε την ακραία τιμή του συναρτησιακού

$$J(x) = \int_{\alpha}^{\beta} F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)dt$$

με τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases} x(\alpha) = \kappa_1 \\ x(\beta) = \kappa_2 \end{cases}$$

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler

Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε n ίσα μέρη, τον αριθμό των οποίων προσδιορίζουμε εμείς:

$$\begin{gathered} \alpha + \Delta t \\ \alpha + 2 \cdot \Delta t \\ \alpha + 3 \cdot \Delta t \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha + (n-2) \cdot \Delta t \\ \alpha + (n-1) \cdot \Delta t \end{gathered}$$

όπου

$$\Delta t = \frac{\beta - \alpha}{n}$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler

Στις πολυγωνικές αυτές καμπύλες που θεωρήσαμε, το συναρτησιακό

$$J(x) = \int_{\alpha}^{\beta} F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)dt$$

γίνεται συνάρτηση των ενδιάμεσων σημείων

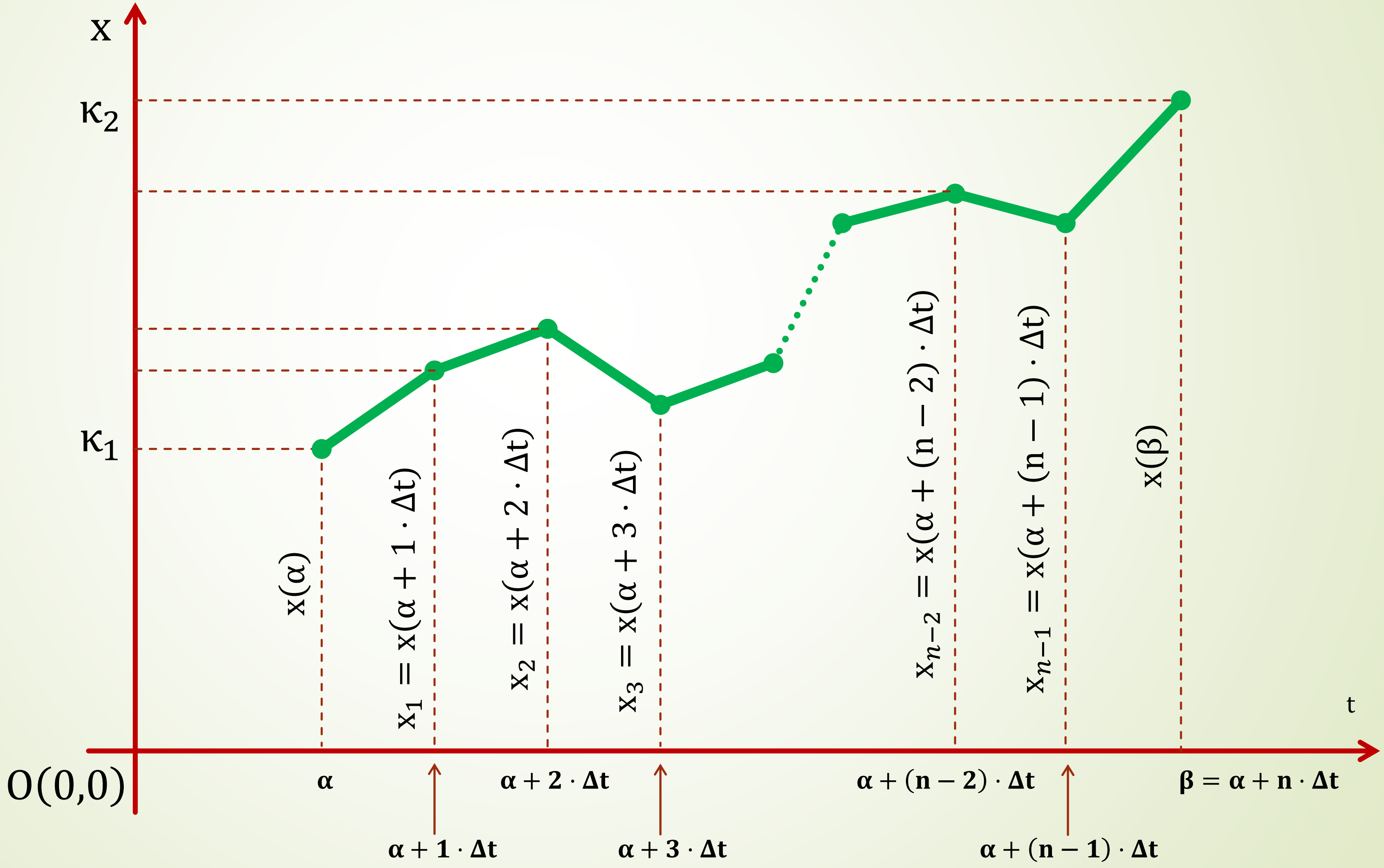
$$x_1 , \quad \ldots , \quad x_{n-1}$$

Δηλαδή, παίρνει την παρακάτω μορφή

$$J(x) = \Phi(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler



Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler

Εδώ να διευκρινίσουμε ότι τα ενδιάμεσα σημεία

$$x_1\,, \quad \dots\,, \quad x_{n-1}$$

εκλέγονται με τέτοιον τρόπο, ώστε η συνάρτηση

$$J(x) = \Phi(x_1, \dots, x_{n-1})$$

να μπορεί να λάβει άκρα τιμή (δηλαδή σχετικό μέγιστο ή ελάχιστο).

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= 0\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= 0\\ &\cdots\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}} &= 0\end{aligned}\right\}$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler

- Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε τα ενδιάμεσα σημεία μίας πολυγωνικής καμπύλης, άρα, κατόπιν, ενώνοντας τα σημεία αυτά, προσδιορίζουμε πλήρως την πολυγωνική καμπύλη.

- Η πολυγωνική αυτή καμπύλη που βρίσκουμε, δεν είναι τίποτα άλλο από μία **προσέγγιση** ακραίας καμπύλης του αρχικού προβλήματος.

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler

Παραδείγματα

1. $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2 + 2x\}dt\,, \qquad x(0) = 0 = x(1)\,, \qquad n = 5\,.$

$$\Delta t = \frac{\beta - \alpha}{5} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Έχουμε τις συνοριακές τιμές

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = 0 \\ x_5 &= x(1) = 0 \end{aligned}$$

καθώς και τις ενδιάμεσες τιμές

$$\begin{aligned} x_1 &= x(0 + 1 \cdot 0{,}2) = x(0{,}2) \\ x_2 &= x(0 + 2 \cdot 0{,}2) = x(0{,}4) \\ x_3 &= x(0 + 3 \cdot 0{,}2) = x(0{,}6) \\ x_4 &= x(0 + 4 \cdot 0{,}2) = x(0{,}8) \end{aligned}$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler

Παραδείγματα

1. $J(x)=\int_0^1\{\dot{x}^2+2x\}dt\,,\qquad x(0)=0=x(1)\,,\qquad n=5\,.$

Οι τιμές των παραγώγων

$$\dot{x}_i=\frac{\partial x_i}{\partial t}$$

στα σημεία $(0,x(0))$, $(0{,}2\,,\ x(0{,}2))$, $(0{,}4\,,\ x(0{,}4))$, $(0{,}6\,,\ x(0{,}6))$, $(0{,}8\,,\ x(0{,}8))$ προσεγγίζονται από το λόγο

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t}=\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler

Παραδείγματα

1. $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2 + 2x\}dt\,, \qquad x(0) = 0 = x(1)\,, \qquad n = 5\,.$

Άρα έχουμε τους παρακάτω λόγους

$$\dot{x}(0) = \frac{x_1 - 0}{0{,}2}$$

$$\dot{x}(0{,}2) = \frac{x_2 - x_1}{0{,}2}$$

$$\dot{x}(0{,}4) = \frac{x_3 - x_2}{0{,}2}$$

$$\dot{x}(0{,}6) = \frac{x_4 - x_3}{0{,}2}$$

$$\dot{x}(0{,}8) = \frac{x_5 - x_4}{0{,}2}$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler

Παραδείγματα

1. $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2 + 2x\}dt\,, \qquad x(0) = 0 = x(1)\,, \qquad n = 5\,.$

Και το συναρτησιακό προσεγγίζεται πλέον από τη συνάρτηση

$$J(x) = \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= \left(\underbrace{\left(\frac{x_1}{0{,}2}\right)^2}_{i=0} + \underbrace{\left(\frac{x_2 - x_1}{0{,}2}\right)^2 + 2x_1}_{i=1} + \underbrace{\left(\frac{x_3 - x_2}{0{,}2}\right)^2 + 2x_2}_{i=2} + \underbrace{\left(\frac{x_4 - x_3}{0{,}2}\right)^2 + 2x_3}_{i=3} + \underbrace{\left(\frac{x_4}{0{,}2}\right)^2 + 2x_4}_{i=4}\right) \cdot 0{,}2$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler

Παραδείγματα

1. $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2 + 2x\}dt$, $x(0) = 0 = x(1)$, $n = 5$.

Από το σύστημα παίρνουμε:

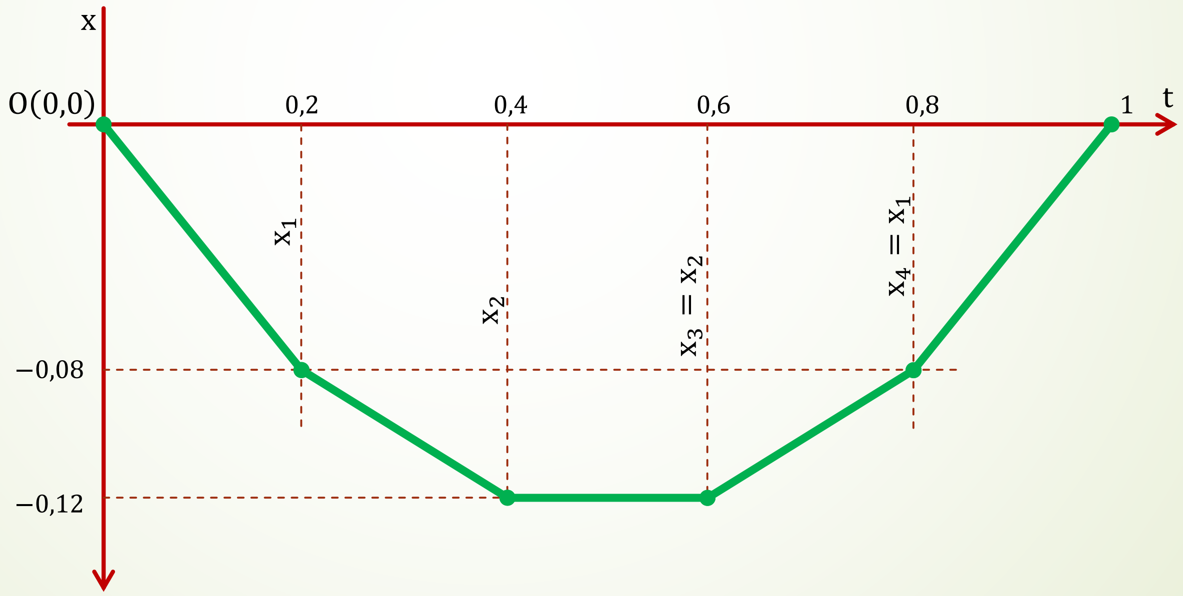
$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{0{,}2}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{1}{0{,}2}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{1}{0{,}2}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{1}{0{,}2}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_4} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{άρα} \left\{\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -0{,}04 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -0{,}04 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= -0{,}04 \\ -x_3 + 2x_4 &= -0{,}04 \end{aligned}\right\} \text{άρα} \left\{\begin{aligned} x_1 &= -0{,}08 \\ x_2 &= -0{,}12 \\ x_3 &= -0{,}12 \\ x_4 &= -0{,}08 \end{aligned}\right\}$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler

Παραδείγματα

1. $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2 + 2x\}dt\,,\qquad x(0) = 0 = x(1)\,,\qquad n = 5\,.$



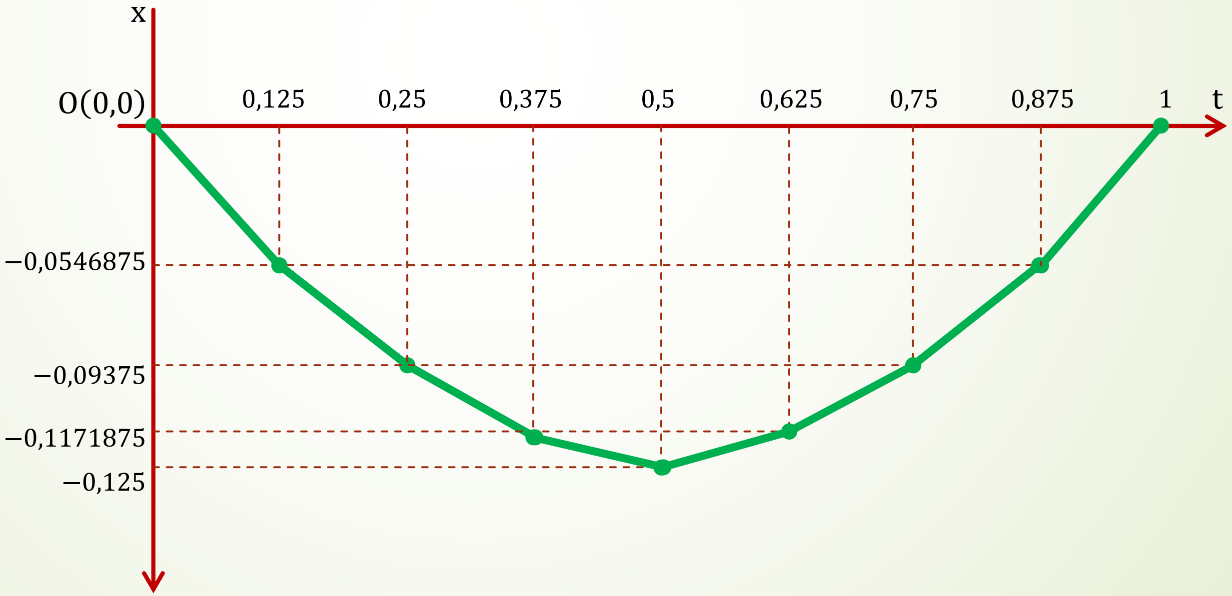
Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς Euler

Παραδείγματα

2. $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2 + 2x\} dt\,, \qquad x(0) = 0 = x(1)\,, \qquad n = 8\,.$

$$\Delta t = \frac{\beta - \alpha}{8} = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$



Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

Μία συνάρτηση της μορφής

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i(t)$$

Θα είναι ***παραδεκτή***, αν και μόνον αν οι συναρτήσεις $\varphi_i(t)$

- αποτελούν μία βάση του χώρου (είναι γραμμικά ανεξάρτητες και παράγουν το χώρο)
- πληρούν τις συνοριακές συνθήκες του συναρτησιακού προβλήματος
- πληρούν ορισμένες ιδιότητες που δίνονται από το πρόβλημα.

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

Στο άθροισμα

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i(t)$$

οι συναρτήσεις

$$\varphi_i(t)\,, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

ονομάζονται ***συνιστώσες συναρτήσεις***.

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

Πάνω στις παραδεκτές συναρτήσεις, δηλαδή πάνω στους γραμμικούς συνδυασμούς

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i(t)$$

το συναρτησιακό $J(x)$ γίνεται συνάρτηση των σταθερών

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

και έχουμε ότι

$$J(x_n) = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

Να σημειώσουμε εδώ, ότι οι σταθερές

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

εκλέγονται κατάλληλα ώστε η συνάρτηση

$$J(x_n) = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

να λαμβάνει σχετικό μέγιστο ή σχετικό ελάχιστο.

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} &= 0 \\ &\cdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

ΕΡΩΤΗΜΑ

Πώς εκλέγουμε τις κατάλληλες συνιστώσες συναρτήσεις κάθε φορά;

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i(t)$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

Ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος, μπορούμε να διακρίνουμε ***τρεις ειδικές περιπτώσεις*** για τη Μέθοδο του Ritz.

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

1. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = \kappa_1 \\ x(\beta) = \kappa_2 \end{cases}$ όπου $\kappa_1 \neq 0$ ή $\kappa_2 \neq 0$

2. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = \kappa_1 \\ x(\beta) = \kappa_2 \end{cases}$ όπου $\kappa_1 \neq 0$ ή $\kappa_2 \neq 0$ και $\kappa_1 \neq \kappa_2$

3. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = 0 \\ x(\beta) = 0 \end{cases}$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

1.

Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = \kappa_1 \\ x(\beta) = \kappa_2 \end{cases}$ όπου $\kappa_1 \neq 0$ ή $\kappa_2 \neq 0$

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i(t) + \varphi_0(t)$$

$\begin{cases} \varphi_0(\alpha) = \kappa_1 \\ \varphi_0(\beta) = \kappa_2 \end{cases}$ και $\begin{cases} \varphi_i(\alpha) = 0 \\ \varphi_i(\beta) = 0 \end{cases}$ $i = 1,2,\dots,n.$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

1. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = \kappa_1 \\ x(\beta) = \kappa_2 \end{cases}$ όπου $\kappa_1 \neq 0$ ή $\kappa_2 \neq 0$

2. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = \kappa_1 \\ x(\beta) = \kappa_2 \end{cases}$ όπου $\kappa_1 \neq 0$ ή $\kappa_2 \neq 0$ και $\kappa_1 \neq \kappa_2$

3. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = 0 \\ x(\beta) = 0 \end{cases}$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

2. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = \kappa_1 \\ x(\beta) = \kappa_2 \end{cases}$ όπου $\kappa_1 \neq 0$ ή $\kappa_2 \neq 0$ και $\kappa_1 \neq \kappa_2$

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i(t) + \varphi_0(t)$$

$$\varphi_0(t) = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\beta - \alpha}(t - \alpha) + \kappa_1 \quad \text{και} \quad \begin{cases} \varphi_i(\alpha) = 0 \\ \varphi_i(\beta) = 0 \end{cases} \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

1. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = \kappa_1 \\ x(\beta) = \kappa_2 \end{cases}$ όπου $\kappa_1 \neq 0$ ή $\kappa_2 \neq 0$

2. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = \kappa_1 \\ x(\beta) = \kappa_2 \end{cases}$ όπου $\kappa_1 \neq 0$ ή $\kappa_2 \neq 0$ και $\kappa_1 \neq \kappa_2$

3. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = 0 \\ x(\beta) = 0 \end{cases}$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i(t)$$

$$\varphi_i(t) = (t-\alpha)(t-\beta)\psi_i(t) \qquad \text{ή} \qquad \varphi_i(t) = \eta\mu\left(\frac{i\pi(t-\alpha)}{\beta-\alpha}\right)$$

$$i = 1,2,\ldots,n.$$

3. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = 0 \\ x(\beta) = 0 \end{cases}$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

1. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = \kappa_1 \\ x(\beta) = \kappa_2 \end{cases}$ όπου $\kappa_1 \neq 0$ ή $\kappa_2 \neq 0$

2. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = \kappa_1 \\ x(\beta) = \kappa_2 \end{cases}$ όπου $\kappa_1 \neq 0$ ή $\kappa_2 \neq 0$ και $\kappa_1 \neq \kappa_2$

3. Συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} x(\alpha) = 0 \\ x(\beta) = 0 \end{cases}$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

Παράδειγμα $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - x^2(t) + 2 \cdot t \cdot x(t)\}dt$, $x(0) = 0 = x(1)$.

Βρισκόμαστε στην 3η περίπτωση (μηδενικές συνοριακές συνθήκες)

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

Παράδειγμα $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - x^2(t) + 2 \cdot t \cdot x(t)\} dt$, $x(0) = 0 = x(1).$

Μπορούμε να εκλέξουμε το σύστημα συνιστωσών συναρτήσεων

$$\varphi_i(t) = (1 - t) \cdot t^i , \qquad i = 1,2, \ldots$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

Παράδειγμα $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - x^2(t) + 2 \cdot t \cdot x(t)\}dt$, $x(0) = 0 = x(1).$

Θέτουμε $n = 1$ στο άθροισμα

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i(t)$$

και έχουμε

$$\tilde{x}(t) = \alpha_1 \cdot \varphi_1(t) = \alpha_1 \cdot \varphi_1(t)$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

Παράδειγμα $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - x^2(t) + 2 \cdot t \cdot x(t)\} dt \,, \quad x(0) = 0 = x(1).$

Αντικαθιστούμε στο συναρτησιακό και παίρνουμε

$$J(\tilde{x}) = \int_0^1 \{\dot{\tilde{x}}^2(t) - \tilde{x}^2(t) + 2 \cdot t \cdot \tilde{x}(t)\} dt = \frac{3}{10}\alpha_1^2 + \frac{\alpha_1}{6}$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

Παράδειγμα $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - x^2(t) + 2 \cdot t \cdot x(t)\}dt$, $x(0) = 0 = x(1).$

Η σταθερά α_1 μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = 0$$

απ' όπου λαμβάνουμε

$$\alpha_1 = -\frac{5}{18}$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

Παράδειγμα $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - x^2(t) + 2 \cdot t \cdot x(t)\} dt$, $x(0) = 0 = x(1)$.

Άρα, μία προσέγγιση της ακραίας καμπύλης είναι η εξής

$$\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{18}}\mathbf{t} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{18}}\mathbf{t}^2 , \qquad \mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

Παράδειγμα $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - x^2(t) + 2 \cdot t \cdot x(t)\}dt$, $x(0) = 0 = x(1).$

Αν εκλέγαμε το σύστημα συνιστωσών συναρτήσεων

$$\varphi_i(t) = \eta\mu\left(\frac{i\pi(t-0)}{1-0}\right) = \eta\mu(i\pi t)\,, \qquad i = 1,2,\dots$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Ritz

Παράδειγμα $J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - x^2(t) + 2 \cdot t \cdot x(t)\}dt$, $x(0) = 0 = x(1).$

Θα καταλήγαμε στην παρακάτω προσέγγιση

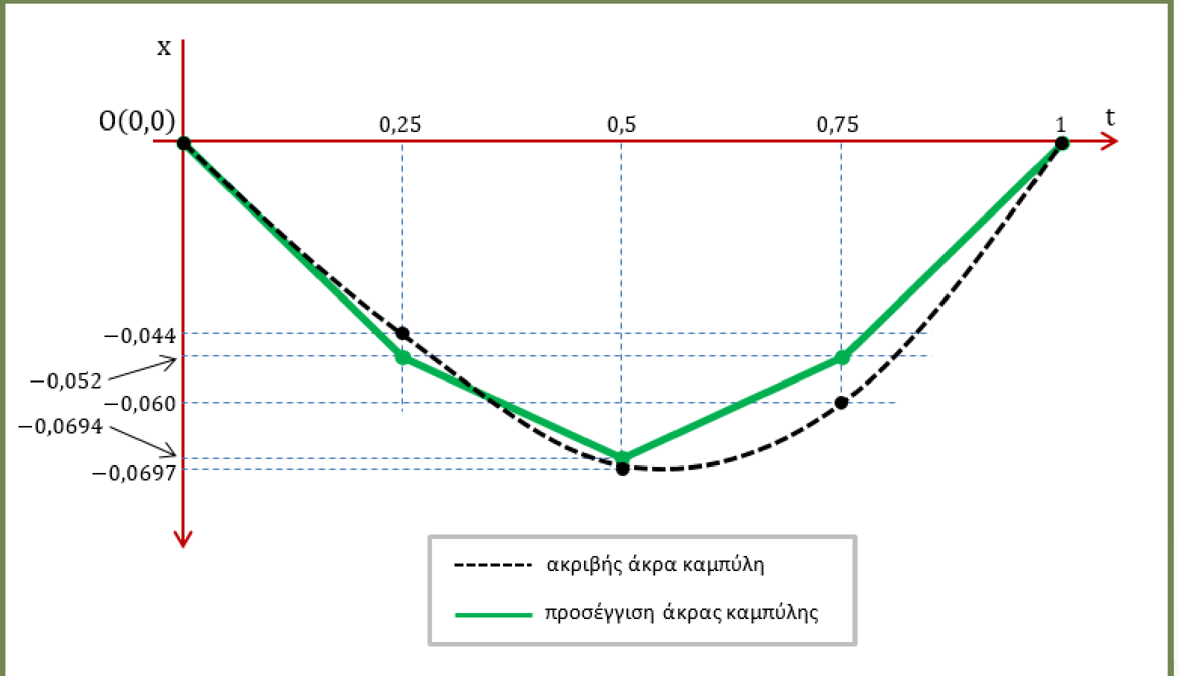
$$\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \left(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}^2)}\right) \cdot \boldsymbol{\eta\mu}(\boldsymbol{\pi}\mathbf{t}) , \qquad \mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

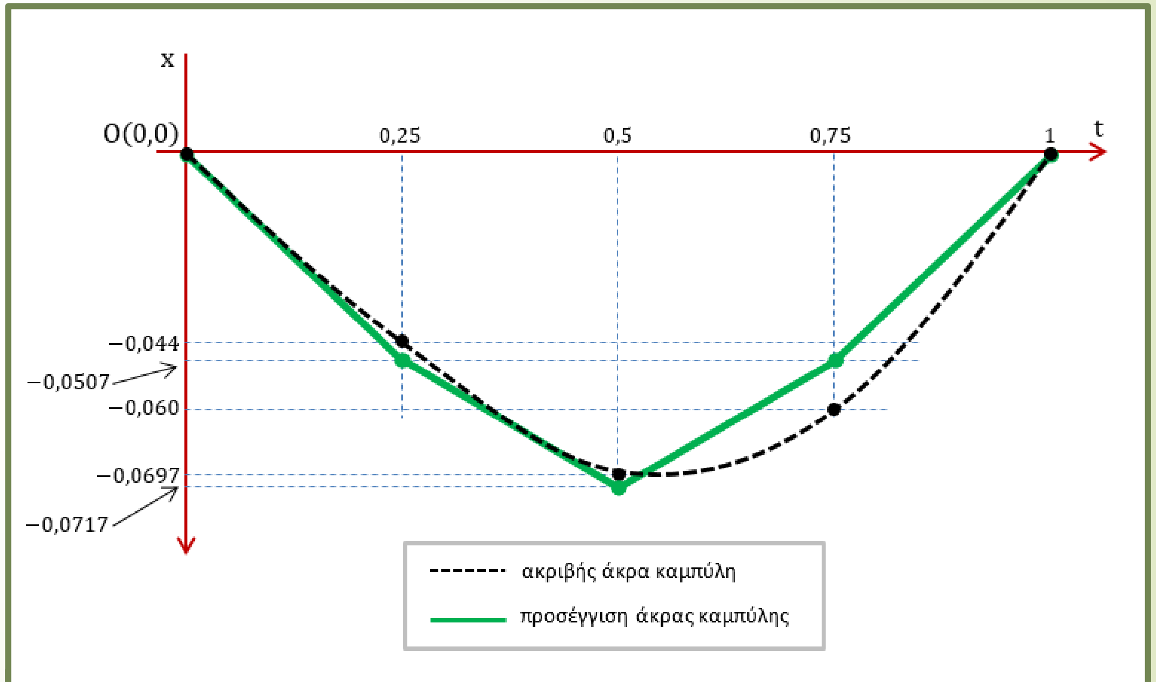
Μέθοδος του Ritz

Παράδειγμα

$$J(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - x^2(t) + 2 \cdot t \cdot x(t)\}dt \ , \quad x(0) = 0 = x(1).$$



$$\tilde{x}(t) = -\frac{5}{18}t + \frac{5}{18}t^2 \ , \qquad t \in [0,1]$$



$$\tilde{x}(t) = \left(\frac{2}{\pi(1-\pi^2)}\right) \cdot \eta\mu(\pi t) \ , \qquad t \in [0,1]$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Kantorovich

Με τη μέθοδο αυτή επιδιώκουμε να προσεγγίσουμε τις ***ακραίες επιφάνειες*** του συναρτησιακού $J(z)$

όπου $z = z(t_1, \ldots, t_n), \; n \geq 2.$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Kantorovich

$$z_m(t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=1}^{m} u_k(t_i) \cdot \varphi_k(t_1, \dots, t_n)$$

Αντί να έχουμε τις σταθερές

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n$$

έχουμε τις <u>συναρτήσεις</u>

$$u_1(t_i), \dots, u_n(t_i)$$

κάποιας μεταβλητής t_i από τις ανεξάρτητες μεταβλητές $t_1, \dots, t_n$.

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Kantorovich

Καταλήγουμε το συναρτησιακό να εξαρτάται μόνο από τις m συναρτήσεις κάποιας μεταβλητής t_i από τις ανεξάρτητες μεταβλητές $t_1, \dots, t_n$, δηλαδή

$$\mathbf{J(z_m) = J_1(u_1, \dots, u_m)}$$

ή, πιο αναλυτικά

$$\mathbf{J\big(z_m(t_1, \dots, t_n)\big) = J_1\big(u_1(t_i), \dots, u_m(t_i)\big)}$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Kantorovich

Οι συναρτήσεις αυτές, εκλέγονται έτσι ώστε το συναρτησιακό

$$J_1(u_1, \ldots, u_m)$$

να λαμβάνει σχετικό μέγιστο ή σχετικό ελάχιστο.

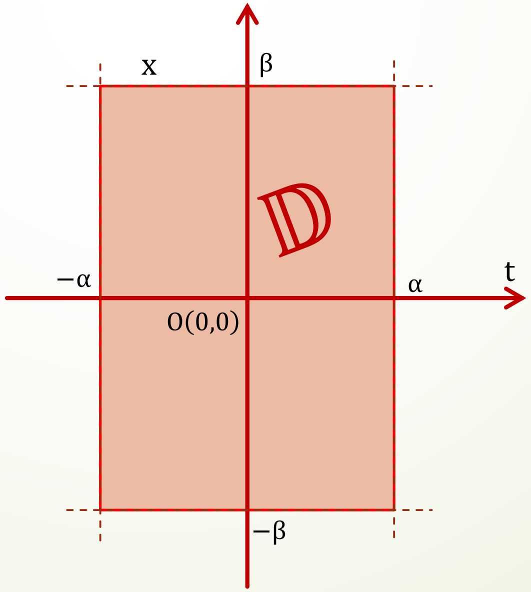
Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Kantorovich

Παράδειγμα

$$J(z) = \iint\limits_{\mathbb{D}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2z\right] dtdx\,, \quad \mathbb{D} = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \middle/ -\alpha \le t \le \alpha\,, \quad -\beta \le x \le \beta\right\}$$

και $\quad z = 0 \quad \text{στο} \quad \partial\mathbb{D}.$



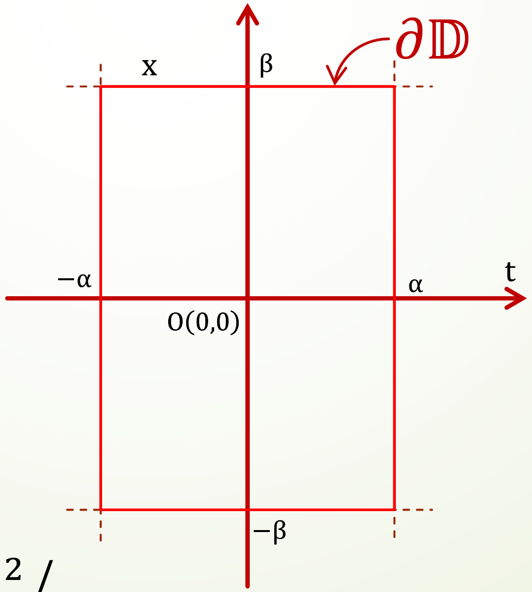
Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Kantorovich

Παράδειγμα

$$J(z) = \iint\limits_{\mathbb{D}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2z \right] dtdx \,, \quad \mathbb{D} = \left\{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 \big/ -\alpha \le t \le \alpha \,, \quad -\beta \le x \le \beta \right\}$$

και $z = 0$ στο $\partial\mathbb{D}$.



$$\partial\mathbb{D} = \left\{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 \big/ t = \alpha \,, \ t = -\alpha \,, \ x = \beta \,, \ x = -\beta \right\}$$

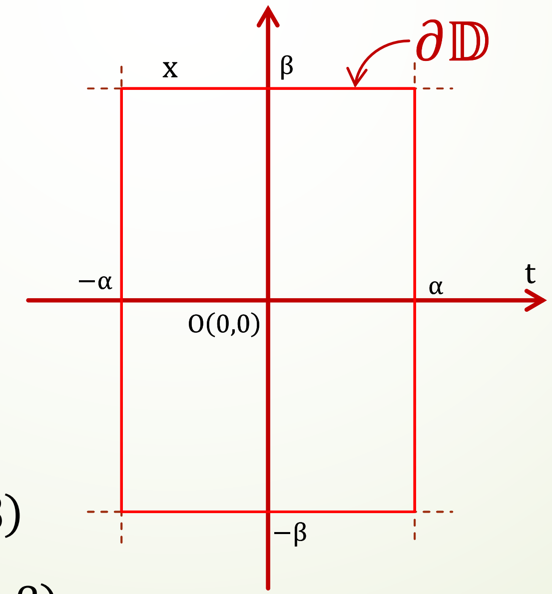
Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Kantorovich

Παράδειγμα

$$J(z)=\iint_{\mathbb{D}}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\right]dtdx\,,\ \mathbb{D}=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2\big/-\alpha\le t\le\alpha\,,\ \ -\beta\le x\le\beta\right\}$$

και $z=0$ στο $\partial\mathbb{D}$.



Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι

$$z(\alpha,\beta)=0=z(-\alpha,\beta)$$

$$z(\alpha,-\beta)=0=z(-\alpha,-\beta)$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Kantorovich

Παράδειγμα

$$J(z) = \iint\limits_{\mathbb{D}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 2z \right] dtdx \,, \ \mathbb{D} = \left\{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 \big/ -\alpha \le t \le \alpha \,, \ \ -\beta \le x \le \beta \right\}$$

και $z = 0$ στο $\partial\mathbb{D}$.

Εκλέγουμε ως συνιστώσα συνάρτηση τη

$$\varphi_1(t,x) = (\beta^2 - x^2)$$

η οποία επαληθεύει τη συνοριακή συνθήκη πάνω στις ευθείες $x = \pm\beta$, γιατί

$$\begin{cases} \varphi_1(t,\beta) = (\beta^2 - \beta^2) = 0 \\ \varphi_1(t,-\beta) = (\beta^2 - (-\beta)^2) = 0 \end{cases}$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Kantorovich

Παράδειγμα

$$J(z) = \iint_{\mathbb{D}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2z \right] dtdx\,, \ \mathbb{D} = \left\{ {(t,x) \in \mathbb{R}^2} \middle/ {-\alpha \le t \le \alpha\,, \ \ -\beta \le x \le \beta} \right\}$$

και $z = 0$ στο $\partial\mathbb{D}$.

Η προσέγγιση που αναζητούμε, είναι της μορφής

$$z_1(t,x) = (\beta^2 - x^2) \cdot u_1(t)$$

με

$$u_1(-\alpha) = 0 = u_1(\alpha).$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Kantorovich

Παράδειγμα

$$J(z)=\iint_{\mathbb{D}}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\right]dtdx\,,\ \mathbb{D}=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2\big/-\alpha\le t\le\alpha\,,\ \ -\beta\le x\le\beta\right\}$$

και $z=0$ στο $\partial\mathbb{D}$.

$$J(z_1)=\iint_{\mathbb{D}}\left[\left(\frac{\partial z_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2-2z_1\right]dtdx=$$

$$=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\underbrace{\frac{16}{15}\beta^5{u_1'}^2(t)+\frac{8}{3}\beta^3u_1^2(t)-\frac{8}{3}\beta^3u_1(t)}_{F(t,u_1,u_1')}\right)dt=J_1(u_1)$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Kantorovich

Παράδειγμα

$$J(z) = \iint_{\mathbb{D}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2z \right] dtdx\,, \quad \mathbb{D} = \left\{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 \middle/ -\alpha \le t \le \alpha\,, \quad -\beta \le x \le \beta \right\}$$

και $z = 0$ στο $\partial\mathbb{D}$.

Από τη διαφορική εξίσωση Euler – Lagrange για το συναρτησιακό $J_1(u_1)$, λαμβάνουμε

$$u_1''(t) = \frac{5}{2\beta^2} u_1(t) - \frac{5}{4\beta^2}$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Kantorovich

Παράδειγμα

$$J(z) = \iint_{\mathbb{D}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2z \right] dtdx\,, \quad \mathbb{D} = \left\{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 \big/ -\alpha \le t \le \alpha\,, \quad -\beta \le x \le \beta \right\}$$

και $z = 0$ στο $\partial\mathbb{D}$.

η γενική λύση της ανωτέρω διαφορικής εξίσωσης είναι

$$u_1(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{t}{\beta}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}\right), \qquad t \in [-\alpha, \alpha]$$

Μέθοδοι Προσέγγισης

Μέθοδος του Kantorovich

Παράδειγμα

$$J(z)=\iint_{\mathbb{D}}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\right]dtdx\,,\quad \mathbb{D}=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2\Big/-\alpha\le t\le\alpha\,,\quad -\beta\le x\le\beta\right\}$$

και $z=0$ στο $\partial\mathbb{D}$.

και, τελικά, η προσέγγιση της ακραίας επιφάνειας του προβλήματος είναι η

$$z_1(t,x)=\frac{1}{2}(\beta^2-x^2)\left(1-\frac{\cosh\left(\frac{t}{\beta}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}\right),\qquad (t,x)\in\mathbb{D}$$

Παρουσίαση Προγραμμάτων

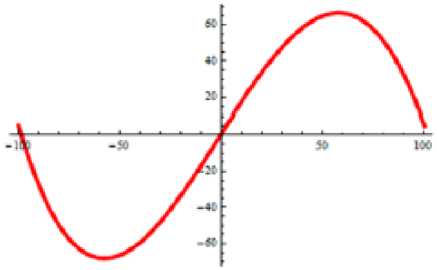
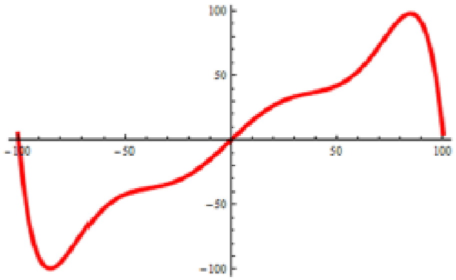
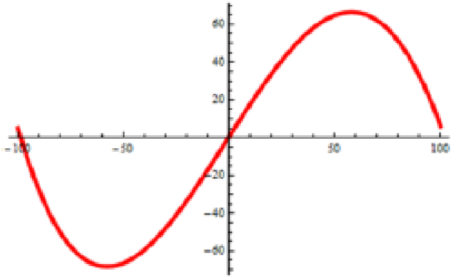
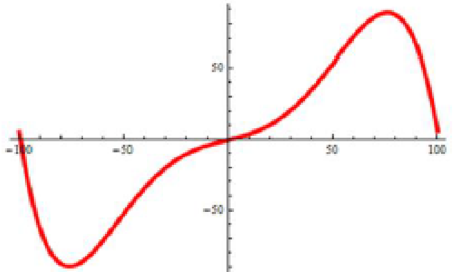
Παρουσίαση Προγραμμάτων

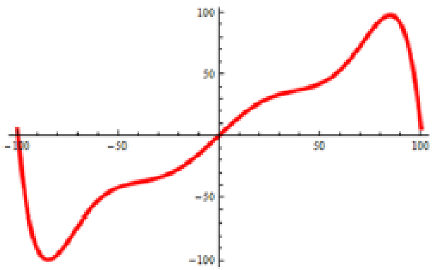
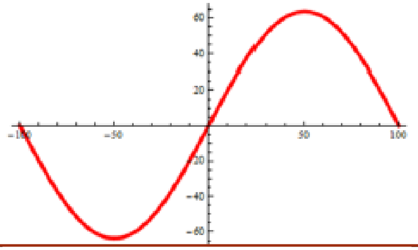
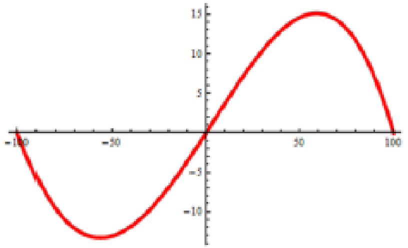
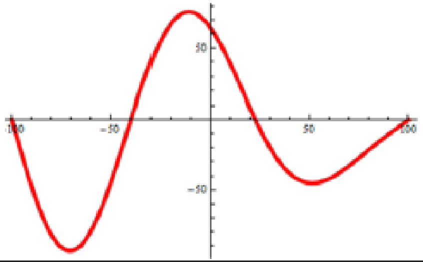
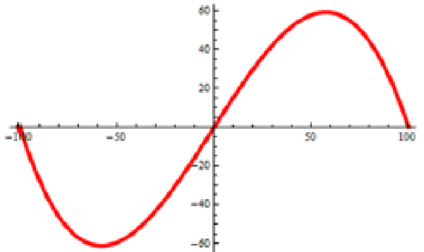
Καθώς βάζουμε διάφορες τιμές στο n του αθροίσματος

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t)$$

της μεθόδου του Ritz, παίρνουμε και διαφορετικές προσεγγίσεις, οι οποίες, όμως, πάντα ανήκουν στο ίδιο πλαίσιο.

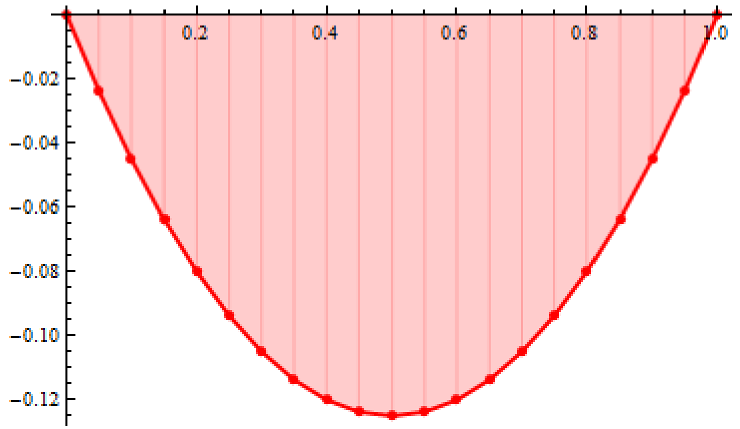
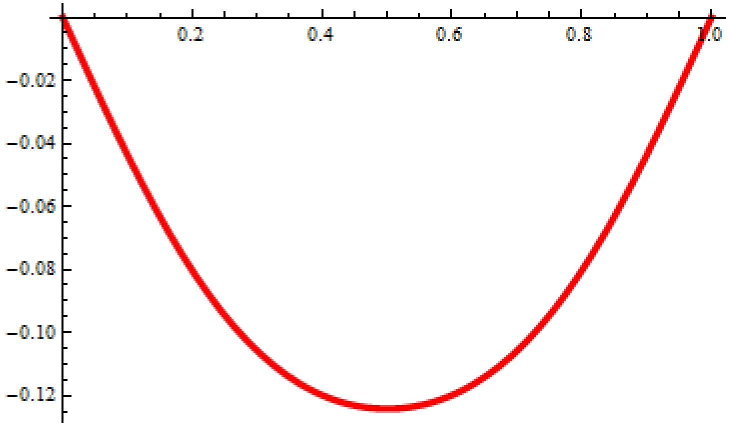
Παρακάτω δίνεται ένας συγκριτικός πίνακας:

ΕΙΣΟΔΟΣ	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ	ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
n = 3 xarxi = 5 xtelos = 5	**1**	$\varphi_1(t) = (t-100)(t+100)$ $\varphi_2(t) = (t-100)(t+100)^2$ $\varphi_3(t) = (t-100)(t+100)^3$ $\varphi_0(t) = (t-100)(t+100)+5$	
n = 7 xarxi = 5 xtelos = 5	**1**	$\varphi_1(t) = (t-100)(t+100)$ $\varphi_2(t) = (t-100)(t+100)^2$ $\varphi_3(t) = (t-100)(t+100)^3$ $\varphi_4(t) = (t-100)(t+100)^4$ $\varphi_5(t) = (t-100)(t+100)^5$ $\varphi_6(t) = (t-100)(t+100)^6$ $\varphi_7(t) = (t-100)(t+100)^7$ $\varphi_0(t) = (t-100)(t+100)+5$	
n = 3 xarxi = 5 xtelos = 6	**2**	$\varphi_1(t) = (t-100)(t+100)$ $\varphi_2(t) = (t-100)(t+100)^2$ $\varphi_3(t) = (t-100)(t+100)^3$	
n = 5 xarxi = 5 xtelos = 6	**2**	$\varphi_1(t) = (t-100)(t+100)$ $\varphi_2(t) = (t-100)(t+100)^2$ $\varphi_3(t) = (t-100)(t+100)^3$ $\varphi_4(t) = (t-100)(t+100)^4$ $\varphi_5(t) = (t-100)(t+100)^5$	

ΕΙΣΟΔΟΣ	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ	ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
n = 7 xarxi = 5 xtelos = 6	**2**	$\varphi_1(t) = (t-100)(t+100)$ $\varphi_2(t) = (t-100)(t+100)^2$ ... $\varphi_7(t) = (t-100)(t+100)^7$	
n = 3 xarxi = 0 xtelos = 0	**3**	Αυτόματα, με χρήση κατάλληλης ημιτονοειδούς συνάρτησης	
		$\varphi_1(t) = (t-100)(t+100)t$ $\varphi_2(t) = (t-100)(t+100)t^2$ $\varphi_3(t) = (t-100)(t+100)t^3$	
n = 5 xarxi = 0 xtelos = 0	**3**	Αυτόματα, με χρήση κατάλληλης ημιτονοειδούς συνάρτησης	
		$\varphi_1(t) = (t-100)(t+100)t$ $\varphi_2(t) = (t-100)(t+100)t^2$ $\varphi_3(t) = (t-100)(t+100)t^3$ $\varphi_4(t) = (t-100)(t+100)t^4$ $\varphi_5(t) = (t-100)(t+100)t^5$	

Παρουσίαση Προγραμμάτων

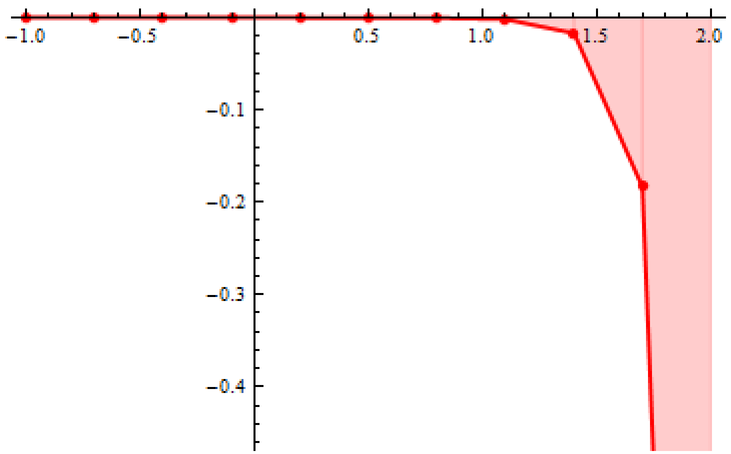
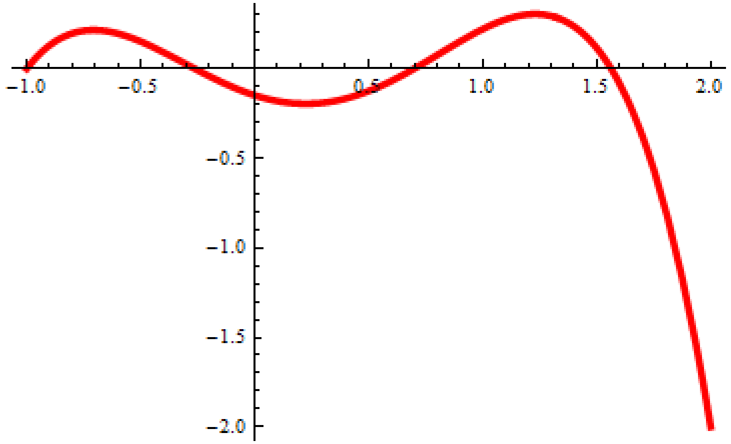
$$\int_0^1 (2x(t) + x'(t)^2)dt \ , \qquad x(0) = 0 = x(1)$$

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς του Euler	Μέθοδος του Ritz
	

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Παρουσίαση Προγραμμάτων

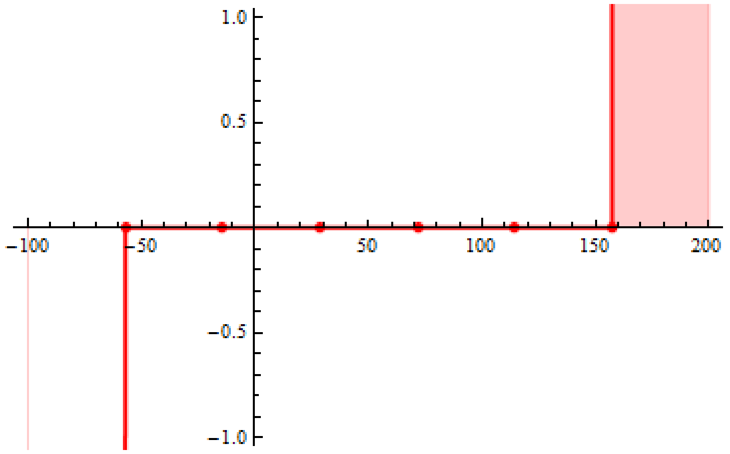
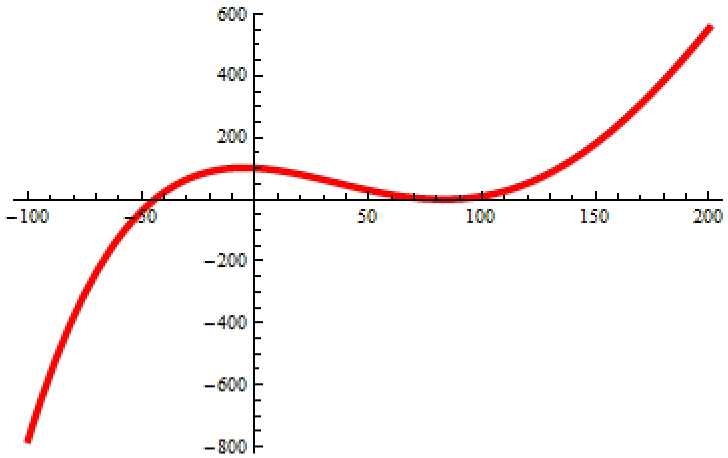
$$\int_{-1}^{2}\left(5x^2(t)-\frac{1}{3}x(t)x'(t)\right)dt\ , \qquad x(-1)=0 \quad \text{και} \quad x(2)=-2$$

Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς του Euler	Μέθοδος του Ritz
	

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Παρουσίαση Προγραμμάτων

$$\int_{-100}^{200} \left(2 \cdot t \cdot x(t) - x^2(t)\right) dt \,, \qquad x(-100) = -777 \quad \text{και} \quad x(200) = 555$$

<table>
<tr><th>Μέθοδος Πεπερασμένης Διαφοράς του Euler</th><th>Μέθοδος του Ritz</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Ευχαριστώ Πολύ!