

Ανασκόπηση της Παραμετρικής Προσέγγισης στον Εύρωστο Έλεγχο

Πετρούλα Τσαμπούκα

Κλασικός έλεγχος vs Παραμετρικός έλεγχος

Κλασικός έλεγχος

Η αβεβαιότητα εμφανίζεται στην
μοντελοποίηση, διαταραχές, σφάλματα μέτρησης σήματος εξόδου
(σφάλμα παρακολούθησης)

Κλασικός έλεγχος vs Παραμετρικός έλεγχος

Κλασικός έλεγχος

Συνάρτηση μεταφοράς αμετάβλητη κατά τη διάρκεια λειτουργίας και σαφώς καθορισμένη

Η αβεβαιότητα εμφανίζεται στην μοντελοποίηση, διαταραχές, σφάλματα μέτρησης σήματος εξόδου (σφάλμα παρακολούθησης)

Κλασικός έλεγχος vs Παραμετρικός έλεγχος

Κλασικός έλεγχος

Συνάρτηση μεταφοράς αμετάβλητη κατά τη διάρκεια λειτουργίας και σαφώς καθορισμένη

Παραμετρικός έλεγχος

Η αβεβαιότητα εμφανίζεται στην μοντελοποίηση, διαταραχές, σφάλματα μέτρησης σήματος εξόδου (σφάλμα παρακολούθησης)

Κλασικός έλεγχος vs Παραμετρικός έλεγχος

Κλασικός έλεγχος

Συνάρτηση μεταφοράς αμετάβλητη κατά τη διάρκεια λειτουργίας και σαφώς καθορισμένη

Παραμετρικός έλεγχος

Όταν υπεισέρχεται αβεβαιότητα στην περιγραφή του συστήματος

Η αβεβαιότητα εμφανίζεται στην μοντελοποίηση, διαταραχές, σφάλματα μέτρησης σήματος εξόδου (σφάλμα παρακολούθησης)

Κλασικός έλεγχος vs Παραμετρικός έλεγχος

Κλασικός έλεγχος

Συνάρτηση μεταφοράς αμετάβλητη κατά τη διάρκεια λειτουργίας και σαφώς καθορισμένη

Παραμετρικός έλεγχος

Όταν υπεισέρχεται αβεβαιότητα στην περιγραφή του συστήματος

Πηγές αβεβαιότητας

- φθορά
- καταπόνηση
- μεταβλητές συνθήκες λειτουργίας
- επίδραση του περιβάλλοντος (διαταραχές)

Η αβεβαιότητα εμφανίζεται στην μοντελοποίηση, διαταραχές, σφάλματα μέτρησης σήματος εξόδου (σφάλμα παρακολούθησης)

Κλασικός έλεγχος vs Παραμετρικός έλεγχος

Κλασικός έλεγχος

Συνάρτηση μεταφοράς αμετάβλητη κατά τη διάρκεια λειτουργίας και σαφώς καθορισμένη

Παραμετρικός έλεγχος

Όταν υπεισέρχεται αβεβαιότητα στην περιγραφή του συστήματος

Πηγές αβεβαιότητας

- φθορά
- καταπόνηση
- μεταβλητές συνθήκες λειτουργίας
- επίδραση του περιβάλλοντος (διαταραχές)

Η αβεβαιότητα εμφανίζεται στην

μοντελοποίηση, διαταραχές, σφάλματα μέτρησης σήματος εξόδου (σφάλμα παρακολούθησης)

Κλασικός έλεγχος vs Παραμετρικός έλεγχος

Κλασικός έλεγχος

Συνάρτηση μεταφοράς αμετάβλητη κατά τη διάρκεια λειτουργίας και σαφώς καθορισμένη

Παραμετρικός έλεγχος

Όταν υπεισέρχεται αβεβαιότητα στην περιγραφή του συστήματος

Πηγές αβεβαιότητας

- φθορά
- καταπόνηση
- μεταβλητές συνθήκες λειτουργίας
- επίδραση του περιβάλλοντος (διαταραχές)

Η αβεβαιότητα εμφανίζεται στην

μοντελοποίηση, διαταραχές, σφάλματα μέτρησης σήματος εξόδου (σφάλμα παρακολούθησης)

Κλασικός έλεγχος vs Παραμετρικός έλεγχος

Κλασικός έλεγχος

Συνάρτηση μεταφοράς αμετάβλητη κατά τη διάρκεια λειτουργίας και σαφώς καθορισμένη

Παραμετρικός έλεγχος

Όταν υπεισέρχεται αβεβαιότητα στην περιγραφή του συστήματος

Πηγές αβεβαιότητας

- φθορά
- καταπόνηση
- μεταβλητές συνθήκες λειτουργίας
- επίδραση του περιβάλλοντος (διαταραχές)

Η αβεβαιότητα εμφανίζεται στην

μοντελοποίηση, διαταραχές, σφάλματα μέτρησης σήματος εξόδου (σφάλμα παρακολούθησης)

Κλασικός έλεγχος vs Παραμετρικός έλεγχος

Κλασικός έλεγχος

Συνάρτηση μεταφοράς αμετάβλητη κατά τη διάρκεια λειτουργίας και σαφώς καθορισμένη

Παραμετρικός έλεγχος

Όταν υπεισέρχεται αβεβαιότητα στην περιγραφή του συστήματος

Πηγές αβεβαιότητας

- φθορά
- καταπόνηση
- μεταβλητές συνθήκες λειτουργίας
- επίδραση του περιβάλλοντος (διαταραχές)

Η αβεβαιότητα εμφανίζεται στην **μοντελοποίηση**, **διαταραχές**, **σφάλματα μέτρησης σήματος εξόδου** (σφάλμα παρακολούθησης)

Ζητούμενο ενός ελεγκτή \rightarrow σταθεροποίηση του συστήματος
Είναι εφικτή σε περιβάλλον αβεβαιότητας ;

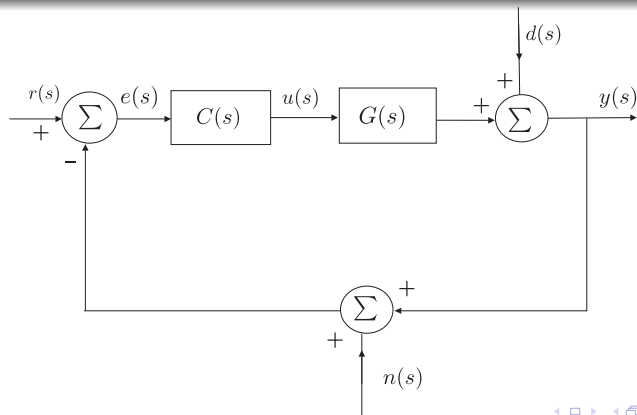
Αν το σύστημα είναι ευσταθές για διάφορες κλάσεις αβεβαιότητας τότε έχει **εύρωστη** ευστάθεια.

Ζητούμενο του κλασικού ελέγχου \rightarrow το μέτρο του σφάλματος παρακολούθησης φραγμένο με το χρόνο (επίδοση του συστήματος)

Αν η χειρότερη επίδοση είναι φραγμένη για διάφορες κλάσεις αβεβαιότητας τότε το σύστημα έχει **εύρωστη** επίδοση.

Ζητούμενο του κλασικού ελέγχου \rightarrow το μέτρο του σφάλματος παρακολούθησης φραγμένο με το χρόνο (επίδοση του συστήματος)

Αν η χειρότερη επίδοση είναι φραγμένη για διάφορες κλάσεις αβεβαιότητας τότε το σύστημα έχει **εύρωστη** επίδοση.



Ζητούμενο του κλασικού ελέγχου \rightarrow το μέτρο του σφάλματος παρακολούθησης φραγμένο με το χρόνο (επίδοση του συστήματος)

Αν η χειρότερη επίδοση είναι φραγμένη για διάφορες κλάσεις αβεβαιότητας τότε το σύστημα έχει **εύρωστη** επίδοση.

Αβεβαιότητα στο $d(s)$, $r(s)$ και $n(s)$

$$S(s) = \frac{1}{1+G(s)C(s)} \text{ ευαισθησία}$$

$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} \text{ συμπληρωματική ευαισθησία}$$

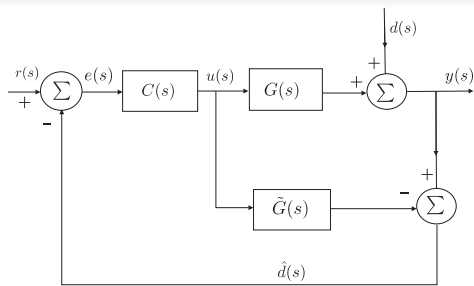
$$S(s) + T(s) = 1$$

$$e(s) = -S \underbrace{d}_{[0, \omega_0]} + S \underbrace{r}_{[0, \omega_0]} + T \underbrace{n}_{[\omega_1, \omega_2]}$$

d και r συναρτήσεις βηματικές ή ράμπας με **άγνωστα πλάτη ή κλίσεις**

Μηδενισμός του σφάλματος σταθερής κατάστασης με **ολοκληρωτική δράση**

Αβεβαιότητα στο μοντέλο



Αρχή του Εσωτερικού Μοντέλου

$$y(s) = \frac{C(s)G(s)r(s) + [1 - C(s)\tilde{G}(s)] d(s)}{1 + [G(s) - \tilde{G}(s)] C(s)}$$

Μηδενισμός του σφάλματος παρακολούθησης **ΑΝ** $G(s) = \tilde{G}(s)$ και $C(s) = \tilde{G}(s)^{-1}$

Αρκεί $C(s) = \tilde{G}(s)^{-1}$ για απόρριψη των διαταραχών

Είδη αβεβαιότητας

Παραμετρική Αβεβαιότητα

Οφείλεται:

- έλλειψη ακριβούς περιγραφής του προς έλεγχο συστήματος
- μεταβολή του σημείου λειτουργίας

Η συνάρτηση μεταφοράς διατηρεί τη μορφή της και το σύστημα την τάξη του

Αποτέλεσμα της παραμετρικής αβεβαιότητας:

Διακυμάνσεις των συντελεστών (αβεβαιότητα στη θέση πόλων και μηδενικών)

Είδη αβεβαιότητας

Παραμετρική Αβεβαιότητα

Οφείλεται:

- έλλειψη ακριβούς περιγραφής του προς έλεγχο συστήματος
- μεταβολή του σημείου λειτουργίας

Η συνάρτηση μεταφοράς διατηρεί τη μορφή της και το σύστημα την τάξη του

Αποτέλεσμα της παραμετρικής αβεβαιότητας:

Διακυμάνσεις των συντελεστών (αβεβαιότητα στη θέση πόλων και μηδενικών)

Μη Δομημένη Αβεβαιότητα

Οφείλεται:

- απλοποιητικές παραδοχές για τους νόμους που διέπουν το σύστημα
- γραμμικοποιήσεις
- απουσία όρων ανώτερης τάξης

Δεν εμφανίζεται σαν μεταβολή κάποιων παραμέτρων

Αποτέλεσμα της μη δομημένης αβεβαιότητας:

Διαταραχή $\Delta G(s)$ της συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$

$G(s) + \Delta G(s)$ είτε $G(s)(1 + \Delta G(s))$

Οικογένεια πολυωνύμων $P(\lambda, s)$ βαθμού n με $\lambda \in [a, b]$

Διαμερισμός του επιπέδου \mathbb{C}

$$\mathcal{S} \cup \vartheta \mathcal{S} \cup \mathcal{U}^o$$

$$\mathcal{U} = \mathbb{C} - \mathcal{S}$$

Θεώρημα Διάσχισης του Σύνόρου

Με δεδομένο ότι τα πολυώνυμα $P(\lambda, s)$ διατηρούν το βαθμό τους, αν $P(a, s)$ έχει όλες τις ρίζες του στο \mathcal{S} ενώ το $P(b, s)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο \mathcal{U} τότε υπάρχει $\lambda \in (a, b]$ τέτοιο ώστε:

- α) $P(\lambda, s)$ έχει όλες τις ρίζες του στο $\mathcal{S} \cup \vartheta \mathcal{S}$ και
- β) $P(\lambda, s)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\vartheta \mathcal{S}$.

Παράδειγμα

Έστω οικογένεια πολυωνύμων $a_1s + a_0$ που παραμετροποιείται από το $\mathbf{p} = [a_0 \ a_1]$

- \mathcal{S} : ανοιχτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο (περιοχής ευστάθειας)
- \mathcal{U}° : ανοιχτό δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο (περιοχής αστάθειας)
- $\partial\mathcal{S}$: φανταστικός άξονας (σύνορο περιοχής ευστάθειας)

Διαδρομή \mathcal{C}_1 : Αρχή \mathbf{p}_0 στο $\mathcal{S} \xrightarrow{a_1=0}$ Τέλος \mathbf{p}_1 στο \mathcal{U}

Συμπέρασμα:

Τα πολυώνυμα χάνουν βαθμό \longrightarrow Δεν ισχύει το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου

Διαδρομή \mathcal{C}_2 : Αρχή \mathbf{p}_0 στο $\mathcal{S} \xrightarrow{a_0=0}$ Τέλος \mathbf{p}_2 στο \mathcal{U}

Συμπέρασμα:

Τα πολυώνυμα διατηρούν το βαθμό \longrightarrow Ισχύει το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου

Εφαρμογή του Θεωρήματος Διάσχισης του Συνόρου στην ευστάθεια

Έστω οικογένεια $\Delta(s) := \{\delta(s, \mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \Omega\}$ με πολυώνυμο ίδιου βαθμού

Αν $\delta(s, \mathbf{p}_a)$ ευσταθές και $\delta(s, \mathbf{p}_b)$ ασταθές και υπάρχει συνεχής διαδρομή που τα συνδέει εντός Ω τότε υπάρχει \mathbf{p}_c για το οποίο $\delta(s, \mathbf{p}_c)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\vartheta\mathcal{S}$.

Προϋπόθεση

Η οικογένεια περιλαμβάνει ένα ευσταθές πολυώνυμο

Αρχή Εξαίρεσης του Μηδενός

Αν διατρέχοντας όλα τα s^* κατά μήκος του συνόρου $\vartheta\mathcal{S}$ ικανοποιείται η $0 \notin \Delta(s^*)$ τότε όλη η οικογένεια είναι ευσταθής.

Έστω πραγματικό πολυώνυμο $P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n$

Πολυώνυμο Hurwitz

Όλες οι ρίζες του βρίσκονται στο ανοιχτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Προϋποθέσεις για ευστάθεια Hurwitz:

Συντελεστές μη μηδενικοί και του ίδιου προσήμου

Ιδιότητα πολωνύμων Hurwitz

Η φάση $\arg[P(j\omega)]$ καθώς το ω παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ είναι συνεχής και αυστηρά αύξουσα συνάρτηση του ω . Επιπλέον η καθαρή αύξηση στη φάση για ω στο παραπάνω διάστημα είναι $n\pi$.

άρτιο μέρος: $P^{even}(s) := p_0 + p_2s^2 + p_4s^4 + \dots$

περιττό μέρος: $P^{odd}(s) := p_1s + p_3s^3 + p_5s^5 + \dots$

Με την προϋπόθεση ότι $n = 2m$ άρτιο ορίζουμε:

$$P^e(\omega) = P^{even}(j\omega) = p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \dots + (-1)^m p_{2m}\omega^{2m}$$

$$P^o(\omega) = \frac{P^{odd}(j\omega)}{j\omega} = p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \dots + (-1)^{m-1} p_{2m-1}\omega^{2m-2}$$

Ιδιότητα της Συνδιαπλοκής

α) τα p_{2m} και p_{2m-1} έχουν το ίδιο πρόσημο

β) όλες οι ρίζες των $P^e(\omega)$ και $P^o(\omega)$ είναι πραγματικές και διακριτές και διαπλέκονται ως εξής:

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \dots < \omega_{e,m-1} < \omega_{o,m-1} < \omega_{e,m}$$

Θεώρημα Hermite-Biehler

Ένα πραγματικό πολυώνυμο $P(s)$ είναι Hurwitz αν και μόνο αν ικανοποιεί την Ιδιότητα της Συνδιαπλοκής.

Εναλλακτικό κριτήριο ευστάθειας

Ορίζουμε:

$$x(\omega) = \frac{P^e(\omega)}{S(\omega)}, \quad y(\omega) = \frac{P^o(\omega)}{T(\omega)}$$

$S(\omega), T(\omega)$: αυθαίρετες συνεχείς θετικές συναρτήσεις του ω

Παράδειγμα συναρτήσεων:

$$S(\omega) = 1 + \omega^2 + \omega^4 + \dots + \omega^{2m}$$

$$T(\omega) = 1 + \omega^2 + \omega^4 - \dots + \omega^{2m-2}$$

Ένα πραγματικό πολυώνυμο είναι Hurwitz αν και μόνο αν η παράσταση $z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$ στο μιγαδικό επίπεδο κινείται αυστηρά ανθρωρολογιακά και διέρχεται από n τεταρτημόρια.

Έστω πολυώνυμο $P(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_1 z + p_0$

Πολυώνυμο Schur

Όλες οι ρίζες του βρίσκονται στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο του μιγαδικού επιπέδου.

Προϋπόθεση για ευστάθεια Schur:

$$|p_n| > |p_0|$$

Ιδιότητα πολυωνύμων Schur

Η φάση του $P(e^{j\theta})$ καθώς το z μεταβάλλεται κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου $z = e^{j\theta}$ αυξάνει μονότονα. Ένα πολυώνυμο Schur έχει καθαρή αύξηση φάσης $2n\pi$ για $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} \text{συμμετρικό μέρος: } P_s(z) &= \frac{1}{2} \left[P(z) + z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \right] \\ \text{αντισυμμετρικό μέρος: } P_a(z) &= \frac{1}{2} \left[P(z) - z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \right] \end{aligned}$$

Ιδιότητα της Συνδιαπλοκής για συστήματα διακριτού χρόνου

α) Τα $P_s(z)$ και $P_a(z)$ είναι πολυώνυμα n βαθμού με τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων να έχουν το ίδιο πρόσημο.

β) Τα $P_s(z)$ και $P_a(z)$ έχουν μόνο απλά μηδενικά που ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο.

γ) Τα μηδενικά των $P_s(z)$ και $P_a(z)$ αλληλοδιαπλέκονται στο μοναδιαίο κύκλο.

Θεώρημα Hermite-Biehler για την περίπτωση Schur

Ένα πραγματικό πολυώνυμο $P(z)$ είναι Schur αν και μόνο αν ικανοποιεί την Ιδιότητα της Συνδιαπλοκής.

Παράδειγμα 1

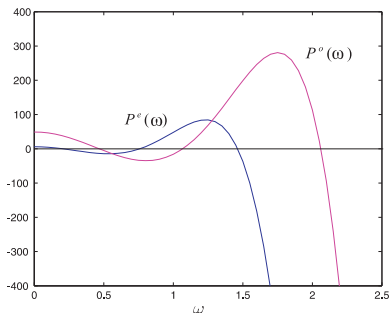
$$P(s) = s^9 + 11s^8 + 52s^7 + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6$$

Όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί

$$P^e(\omega) = 11\omega^8 - 145\omega^6 + 331\omega^4 - 155\omega^2 + 6$$

$$P^o(\omega) = \omega^8 - 52\omega^6 + 266\omega^4 - 280\omega^2 + 49$$

Τα $P^e(\omega)$ και $P^o(\omega)$ έχουν 4 πραγματικές ρίζες για $\omega > 0$



Υπάρχει αλληλοδιαπλοκή των ριζών για $\omega > 0$

Άρα Hurwitz.

Παράδειγμα 2

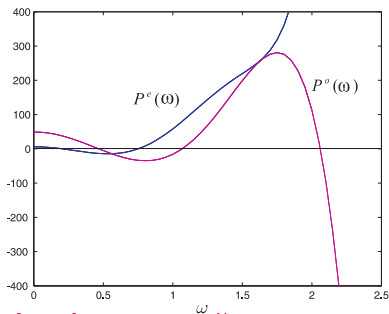
$$P(s) = s^9 + 21s^8 + 52s^7 + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6$$

Όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί

$$P^e(\omega) = 21\omega^8 - 145\omega^6 + 331\omega^4 - 155\omega^2 + 6$$

$$P^o(\omega) = \omega^8 - 52\omega^6 + 266\omega^4 - 280\omega^2 + 49$$

Το $P^e(\omega)$ έχει μόνο 2 θετικές πραγματικές ρίζες.



Δεν υπάρχει αλληλοδιαπλοκή των ριζών για $\omega > 0$.

Άρα το πολυώνυμο ΔEN είναι Hurwitz.

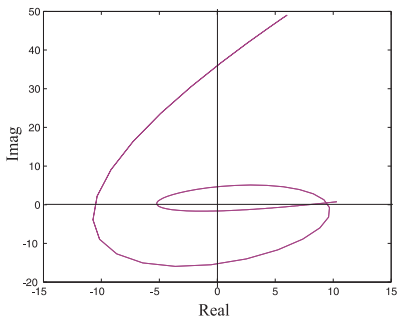
Παράδειγμα 3

$$P(s) = s^9 + 11s^8 + 52s^7 + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6$$

$$x(\omega) = \frac{P^e(\omega)}{S(\omega)}, \quad y(\omega) = \frac{P^o(\omega)}{T(\omega)}$$

$$S(\omega) = \omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1 \quad T(\omega) = \omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1$$

$$z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$$



Παρατήρηση:

$\Delta \arg z(\omega) = 9\pi/2$ για $\omega \in [0, \infty)$

Συμπέρασμα:

Πολυώνυμο Hurwitz

Ευθύγραμμο τμήμα

$$\delta_\lambda(s) = \lambda\delta_1(s) + (1 - \lambda)\delta_2(s) \quad \lambda \in [0, 1].$$

Ισχυρή ευστάθεια

Κάθε πολυώνυμο του ευθυγράμμου τμήματος είναι ευσταθές.

Προϋποθέσεις

- $\delta_1(s)$ και $\delta_2(s)$ ευσταθή ως προς το \mathcal{S}
- ο βαθμός του $\delta_\lambda(s)$ είναι n για κάθε $\lambda \in [0, 1]$

Το ευθύγραμμο τμήμα $[\delta_1(s), \delta_2(s)]$ είναι ευσταθές αν ισχύει μία από τις ισοδύναμες προτάσεις

α) $\delta_\lambda(s^*) \neq 0, \quad \forall s^* \in \partial\mathcal{S}, \quad \lambda \in [0, 1].$

β) $|\phi_{\delta_1}(s^*) - \phi_{\delta_2}(s^*)| \neq \pi \text{ rads}, \quad \forall s^* \in \partial\mathcal{S}. \quad (\text{Συνθήκη Φραγμένης Φάσης})$

Προϋποθέσεις

- $\delta_1(s)$ και $\delta_2(s)$ πραγματικά πολυώνυμα βαθμού n
- οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων έχουν το ίδιο πρόσημο

Segment Lemma: Hurwitz Case

Το ευθύγραμμο τμήμα πολυωνύμων $[\delta_1(s), \delta_2(s)]$ είναι ευσταθές αν και μόνο αν δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός $\omega > 0$ τέτοιος ώστε

- 1) $\delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0$
- 2) $\delta_1^e(\omega)\delta_2^e(\omega) \leq 0$
- 3) $\delta_1^o(\omega)\delta_2^o(\omega) \leq 0.$

Ιδιότητες φάσης για πολυώνυμα Hurwitz

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega),$$

$$X(\omega) = \frac{q(\omega)}{p(\omega)}$$

$$\phi_\delta(\omega) = \tan^{-1} \frac{q(\omega)}{p(\omega)} = \tan^{-1} X(\omega)$$

Κάτω φράγμα στο ρυθμό αλλαγής φάσης

Για ένα πραγματικό πολυώνυμο Hurwitz

$$\frac{d\phi_\delta(\omega)}{d\omega} \geq \left| \frac{\sin(2\phi_\delta(\omega))}{2\omega} \right|, \quad \forall \omega > 0$$

Κυρτή Διεύθυνση

Ένα πολυώνυμο $\delta_0(s)$ που εξασφαλίζει την ισχυρή ευστάθεια του ζεύγους $(\delta_2(s), \delta_0(s) + \delta_2(s))$ για άκρα ευσταθή κατά Hurwitz ονομάζεται κυρτή διεύθυνση

Λήμμα Πραγματικής Κυρτής Διεύθυνσης

Το πραγματικό πολυώνυμο $\delta_0(s)$ είναι κυρτή διεύθυνση αν και μόνο

$$\frac{d\phi_{\delta_0}(\omega)}{d\omega} \leq \left| \frac{\sin(2\phi_{\delta_0}(\omega))}{2\omega} \right|$$

για κάθε $\omega > 0$ τέτοιο ώστε $\delta_0(j\omega) \neq 0$ ή

$$\frac{dX_0(\omega)}{d\omega} \leq \left| \frac{X_0(\omega)}{\omega} \right|$$

για κάθε $\omega > 0$ τέτοιο ώστε $\delta_0(j\omega) \neq 0$.

Λήμμα Κορυφής

πολύωνυμο διαφοράς: $\delta_0(s) = \delta_1(s) - \delta_2(s)$

Εκφράζουμε το $\delta_0(s)$ ως

$$\delta_0(s) = A(s)s^t(as + b)P(s)$$

Προϋποθέσεις

- $\delta_1(s)$ και $\delta_2(s)$ πραγματικά πολυώνυμα βαθμού n
- συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων του ίδιου προσήμου

Vertex Lemma: Hurwitz case

Αν $A(s)$ είναι ένα antiHurwitz πολυώνυμο, t ακέραιος, a, b αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί και $P(s)$ άρτιο ή περιττό πολυώνυμο η ευστάθεια του τμήματος $[\delta_1(s), \delta_2(s)]$ έπεται από την ευστάθεια των $\delta_1(s)$ και $\delta_2(s)$.

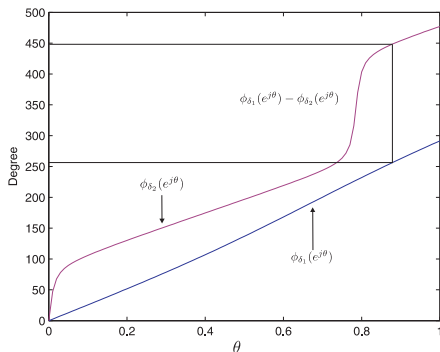
Έλεγχος ευστάθειας του ευθυγράμμου τμήματος $[\delta_1(z), \delta_2(z)]$ με χρήση της **Συνθήκης Φραγμένης Φάσης**

$$\delta_1(z) = z^5 + 0.4z^4 - 0.33z^3 + 0.058z^2 + 0.1266z + 0.059$$

$$\delta_2(z) = z^5 - 2.59z^4 + 2.8565z^3 - 1.4733z^2 + 0.2236z - 0.0121.$$

$\delta_1(z), \delta_2(z)$ ευσταθή

Για $z = e^{j\theta}$ με $\theta \in [0, 2\pi]$



$|\phi_{\delta_1}(e^{j\theta}) - \phi_{\delta_2}(e^{j\theta})| > 180^\circ \rightarrow$ ευθύγραμμο τμήμα **ασταθές**

Παράδειγμα 2 I

Έλεγχος ευστάθειας του ευθυγράμμου τμήματος $[P_1(z), P_2(z)]$ με χρήση του **Schur Segment Lemma II**

$$P_1(z) = z^3 + 1.5z^2 + 1.2z + 0.5$$

$$P_2(z) = z^3 - 1.2z^2 + 1.1z - 0.4.$$

$$h_1(z)g_2(z) - g_1(z)h_2(z) = 0$$

$h(z)$: συμμετρικό μέρος του $P(z)$

$g(z)$: αντισυμμετρικό μέρος του $P(z)$

Ελέγχουμε αν οι ρίζες μοναδιαίου μέτρου ικανοποιούν τις συνθήκες

$$z_k^{-3} h_1(z_k)h_2(z_k) \leq 0 \quad z_k^{-3} g_1(z_k)g_2(z_k) \geq 0$$

Ρίζες

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = -1$$

$$z_3 = -0.298 + 0.9546j$$

$$z_4 = -0.298 - 0.9546j$$

$$z_5 = 0.2424 + 0.9702j$$

$$z_6 = 0.2424 - 0.9702j$$

Οι συνθήκες ικανοποιούνται για $z_{3,4}$

Παράδειγμα 2 II

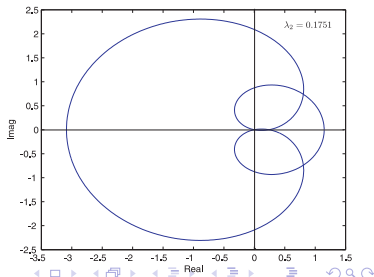
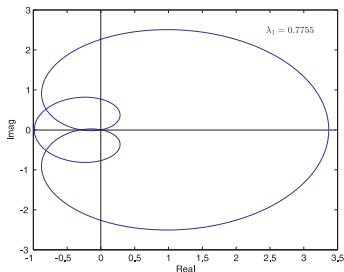
Υπάρχει πολυώνυμο $P_{\lambda_{u_1}}(z) = \lambda_{u_1} P_1(z) + (1 - \lambda_{u_1}) P_2(z)$ που είναι ασταθές για κάποιο λ_{u_1}

$$\lambda_{u_1} = P_2(z_k) / (P_2(z_k) - P_1(z_k)) = 0.7755 \text{ για } k = 3, 4$$

$$P_{u_1} = z^3 + 0.8939z^2 + 1.1775z + 0.2979$$

Οι συνθήκες ικανοποιούνται και για $z_{5,6}$

Υπάρχει ασταθές πολυώνυμο για $\lambda_{u_2} = 0.1751$



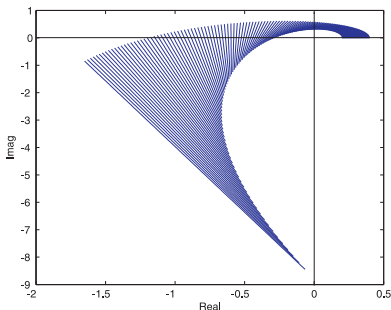
Παράδειγμα 3

Έλεγχος της ευστάθειας κατά Hurwitz του $[\delta_1(s), \delta_2(s)]$ με χρήση της Αρχής Εξαίρεσης του Μηδενός

θS : άξονας των φανταστικών αριθμών

$$\delta_1(s) = 1.4s^4 + 6s^3 + 2.2s^2 + 1.6s + 0.2$$

$$\delta_2(s) = 0.4s^4 + 1.6s^3 + 2s^2 + 1.6s + 0.4$$



Το ευθύγραμμο τμήμα για καμιά τιμή του ω δε διέρχεται από το μηδέν.

Παράδειγμα 3 (Συνέχεια)

Έλεγχος της ευστάθειας κατά Hurwitz του $[\delta_1(s), \delta_2(s)]$ με εφαρμογή του Segment Lemma

$$\delta_1(s) = 1.4s^4 + 6s^3 + 2.2s^2 + 1.6s + 0.2$$

$$\delta_2(s) = 0.4s^4 + 1.6s^3 + 2s^2 + 1.6s + 0.4$$

$\delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0$ **μία θετική ρίζα** για την οποία

$$\delta_1^e(\omega)\delta_2^e(\omega) > 0 \quad \delta_1^o(\omega)\delta_2^o(\omega) > 0.$$

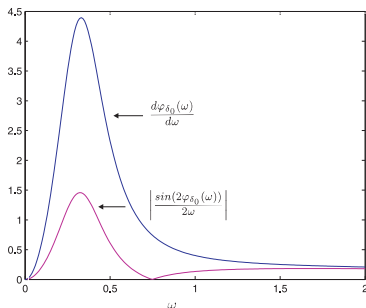
Δεν ισχύουν οι συνθήκες του Segment Lemma $\rightarrow [\delta_1(s), \delta_2(s)]$ **ευσταθής**

Παράδειγμα 3 (Συνέχεια)

Εφαρμογή του Λήμματος Πραγματικής Κυρτής Διεύθυνσης στο πολυώνυμο διαφοράς

$$\delta_0(s) = s^4 + 4.4s^3 + 0.2s^2 - 0.2.$$

$\delta_0(s)$ κυρτή διεύθυνση αν $\frac{d\phi_{\delta_0}(\omega)}{d\omega} \leq \left| \frac{\sin(2\phi_{\delta_0}(\omega))}{2\omega} \right|$



$\delta_0(s)$ δεν είναι κυρτή διεύθυνση \rightarrow υπάρχει πολυώνυμο $\delta_s(s)$ για το οποίο το $[\delta_s(s), \delta_0(s) + \delta_s(s)]$ είναι ασταθές

Πρόβλημα

Εύρεση της μεγαλύτερης περιοχής ευστάθειας δεδομένου σχήματος στο χώρο των συντελεστών γύρω από ένα πολυώνυμο.

P_n : διανυσματικός χώρος πολυωνύμων βαθμού n

Δ_0 : υποσύνολο του P_n τέτοιο ώστε $P(0) = 0$ ($p_0 = 0$)

Δ_n : σύνολο των στοιχείων για τα οποία $p_n = 0$

Δ_ω : σύνολο στοιχείων του P_n που έχουν ρίζες στα $j\omega$ και $-j\omega$

Έστω $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n$

ευσταθές πολυώνυμο Hurwitz στοιχείο του P_n

- d_0 : απόσταση του $\delta(s)$ από τον υπόχωρο Δ_0
απόσταση για να αποκτήσει το $\delta(s)$ ρίζα στο $s = 0$
- d_n : απόσταση του $\delta(s)$ από τον υπόχωρο Δ_n
απόσταση για να χάσει το $\delta(s)$ βαθμό
- d_ω : απόσταση του $\delta(s)$ από τον υπόχωρο Δ_ω
απόσταση για να αποκτήσει το $\delta(s)$ ρίζα στο σύνορο \mathcal{VS}

ℓ_2 σφαίρα ευστάθειας

$$d_0 = |\delta_0| \text{ και } d_n = |\delta_n|$$

α) $n = 2p$:

$$d_\omega^2 = \frac{[\delta^e(\omega)]^2}{1 + \omega^4 + \dots + \omega^{4p}} + \frac{[\delta^o(\omega)]^2}{1 + \omega^4 + \dots + \omega^{4(p-1)}}$$

β) $n = 2p + 1$:

$$d_\omega^2 = \frac{[\delta^e(\omega)]^2 + [\delta^o(\omega)]^2}{1 + \omega^4 + \dots + \omega^{4p}}.$$

$$d_{\min} = \inf_{\omega \geq 0} d_\omega \quad \text{ή} \quad d_{\min}^2 = \min \left(\inf_{\omega \in [0,1]} d_\omega^2, \inf_{\omega \in [0,1]} d_{\frac{1}{\omega}}^2 \right)$$

ανοιχτή σφαιρική περιοχή: $B(\delta(s), r) = \{P(s) \in P_n : \|P(s) - \delta(s)\| < r\}$

υπερσφαίρα: $S(\delta(s), r) = \{P(s) \in P_n : \|P(s) - \delta(s)\| = r\}$

Η ακτίνα $\rho(\delta)$ της μεγαλύτερης υπερσφαίρας ευστάθειας $S(\delta(s), r)$ γύρω από ένα ευσταθές πολυώνυμο $\delta(s)$ δίνεται από τη σχέση

$$\rho(\delta) = \min(d_0, d_n, d_{\min}).$$

Γεωμετρικός τύπος Tsyarkin-Polyak

$$A(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_n s^n \quad A_0(s) = a_0^0 + a_1^0 s + \dots + a_n^0 s^n$$

ℓ_p σφαίρα ακτίνας ρ , $1 \leq p < \infty$

$$\mathcal{B}_p(\mathbf{a}^0, \rho) = \left\{ \mathbf{a} : \left[\sum_{k=0}^n \left| \frac{a_k - a_k^0}{\bar{\alpha}_k} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \rho \right\}$$

ℓ_∞ σφαίρα ακτίνας ρ

$$\mathcal{B}_\infty(\mathbf{a}^0, \rho) = \left\{ \mathbf{a} : \max_k \left| \frac{a_k - a_k^0}{\bar{\alpha}_k} \right| \leq \rho \right\}$$

$$A_0(j\omega) = U_0(\omega) + j\omega V_0(\omega),$$

$$U_0 = a_0^0 - a_2^0 \omega^2 + a_4^0 \omega^4 - \dots$$

$$V_0 = a_1^0 - a_3^0 \omega^2 + a_5^0 \omega^4 - \dots$$

p, q : συζυγείς νόρμες $\rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$S_p(\omega) = [\bar{\alpha}_0^q + (\bar{\alpha}_2\omega^2)^q + (\bar{\alpha}_4\omega^4)^q + \dots]^{\frac{1}{q}}$$

$$T_p(\omega) = [\bar{\alpha}_1^q + (\bar{\alpha}_3\omega^2)^q + (\bar{\alpha}_5\omega^4)^q + \dots]^{\frac{1}{q}}$$

$$x(\omega) = \frac{U_0(\omega)}{S_p(\omega)}, \quad y(\omega) = \frac{V_0(\omega)}{T_p(\omega)}$$

$$z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega).$$

ℓ_p δίσκος ακτίνας ρ

$$\mathcal{D}_p(\rho) = \left\{ z = x + jy : [|x|^p + |y|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \rho \right\}$$

Θεώρημα

Κάθε πολυώνυμο της $\mathcal{B}_p(\mathbf{a}^0, \rho)$ είναι ευσταθές κατά Hurwitz αν και μόνο αν η γραφική παράσταση του $z(\omega)$ για $\omega \in [0, \infty)$

A) διέρχεται από n τεταρτημόρια σε ανθρολογιακή κατεύθυνση

B) δεν τέμνει τον ℓ_p δίσκο $\mathcal{D}_p(\rho)$ με ακτίνα ρ

Γ) τα συνοριακά σημεία $z(0)$ και $z(\infty)$ έχουν συνιστώσες με απόλυτες τιμές μεγαλύτερες του ρ .

Πολυώνυμα δίσκων

Κάθε συντελεστής ενός στοιχείου του συνόλου των πολυωνύμων μπορεί να είναι ένας οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός σε έναν αυθαίρετο αλλά δεδομένο δίσκο στο μιγαδικό επίπεδο.

D_i δίσκος κεντραρισμένος στο β_i και ακτίνας $r_i \geq 0$

\mathcal{F}_D σύνολο πολυωνύμων δίσκων

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n, \quad \delta_i \in D_i$$

Υπόθεση

- Κάθε πολυώνυμο στο \mathcal{F}_D είναι βαθμού n

Ορισμοί:

$\beta(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_n s^n$ β_i κέντρο του δίσκου D_i

$$\gamma_1(s) = r_0 - jr_1 s - r_2 s^2 + jr_3 s^3 + r_4 s^4 - jr_5 s^5 - \dots$$

$$\gamma_2(s) = r_0 + jr_1 s - r_2 s^2 - jr_3 s^3 + r_4 s^4 + jr_5 s^5 - \dots$$

$g_1(s), g_2(s)$: ρητές κανονικές συναρτήσεις

$$g_1(s) = \frac{\gamma_1(s)}{\beta(s)}, \quad g_2(s) = \frac{\gamma_2(s)}{\beta(s)}.$$

H_∞ νόρμα της $g(s)$: $\|g\|_\infty$

Hurwitz case: $\|g(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \frac{n(j\omega)}{d(j\omega)} \right|$

Schur case: $\|g\|_\infty = \sup_{\theta \in [0, 2\pi)} \left| \frac{n(e^{j\theta})}{d(e^{j\theta})} \right|$

Ευστάθεια της \mathcal{F}_D κατά Hurwitz

Κάθε μέλος της \mathcal{F}_D είναι Hurwitz αν και μόνο αν

- 1) $\beta(s)$ είναι Hurwitz και
- 2) $\|g_1\|_\infty < 1$ και $\|g_2\|_\infty < 1$.

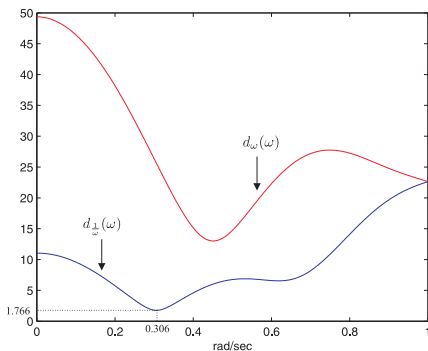
Ευστάθεια της \mathcal{F}_D κατά Schur

- 1) $\beta(z)$ είναι πολυώνυμο Schur και
- 2) $\sum_{k=0}^n r_k < \inf_{\theta \in [0, 2\pi)} |\beta(e^{j\theta})|$

Παράδειγμα 1

Εύρεση της μέγιστης ℓ_2 ακτίνας ευστάθειας $\rho(\delta)$ γύρω από ένα πολυώνυμο $\delta(s)$

$$\delta(s) = s^9 + 11s^8 + 52s^7 + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6.$$



$$d_0 = \delta_0 = 6 \quad d_n = \delta_n = 1$$

$$\rho(\delta) = \min(d_0, d_n, d_{\min}) = 1.$$

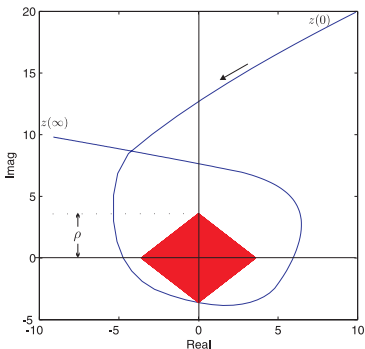
Παράδειγμα 2

Εύρεση της ακτίνας ευστάθειας μέσω του γεωμετρικού τόπου Tsytkin-Polyak γύρω από το $A(s)$

$$A(s) = s^6 + 14s^5 + 80.25s^4 + 251.25s^3 + 502.25s^2 + 667.25s + 433.5$$

διάνυσμα βαρών $\bar{\alpha}$

$$\bar{\alpha} = [0.1, 1.4, 5.6175, 15.075, 25.137, 33.36, 43.35]$$



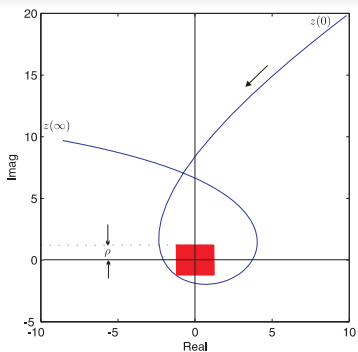
$$\rho = 1$$

$$|x(0)| = 10, |x(\infty)| = 10 \text{ και} \\ |y(0)| = 20, |y(\infty)| = 10$$

Περιοχή ευστάθειας: Ρόμβος

$$|x| + |y| \leq \rho \text{ με } \rho = 3.62$$

Παράδειγμα 2 (Συνέχεια)



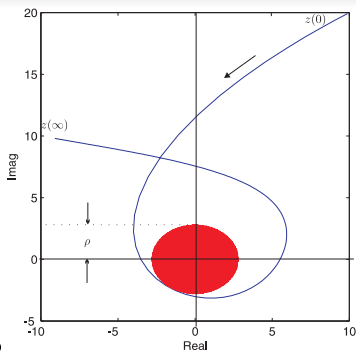
$$\rho = \infty$$

$$|x(0)| = 10, |x(\infty)| = 10 \text{ και}$$

$$|y(0)| = 20, |y(\infty)| = 10$$

Περιοχή ευστάθειας: Τετράγωνο

$$|x| \leq \rho, |y| \leq \rho \text{ με } \rho = 2.46$$



$$\rho = 2$$

$$|x(0)| = 10, |x(\infty)| = 10 \text{ και}$$

$$|y(0)| = 20, |y(\infty)| = 10$$

Περιοχή ευστάθειας: Δίσκος

$$|x|^2 + |y|^2 \leq \rho^2 \text{ με } \rho = 2.83$$

Παράδειγμα 3

Ευστάθεια πολυωνύμων δίσκων

$$\beta(s) = (-1 - j11)s^4 + (3.5 - j18)s^3 + (9 - j27)s^2 + (1.5 - j6)s + (2 - j3.5)$$

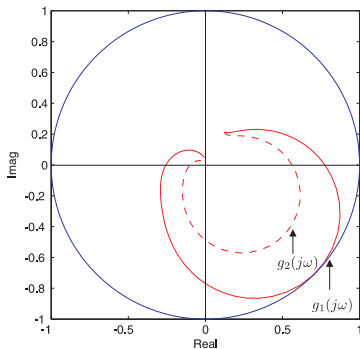
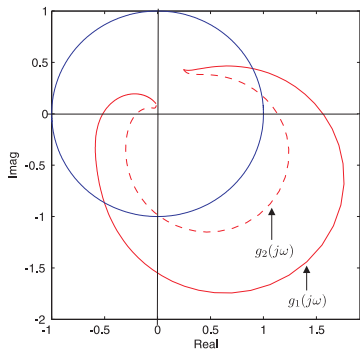
 $\beta(s)$ ευσταθές

Κάθε συντελεστής υπόκειται διαταραχές εντός δίσκων με ακτίνες $r_4 = 1$, $r_3 = 3$, $r_2 = 8$, $r_1 = 1$, $r_0 = 2$

$$\gamma_1(s) = 2 - js - 8s^2 + j3s^3 + s^4 \quad \gamma_2(s) = 2 + js - 8s^2 - j3s^3 + s^4.$$

$$g_1(s) = \frac{\gamma_1(s)}{\beta(s)} \text{ και } g_2(s) = \frac{\gamma_2(s)}{\beta(s)}$$

Παράδειγμα 3(Συνέχεια)



Οικογένεια \mathcal{F}_D ασταθής

Οικογένεια \mathcal{F}_D ευσταθής

$$\|g_1\|_\infty = \eta_1 = 2.016 \text{ και } \|g_2\|_\infty = \eta_2 = 1.379$$

$$\epsilon_{\max} = \min\left(\frac{1}{\eta_1}, \frac{1}{\eta_2}\right) = 0.496$$

$$\text{Νέες ακτίνες } r_i' = \epsilon_{\max} r_i$$

Εύρεση της ακτίνας της μέγιστης σφαίρας ευστάθειας όταν:

- Υπάρχουν εξαρτήσεις μεταξύ των συντελεστών του πολυώνυμου
- Η αβεβαιότητα υπεισέρχεται με γραμμικό ή αφινικό τρόπο

Παράδειγμα:

$$G(s, \mathbf{p}) = \frac{p_3}{s^2 + p_1 s + p_2} \quad C(s, \mathbf{x}) = \frac{x_3}{x_1 s + x_2}.$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού βρόχου:

$$\delta(s, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \underbrace{x_1}_{\delta_3(\mathbf{x}, \mathbf{p})} s^3 + \underbrace{(p_1 x_1 + x_2)}_{\delta_2(\mathbf{x}, \mathbf{p})} s^2 + \underbrace{(p_2 x_1 + p_1 x_2)}_{\delta_1(\mathbf{x}, \mathbf{p})} s + \underbrace{(p_2 x_2 + p_3 x_3)}_{\delta_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})}.$$

$$\delta(s, \mathbf{p}) = \underbrace{(x_1 s^2 + x_2 s)}_{q_1(s)} p_1 + \underbrace{(x_1 s + x_2)}_{q_2(s)} p_2 + \underbrace{x_3}_{q_3(s)} p_3 + \underbrace{(x_1 s^3 + x_2 s^2)}_{b(s)}.$$

$\delta_i(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ γραμμικές συναρτήσεις των στοιχείων του $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_l]$

Πολυώνυμο για τις ονομαστικές τιμές των παραμέτρων

$$\delta(s, \mathbf{p}^0) = \delta^0(s)$$

Οι διαταραχές συμβαίνουν εντός σφαίρας

$$\mathcal{B}(\rho, \mathbf{p}^0) = \{\mathbf{p} : \|\mathbf{p} - \mathbf{p}^0\| < \rho\}$$

Θεωρούμε οικογένεια πολυωνύμων

$$\Delta_\rho(s) = \{\delta(s, \mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p}) : \|\Delta\mathbf{p}\| < \rho\}, \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}^0 = [\Delta\rho_1, \dots, \Delta\rho_l]$$

Πραγματικό παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας ρ^*

ρ^* ακτίνα της μεγαλύτερης σφαίρας $\mathcal{B}(\rho^*, \mathbf{p}^0)$ για την οποία το $\delta(s, \mathbf{p})$ είναι ευσταθές.

Προσδιορισμός μέσω της απεικόνισης στο μιγαδικό επίπεδο

- Μεγιστοποίηση του ρ στον παραμετρικό χώρο μέχρι την οριακή τιμή ρ_0 έτσι ώστε $0 \in \Delta_{\rho_0}(s^*)$

$$\rho_b = \inf_{s^* \in \partial\mathcal{S}} \rho_0(s^*)$$

- Μεγιστοποίηση του ρ στον παραμετρικό χώρο έτσι ώστε κάποιο πολυώνυμο να χάσει βαθμό για $s = s^*$

$$\rho_d = \inf_{s^* \in \partial\mathcal{S}} \{\rho : \delta_n(\mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p}) = 0, \|\Delta\mathbf{p}\| < \rho\}$$

μέγιστο παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας $\rho^* = \min\{\rho_b, \rho_d\}$

Αν $s^* \in \vartheta\mathcal{S}$

$$\delta^0(s^*) + q_1(s^*)\Delta p_1 + \dots + q_l(s^*)\Delta p_l = 0.$$

Η εξίσωση με βάρη γίνεται

$$\delta^0(s^*) + \frac{q_1(s^*)}{w_1} w_1 \Delta p_1 + \dots + \frac{q_l(s^*)}{w_l} w_l \Delta p_l = 0.$$

Αν $s^* = s_r$ με s_r πραγματικό

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{q_1(s_r)}{w_1} & \dots & \frac{q_l(s_r)}{w_l} \end{bmatrix}}_{A(s_r)} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \Delta p_1 \\ \vdots \\ w_l \Delta p_l \end{bmatrix}}_{t(s_r)} = \underbrace{-\delta^0(s_r)}_{b(s_r)}.$$

Αν $s^* = s_c$, όπου s_c μιγαδικός

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{q_{1r}(s_c)}{w_1} & \dots & \frac{q_{lr}(s_c)}{w_l} \\ \frac{q_{1i}(s_c)}{w_1} & \dots & \frac{q_{li}(s_c)}{w_l} \end{bmatrix}}_{A(s_c)} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \Delta p_1 \\ \vdots \\ w_l \Delta p_l \end{bmatrix}}_{t(s_c)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\delta_r^0(s_c) \\ -\delta_i^0(s_c) \end{bmatrix}}_{b(s_c)}.$$

Αν έχουμε απώλεια βαθμού, δηλαδή $\delta_n(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = 0$

$$\underbrace{q_{1n}p_1^0 + q_{2n}p_2^0 + \cdots + q_{ln}p_l^0}_{\delta_n(\mathbf{p}^0)} + \frac{q_{1n}}{w_1}w_1\Delta p_1 + \frac{q_{2n}}{w_2}w_2\Delta p_2 + \cdots + \frac{q_{ln}}{w_l}w_l\Delta p_l = 0.$$

Υπό μορφή πινάκων γράφεται σαν

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{q_{1n}}{w_1} & \cdots & \frac{q_{ln}}{w_l} \end{bmatrix}}_{A_n} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1\Delta p_1 \\ \vdots \\ w_l\Delta p_l \end{bmatrix}}_{t_n} = \underbrace{-\delta_n^0}_{b_n}.$$

t_n^* , $t^*(s_r)$ και $t^*(s_c)$: οι λύσεις με την **ελάχιστη νόρμα**

$$\|t_n^*\| = \rho_d, \quad \|t^*(s_r)\| = \rho(s_r), \quad \|t^*(s_c)\| = \rho(s_c)$$

Αν εφαρμοστεί $\forall s^* \in \vartheta S$

$$\rho_r = \inf_{s_r \in \vartheta S} \rho(s_r), \quad \rho_c = \inf_{s_c \in \vartheta S} \rho(s_c), \quad \rho_b = \inf\{\rho_r, \rho_c\}$$

μέγιστο παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας $\rho^* = \min\{\rho_d, \rho_b\}$

ℓ_2 περιθώριο ευστάθειας

Λύσεις με την ελάχιστη Ευκλείδια νόρμα

$$t_n^* = A_n^T [A_n A_n^T]^{-1} b_n$$

$$t^*(s_r) = A^T(s_r) [A(s_r) A^T(s_r)]^{-1} b(s_r)$$

$$t^*(s_c) = A^T(s_c) [A(s_c) A^T(s_c)]^{-1} b(s_c)$$

Επειδή $\delta^0(s)$ ευσταθές

$b_n \neq 0$, $b(s_r) \neq 0$ και $b(s_c) \neq 0$

- Αν $A(s_r)$ και A_n μη μηδενικά $\rightarrow \rho(s_r)$ και ρ_d πεπερασμένα
- Αν $A(s_c)$ πλήρους τάξης $\rightarrow \rho(s_c)$ πεπερασμένο
 - Αν $A(s_c)$ μηδενικής τάξης \rightarrow σύστημα αδύνατο και $\rho(s_c) = \infty$
 - Αν $\text{rank} A(s_c) = 1$ και $\text{rank}[A(s_c), b(s_c)] = 1 \rightarrow \rho(s_c)$ πεπερασμένο
 - Αν $\text{rank} A(s_c) = 1$ και $\text{rank}[A(s_c), b(s_c)] = 2 \rightarrow \rho(s_c) = \infty$

Εκτεθειμένες ακμές και κορυφές

$$\mathbf{\Pi} = \{\mathbf{p} : p_i^- \leq p_i \leq p_i^+, i = 1, 2, \dots, l\}.$$

$$\delta(s, \mathbf{p}) = \delta_0(\mathbf{p}) + \delta_1(\mathbf{p})s + \dots + \delta_n(\mathbf{p})s^n = p_1 q_1(s) + p_2 q_2(s) + \dots + p_l q_l(s) + y(s)$$

$$\underline{\delta} = T\mathbf{p} + \mathbf{y}, \quad \underline{\delta} = [\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n]$$

$\underline{\delta}$, \mathbf{p} και \mathbf{y} διανύσματα στήλης
γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

Σύνολο \mathbf{V} των κορυφών του $\mathbf{\Pi}$

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{p} : p_i = p_i^- \text{ or } p_i = p_i^+, \forall i\}$$

Σύνολο \mathbf{E} των εκτεθειμένων ακμών του $\mathbf{\Pi}$

$$\mathbf{E}_i = \{\mathbf{p} : p_i^- \leq p_i \leq p_i^+, p_j = p_j^- \text{ or } p_j = p_j^+, \forall j \neq i\}$$

$$\mathbf{E} = \bigcup_{i=1}^l \mathbf{E}_i.$$

Η οικογένεια Δ των πολυωνύμων που παράγεται από τη γραμμική απεικόνιση T του κουτιού Π είναι ένα πολύτοπο. Για τις κορυφές του Δ_V και τις εκτεθειμένες ακμές του Δ_E ισχύει

$$\Delta_V \subset TV + y$$

$$\Delta_E \subset TE + y$$

Θεωρούμε για δεδομένο $s = s^*$ την εικόνα $\Delta(s^*)$ της Δ στο μιγαδικό επίπεδο.

$\Delta_V(s^*)$ και $\Delta_E(s^*)$ τα παραγόμενα σύνολα αν $p \in V$ και $p \in E$, αντίστοιχα.

- 1) Το $\Delta(s^*)$ είναι κυρτό περίβλημα του $\Delta_V(s^*)$.
- 2) Οι κορυφές του $\Delta(s^*)$ περιέχονται στο $\Delta_V(s^*)$.
- 3) Οι εκτεθειμένες ακμές του $\Delta(s^*)$ περιέχονται στο $\Delta_E(s^*)$

Ευστάθεια πολυτοπικής οικογένειας

Προϋποθέσεις για τα Θεωρήματα που ακολουθούν

- η οικογένεια πολυωνύμων είναι σταθερού βαθμού
- υπάρχει τουλάχιστον ένα πολώνυμο της $\Delta(s)$ που είναι ευσταθές σε σχέση με το S

Θεώρημα

Με δεδομένο ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $s^0 \in \partial S$ τέτοιο ώστε $0 \notin \Delta(s^0)$ η οικογένεια είναι ευσταθής σε σχέση με το S αν και μόνο αν το σύνολο $\Delta_E(s)$ είναι ευσταθές ως προς την ίδια περιοχή.

Θεώρημα Φραγμένης Φάσης

Η οικογένεια είναι ευσταθής σε σχέση με το S αν και μόνο αν

$$\Phi_{\Delta_V}(s^*) < \pi, \quad \forall s^* \in \partial S.$$

Για τον υπολογισμό του μέγιστου παραμετρικού περιθωρίου αρκεί το ρ να περιοριστεί στις εκτεθειμένες ακμές

Θεώρημα

$$\inf_{\mathbf{p} \in \Pi} \rho(\mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{p} \in E} \rho(\mathbf{p})$$

Αν κάθε πολυώνυμο κορυφής γράφεται σαν

$$u_i(s) = s^{t_i}(\alpha_i s + b_i)A_i(s)P_i(s),$$

και ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Λήμματος Κορυφής** (t ακέραιος, a, b πραγματικοί, $A(s)$ antiHurwitz, $P(s)$ άρτιο ή περιττό πολυώνυμο) ο έλεγχος περιορίζεται στις **κορυφές**

Θεώρημα

$$\inf_{\mathbf{p} \in \Pi} \rho(\mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{p} \in V} \rho(\mathbf{p}).$$

Παράδειγμα 1

Εύρεση του μέγιστου παραμετρικού περιθωρίου

$$C(z) = \frac{z+1}{z^2}, \quad G(z, \mathbf{p}) = \frac{(-0.5 - 2p_0)z + (0.1 + p_0)}{z^2 - (1 + 0.4p_2)z + (0.6 + 10p_1 + 2p_0)}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού βρόχου

$$\delta(z, \mathbf{p}) = z^4 - (1 + 0.4p_2)z^3 + (0.1 + 10p_1)z^2 - (0.4 + p_0)z + (0.1 + p_0)$$

ονομαστική τιμή των παραμέτρων: $\mathbf{p}^0 = \left[\underbrace{0}_{p_0}, \underbrace{0.1}_{p_1}, \underbrace{1}_{p_2} \right]$

$$\Delta \mathbf{p} = [\Delta p_0 \quad \Delta p_1 \quad \Delta p_2] \quad [w_0 \quad w_1 \quad w_2] = \mathbf{1}$$

Επειδή ο βαθμός των πολυωνύμων παραμένει αμετάβλητος $\rho_d = \infty$

Παράδειγμα 1 (Συνέχεια)

$$\delta(z, \mathbf{p}^0 + \mathbf{\Delta p}) = \underbrace{(-z + 1)\Delta p_0 + 10z^2\Delta p_1 - 0.4z^3\Delta p_2}_{A(z)} + \underbrace{(z^4 - 1.4z^3 + 1.1z^2 - 0.4z + 0.1)}_{b(z)}.$$

Εύρεση του περιθωρίου ευστάθειας για τις πραγματικές τιμές $z = 1$ και $z = -1$ του μοναδιαίου κύκλου

$$\rho(1) = \left\| A^T(1)[A(1)A^T(1)]^{-1}b(1) \right\| = 0.04$$

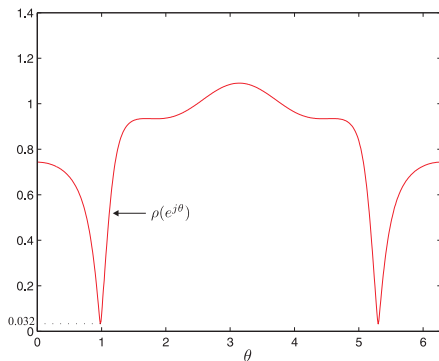
$$\rho(-1) = \left\| A^T(-1)[A(-1)A^T(-1)]^{-1}b(-1) \right\| = 0.3919$$

$$\rho_r = \min(\rho(1), \rho(-1)) = 0.04$$

Παράδειγμα 1 (Συνέχεια)

Εύρεση του περιθωρίου ευστάθειας για την περιοχή $z = e^{j\theta}$ του ϑS

$$\rho(e^{j\theta}) = \|t^*(\theta)\|_2 = \left\| A^T(\theta)[A(\theta)A^T(\theta)]^{-1}b(\theta) \right\|$$



$$\rho_c = \min_{\theta} \rho(e^{j\theta}) = 0.032 \text{ για } \theta \simeq 1$$

$$\rho_b = \min(\rho_r, \rho_c) = 0.032$$

Παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας

$$\rho^* = \min(\rho_b, \rho_d) = 0.032$$

Παράδειγμα 2

Έλεγχος της ευστάθειας μέσω των απεικονισμένων ακμών και κορυφών

$$G(s) = \frac{s + a}{s^2 + bs + c} \quad C(s) = \frac{3s + 2}{s + 5}$$

$$a \in [1, 2] = [a^-, a^+]$$

$$b \in [9, 11] = [b^-, b^+]$$

$$c \in [15, 18] = [c^-, c^+]$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού βρόχου

$$\delta(s) = a(3s + 2) + b(s^2 + 5s) + c(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s)$$

- βαθμός πολυωνύμων αμετάβλητος
- για $a = 1$, $b = 10$ και $c = 16.5$ $\delta(s)$ ευσταθές
- για $\omega = 0$ $\Delta(j0) = 2a + 5c = 2[1, 2] + 5[15, 18] \neq 0$

Οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος ισχύουν επομένως

Η ευστάθεια της Δ εξαρτάται από την ευστάθεια $\Delta_E(s)$

Παράδειγμα 2(Συνέχεια)

Αν m πλήθος των παραμέτρων $m2^{m-1}$ ο αριθμός $|\mathbf{E}|$ των διαφορετικών ακμών

$$m = 3 \Rightarrow |\mathbf{E}| = 12$$

Ενδεικτικά

$$\delta_{E_1}(s) = (\lambda a^- + (1-\lambda)a^+)(3s+2) + b^-(s^2+5s) + c^-(s+5) + (s^3+8s^2+2s)$$

$$\delta_{E_2}(s) = (\lambda a^- + (1-\lambda)a^+)(3s+2) + b^+(s^2+5s) + c^-(s+5) + (s^3+8s^2+2s)$$

$$\delta_{E_3}(s) = a^-(3s+2) + (\lambda b^- + (1-\lambda)b^+)(s^2+5s) + c^+(s+5) + (s^3+8s^2+2s)$$

$$\delta_{E_4}(s) = a^+(3s+2) + (\lambda b^- + (1-\lambda)b^+)(s^2+5s) + c^+(s+5) + (s^3+8s^2+2s)$$

- βαθμός πολυωνύμων αμετάβλητος
- για $a = 1$, $b = 10$ και $c = 16.5$ το πολυώνυμο είναι ευσταθές

Οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Φραγμένης Φάσης ισχύουν.

Επομένως

Η ευστάθεια της Δ ανάγεται στον έλεγχο της συνθήκης

$$\Phi_{\Delta_V}(j\omega) < \pi, \quad \forall \omega$$

Παράδειγμα 2(Συνέχεια)

Αν m πλήθος των παραμέτρων 2^m ο αριθμός $|\mathbf{V}|$ των διαφορετικών πολωνύμων κορυφής

$$m = 3 \Rightarrow |\mathbf{V}| = 8$$

Ενδεικτικά

$$\delta_{V_1}(s) = a^-(3s + 2) + b^-(s^2 + 5s) + c^-(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s)$$

$$\delta_{V_2}(s) = a^+(3s + 2) + b^-(s^2 + 5s) + c^-(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s)$$

$$\delta_{V_3}(s) = a^-(3s + 2) + b^+(s^2 + 5s) + c^-(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s)$$

$$\delta_{V_4}(s) = a^+(3s + 2) + b^+(s^2 + 5s) + c^-(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s)$$

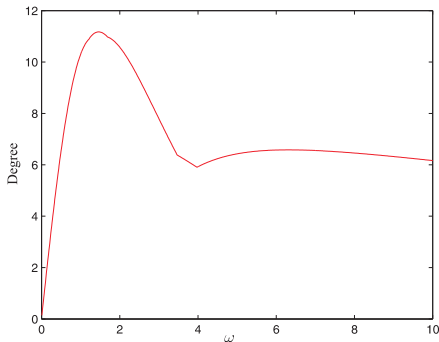
$$\delta_{V_5}(s) = a^-(3s + 2) + b^-(s^2 + 5s) + c^+(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s)$$

$$\delta_{V_6}(s) = a^+(3s + 2) + b^-(s^2 + 5s) + c^+(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s)$$

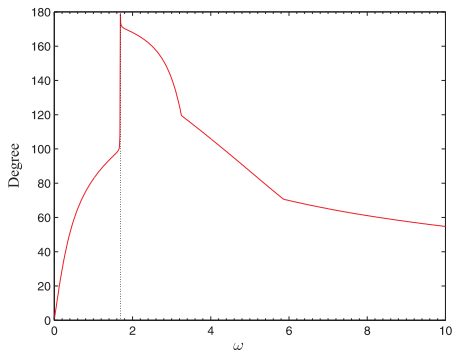
$$\delta_{V_7}(s) = a^-(3s + 2) + b^+(s^2 + 5s) + c^+(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s)$$

$$\delta_{V_8}(s) = a^+(3s + 2) + b^+(s^2 + 5s) + c^+(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s)$$

Παράδειγμα 2(Συνέχεια)



$\Phi_{\Delta_V}(j\omega) < \pi \rightarrow$ οικογένεια
ευστάθης



$$a \in [a^- - \epsilon, a^+ + \epsilon],$$

$$b \in [b^- - \epsilon, b^+ + \epsilon],$$

$$c \in [c^- - \epsilon, c^+ + \epsilon]$$

για $\epsilon = 6.91$ η μέγιστη διαφορά
φάσης αγγίζει τις 180°

οικογένεια οριακά ασταθής

Παράδειγμα 3

Εύρεση του μέγιστου περιθωρίου ευστάθειας με χρήση Tsyurkin-Polyak

$$\delta(s, \mathbf{p}) = \underbrace{(s^2 + 2s + 2)}_{F_1(s)} \underbrace{(p_{11}s + p_{10})}_{P_1(s)} + \underbrace{(s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s)}_{F_2(s)} \underbrace{(p_{22}s^2 + p_{21}s + p_{20})}_{P_2(s)}$$

$$\mathbf{p}^0 = [p_{11}^0 \quad p_{10}^0 \quad p_{22}^0 \quad p_{21}^0 \quad p_{20}^0] = [0.287 \quad 0.265 \quad 0.215 \quad 2.06 \quad 2.735].$$

ονομαστικό πολυώνυμο $A(s) = F_1(s)P_1^0(s) + F_2(s)P_2^0(s)$

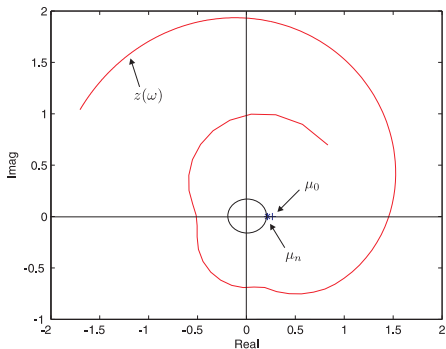
Ζητούμενο: εύρεση μέγιστου περιθωρίου ρ^* έτσι ώστε $|p_{ik} - p_{ik}^0| \leq \rho^* \alpha_{ik}$

α_{ik} τίθενται στη μονάδα

$$\frac{A(j\omega)}{F_k(j\omega)} = U_{0k}(\omega) + jV_{0k}(\omega) \quad x_k(\omega) = \frac{|U_{0k}(\omega)|}{\sum_{i=1}^m S_i(\omega)|U_{ik}(\omega)| + T_i(\omega)|V_{ik}(\omega)|}$$

$$\frac{F_i(j\omega)}{F_k(j\omega)} = U_{ik}(\omega) + jV_{ik}(\omega) \quad y_k(\omega) = \frac{|V_{0k}(\omega)|}{\sum_{i=1}^m S_i(\omega)|V_{ik}(\omega)| + T_i(\omega)|U_{ik}(\omega)|}$$

Παράδειγμα 3(Συνέχεια)



$$z(\omega) = \frac{A(j\omega)}{|A(j\omega)|} \mu(\omega)$$

$$\mu_n = 0.215 \text{ και } \mu_0 = 0.265$$

$$\rho^* = \min\{\mu_0, \mu_n, \mu_{\min}\}$$

$$\rho^* = 0.215$$

$$\mu_\omega = \max_{1 \leq k \leq m} \max\{x_k(\omega), y_k(\omega)\}, \forall \omega$$

$$\mu_{\min} = \inf_{0 < \omega < \infty} \mu(\omega)$$

Πολυώνυμα Διαστήματος $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \dots + \delta_n s^n$
 $\delta_0 \in [x_0, y_0], \delta_1 \in [x_1, y_1], \dots, \delta_n \in [x_n, y_n]$

Θεώρημα Kharitonov για πραγματικά πολυώνυμα

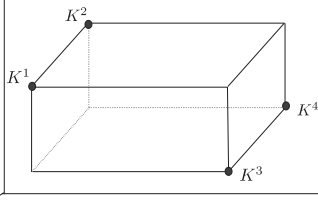
Κάθε πολυώνυμο της οικογένειας διαστήματος είναι πολυώνυμο Hurwitz αν και μόνο αν τα παρακάτω ακραία πολυώνυμα είναι πολυώνυμα Hurwitz:

$$K^1(s) = x_0 + x_1 s + y_2 s^2 + y_3 s^3 + x_4 s^4 + x_5 s^5 + y_6 s^6 + \dots$$

$$K^2(s) = x_0 + y_1 s + y_2 s^2 + x_3 s^3 + x_4 s^4 + y_5 s^5 + y_6 s^6 + \dots$$

$$K^3(s) = y_0 + x_1 s + x_2 s^2 + y_3 s^3 + y_4 s^4 + x_5 s^5 + x_6 s^6 + \dots$$

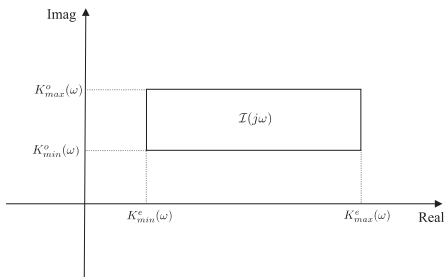
$$K^4(s) = y_0 + y_1 s + x_2 s^2 + x_3 s^3 + y_4 s^4 + y_5 s^5 + x_6 s^6 + \dots$$



Συμπέρασμα:

Αριθμός ελέγχων ανεξάρτητος από
το βαθμό των πολυωνύμων

Απεικόνιση της οικογένειας διαστήματος στο μιγαδικό επίπεδο



$$K^1(s) = K_{min}^{even}(s) + K_{min}^{odd}(s)$$

$$K^2(s) = K_{min}^{even}(s) + K_{max}^{odd}(s)$$

$$K^3(s) = K_{max}^{even}(s) + K_{min}^{odd}(s)$$

$$K^4(s) = K_{max}^{even}(s) + K_{max}^{odd}(s)$$

Η οικογένεια διαστήματος περιλαμβάνει μόνο ευσταθή πολύωνυμα αν και μόνο αν

1) $K_{max}^e(\omega)$, $K_{min}^e(\omega)$, $K_{max}^o(\omega)$ και $K_{min}^o(\omega)$ έχουν μόνο πραγματικές ρίζες ενώ οι θετικές ρίζες αλληλοδιαπλέκονται

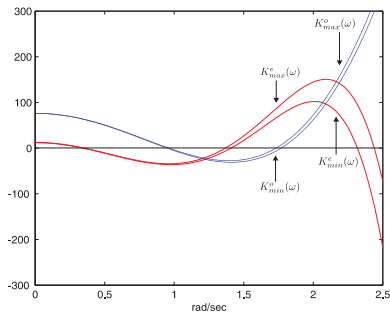
$$0 < \omega_{e_1}^{min} < \omega_{e_1}^{max} < \omega_{o_1}^{min} < \omega_{o_1}^{max} < \omega_{e_2}^{min} < \omega_{e_2}^{max} < \omega_{o_2}^{min} < \omega_{o_2}^{max}$$

2) Τα $K_{max}^e(0)$, $K_{min}^e(0)$, $K_{max}^o(0)$ και $K_{min}^o(0)$ είναι μη μηδενικά και έχουν το ίδιο πρόσημο.

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \delta_4 s^4 + \delta_5 s^5 + \delta_6 s^6 + s^7$$

$$\delta_0 \in [12, 12.5] \quad \delta_1 \in [76, 76.5] \quad \delta_2 \in [109, 109.5] \quad \delta_3 \in [111, 111.5]$$

$$\delta_4 \in [71, 71.5] \quad \delta_5 \in [31, 31.5] \quad \delta_6 \in [9, 9.5]$$



$$K_{min}^e(\omega) = 12 - 109.5\omega^2 + 71\omega^4 - 9.5\omega^6$$

$$K_{max}^e(\omega) = 12.5 - 109\omega^2 + 71.5\omega^4 - 9\omega^6$$

$$K_{min}^o(\omega) = 76 - 111.5\omega^2 + 31\omega^4 - \omega^6$$

$$K_{max}^o(\omega) = 76.5 - 111\omega^2 + 31.5\omega^4 - \omega^6$$

- οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων έχουν το ίδιο πρόσημο
- υπάρχει αλληλοδιαπλοκή των ριζών

Ισχύει το **Θεώρημα της Συνδιαπλοκής** → οικογένεια ευσταθής

Ευστάθεια κατά Schur των πολυωνύμων διαστήματος

Για την ευστάθεια κατά Schur δεν είναι αρκετή η ευστάθεια 4 πολυωνύμων Kharitonov κατά αντιστοιχία με την περίπτωση Hurwitz για να εξασφαλίσει την ευστάθεια της οικογένειας.

- Η αλληλοδιαπλοκή άρτιων-περιττών τμημάτων των πολυωνύμων Kharitonov **εξασφαλίζει** την αλληλοδιαπλοκή ριζών για τα αντίστοιχα τμήματα όλων των πολυωνύμων κατά μήκος του $j\omega$
- Η αλληλοδιαπλοκή συμμετρικών-αντισυμμετρικών τμημάτων των πολυωνύμων Kharitonov **δεν εξασφαλίζει** την αλληλοδιαπλοκή ριζών για τα αντίστοιχα τμήματα όλων των πολυωνύμων στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου.

οικογένεια $\mathcal{I}(z)$ περιλαμβάνει

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

$$\mathbf{A} = \{ \underline{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in [a_i^-, a_i^+], i = 0, \dots, n \}$$

\mathbf{V} : σύνολο κορυφών
 \mathbf{E} : σύνολο ακμών του κουτιού \mathbf{A}

$$\mathcal{I}_{\mathbf{V}}(z) = \{ P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 : (a_n, \dots, a_0) \in \mathbf{V} \}$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{E}}(z) = \{ P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 : (a_n, \dots, a_0) \in \mathbf{E} \}$$

Επειδή η οικογένεια διαστήματος ανήκει στις πολυτοπικές οικογένειες

Η $\mathcal{I}(z)$ είναι ευσταθής κατά Schur αν και μόνο αν η $\mathcal{I}_{\mathbf{E}}(z)$ είναι ευσταθής κατά Schur.

Μπορούμε να μειώσουμε τον αριθμό των ελέγχων ;

Ορίζουμε το υποσύνολο E^* των ακμών της $\mathcal{I}(z)$

- για n άρτιο θέτουμε κάθε στοιχείο του $\{a_i : i \leq \frac{n}{2}\}$ στο a_i^- ή a_i^+
για n περιττό θέτουμε κάθε στοιχείο του $\{a_i : i \leq \frac{n+1}{2}\}$ στο a_i^- ή a_i^+
- όλοι οι ανώτεροι συντελεστές τίθενται στις ακραίες τους τιμές εκτός από έναν που μεταβάλλεται στο επιτρεπτό διάστημα τιμών

Η οικογένεια $\mathcal{I}_{E^*}(z)$ περιλαμβάνει πολύωνυμα κατά μήκος των ακμών E^* .

Η οικογένεια $\mathcal{I}(z)$ είναι ευσταθής αν και μόνο αν η οικογένεια των πολυωνύμων των ακμών $\mathcal{I}_{E^*}(z)$ είναι ευσταθής.

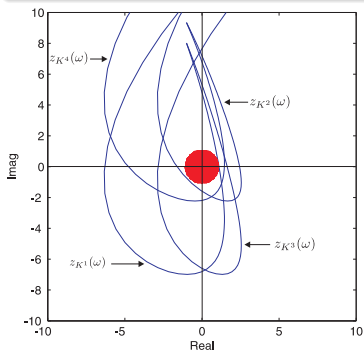
$\underline{\delta}$: διάνυσμα συντελεστών \mathcal{U} : πολυώνυμο $\in \mathcal{U}$

\mathcal{U} : σύνολο πολυωνύμων που είναι ασταθή ή έχουν βαθμό $< n$

μέγιστο περιθώριο ευστάθειας $\rho(\underline{\delta}) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \|\underline{\delta} - \mathbf{u}\|_p$

Ιδιότητα ακροτάτου των πολυωνύμων Kharitonov

Η συνάρτηση του μέγιστου περιθωρίου ευστάθειας για κάθε πολυώνυμο $\rho(\underline{\delta})$ έχει ελάχιστο και το αποκτά σε ένα από τα 4 πολυώνυμα Kharitonov $K^1(s)$, $K^2(s)$, $K^3(s)$, $K^4(s)$.



$$G(s) = \frac{\delta_2 s^2 + \delta_1 s + \delta_0}{s^3 (\delta_6 s^3 + \delta_5 s^2 + \delta_4 s + \delta_3)}$$

$$\delta(s) =$$

$$\delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \delta_4 s^4 + \delta_5 s^5 + \delta_6 s^6$$

$$\delta_0 \in [300, 400] \quad \delta_1 \in [600, 700]$$

$$\delta_2 \in [450, 500] \quad \delta_3 \in [240, 300]$$

$$\delta_4 \in [70, 80] \quad \delta_5 \in [12, 14] \quad \delta_6 \in [1, 1] \quad \text{Το}$$

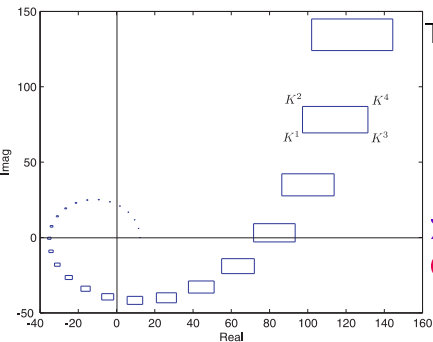
$\rho(\underline{\delta})$ καθορίζεται από το $K^1(s)$

$$\rho(\underline{\delta}) \simeq 1.1$$

Εικόνα συνόλου της $\mathcal{I}(j\omega)$ στο μιγαδικό επίπεδο

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \delta_4 s^4 + \delta_5 s^5 + \delta_6 s^6 + s^7$$

$$\Delta = [12, 12.5] \times [76, 76.5] \times [109, 109.5] \times [111, 111.5] \times [71, 71.5] \times [31, 31.5] \times [9, 9.5]$$



Τα ορθογώνια

- διατηρούν τον προσανατολισμό τους
- περιστρέφονται ανθρωρολογιακά
- δεν διέρχονται από την αρχή των αξόνων

Συμπέρασμα:

Οικογένεια ευσταθής

Μέσω του Θεωρήματος Kharitonov αντιμετωπίζουμε τον έλεγχο ευστάθειας κατά Hurwitz σε οικογένειες διαστήματος.

- Μπορεί να επεκταθεί το Θεώρημα Kharitonov όταν υπάρχουν **εξαρτήσεις μεταξύ των συντελεστών** των πολυωνύμων ;
- Πώς μπορεί να αντιμετωπιστεί μια **αυθαίρετη περιοχή ευστάθειας** ;

$\underline{\delta}$ διάνυσμα των συντελεστών του $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_{n-1} s^{n-1} + \delta_n s^n$

$R(W)$: χώρος λύσεων ενός συνόλου W

$R(W) = \{s : \delta(s) = 0 \text{ για } \underline{\delta} \in W\}$

Θεώρημα των Ακμών

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ένα πολύτοπο πολυωνύμων με σταθερό πρόσημο του συντελεστή δ_n . Τότε το σύνορο του συνόλου $R(\Omega)$ περιλαμβάνεται στο χώρο λύσεων των εκτεθειμένων ακμών του Ω .

Πόρισμα

Αν $\Gamma \subset \mathbb{C}$ είναι μια απλά συνεκτική περιοχή τότε για κάθε πολυτοπική οικογένεια με τον ίδιο βαθμό πολυωνύμων η $R(\Omega)$ περιλαμβάνεται στη Γ αν και μόνο αν ο χώρος των λύσεων όλων των εκτεθειμένων ακμών του Ω περιέχεται στη Γ .

Παρατηρήσεις

- Δύσκολα προσδιορίζονται οι εκτεθειμένες ακμές του Ω
- Οι ακμές περιλαμβάνονται μεταξύ των κυρτών συνδυασμών των κορυφών

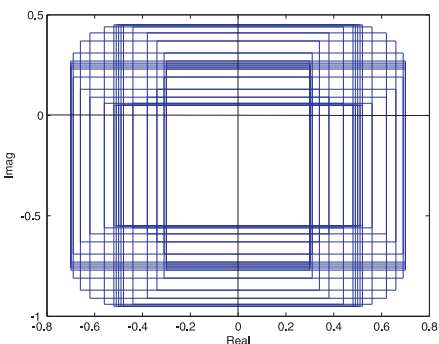
Εφαρμογή σε πολυτοπική οικογένεια

- θέτουμε όλες τους συντελεστές εκτός από έναν στις κορυφές a_i^- ή a_i^+ για $i \neq k$
- η ακμή προκύπτει από τον κυρτό συνδυασμό $\lambda a_k^- + (1 - \lambda) a_k^+$
- ο έλεγχος για ευστάθεια καταλήγει στον έλεγχο των ευθυγράμμων τμημάτων $P_\lambda(s) = \lambda P_1(s) + (1 - \lambda) P_2(s)$, $\lambda \in [0, 1]$

οικογένεια πολυωνύμων $\Delta(s) = s + p_1 - jp_2$

$p_1 \in [1, 2]$ και $p_2 \in [0, 1]$

ευσταθής περιοχή: $\mathcal{S} = \{s \in \mathbb{C} : |s + (1.5 - j0.25)| > 0.2\}$



εικόνα του $\Delta_E(s^*)$ για $s^* \in \vartheta\mathcal{S}$
($\vartheta\mathcal{S}$ περιφέρεια κύκλου)

$$\Delta_V(s) = \{s + 1, s + 1 - j, s + 2, s + 2 - j\}$$

εκτεθειμένες ακμές $\in \Delta_E(s)$

εκτεθειμένες ακμές **ευσταθείς** διότι

- κορυφές $\in \Delta_V(s)$ ευσταθείς
- οι εικόνες τους δε διέρχονται από το μηδέν

$0 \in \Delta(s^*), \forall s^* \in \vartheta\mathcal{S} \rightarrow$ **οικογένεια ασταθής**

Το Θεώρημα των Ακμών Δ_{EN} ισχύει διότι η περιοχή ευστάθειας Δ_{EN} είναι μια **απλά συνεκτική περιοχή**.

- Παράμετροι συστήματος μεταβάλλονται σε μια περιοχή αβεβαιότητας
- Ελεγκτής σταθεροποιεί το σύστημα με χρήση ανάδρασης

Αποτέλεσμα: Εμφανίζονται **εξαρτήσεις** μεταξύ των συντελεστών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Kharitonov θα πρέπει οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου να μεταβάλλονται ανεξάρτητα.

Μπορεί να εφαρμοσθεί όταν υπάρχουν εξαρτήσεις ;

Βασική προϋπόθεση η περιοχή μεταβολής των συντελεστών να βρίσκεται εντός του κουτιού.

Σε κάθε διάσταση του κουτιού μεταβάλλεται ανεξάρτητα καθένας από τους συντελεστές.

Δημιουργούνται εικονικές κορυφές που καθορίζουν τα πολυώνυμα Kharitonov που πρέπει να ελεγχθούν.

Αποτελέσματα: συντηρητικά

Οικογένεια πολυωνύμων γραμμικού διαστήματος

$$\Delta(s) = \underbrace{F_1(s)}_{\text{constant}} P_1(s) + \underbrace{F_2(s)}_{\text{constant}} P_2(s) + \cdots + \underbrace{F_m(s)}_{\text{constant}} P_m(s)$$

$$\underline{F}(s) = (F_1(s), F_2(s), \dots, F_m(s)) \quad \underline{P}(s) = (P_1(s), P_2(s), \dots, P_m(s))$$

$$\mathbf{p}_i = [p_{i,0}, p_{i,1}, \dots, p_{i,d_i}]$$

$$\mathbf{\Pi}_i = \{\mathbf{p}_i : \alpha_{i,j} \leq p_{i,j} \leq \beta_{i,j}, j = 0, \dots, d_i\} \text{ σύνολο παραμέτρων της } P_i$$

$$\mathbf{p} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m]$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_1 \times \mathbf{\Pi}_2 \times \cdots \times \mathbf{\Pi}_m \text{ καθολικό σύνολο παραμέτρων}$$

Για κάθε P_i ορίζουμε:

Τα 4 πολώνυμα Kharitonov

$$K_i(s) = \{K_i^1(s), K_i^2(s), K_i^3(s), K_i^4(s)\}$$

Τα 4 ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα πολώνυμα Kharitonov

$S_i(s)$: τμήματα Kharitonov

$$S_i(s) = \{[K_i^1(s), K_i^2(s)], [K_i^1(s), K_i^3(s)], [K_i^2(s), K_i^4(s)], [K_i^3(s), K_i^4(s)]\}$$

$P_E^l(s)$ ακραίο υποσύνολο του $P(s)$ για κάθε $l = 1, \dots, m$

$$P_E^l(s) = K_1(s) \times \dots \times K_{l-1}(s) \times S_l(s) \times K_{l+1}(s) \times \dots \times K_m(s).$$

Ένα τυπικό στοιχείο του $P_E^l(s)$

$$\left(K_1^{j_1}(s), K_2^{j_2}(s), \dots, K_{l-1}^{j_{l-1}}(s), (1-\lambda)K_l^{1,4}(s) + \lambda K_l^{2,3}(s), K_{l+1}^{j_{l+1}}(s), \dots, K_m^{j_m}(s) \right)$$

$\lambda \in [0, 1]$

$$P_E(s) = \bigcup_{l=1}^m P_E^l(s)$$

Το $P_E(s)$ περιλαμβάνει $m4^m$ τμήματα.

$$\Delta_E^l(s) = \left\{ \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle : \underline{P}(s) \in P_E^l(s) \right\} \quad \Delta_E(s) = \bigcup_{l=1}^m \Delta_E^l(s)$$

Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov

Αν μας δοθεί ένα διάνυσμα $\underline{F}(s)$ πραγματικών πολυωνύμων
 Το $\underline{F}(s)$ σταθεροποιεί ολόκληρη την οικογένεια $\mathbf{P}(s)$ m στοιχείων αν και μόνο αν το \underline{F} σταθεροποιεί κάθε τμήμα του συνόλου $\mathbf{P}_E(s)$. Ισοδύναμα, η $\Delta(s)$ είναι ευσταθής αν και μόνο αν η $\Delta_E(s)$ είναι ευσταθής.

$$\mathbf{P}_K(s) = \mathcal{K}_1(s) \times \mathcal{K}_2(s) \times \cdots \times \mathcal{K}_m(s) \subset \mathbf{P}_E(s)$$

$$\Delta_K(s) = \{ \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle : \underline{P}(s) \in \mathbf{P}_K(s) \}$$

$$\Delta_K(s) \subset \Delta_E(s) \subset \Delta(s).$$

Αν τα πολυώνυμα $F_i(s)$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Λήμματος Κορυφής

$$F_i(s) = s^{t_i}(a_i s + b_i)U_i(s)Q_i(s),$$

$t_i \geq 0$ ακέραιος, a_i, b_i πραγματικοί, $U_i(s)$ πολυώνυμο αντι-Hurwitz, $Q_i(s)$ άρτιο ή περιττό πολυώνυμο

Αρκεί το \underline{F} να σταθεροποιεί την $\mathbf{P}_K(s)$ για να είναι η $\Delta(s)$ ευσταθής.

Σύγκριση με το Θεώρημα των Ακμών

Για τον έλεγχο ευστάθειας κατά Hurwitz μιας πολυτοπικής οικογένειας μπορεί να εφαρμοστεί

- α) το Θεώρημα των Ακμών απαιτεί έλεγχο των εκτεθειμένων ακμών της $\Delta(s)$
- β) το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov (ΓΘΚ) απαιτεί έλεγχο των τμημάτων $\Delta_E(s)$

Παράδειγμα:

πολυώνυμο διαστήματος με 3 παραμέτρους αβεβαιότητας

α) 3 παράμετροι αβεβαιότητας \rightarrow 12 εκτεθειμένες ακμές

β) 1 πολυώνυμο διαστήματος \rightarrow 4 ακραία τμήματα

Συμπέρασμα:

Επιτυγχάνεται μείωση των ελέγχων με το ΓΘΚ αφού οι εκτεθειμένες ακμές αυξάνουν εκθετικά με τον αριθμό των παραμέτρων.

Παράδειγμα 1

$$G(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)} = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \quad C(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s}$$

$$a_0 \in [0.9, 1], \quad a_1 \in [0.1, 0.2], \quad b_0 \in [1.9, 2.1], \quad b_1 \in [1.8, 2.0], \quad b_2 \in [0.9, 1.0].$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\delta(s) = F_1(s)P_1(s) + F_2(s)P_2(s)$

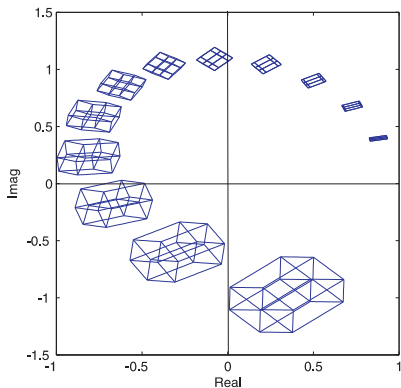
Στο $\Delta_E(s)$ ανήκουν 32 ακραία τμήματα

$$F_1(s)K_1^i(s) + F_2(s)(\lambda K_2^j(s) + (1 - \lambda)K_2^k(s))$$

$$F_1(s)(\lambda K_1^i(s) + (1 - \lambda)K_1^j(s)) + F_2(s)K_2^k(s)$$

Με βάση το ΓΘΚ για την ευστάθεια της $\Delta(s)$ αρκεί η ευστάθεια των 32 ακραίων τμημάτων (εφαρμογή του Λήμματος Ευθυγράμμου Τμήματος)

Παράδειγμα 1 (Συνέχεια)



Επειδή

- $0 \notin \Delta(j\omega), \forall \omega$
- υπάρχει $\delta(s) \in \Delta(s)$
ευσταθής ως προς S

Συμπέρασμα:

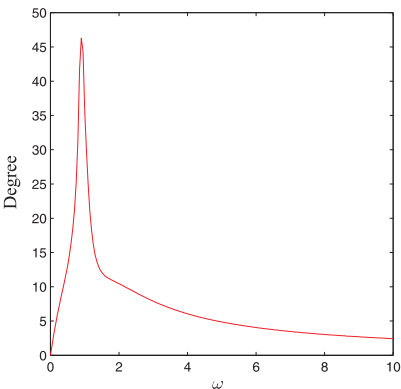
οικογένεια ευσταθής

Παράδειγμα 1 (Συνέχεια)

Εναλλακτικός έλεγχος της ευστάθειας μέσω του Θεωρήματος Φραγμένης Φάσης

Οι κορυφές Kharitonov είναι:

$$F_1(s)K_1^i(s) + F_2(s)K_2^j(s), i, j = 1, \dots, 4$$



Σύνολο κορυφών 16

- υπάρχει πολυώνυμο κορυφής ευσταθές
- μέγιστη διαφορά των γωνιών δεν ξεπερνά τις 50°

Συμπέρασμα:

οικογένεια ευσταθής

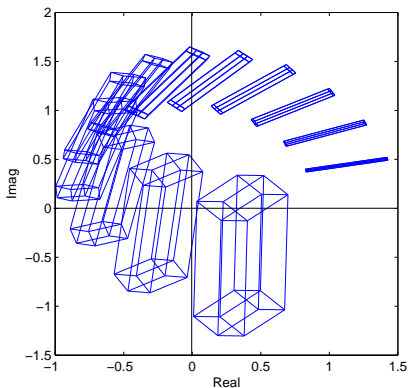
Παράδειγμα 2

Ίδιες συναρτήσεις μεταφοράς $C(s)$ και $G(s)$ με το Παράδειγμα 1.

Ίδια διαστήματα διακύμανσης των συντελεστών.

Διαφορά:

$a_0 \in [0.9, 1.5]$ αντί για $a_0 \in [0.9, 1]$



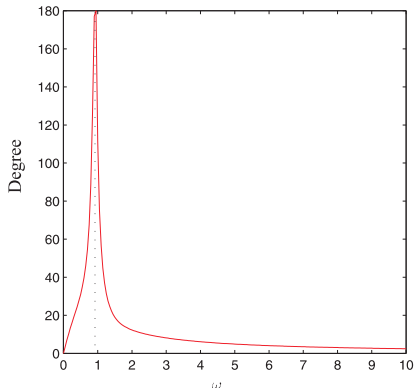
$$0 \in \Delta(j\omega)$$

Συμπέρασμα:

οικογένεια ασταθής

Παράδειγμα 2

Εναλλακτικός έλεγχος της ευστάθειας μέσω του Θεωρήματος Φραγμένης Φάσης



για $\omega \simeq 1$ η μέγιστη διαφορά φάσης αγγίζει τις 180°

Συμπέρασμα:
οικογένεια ασταθής

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **πολυγραμμική συνάρτηση** αν για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ η f είναι γραμμική συνάρτηση του x_i για x_j σταθερά όταν $j \neq i$.

Περιπτώσεις όπου εμφανίζεται πολυγραμμική εξάρτηση

- Διαγράμματα ροής με πολλούς βρόχους
- $\dot{x} = Ax + Bu$, Αβεβαιότητα στα στοιχεία του $A(p)$
 $\Delta p = [\Delta p_1, \dots, \Delta p_l]$ $A(p) = A(p^0) + \Delta p_1 E_1 + \dots + \Delta p_l E_l$
Προϋπόθεση για πολυγραμμική εξάρτηση είναι $rank E_i = 1$
χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\delta(s) = \det [sI - A]$
- κλασματικές μορφές
 $G(s) = N(s)D^{-1}(s)$ $C(s) = D_c^{-1}(s)N_c(s)$
χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\delta(s) = \det [D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)]$

$$\delta(s, \mathbf{p}) = \delta_0(\mathbf{p}) + \delta_1(\mathbf{p})s + \delta_2(\mathbf{p})s^2 + \cdots + \delta_n(\mathbf{p})s^n$$

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_l] \quad \mathbf{\Pi} = \{ \mathbf{p} : p_i^- \leq p_i \leq p_i^+, i = 1, \dots, n \}$$

$\delta_i(\mathbf{p}), i = 1, \dots, n$ **πολυγραμμικές συναρτήσεις του \mathbf{p}**

\mathbf{V} σύνολο κορυφών του $\mathbf{\Pi}$

$\mathbf{\Delta}_V(s) = \{v_1(s), v_2(s), \dots, v_k(s)\}$ **σύνολο πολωνύμων κορυφής της $\mathbf{\Delta}(s)$**

$\bar{\mathbf{\Delta}}(s) = \text{co}\mathbf{\Delta}_V(s)$ **κυρτό περίβλημα πολωνύμων κορυφής**

$$\bar{\mathbf{\Delta}}(s) = \left\{ \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i v_i(s) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

Θεώρημα Απεικόνισης

$$\mathbf{\Delta}(s^*) \subset \text{co}\mathbf{\Delta}_V(s^*) = \bar{\mathbf{\Delta}}(s^*)$$

για κάθε $s^* \in \mathbb{C}$.

Συμπέρασμα:

Η εικόνα συνόλου της πολυγραμμικής οικογένειας $\Delta(s)$ φράζεται εντός της εικόνας που παράγει η πολυτοπική οικογένεια $\bar{\Delta}(s)$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Περιπτώσεις που ΔEN ισχύει το Θεώρημα Απεικόνισης

- Όταν οι πλευρές του Π ΔEN είναι παράλληλες προς τους άξονες
Τότε η εικόνα της ακμής ΔEN είναι γενικά ευθεία
- Όταν η εξάρτηση από τις παραμέτρους είναι πολυωνυμική

Εφαρμογή του Θεωρήματος της Απεικόνισης για έλεγχο ευστάθειας

$E(s)$ σύνολο ακμών του $\bar{\Delta}(s)$

$$E(s) = \{\lambda v_i(s) + (1 - \lambda)v_j(s) : v_i(s), v_j(s) \in \Delta_V(s), 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Προϋποθέσεις:

- βαθμός ίδιος για τα πολυώνυμα $\Delta(s)$ και $\bar{\Delta}(s)$
- υπάρχει πολυώνυμο της $\Delta(s)$ ευσταθές

Θεώρημα

Με δεδομένο ότι $0 \notin \bar{\Delta}(s_0)$ για $s_0 \in \partial S$ η $\Delta(s)$ είναι ευσταθής σε σχέση με την περιοχή ευστάθειας S αν το σύνολο $E(s)$ είναι ευσταθές σε σχέση με την ίδια περιοχή.

Θεώρημα

Η $\Delta(s)$ είναι ευσταθής σε σχέση με την S αν

$$\Phi_{\Delta_V}(s^*) < \pi, \quad \forall s^* \in \partial S.$$

Παρατήρηση:

Η συνθήκη για ευστάθεια του $E(s)$ αποτελεί μόνο ικανή συνθήκη για την ευστάθεια της $\Delta(s)$.

Συμπέρασμα:

Η ευστάθεια του $E(s)$ μπορεί να παραβιάζεται αλλά η $\Delta(s)$ να είναι ευσταθής.

Αντιμετώπιση

Η ικανή συνθήκη μπορεί να γίνει πιο περιοριστική εισάγοντας επιπλέον κορυφές ώστε η $\bar{\Delta}(j\omega)$ να αποκτήσει ένα περίγραμμα πιο κοντά στην $\Delta(j\omega)$.

Διάσπαση του Π σε μικρότερα πολύτοπα Π_i

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^t \Pi_i$$

V_i κορυφές του πολυτόπου Π_i

ΔV_i κορυφές των εικόνων συνόλων

E_i ακμές των εικόνων συνόλων

Για κάθε σημείο z^* της μιγαδικής εικόνας του Δ ισχύει

$$\Delta(z^*) \subset \bigcup_{i=1}^t \text{co} \Delta_{V_i}(z^*) = \bigcup_{i=1}^t \text{co} E_i(z^*)$$

$\bar{\Delta}_{V_i}(z)$: κυρτό σύνολο που συνδέεται με το V_i

Το μη κυρτό σύνολο $\bigcup_{i=1}^t \bar{\Delta}_{V_i}(z)$ μας βοηθάει να προσεγγίσουμε καλύτερα την $\Delta(z)$ καθώς αυξάνει ο αριθμός t των πολυτόπων Π_i

Πολυγραμμικά Συστήματα Διαστήματος

$$M(s) = \frac{N(s, \mathbf{q})}{D(s, \mathbf{r})} \quad M(s) \equiv \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N_V(s)$ σύνολο πολυωνύμων κορυφής

$$\bar{N}(s) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i N_i(s) : N_i(s) \in N_V(s), \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

$$M_V(s) = \frac{N_V(s)}{D_V(s)} \quad \bar{M}(s) = \frac{\bar{N}(s)}{\bar{D}(s)}$$

$$N_V(s^*) \subset N(s^*) \subset \bar{N}(s^*)$$

για κάθε $s^* \in \mathbb{C}$

$$D_V(s^*) \subset D(s^*) \subset \bar{D}(s^*)$$

Με την υπόθεση ότι $0 \notin \bar{D}(s^*)$

$$M_V(s^*) \subset M(s^*) \subset \bar{M}(s^*)$$

Θεώρημα

Με την υπόθεση ότι ο βαθμός των πολωνύμων εντός του $\bar{M}(s)$ παραμένει αμετάβλητος το πολυγραμμικό σύστημα $M(s)$ διαθέτει εύρωστη ευστάθεια αν είναι ευσταθές για κάθε $M(s) \in \bar{M}(s)$.

μ κριτήριο επίδοσης όπως

- περιθώριο κέρδους
- περιθώριο φάσης
- παραμετρική ακτίνα ευστάθειας

μ^* worst case μ για $M(s) \in M(s)$

$\bar{\mu}$ worst case μ για $M(s) \in M_V(s)$

$\underline{\mu}$ worst case μ για $M(s) \in \bar{M}(s)$

$$\underline{\mu} \leq \mu^* \leq \bar{\mu}$$

Παράδειγμα 1

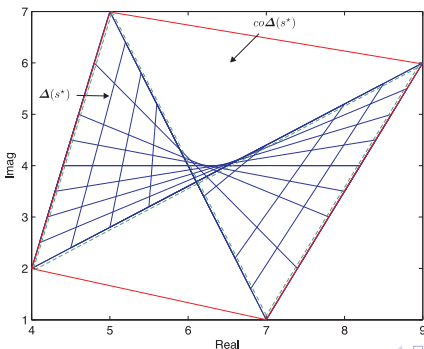
Απεικόνιση της εικόνας συνόλου πολυγραμμικής οικογένειας για $s^* = j1$

πολυγραμμικό πολυώνυμο διαστήματος

$$\delta(s, \mathbf{p}) = p_1 Q_1(s) + p_2 Q_2(s) + p_1 p_2 Q_3(s) + Q_4(s)$$

$$Q_1(s) = -6s + 2, \quad Q_2(s) = -5s - 1, \quad Q_3(s) = 10s + 3, \quad Q_4(s) = 7s + 5$$

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2] = [0, 1] \times [0, 1]$$



Βελτίωση της προσέγγισης της εικόνας μέσω κυρτών συνόλων

$$Q_0(s) + p_1 Q_1(s) + p_2 Q_2(s) + p_1 p_2 Q_3(s)$$

$$Q_0(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + s + 2$$

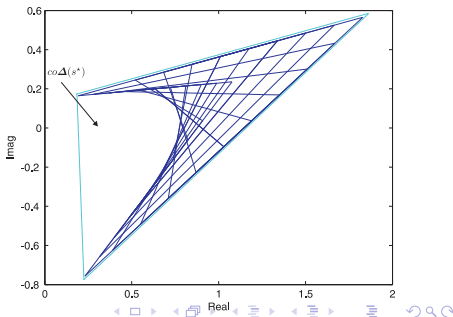
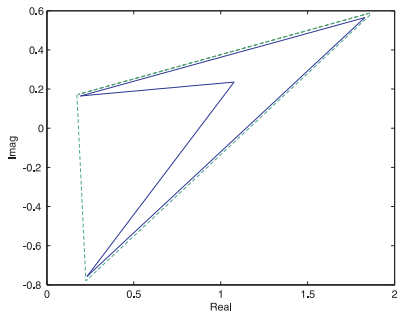
$$Q_1(s) = 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + s + 1$$

$$Q_2(s) = 1.5s^4 + 1.5s^3 + 3s^2 + s + 0.5$$

$$Q_3(s) = 3s^4 + 0.5s^3 + 1.5s^2 + 2s + 2.$$

$$[p_1, p_2] = [0, 1] \times [0, 1]$$

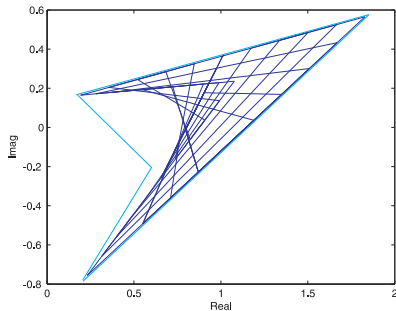
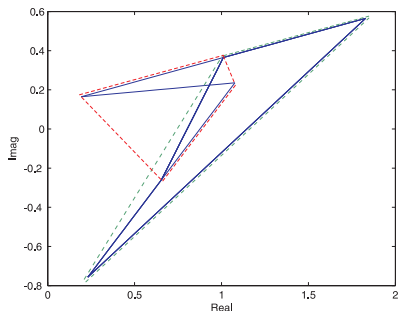
Βήμα 1



Διαμέριση του Π σε δύο τμήματα

$\Pi_1 = [0, 1] \times [0, 0.5]$ και $\Pi_2 = [0, 1] \times [0.5, 1]$

Βήμα 2

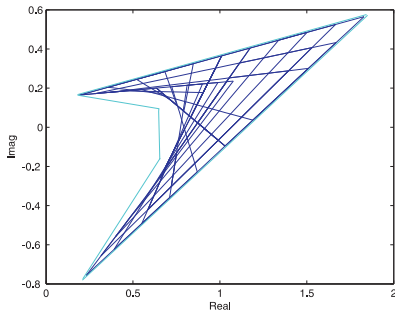
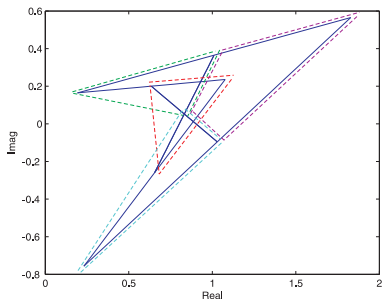


Βελτίωση της προσέγγισης σε σχέση με το Βήμα 1

Διαμέριση του Π σε 4 τμήματα

$\Pi_1 = [0, 0.5] \times [0, 0.5]$, $\Pi_2 = [0.5, 1] \times [0, 0.5]$, $\Pi_3 = [0, 0.5] \times [0.5, 1]$
 και $\Pi_4 = [0.5, 1] \times [0.5, 1]$

Βήμα 3



Βελτίωση της προσέγγισης σε σχέση με το Βήμα 2

Συναρτήσεις Μεταφοράς

$$\text{συστήματος: } G(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)} \quad \text{ελεγκτή: } F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(s) &= \{D(s) : a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n, a_k \in [a_k^-, a_k^+], k = 1, \dots, n\} \\ \mathbf{N}(s) &= \{N(s) : b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m, b_l \in [b_l^-, b_l^+], l = 1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Χαρακτηριστικά πολυώνυμα

$$\Delta(s) = F_1(s)\mathbf{N}(s) + F_2(s)\mathbf{D}(s)$$

Σύνολο ακραίων συστημάτων που συσχετίζεται με τις κορυφές της οικογένειας

$$\mathbf{G}_K(s) = \frac{\mathcal{K}_N(s)}{\mathcal{K}_D(s)}$$

$$(\mathbf{N}(s) \times \mathbf{D}(s))_E = \left(\underbrace{\mathcal{K}_N(s)}_{\text{Khar polynomials}} \times \underbrace{\mathcal{S}_D(s)}_{\text{Khar segments}} \right) \cup \left(\underbrace{\mathcal{S}_N(s)}_{\text{Khar segments}} \times \underbrace{\mathcal{K}_D(s)}_{\text{Khar polynomials}} \right)$$

Σύνολο ακραίων συστημάτων που συσχετίζεται με τις ακμές της οικογένειας

$$\mathbf{G}_E(s) = \left\{ \frac{N(s)}{D(s)} : (N(s), D(s)) \in (\mathbf{N}(s) \times \mathbf{D}(s))_E \right\} = \frac{\mathcal{K}_N(s)}{\mathcal{S}_D(s)} \cup \frac{\mathcal{S}_N(s)}{\mathcal{K}_D(s)}$$

$$\begin{aligned} \Delta_E(s) &= \{F_1(s)N(s) + F_2(s)D(s) : (N(s), D(s)) \in (\mathbf{N}(s) \times \mathbf{D}(s))_E\} \\ &= (F_1(s)\mathcal{K}_N(s) + F_2(s)\mathcal{S}_D(s)) \cup (F_1(s)\mathcal{S}_N(s) + F_2(s)\mathcal{K}_D(s)) \end{aligned}$$

Ιδιότητα της Παραγωγής του Συνόρου

$$\alpha) \vartheta \mathbf{G}(j\omega) \subset \mathbf{G}_E(j\omega)$$

$$\beta) \vartheta \Delta(j\omega) \subset \Delta_E(j\omega)$$

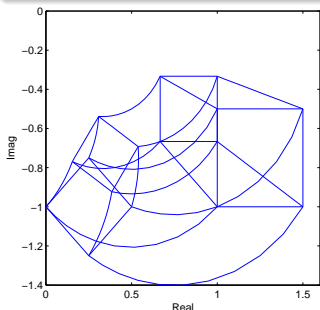
Παράδειγμα 1

Καθορισμός της εικόνας συνόλου μέσω των ακραίων υποσυστημάτων

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

$$a_0 \in [1, 2], \quad a_1 \in [2, 3], \quad a_2 \in [2, 3], \quad b_0 \in [1, 2], \quad b_1 \in [2, 3]$$

Το σύνορο της εικόνας περιλαμβάνεται στην εικόνα των ακραίων υποσυστημάτων G_E .



$$\omega = 1$$

Σύνολο ακραίων υποσυστημάτων G_E του ανοιχτού συστήματος διαστήματος

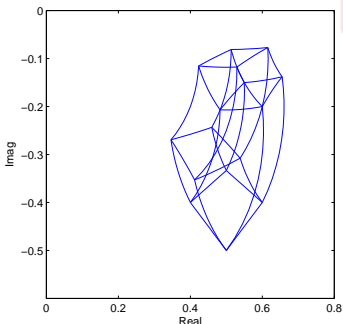
$$\frac{K_n^i(s)}{\lambda K_d^j(s) + (1 - \lambda) K_d^k(s)}$$

$$\frac{\lambda K_n^j(s) + (1 - \lambda) K_n^k(s)}{K_d^i(s)}$$

$\underbrace{4}_{\text{Khar polynomials}} \times \underbrace{4}_{\text{Khar segments}} \times 2 = 32$ ακραία υποσυστήματα

Παράδειγμα 2

Καθορισμός της εικόνας συνόλου για το σύστημα κλειστού βρόχου με συνάρτηση μεταφοράς $T^y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$



$\omega = 1$

Για κάθε $\omega \geq 0$ $\vartheta T^y \subset T_E^y$

Σύνολο ακραίων υποσυστημάτων T_E^y του κλειστού συστήματος διαστήματος

$$\frac{K_n^i(j\omega)}{\lambda K_d^j(j\omega) + (1-\lambda)K_d^k(j\omega) + K_n^i(j\omega)}$$

$$\frac{\lambda K_n^j(j\omega) + (1-\lambda)K_n^k(j\omega)}{\lambda K_n^j(j\omega) + (1-\lambda)K_n^k(j\omega) + K_d^i(j\omega)}$$

$\underbrace{4}_{\text{Khar polynomials}} \times \underbrace{4}_{\text{Khar segments}} \times 2 = 32$ ακραία υποσυστήματα

Παράδειγμα 3

Προσδιορισμός περιθωρίων κέρδους και φάσης από τον φάκελο των διαγράμμάτων Nyquist-Bode του συστήματος διαστήματος

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad C(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s}$$

$$b_0 \in [0.9, 1.1], \quad b_1 \in [0.1, 0.2]$$

$$a_0 \in [1.9, 2.1], \quad a_1 \in [1.8, 2.0], \quad a_2 \in [0.9, 1.0]$$

Περιθώριο κέρδους είναι η μεγαλύτερη τιμή K_G του K ώστε

$$(1 + K)F_1(s)N(s) + F_2(s)D(s)$$

να παραμένει ευσταθές για όλα τα $K \in [0, K_G]$

Περιθώριο φάσης είναι η μεγαλύτερη τιμή θ_G του θ ώστε

$$e^{j\theta} F_1(s)N(s) + F_2(s)D(s)$$

παραμένει ευσταθές για όλα τα $\theta \in [0, \theta_G]$

Παράδειγμα 3 (Συνέχεια)

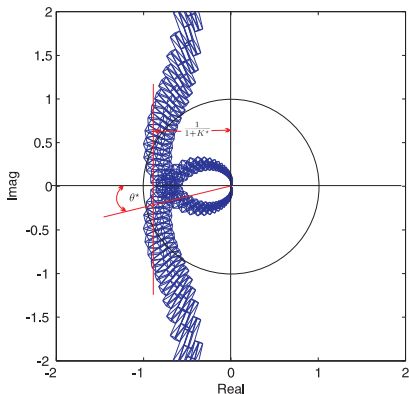
Ακραία περιθώρια κέρδους και φάσης

$$K^* = \inf_{G(s) \in \mathbf{G}_E(s)} K_G$$

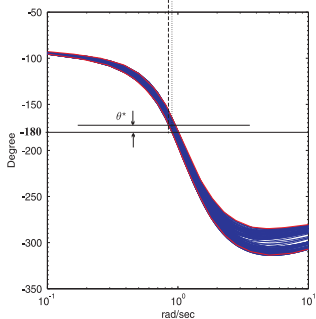
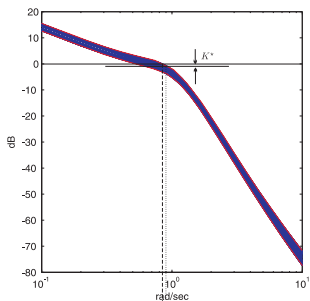
$$\theta^* = \inf_{G(s) \in \mathbf{G}_E(s)} \theta_G$$

Αν τα $F_i(s)$ ικανοποιούν τις συνθήκες του **Λήμματος Κορυφής**

$$K^* = \inf_{G(s) \in \mathbf{G}_K(s)} K_G$$



Το σημείο **-1** βρίσκεται **αριστερά**
του διαγράμματος \rightarrow σύστημα
διαστήματος κλειστού βρόχου
ευσταθές



Περιθώριο κέρδους

Απόσταση σε dB του $|C(j\omega)G(j\omega)|$ από τα 0 dB όταν έχουμε διάβαση της καμπύλης της φάσης από τις -180° .

Περιθώριο φάσης

Απόσταση της $\angle C(j\omega)G(j\omega)$ από τις -180° όταν έχουμε διάβαση της καμπύλης του κέρδους από τα 0 dB

Θέματα που καλύφθηκαν:

- Το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου
- Η Αρχή Εξαίρεσης του Μηδενός
- Το Θεώρημα Hermite-Biehler
- Η Συνθήκη Φραγμένης Φάσης
- Το Λήμμα Ευθυγράμμου Τμήματος πολυωνύμων
- Το Λήμμα Κυρτής Διεύθυνσης
- Το Λήμμα Κορυφής
- Ακτίνα της ℓ_2 σφαίρας ευστάθειας στο χώρο των συντελεστών
- Ακτίνα της ℓ_p σφαίρας μέσω του γεωμετρικού τύπου Tsyarkin-Polyak
- Ευστάθεια πολυωνύμων δίσκων
- Το παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας
- Το Θεώρημα Kharitonov
- Το Θεώρημα των Ακμών

- Το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov
- Συχνотική συμπεριφορά των συστημάτων διαστήματος
- Φάκελοι των διαγραμμάτων Bode και Nyquist στα συστήματα διαστήματος
- Πολυγραμμικές οικογένειες πολυωνύμων
- Το Θεώρημα της Απεικόνισης

Θέματα που δεν καλύφθηκαν στην παρουσίαση:

- Πολυγραμμικά συστήματα διαστήματος
- Φάκελοι των διαγραμμάτων Bode, Nyquist και Nichols στα πολυγραμμικά συστήματα διαστήματος
- Ευστάθεια των πινάκων διαστήματος
- Ακτίνα της σφαίρας ευστάθειας των πινάκων διαστήματος