



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ”

# **Ανασκόπηση της Παραμετρικής Προσέγγισης στον Εύρωστο Έλεγχο**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Πετρούλα Τσαμπούκα**

**Επιβλέπων:** Ευστάθιος Αντωνίου  
Επικ. Καθηγητής Α.Τ.Ε.Ι.Θ.

Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2012

---



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ”

## Ανασκόπηση της Παραμετρικής Προσέγγισης στον Εύρωστο Έλεγχο

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Πετρούλα Τσαμπούκα

**Επιβλέπων:** Ευστάθιος Αντωνίου  
Επικ. Καθηγητής Α.Τ.Ε.Ι.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την

.....  
Α. Βαρδουλάκης  
Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....  
Ν. Καραμπετάκης  
Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....  
Ε. Αντωνίου  
Επικ. Καθηγητής Α.Τ.Ε.Ι.Θ.

---

.....  
Πετρούλα Τσαμπούκα  
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Η/Υ Α.Π.Θ.

Copyright ©Πετρούλα Π. Τσαμπούκα, 2012  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

# Περίληψη

Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσει ο έλεγχος ενός συστήματος παρουσία αβεβαιότητας στην περιγραφή του. Η αβεβαιότητα διακρίνεται σε δύο κατηγορίες, τη μη δομημένη και τη δομημένη. Η μη δομημένη αβεβαιότητα έχει τη μορφή διαταραχών φραγμένου μέτρου στα πλαίσια κάποιας νόρμας που δρουν αθροιστικά ή πολλαπλασιαστικά στη συνάρτηση μεταφοράς. Η δομημένη αβεβαιότητα που θα αποτελέσει αντικείμενο της μελέτης μας προσεγγίζεται παραμετρικά μέσα από τη δυνατότητα που δίνεται στους συντελεστές των πολωνύμων της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος να μεταβάλλονται σε μια περιοχή τιμών. Καθώς οι παράμετροι λαμβάνουν τιμές από όλο το επιτρεπτό διάστημα τιμών παράγεται μία οικογένεια πολωνύμων. Ένα βασικό πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι κατά πόσον όλα τα μέλη της οικογένειας αυτής είναι ευσταθή κάτω από τη σταθεροποιητική δράση ενός ελεγκτή με δεδομένα χαρακτηριστικά. Στην περίπτωση που αυτό συμβαίνει η οικογένεια χαρακτηρίζεται από εύρωστη ευστάθεια.

Όταν οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολωνύμου μεταβάλλονται ανεξάρτητα τότε παράγεται ένα πολωνύμιο διαστήματος. Ειδικά η ευστάθεια των πολωνύμων διαστήματος αντιμετωπίζεται μέσα από το Θεώρημα Kharitonov το οποίο περιορίζει τον απαιτούμενο για ευστάθεια αριθμό ελέγχων σε 4 πολωνύμια που καλούνται πολωνύμια Kharitonov. Το αξιοσημείωτο σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι ο αριθμός αυτός είναι ανεξάρτητος από τη διάσταση του χώρου των συντελεστών.

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται και στην περίπτωση που υπάρχουν εξαρτήσεις μεταξύ των συντελεστών του χαρακτηριστικού πολωνύμου. Οι εξαρτήσεις προκύπτουν λόγω του τρόπου που εισάγεται η αβεβαιότητα στους συντελεστές. Ο τρόπος αυτός είναι μέσω παραμέτρων που μεταβάλλονται ανεξάρτητα μεταξύ τους και υπεισέρχονται γραμμικά στους συντελεστές. Η μεταβολή των παραμέτρων στα επιτρεπτά διαστήματα τιμών οδηγεί στη δημιουργία οικογενειών πολωνύμων γραμμικού διαστήματος που αποτελούν στην ουσία πολυτοπικές οικογένειες στο χώρο των συντελεστών. Το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov περιορίζει τον έλεγχο για εύρωστη ευστάθεια αυτών των οικογενειών στον έλεγχο ευθυγράμμων τμημάτων που το πλήθος τους δεν εξαρτάται από τη διάσταση του παραμετρικού χώρου.

Η προσέγγιση μέσω του Γενικευμένου Θεωρήματος Kharitonov βρίσκει εφαρμογή μόνο στην περίπτωση που η περιοχή ευστάθειας είναι το ανοιχτό αριστερό ημιεπίπεδο. Ο έλεγχος της ευστάθειας πολυτοπικών οικογενειών επεκτείνεται σε αυθαίρετη περιοχή ευστάθειας με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Ακμών το οποίο όμως εμπεριέχει περισσότερους ελέγχους σε σχέση

με το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov καθώς εμπλέκει τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα πολύωνυμα που προκύπτουν αν οι παράμετροι τεθούν στις ακραίες τιμές τους.

Επιπλέον εξετάζουμε οικογένειες πολυωνύμων που οι συντελεστές τους εμφανίζουν πολυγραμμική εξάρτηση από τις παραμέτρους αβεβαιότητας. Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος της Απεικόνισης αντιμετωπίζουμε την ευστάθεια αυτών των οικογενειών μέσα από την ευστάθεια πολυτοπικών οικογενειών για την οποία διαθέτουμε ένα εύρος τεχνικών. Στην κατηγορία προβλημάτων όπου εμφανίζεται πολυγραμμική εξάρτηση ανήκουν και κατηγορίες συστημάτων που περιγράφονται από πίνακες.

Ένα σημαντικό μέρος της εργασίας καταλαμβάνει η παρουσίαση μεθόδων για τον προσδιορισμό της απόστασης ενός συστήματος από την περιοχή αστάθειας. Προς την κατεύθυνση αυτή υπολογίζουμε την ακτίνα της μέγιστης σφαίρας ευστάθειας στο χώρο των συντελεστών είτε υπολογιστικά είτε γραφικά μέσω του γεωμετρικού τύπου Tsytkin-Polyak. Τα αποτελέσματα επεκτείνονται στην περίπτωση πολυτοπικών οικογενειών όπου οδηγούμαστε στον προσδιορισμό του παραμετρικού περιθωρίου ευστάθειας. Η μελέτη της συμπεριφοράς των συστημάτων γραμμικού διαστήματος στο πεδίο της συχνότητας μας οδηγεί στην κατασκευή των φακέλων των διαγραμμάτων Bode, Nyquist και Nichols που περιλαμβάνουν επαρκή πληροφορία για τον καθορισμό των περιθωρίων κέρδους και φάσης της οικογένειας. Οι φάκελοι των παραπάνω διαγραμμάτων παράγονται και στην περίπτωση πολυγραμμικών συστημάτων διαστήματος για να εξαχθεί πληροφορία για τα περιθώρια ευστάθειας στη χειρότερη περίπτωση.

## ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Εύρωστος έλεγχος, πολυώνυμα διαστήματος, πολυτοπική οικογένεια, πολυώνυμα Kharitonov, Θεώρημα των Ακμών, Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov, Θεώρημα Απεικόνισης, φάκελοι διαγραμμάτων Bode, Nyquist και Nichols, πίνακες διαστήματος

---





# Abstract

This thesis deals with the problem of system stabilization in the presence of uncertainties regarding the plant's description by the use of a controller. Uncertainties fall into two categories, those that are structured and those that are unstructured. Unstructured uncertainty appears in the form of perturbations of bounded norm that act either additively or multiplicatively on the transfer function characterizing the plant's behavior. Structured uncertainty will be the subject of our study and the parametric approach will be opted for by allowing the polynomial coefficients of the transfer function to take values in a range. As the parameters vary in the range of admissible values a family of polynomials is produced. A fundamental problem that we will be concerned with is whether all the members of this family are stable under the stabilizing effect of a controller with constant characteristics. If this is the case the family enjoys robust stability.

When the coefficients of the characteristic polynomial vary independently then an interval polynomial is produced. In order to determine the stability of interval polynomials we resort to Kharitonov's Theorem since through its use we achieve a reduction on the number of checks needed to establish stability. By use of the Theorem only 4 polynomials have to be checked, which are called Kharitonov polynomials. The remarkable thing in this case is that the number of checks is independent of the dimension of the coefficient space.

The above result can be generalized to the case that dependencies exist among the coefficients of the characteristic polynomial. The dependencies arise due to the way we introduce uncertainty in the coefficients. This is done through the use of parameters that vary independently and enter the coefficients linearly. The perturbation of the parameters in the allowed intervals leads to polynomial families which are linear combinations of interval polynomials and are in fact polytopic families in the coefficient space. The Generalized Kharitonov's Theorem reduces the number of checks needed to establish robust stability of such families to that of segments the number of which is independent of the dimension of the parameter space.

The approach based on the Generalized Kharitonov's Theorem is applicable only in the case in which the stability region is the open left complex half-plane. Dealing with the stability of polytopic families with respect to arbitrary stability regions is made possible by the use of the Edge Theorem. The Edge Theorem entails more checks than the ones required by the Generalized Kharitonov's Theorem since it involves the testing of the linear segments joining the polynomials

that are produced if the parameters are set to their extremal values.

Furthermore, we study families of polynomials the coefficients of which exhibit multilinear dependencies on the uncertainty parameters. By employing the Mapping Theorem we handle the stability of such families through the stability of polytopic families for which there exist several techniques. Multilinear dependencies appear in some categories of systems that are described by matrices.

A substantial part of the thesis covers the presentation of methods for calculating the distance that separates a system from the instability region. In this direction we determine the radius of the largest stability sphere in the coefficient space either computationally or graphically through the Tsytkin-Polyak locus. The results can be extended to polytopic families in which case we are led to the determination of the parametric stability margin. The study of the behavior of linear interval systems in the frequency domain results in the construction of the envelopes of the Bode, Nyquist and Nichols diagrams which contain adequate information for the determination of the family's gain and phase margins. The envelopes of the aforementioned diagrams are also produced in the case of multilinear interval systems in order to extract information regarding the stability margins in the worst case.

## KEY WORDS

Robust control, interval polynomials, polytopic families, Kharitonov polynomials, Edge Theorem, Generalized Kharitonov's Theorem, Mapping Theorem, envelopes of Bode, Nyquist and Nichols diagrams, interval matrices





# Περιεχόμενα

	Σελίδα
Περίληψη	5
Abstract	9
<b>0 Εισαγωγή</b>	<b>17</b>
<b>1 Θεωρία Ευστάθειας μέσω του Θεωρήματος Διάσχισης του Συνόρου (Boundary Crossing Theorem)</b>	<b>25</b>
1.1 Το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου . . . . .	25
1.2 Η Αρχή Εξαίρεσης του Μηδενός . . . . .	28
1.3 Το Θεώρημα Hermite-Biehler . . . . .	28
1.3.1 Επέκταση του Θεωρήματος Hermite-Biehler στα πολυώνυμα με μιγαδικούς συντελεστές . . . . .	31
1.4 Το Θεώρημα Hermite-Biehler: Η περίπτωση Schur . . . . .	32
1.5 Το κριτήριο ευστάθειας κατά Schur . . . . .	34
1.6 Το κριτήριο ευστάθειας κατά Hurwitz . . . . .	35
1.7 Παραδείγματα εφαρμογής των κριτηρίων ευστάθειας . . . . .	37
<b>2 Ευστάθεια ενός Ευθυγράμμου Τμήματος</b>	<b>41</b>
2.1 Η Συνθήκη Φραγμένης Φάσης . . . . .	41
2.2 Το Λήμμα Ευθυγράμμου Τμήματος (Segment Lemma) . . . . .	43
2.2.1 Η περίπτωση Hurwitz . . . . .	43
2.2.2 Η περίπτωση Schur . . . . .	44
2.3 Βασικές σχέσεις που αφορούν τη φάση . . . . .	45
2.3.1 Ιδιότητες της φάσης για πολυώνυμα Hurwitz . . . . .	46
2.3.2 Σχέσεις που αφορούν τη φάση ενός ευθυγράμμου τμήματος . . . . .	47
2.4 Κυρτές διευθύνσεις . . . . .	49
2.5 Το Λήμμα Κορυφής . . . . .	50

2.6	Παραδείγματα ελέγχου ευστάθειας ευθυγράμμου τμήματος πολωνύμων . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Η Σφαίρα Ευστάθειας στο Χώρο των Συντελεστών</b>	<b>59</b>
3.1	Η σφαίρα των ευσταθών πολωνύμων . . . . .	59
3.2	Η πραγματική $\ell_2$ σφαίρα ευστάθειας . . . . .	60
3.2.1	Ευστάθεια Hurwitz . . . . .	61
3.2.2	Ευστάθεια κατά Schur . . . . .	64
3.3	Ο γεωμετρικός τόπος Tsyurkin-Polyak: Η $\ell_p$ σφαίρα ευστάθειας . . . . .	66
3.4	Μελέτη της εύρωστης ευστάθειας στα πολυώνυμα δίσκων . . . . .	71
3.4.1	Η περίπτωση Hurwitz . . . . .	72
3.4.2	Η περίπτωση Schur . . . . .	75
3.4.3	Παρατηρήσεις σχετικά με την ευστάθεια των πολωνύμων δίσκων . . . . .	76
3.5	Παραδείγματα . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Το Παραμετρικό Περιθώριο Ευστάθειας</b>	<b>83</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	83
4.2	Η σφαίρα ευστάθειας στο χώρο των παραμέτρων . . . . .	85
4.3	Προσδιορισμός του μέγιστου περιθωρίου μέσω της απεικόνισης στο μιγαδικό επίπεδο . . . . .	86
4.4	Υπολογισμός του περιθωρίου ευστάθειας στη γραμμική περίπτωση . . . . .	86
4.5	Το περιθώριο ευστάθειας στην Ευκλείδεια νόρμα . . . . .	88
4.6	Πολυτοπικές οικογένειες . . . . .	89
4.7	Εκτεθειμένες ακμές και κορυφές . . . . .	89
4.8	Συνθηκές φραγμένης φάσης για τον έλεγχο της εύρωστης ευστάθειας πολυτόπων . . . . .	91
4.9	Η γραφική παράσταση Tsyurkin-Polyak . . . . .	93
4.10	Παραδείγματα . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Το Θεώρημα Kharitonov σε Πολυώνυμα Διαστήματος</b>	<b>105</b>
5.1	Το Θεώρημα Kharitonov για πραγματικά πολυώνυμα . . . . .	105
5.2	Το Θεώρημα Kharitonov για μιγαδικά πολυώνυμα . . . . .	111
5.3	Απεικόνιση της οικογένειας διαστήματος στο μιγαδικό επίπεδο . . . . .	113
5.3.1	Απόδειξη του Θεωρήματος Kharitonov με βάση τη μιγαδική εικόνα συνόλου . . . . .	113
5.3.2	Απόδειξη του Θεωρήματος Kharitonov μέσω των εκτεθειμένων ακμών ενός πολυτόπου . . . . .	114
5.3.3	Αναπαράσταση των πολωνύμων διαστήματος με 2 παραμέτρους . . . . .	114
5.4	Οι ιδιότητες ακροτάτου των πολωνύμων Kharitonov . . . . .	115
5.5	Ακρότατα του περιθωρίου κέρδους για τα συστήματα διαστήματος . . . . .	117
5.6	Εύρωστη σταθεροποίηση με ανάδραση κατάστασης . . . . .	118

5.7	Ευστάθεια κατά Schur των πολυωνύμων διαστήματος . . . . .	121
5.8	Παραδείγματα . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Το Θεώρημα των Ακμών</b>	<b>129</b>
6.1	Εισαγωγή . . . . .	129
6.2	Το Θεώρημα των Ακμών . . . . .	130
<b>7</b>	<b>Το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov</b>	<b>133</b>
7.1	Εισαγωγή . . . . .	133
7.2	Εύρωστη ευστάθεια οικογενειών πολυωνύμων γραμμικού διαστήματος . . . . .	134
7.2.1	Κατασκευή του ακραίου υποσυνόλου . . . . .	135
7.3	Το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov . . . . .	137
7.3.1	Ερμηνεία με βάση τη μιγαδική εικόνα συνόλου . . . . .	141
7.4	Παραδείγματα . . . . .	142
<b>8</b>	<b>Συμπεριφορά των Συστημάτων Γραμμικού Διαστήματος στο Πεδίο της Συχνότητας</b>	<b>147</b>
8.1	Εισαγωγή . . . . .	147
8.2	Συστήματα διαστήματος . . . . .	148
8.3	Ιδιότητες του πεδίου της συχνότητας . . . . .	149
8.4	Φάκελοι διαγραμμάτων Nyquist, Bode και Nichols . . . . .	150
8.4.1	Ακραία περιθώρια ευστάθειας . . . . .	153
8.4.2	Συντηρητισμός των φακέλων . . . . .	154
8.4.3	Ελάχιστο παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας . . . . .	155
8.5	Συστήματα ελέγχου γραμμικού διαστήματος . . . . .	156
8.6	Πολυτοπικά συστήματα . . . . .	157
8.7	Γραμμικοί κλασματικοί μετασχηματισμοί για συστήματα διαστήματος . . . . .	158
8.8	Παραδείγματα . . . . .	159
<b>9</b>	<b>Πολυγραμμικά Συστήματα Διαστήματος:</b>	
	<b>Το Θεώρημα της Απεικόνισης</b>	<b>165</b>
9.1	Εισαγωγή . . . . .	165
9.2	Το Θεώρημα της Απεικόνισης . . . . .	166
9.3	Εύρωστη ευστάθεια μέσω του Θεωρήματος της Απεικόνισης . . . . .	168
9.4	Βελτίωση των προσεγγίσεων μέσω κυρτών συνόλων . . . . .	169
9.5	Πολυγραμμικά συστήματα διαστήματος . . . . .	170
9.6	Παραδείγματα . . . . .	172

<b>10 Ιδιότητες του Πεδίου Συχνότητας των Πολυγραμμικών Συστημάτων Διαστήματος</b>	<b>177</b>
10.1 Εισαγωγή . . . . .	177
10.2 Πολυγραμμικά πολυώνυμα διαστήματος . . . . .	178
10.2.1 Εξαρτήσεις μεταξύ των διαταραχών . . . . .	180
10.3 Η ιδιότητα συνόρου των ακραίων πολλαπλοτήτων . . . . .	182
10.4 Παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας . . . . .	184
10.5 Πολυγραμμικά συστήματα διαστήματος . . . . .	185
10.6 Επεκτάσεις των αποτελεσμάτων παραγωγής του συνόρου . . . . .	188
10.7 Παραδείγματα . . . . .	191
<b>11 Διαταραχές των Παραμέτρων του Χώρου Κατάστασης</b>	<b>195</b>
11.1 Διαταραχές στο χώρο των παραμέτρων . . . . .	195
11.2 Διαταραχές μοναδιαίας τάξης . . . . .	197
11.3 Ευστάθεια του πίνακα διαστήματος μέσω του Θεωρήματος της Απεικόνισης . . . . .	198
11.4 Έλεγχος ευστάθειας χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Lyapunov . . . . .	199
11.5 Διαδικασία αύξησης της περιοχής ευστάθειας . . . . .	203
11.6 Ειδικές περιπτώσεις πινάκων διαστήματος . . . . .	205
11.7 Παραδείγματα . . . . .	206



# Κεφάλαιο 0

## Εισαγωγή

Ο κλασικός αυτόματος έλεγχος μελετά την ευστάθεια και τις επιδόσεις ενός συστήματος. Η ευστάθεια ενός προς έλεγχο συστήματος (plant) επιτυγχάνεται με χρήση μοναδιαίας ανάδρασης και της δράσης ενός ελεγκτή ο οποίος κάθε χρονική στιγμή επιχειρεί να μειώσει το σφάλμα μεταξύ της πραγματικής τιμής του μεγέθους που θέλουμε να ελεγχθεί και της επιθυμητής του τιμής το οποίο καλείται σφάλμα παρακολούθησης. Η ευστάθεια σε ένα σύστημα αποτελεί το απόλυτο ζητούμενο αφού σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση τα σήματα που αντιστοιχούν στα φυσικά μεγέθη αυξάνουν χωρίς άνω φράγμα με αποτέλεσμα να οδηγούμαστε στην καταστροφή του συστήματος.

Σε μια τέτοιου είδους ανάλυση κάνουμε την υπόθεση ότι το σύστημα περιγράφεται από μία δεδομένη συνάρτηση μεταφοράς αμετάβλητη κατά τη διάρκεια λειτουργίας του και σαφώς καθορισμένη. Στην πράξη όμως υπεισέρχονται αβεβαιότητες στην περιγραφή που μπορούν να αποδοθούν σε λόγους όπως η φθορά, η καταπόνηση του συστήματος ή οι διαφορετικές με το χρόνο συνθήκες λειτουργίας. Οι λόγοι που προαναφέραμε ανήκουν στους ενδογενείς ενός συστήματος ενώ μέρος της αβεβαιότητας που υπάρχει στο σύστημα μπορεί να αποδοθεί στην επίδραση του περιβάλλοντος όπως μεταβαλλόμενα φορτία που χαρακτηρίζονται ως διαταραχές. Η αβεβαιότητα εμφανίζεται σε διάφορα σημεία όπως στην μοντελοποίηση του προς έλεγχο συστήματος, στις διαταραχές που μπορούν να συμβούν καθώς και σε σφάλματα μετρήσης του σήματος εξόδου και κατ' επέκταση σε ανακριβή σφάλματα παρακολούθησης που οδηγούν τον ελεγκτή.

Το ερώτημα που εύλογα ανακύπτει είναι αν ο δεδομένος ελεγκτής που έχει σχεδιασθεί για να σταθεροποιεί ένα σύστημα χωρίς αβεβαιότητες μπορεί να ανταποκριθεί στο ρόλο του όταν στην ανάλυση της ευστάθειας ληφθούν υπόψη και οι αβεβαιότητες. Ένα σύστημα που διατηρεί την ευστάθειά του για διάφορες κλάσεις αβεβαιότητας λέμε ότι χαρακτηρίζεται από εύρωστη ευστάθεια. Ένα επίσης βασικό ζητούμενο του κλασικού αυτόματου ελέγχου είναι η επίδοση του συστήματος και με τον όρο επίδοση εννοούμε την ικανότητα το μέτρο του σφάλματος παρακολούθησης να παραμένει φραγμένο με το χρόνο για δεδομένη νόρμα. Όταν η χειρότερη επίδοση ενός συστήματος παραμένει εντός καθορισμένων ορίων για δεδομένες κλάσεις αβεβαιότητας τότε λέμε ότι το σύ-

στημα επιδεικνύει εύρωστη επίδοση.

Τυπική διαδικασία κατά το σχεδιασμό ενός συστήματος αποτελεί η διέγερσή του από διάφορα σήματα αναφοράς όπως είναι η βηματική συνάρτηση ή η συνάρτηση μοναδιαίας κλίσης και η σχεδίαση του έτσι ώστε να πληρεί συγκεκριμένες προδιαγραφές που αφορούν στο σφάλμα σταθερής κατάστασης, στο χρόνο ανόδου, αποκατάστασης, καθυστέρησης, κ.τ.λ. Παραδείγματα όπου η αβεβαιότητα πρέπει να ληφθεί υπόψη στο σχεδιασμό του συστήματος αποτελεί η περίπτωση όπου εξωγενή σήματα όπως το σήμα αναφοράς  $r$  και διαταραχών  $d$  αποτελούνται από βηματικές συναρτήσεις και συναρτήσεις ράμπας με άγνωστα πλάτη και άγνωστες κλίσεις, αντίστοιχα. Αβεβαιότητα υπεισέρχεται στο σύστημα και λόγω του θορύβου μετρήσης του σήματος εξόδου  $n$ . Το συχνοτικό περιεχόμενο των σημάτων αναφοράς και διαταραχών καταλαμβάνει τη χαμηλή περιοχή των συχνοτήτων  $[0, \omega_0]$  ενώ αντίθετα το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας του θορύβου καταλαμβάνει την υψηλότερη ζώνη  $[\omega_1, \omega_2]$ . Στην περίπτωση αβεβαιότητας η επίτευξη του στόχου μας όσον αφορά στο σφάλμα παρακολούθησης μπορεί να συντελεστεί είτε ως προς τη μέση τιμή του σφάλματος είτε ως προς τη χειρότερη τιμή του σε όλη την κλάση αβεβαιότητας. Θεωρούμε τα συστήματα μιας εισόδου-μιας εξόδου (SISO) όπου το προς έλεγχο σύστημα και ο ελεγκτής περιγράφονται από τις συναρτήσεις μεταφοράς  $G(s)$  και  $C(s)$  στο πεδίο Laplace. Μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση ευαισθησίας  $S(s)$  και τη συνάρτηση συμπληρωματικής ευαισθησίας  $T(s)$

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)}, \quad T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}.$$

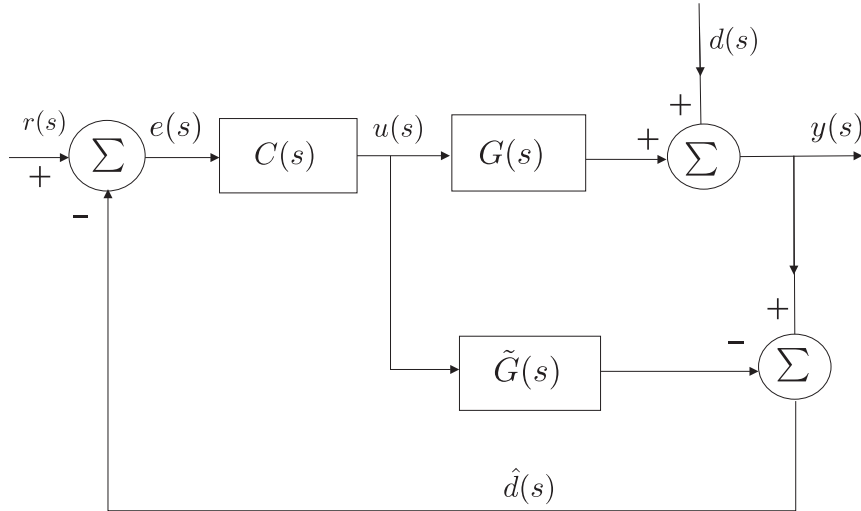
Το σφάλμα παρακολούθησης  $e(s)$  συνδέεται με τις παραπάνω συναρτήσεις μέσω της σχέσης

$$e(s) = -Sd + Sr + Tn.$$

Απο τον ορισμό των  $S(s)$  και  $T(s)$  προκύπτει ότι

$$S(s) + T(s) = 1, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι οι  $S(j\omega)$  και  $T(j\omega)$  δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα μικρές για κάθε  $\omega$ . Παρ' όλ' αυτά η απαίτηση για μικρό σφάλμα παρακολούθησης μπορεί να ικανοποιηθεί λόγω της διαφορετικής συχνοτικής περιοχής των σημάτων  $d$ ,  $r$  και  $n$ . Επειδή η συνάρτηση  $S$  πολλαπλασιάζει τα σήματα  $d$  και  $r$  αρκεί να έχει χαμηλές τιμές στη ζώνη  $[0, \omega_0]$  για πιστή παρακολούθηση του σήματος αναφοράς και μείωση της ευαισθησίας ενώ η  $T$  που επιδρά στο  $n$  θα πρέπει να παραμένει μικρή στο διάστημα  $[\omega_1, \omega_2]$  για εξασθένηση του θορύβου. Ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά τα συστήματα με μοναδιαία ανάδραση όπου το σφάλμα παρακολούθησης οδηγείται σε έναν ελεγκτή που βρίσκεται σε σειρά με το προς έλεγχο σύστημα αποτελεί η δυνατότητα μηδενισμού του σφάλματος σταθερής κατάστασης αν επιβάλλουμε στον ελεγκτή ολοκληρωτική δράση. Η ολοκληρωτική δράση εισάγεται με την προσθήκη ενός πόλου στο μηδέν για μηδενισμό του σφάλματος σταθερής κατάστασης όταν τα  $r$  και  $d$  είναι βηματικές



Σχήμα 1: Διάγραμμα συστήματος ελέγχου που στηρίζεται στην Αρχή του Εσωτερικού Μοντέλου

συναρτήσεις και δυο πόλων στο μηδέν για συναρτήσεις ράμπας. Για να επιτευχθεί ο μηδενισμός σφάλματος δεν είναι απαραίτητη η γνώση των παραμέτρων του προς έλεγχο συστήματος αλλά απαραίτητη προϋπόθεση αποτελεί ο κλειστός βρόχος να είναι ευσταθής. Η μοναδιαία ανάδραση σε ένα σύστημα που οδηγείται από το σφάλμα παρακολούθησης σε συνδυασμό με την ολοκληρωτική δράση προσδίδουν στην επίδοσή του ευρωστία. Η επέκταση της διαπίστωσης αυτής στην κατεύθυνση της απόρριψης των διαταραχών μας οδηγεί στην Αρχή του Εσωτερικού Μοντέλου (Internal Model Principle). Σε μια τέτοια στρατηγική που διαγραμματικά απεικονίζεται στο Σχήμα 1 η έξοδος του ελεγκτή οδηγείται στο προς έλεγχο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $G(s)$  και στο μοντέλο του που αποτελεί μία εκτίμηση της συμπεριφοράς του και περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς  $\tilde{G}(s)$ . Στο σήμα εξόδου του προς έλεγχο συστήματος αθροίζονται οι διαταραχές  $d(s)$  και προκύπτει η συνολική έξοδος του  $y(s)$  η οποία και συγκρίνεται με το σήμα εξόδου του μοντέλου. Η διαφορά τους  $\hat{d}(s)$  αφαιρείται από το σήμα αναφοράς  $r(s)$  και δίνει το σφάλμα παρακολούθησης  $e(s)$ . Η  $\hat{d}(s)$  ενσωματώνει όλη την πληροφορία που δεν περιλαμβάνεται στο μοντέλο  $\tilde{G}(s)$ . Το σήμα εξόδου  $y(s)$  δίνεται από την έκφραση

$$y(s) = \frac{C(s)G(s)r(s) + [1 - C(s)\tilde{G}(s)]d(s)}{1 + [G(s) - \tilde{G}(s)]C(s)}.$$

Αν το μοντέλο είναι ακριβές δηλαδή  $G(s) = \tilde{G}(s)$  και  $C(s) = \tilde{G}(s)^{-1}$  τότε έχουμε μηδενισμό του σφάλματος παρακολούθησης. Παρ' ολ' αυτά ακόμα και αν η μοντελοποίηση της συμπεριφοράς του προς έλεγχο συστήματος είναι ατελής αρκεί  $C(s) = \tilde{G}(s)^{-1}$  για να απορρίψουμε την επίδραση των διαταραχών ενισχύοντας κατά αυτόν τον τρόπο το σύστημα με ευρωστία.

Η συζήτηση που προηγήθηκε κατέδειξε το γεγονός ότι ακόμα και με την απουσία ακριβών

δεδομένων που αφορούν την περιγραφή του προς έλεγχο συστήματος είναι δυνατόν να καταλήξουμε σε ανάλογες επιδόσεις με αυτές ενός συστήματος του οποίου τις παραμέτρους γνωρίζουμε με ακρίβεια. Συχνά τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν ένα σύστημα αποτελούν μόνο προσεγγίσεις των περίπλοκων διεργασιών που συντελούνται καθώς τελικά καταφεύγουμε σε γραμμικά και αμετάβλητα με το χρόνο μοντέλα που προκύπτουν γραμμικοποιώντας γύρω από ένα δεδομένο σημείο λειτουργίας. Καθώς όμως το σημείο λειτουργίας μετακινείται σε σχέση με την τιμή στην οποία βασίστηκε η μοντελοποίηση του προς έλεγχο συστήματος μεταβάλλονται και οι παράμετροι της γραμμικής προσέγγισης. Αυτό λοιπόν που απαιτείται είναι η ύπαρξη ενός ελεγκτή που να σταθεροποιεί το σύστημα σε όλο το εύρος των πιθανών διαταραχών στις οποίες υπόκεινται οι παράμετροί του. Η έλλειψη ακριβών δεδομένων καθώς και η μεταβολή του σημείου λειτουργίας του προς έλεγχο συστήματος συντελούν σε ένα δομημένο είδος αβεβαιότητας αφού η συνάρτηση μεταφοράς διατηρεί τη μορφή της και το σύστημα την τάξη του. Εκτός όμως από τις δομημένες διαταραχές σε ένα σύστημα εμφανίζονται και μη δομημένες διαταραχές που οφείλονται σε απλοποιητικές παραδοχές για τους νόμους που διέπουν το σύστημα, στις ίδιες τις γραμμικοποιήσεις καθώς και στην απουσία από τη μαθηματική περιγραφή όρων ανώτερης τάξης που κυριαρχούν συνήθως στις υψηλότερες συχνότητες.

Στις περιπτώσεις που θα μελετήσουμε θεωρούμε ότι η ελευθερία στην περιγραφή του προς έλεγχο συστήματος εντοπίζεται στις τιμές των παραμέτρων εγείροντας ένα είδος αβεβαιότητας που καλείται παραμετρική. Παραμετρική αβεβαιότητα μπορεί να εισαχθεί σε ένα προς έλεγχο σύστημα με το να επιτρέψουμε διακυμάνσεις στην τιμή κέρδους της συνάρτησης μεταφοράς καθώς και ασάφεια ως προς τη θέση των μηδενικών και των πόλων της. Η αβεβαιότητα μπορεί να εκφρασθεί εναλλακτικά επιτρέποντας στους συντελεστές της συνάρτησης μεταφοράς να μεταβάλλονται εντός κάποιου εύρους τιμών. Σε κάθε περίπτωση τα χαρακτηριστικά του ελεγκτή παραμένουν σταθερά κατά τη διάρκεια λειτουργίας του συστήματος. Αν ο ελεγκτής έχει την ικανότητα να σταθεροποιεί το προς έλεγχο σύστημα το οποίο υπόκειται σε διαταραχές των παραμέτρων του τότε θεωρούμε ότι υπάρχει εύρωστη παραμετρική ευστάθεια. Οι έννοιες του περιθωρίου κέρδους και φάσης καθώς και τα διαγράμματα Nyquist και Bode μέσω των οποίων μπορεί να προκύψει ο ποσοτικός τους προσδιορισμός χρησιμοποιούνται σε ένα σύστημα με σταθερές παραμέτρους σαν ενδείξεις της ευρωστίας του σε μεταβολές του κέρδους και της φάσης της συνάρτησης μεταφοράς και κατ' επέκταση της απόστασης που αυτό διατηρεί από την αστάθεια. Οι παραπάνω έννοιες μπορούν να επεκταθούν σε συστήματα που εμφανίζουν παραμετρική αβεβαιότητα και συνδέονται όσον αφορά τα περιθώρια κέρδους και φάσης με τη χειρότερη περίπτωση που μπορεί να προκύψει ως προς τις παραμέτρους του συστήματος.

Η μη δομημένη αβεβαιότητα είναι το άλλο είδος αβεβαιότητας που μπορεί να υπάρξει σε ένα σύστημα και δε θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία. Σε αντίθεση με την παραμετρική όπου εμφανίζονται διακυμάνσεις των παραμέτρων του συστήματος η μη δομημένη αβεβαιότητα εκφράζεται σαν μία διαταραχή  $\Delta G(s)$  της συνάρτησης μεταφοράς  $G(s)$  που εμφανίζεται είτε

αθροιστικά  $G(s) + \Delta G(s)$  είτε πολλαπλασιαστικά  $G(s)(I + \Delta G(s))$ . Για να είναι δυνατή η αντιμετώπιση του προβλήματος τίθεται ο περιορισμός η  $\Delta G(s)$  να ανήκει εντός μιας σφαίρας  $H_\infty$  συναρτήσεων καθορισμένης ακτίνας. Ο  $H_\infty$  είναι ένας χώρος μιγαδικών αναλυτικών συναρτήσεων με φραγμένη άπειρη νόρμα. Στα SISO συστήματα το φράγμα στην ακτίνα της σφαίρας ισοδυναμεί με περιορισμό στο μέγιστο πλάτος που μπορεί να έχει η  $\Delta G(s)$  σε όλο το διάστημα της συχνοτικής απόκρισης ενώ στα MIMO (πολλαπλών εισόδων-πολλαπλών εξόδων) συστήματα όπου οι συναρτήσεις παίρνουν τη μορφή πινάκων τίθεται περιορισμός στη μέγιστη ιδιάζουσα τιμή των πινάκων.

Η ανασκόπηση της παραμετρικής προσέγγισης στον εύρωστο έλεγχο που επιχειρείται στην παρούσα εργασία βασίζεται στο βιβλίο των S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat and L.H. Keel, “Robust Control: The Parametric Approach” [3].

Ειδικότερα στο Κεφάλαιο 1 θα εξετάσουμε παραμετρικές οικογένειες στις οποίες η επιλογή του μελών τους γίνεται από μία παράμετρο. Το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου διαπραγματεύεται τη μετάβαση μιας παραμετρικής οικογένειας πολυωνύμων από την ευστάθεια στην αστάθεια. Η εφαρμογή του Θεώρηματος αυτού για τον εντοπισμό ασταθών πολυωνύμων εντός της οικογένειας οδηγεί στη διατύπωση της Αρχής Εξάιρεσης του Μηδενός. Το Θεώρημα Hermite-Biehler παρέχει κριτήρια ευστάθειας για πολυώνυμα με πραγματικούς και μιγαδικούς συντελεστές. Κλείνοντας το κεφάλαιο παρουσιάζονται αλγοριθμικές διαδικασίες για τον έλεγχο της ευστάθειας κατά Hurwitz και κατά Schur ανάλογες με αυτές που αναδεικνύονται μέσα από τα κριτήρια Routh και Jury, αντίστοιχα.

Στο Κεφάλαιο 2 θα ασχοληθούμε με την ευστάθεια του ευθυγράμμου τμήματος που προκύπτει από τον κυρτό συνδυασμό δύο ευσταθών πολυωνύμων. Ένα κριτήριο για την ευστάθεια του ευθυγράμμου τμήματος προκύπτει από τον έλεγχο της διαφοράς φάσης των ακραίων πολυωνύμων του και είναι γνωστή ως Συνθήκη της Φραγμένης Φάσης. Κριτήρια ευστάθειας στα οποία γίνεται χρήση του άρτιου και περιττού τμήματος των ακραίων πολυωνύμων οδηγούν στη διατύπωση του Λήμματος Ευθυγράμμου Τμήματος πολυωνύμων. Τα Λήμματα Κυρτής Διεύθυνσης για τα πραγματικά και μιγαδικά ευθύγραμμα τμήματα πολυωνύμων μας παρέχουν τις συνθήκες για να είναι το πολυώνυμο διαφοράς των δύο ακραίων ευσταθών πολυωνύμων κυρτή διεύθυνση. Το Λήμμα Κορυφής που παρουσιάζεται στη συνέχεια περιορίζει κάτω από προϋποθέσεις τον έλεγχο της ευστάθειας ενός ευθυγράμμου τμήματος στα ακραία του πολυώνυμα.

Στο Κεφάλαιο 3 θα υπολογίσουμε την ακτίνα με βάση την Ευκλείδεια νόρμα της μεγαλύτερης σφαίρας στο χώρο των συντελεστών γύρω από ένα πολυώνυμο εντός της οποίας όλα τα πολυώνυμα διατηρούν την ευστάθειά τους. Τα αποτελέσματα αυτά θα επεκταθούν σε αυθαίρετη νόρμα  $\ell_p$  μέσω του γεωμετρικού τόπου Tsyrkin-Polyak. Τέλος θα προσδιορίσουμε τις συνθήκες που απαιτούνται για να είναι τα πολυώνυμα δίσκων ευσταθή.

Στο Κεφάλαιο 4 αίρουμε τον περιορισμό που τέθηκε στα προηγούμενα Κεφάλαια για ανεξάρτητη μεταβολή των συντελεστών των πολυωνύμων. Κάνουμε επιπλέον την υπόθεση ότι οι παράμε-

τροι αβεβαιότητας που μεταβάλλονται ανεξάρτητα μεταξύ τους υπεισέρχονται στους συντελεστές των πολυωνύμων με γραμμικό ή αφινικό τρόπο. Έτσι προχωρούμε στον προσδιορισμό του περιθωρίου ευστάθειας που ισοδυναμεί με την ακτίνα της μέγιστης σφαίρας ευστάθειας στο χώρο όμως των παραμέτρων. Τα πολυώνυμα των οποίων οι συντελεστές μεταβάλλονται κατά αυτόν τον τρόπο συνθέτουν μία πολυτοπική οικογένεια ενώ διατυπώνονται και οι συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για να είναι μία τέτοια οικογένεια ευσταθής. Τέλος η γραφική τεχνική των Tsyrkin-Polyak επεκτείνεται και στην περίπτωση που υπάρχουν εξαρτήσεις μεταξύ των συντελεστών.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται το Θεώρημα Kharitonov που εφαρμόζεται για τον καθορισμό της εύρωστης ευστάθειας κατά Hurwitz πολυωνύμων διαστήματος. Με το Θεώρημα αυτό επιτυγχάνεται η ανεξαρτησία του αριθμού των απαιτούμενων ελέγχων από τη διάσταση του χώρου των συντελεστών μέσω του περιορισμού των ελέγχων στα 4 πολυώνυμα Kharitonov.

Στο Κεφάλαιο 6 διατυπώνουμε το Θεώρημα των Ακμών για τον έλεγχο της ευστάθειας πολυτοπικών οικογενειών σε αυθαίρετη περιοχή ευστάθειας. Με το Θεώρημα αυτό επιτυγχάνεται η αναγωγή του ελέγχου ευστάθειας συστημάτων με πολυπαραμετρική αβεβαιότητα σε έλεγχο της ευστάθειας μονοπαραμετρικών οικογενειών.

Στο Κεφάλαιο 7 το Θεώρημα Kharitonov επεκτείνεται στην περίπτωση που υπάρχουν εξαρτήσεις μεταξύ των συντελεστών και εφαρμόζεται σε οικογένειες πολυωνύμων γραμμικού διαστήματος. Η ευστάθεια της οικογένειας ανάγεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος στην ευστάθεια γραμμικών τμημάτων που ο αριθμός τους εξαρτάται μόνο από το πλήθος των πολυωνύμων διαστήματος.

Στο Κεφάλαιο 8 εξετάζουμε τη συμπεριφορά των συστημάτων γραμμικού διαστήματος στο πεδίο της συχνότητας. Για τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος η πληροφορία για τη μεταβαση στην αστάθεια ευρίσκεται στο σύνορό της που περιλαμβάνεται στα ακραία υποσύνολά της. Η Ιδιότητα Παραγωγής του Συνόρου από τα ακραία υποσύνολα μπορεί επίσης να μεταφερθεί σε ένα σύνολο συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου. Λόγω αυτής της ιδιότητας μας αρκούν οι φάκελοι των διαγραμμάτων Bode, Nyquist και Nichols που διαμορφώνονται μέσα από τα ακραία υποσύνολα για να προσδιορίσουμε τα περιθώρια ευστάθειας στη χειρότερη περίπτωση.

Στο Κεφάλαιο 9 ασχολούμαστε με τις οικογένειες πολυωνύμων οι συντελεστές των οποίων εμφανίζουν πολυγραμμική εξάρτηση από τις παραμέτρους αβεβαιότητας. Με το Θεώρημα της Απεικόνισης περικλείουμε τη μιγαδική εικόνα της οικογένειας εντός της εικόνας μιας πολυτοπικής οικογένειας για την οποία μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε το σύνορό της. Επειδή η στρατηγική αυτή οδηγεί σε συντηρητικές εκτιμήσεις όσον αφορά τα περιθώρια ευστάθειας προτείνεται μια διαδικασία διαμέρισης του αρχικού παραμετρικού χώρου που οδηγεί σε πιο ακριβείς εκτιμήσεις.

Στο Κεφάλαιο 10 μελετούμε την εύρωστη ευστάθεια σε πολυγραμμικά συστήματα διαστήματος και επεκτείνουμε το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov για να παράγουμε το σύνολο των

ακραίων πολλαπλότητας στο οποίο περιλαμβάνεται το σύνορο της οικογένειας. Από το σύνολο αυτό θα παραχθούν οι φάκελοι των διαγραμμάτων Bode, Nyquist και Nichols από τους οποίους μπορούν να καθοριστούν τα περιθώρια κέρδους και φάσης.

Στο Κεφάλαιο 11 ασχολούμαστε με την εύρωστη ευστάθεια συστημάτων που περιγράφονται από πίνακες των οποίων τα στοιχεία μεταβάλλονται εντός διαστήματος τιμών. Τα χαρακτηριστικά τους πολυώνυμα εμφανίζουν κάτω από προϋποθέσεις πολυγραμμική εξάρτηση των παραμέτρων τους. Αυτό μας επιτρέπει να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα ύπαρξης εύρωστης ευστάθειας χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Απεικόνισης. Εναλλακτικά παρουσιάζονται τεχνικές που βασίζονται στη μέθοδο Lyapunov.





# Κεφάλαιο 1

## Θεωρία Ευστάθειας μέσω του Θεωρήματος Διάσχισης του Συνόρου (Boundary Crossing Theorem)

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη της ευστάθειας εξετάζοντας μια μονοπαραμετρική οικογένεια πολυωνύμων με την παράμετρο να λαμβάνει συνεχείς τιμές στον χώρο των παραμέτρων. Μας ενδιαφέρει πώς η μεταβολή της παραμέτρου οδηγεί από ένα ευσταθές σε ένα ασταθές πολυώνυμο και ποιο είναι το πρώτο σημείο αστάθειας που συναντούμε καθώς διασχίζουμε μια συνεχή διαδρομή στον παραμετρικό χώρο. Τα ερωτήματα αυτά απαντώνται μέσα από το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου που θα παρουσιάσουμε άμεσα και του οποίου η απόδειξη βασίζεται στη συνέχεια των ριζών ενός πολυωνύμου σε σχέση με τις τιμές των συντελεστών του.

### 1.1 Το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου

Πριν διατυπώσουμε το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου είναι βασικό να αναφερθούμε στην Αρχή του Ορίσματος (Argument Principle) της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων. Έστω  $\mathcal{C}$  μια απλή κλειστή καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο και  $w = f(z)$  μία συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής  $z$  η οποία είναι αναλυτική στο  $\mathcal{C}$ . Έστω  $Z$  και  $P$  ο αριθμός των μηδενικών και πόλων της  $f(z)$  που περιλαμβάνονται στο εσωτερικό της καμπύλης  $\mathcal{C}$ . Για την καθαρή μεταβολή του ορίσματος  $\Delta_{\mathcal{C}} \arg(f(z))$  της  $f(z)$  καθώς το  $z$  διασχίζει την κλειστή καμπύλη  $\mathcal{C}$  ισχύει ότι

$$\Delta_{\mathcal{C}} \arg(f(z)) = 2\pi(Z - P). \quad (1.1)$$

Μια άμεση συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος είναι το Θεώρημα του Rouché.

**Θεώρημα 1.1.** (Rouché)

Έστω  $f(z)$  και  $g(z)$  δύο αναλυτικές συναρτήσεις πάνω σε μια κλειστή καμπύλη  $C$  του μιγαδικού επιπέδου και στο χωρίο που περικλείει. Αν

$$|f(z)| < |g(z)|$$

για κάθε  $z$  που διατρέχει την  $C$ , τότε οι  $f(z)$  και  $f(z) + g(z)$  περιλαμβάνουν στο εσωτερικό της  $C$  τα ίδια μηδενικά (ρίζες) και με την ίδια πολλαπλότητα.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι  $\Delta_{C \arg}(f(z) + g(z)) = \Delta_{C \arg}(f(z))$ . Επειδή οι  $f(z)$  και  $g(z)$  είναι αναλυτικές μέσα και πάνω στην  $C$  προκύπτει από την Αρχή του Ορίσματος ότι θα έχουν τον ίδιο αριθμό μηδενικών.

Σαν εφαρμογή του Θεώρηματος του Rouché θεωρούμε τα κάτωθι δύο πολυώνυμα

$$P(s) = p_0 + p_1 s + \cdots + p_n s^n = p_n \prod_{j=1}^m (s - s_j)^{t_j}, \quad p_n \neq 0$$

$$Q(s) = (p_0 + \epsilon_0) + (p_1 + \epsilon_1)s + \cdots + (p_n + \epsilon_n)s^n,$$

όπου  $s_k$  είναι μία ρίζα του  $P(s)$  με πολλαπλότητα  $t_k$ . Έστω  $C_k$  ένας κύκλος ακτίνας  $r_k$  με κέντρο τη ρίζα  $s_k$  τότε είναι δυνατόν να βρούμε ένα  $\delta_k$  τέτοιο ώστε

$$|P(s)| \geq \delta_k > 0, \quad \forall s \in C_k.$$

Επιπλέον αν ορίσουμε το  $R(s)$  από τη σχέση

$$R(s) = \epsilon_0 + \epsilon_1 s + \cdots + \epsilon_n s^n$$

τότε με κατάλληλη επιλογή  $\epsilon \geq |\epsilon_i|$ , για κάθε  $i = 0, 1, \dots, n$  ισχύει ότι  $|R(s)| < \delta_k$  και επομένως

$$|R(s)| < |P(s)|, \quad \forall s \text{ πάνω στην } C_k.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rouché για τα  $P(s)$  και  $Q(s) = P(s) + R(s)$  προκύπτει ότι έχουν τον ίδιο αριθμό μηδενικών εντός της  $C_k$ . Από την τιμή της ακτίνας  $r_k$  μπορούμε να διασφαλίσουμε ότι το  $P(s)$  έχει μόνο ένα μηδενικό πολλαπλότητας  $t_k$  και επομένως η  $Q(s)$  έχει ακριβώς  $t_k$  μηδενικά εντός της  $C_k$ . Επεκτείνοντας το συλλογισμό για  $m$  κύκλους ξένους ανά ζεύγη μεταξύ τους και κεντραρισμένους γύρω από τα  $s_1, s_2, \dots, s_m$  μπορούμε να βρούμε  $\epsilon \geq |\epsilon_i|$ , για κάθε  $i = 0, 1, \dots, n$  τέτοιο ώστε η  $Q(s)$  να έχει ακριβώς  $t_j$  μηδενικά εντός κάθε κύκλου  $C_j$ . Για να παραμείνει το  $Q(s)$  πολυώνυμο  $t_1 + t_2 + \cdots + t_m = n$  βαθμού θα πρέπει απαραίτητα  $\epsilon < |p_n|$ .

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στον παρακάτω διαμερισμό του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}$  σε

σύνολα που είναι ξένα μεταξύ τους

$$\mathcal{S} \cup \vartheta\mathcal{S} \cup \mathcal{U}^o,$$

όπου  $\mathcal{S}$  είναι ένα ανοιχτό σύνολο,  $\vartheta\mathcal{S}$  το σύνορό του και  $\mathcal{U}^o$  το εσωτερικό του κλειστού συνόλου  $\mathcal{U} = \mathbb{C} - \mathcal{S}$ . Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι το  $\mathcal{S}$  αναφέρεται στην περιοχή ευστάθειας, το  $\mathcal{U}^o$  στη περιοχή αστάθειας και το  $\vartheta\mathcal{S}$  στο σύνορο των δύο αυτών περιοχών.

Θεωρούμε μια οικογένεια πολυωνύμων  $P(\lambda, s)$  που παραμετροποιείται από τη παράμετρο  $\lambda$  η οποία είναι συνεχής και παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα  $I = [a, b]$ . Τα πολυώνυμα της οικογένειας είναι  $n$  βαθμού και δε χάνουν βαθμό καθώς η παράμετρος  $\lambda$  παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα.

**Θεώρημα 1.2.** (Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου)

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι τα πολυώνυμα της οικογένειας  $P(\lambda, s)$  διατηρούν τον ίδιο βαθμό καθώς η παράμετρος  $\lambda$  διατρέχει το κλειστό διάστημα  $[a, b]$  υποθέτουμε ότι το  $P(a, s)$  έχει όλες τις ρίζες του στο  $\mathcal{S}$  ενώ το  $P(b, s)$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $\mathcal{U}$ . Τότε υπάρχει τουλάχιστον μια τιμή  $\lambda$  στο διάστημα  $(a, b]$  τέτοια ώστε:

- a)  $P(\lambda, s)$  έχει όλες τις ρίζες του στο  $\mathcal{S} \cup \vartheta\mathcal{S}$  και
- b)  $P(\lambda, s)$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $\vartheta\mathcal{S}$ .

Αυτό που δηλώνει το Θεώρημα είναι ότι καθώς οι ρίζες μετακινούνται για συνεχή μεταβολή του  $\lambda$  από ένα ανοιχτό σύνολο που είναι το  $\mathcal{S}$  σε ένα άλλο που είναι το  $\mathcal{U}^o$  υπάρχει ρίζα για κάποια τιμή του  $\lambda$  που βρίσκεται πάνω στο σύνορο των ανοιχτών συνόλων. Αν φυσικά τα πολυώνυμα της οικογένειας χάνουν βαθμό, και αυτό σημαίνει ότι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου εξαφανίζεται τότε το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου δεν ισχύει. Μια πρώτη μορφή του Θεωρήματος Διάσχισης του Συνόρου μπορεί να αναζητηθεί στην εργασία [17].

**Παράδειγμα 1.1.** Έστω η οικογένεια πολυωνύμων  $a_1s + a_0$  κάθε μέλος της οποίας προσδιορίζεται από το διάνυσμα  $\mathbf{p} = [a_0 \ a_1]$  με συνιστώσες πραγματικές τιμές. Ξεκινώντας από ένα σημείο  $\mathbf{p}_0$  του χώρου των παραμέτρων για το οποίο το πολυώνυμο είναι ευσταθές μπορούμε να καταλήξουμε σε μία τιμή  $\mathbf{p}_1$  του χώρου των παραμέτρων για την οποία το πολυώνυμο γίνεται ασταθές ακολουθώντας μία διαδρομή  $\mathcal{C}_1$ . Στην περίπτωση μας για την ευστάθεια απαιτείται η ρίζα του πολυωνύμου να βρίσκεται στο ανοιχτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αν  $\mathcal{S}$  είναι το ανοιχτό σύνολο στο μιγαδικό επίπεδο που ορίζει την περιοχή της ευστάθειας και  $\mathcal{U}^o$  ορίζει την περιοχή αστάθειας τότε ο άξονας  $j\omega$  είναι το σύνορο των δύο περιοχών. Αν κατά τη μετάβαση από το  $\mathbf{p}_0$  στο  $\mathbf{p}_1$  ακολουθώντας την  $\mathcal{C}_1$  συναντήσουμε τον άξονα των  $a_0$  αυτό αντιστοιχεί σε ένα πολυώνυμο με μειωμένο βαθμό και κατά συνέπεια το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου δεν ισχύει. Αν ακολουθώντας μια διαδρομή  $\mathcal{C}_2$  που καταλήγει σε ένα άλλο σημείο αστάθειας  $\mathbf{p}_2$  συναντήσουμε μόνο τον άξονα των  $a_1$  δεν έχουμε μείωση του βαθμού του πολυωνύμου. Συνεπώς, επειδή  $s = 0$  είναι ρίζα του πολυωνύμου συμβαίνει διάσχιση του συνόρου.

Ακόμα και αν τα πολυώνυμα χάνουν το βαθμό τους κατά μήκος της διαδρομής που έχουμε επιλέξει είναι δυνατόν να τη χωρίσουμε σε υποδιαστήματα κατά μήκος των οποίων ο συντελεστής  $p_n(\lambda)$  των μεγιστοβάθμιων όρων των πολυωνύμων  $P(\lambda, s)$  έχει σταθερό πρόσημο και να ελέγξουμε αν μπορούμε να εφαρμόσουμε τμηματικά το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου.

## 1.2 Η Αρχή Εξαίρεσης του Μηδενός

Το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου μπορεί να εφαρμοστεί για να εντοπίσουμε την παρουσία ασταθών πολυωνύμων εντός μιας οικογένειας πολυωνύμων

$$\Delta(s) := \{\delta(s, \mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \Omega\},$$

η οποία παραμετροποιείται από το  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l$  που παίρνει τιμές από ένα σύνολο  $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ . Κάνουμε την υπόθεση ότι στην οικογένεια περιλαμβάνεται τουλάχιστον ένα ευσταθές πολυώνυμο  $\delta(s, \mathbf{p}_a)$  και όλα τα πολυώνυμα έχουν τον ίδιο βαθμό. Αν υπάρχει ασταθές πολυώνυμο  $\delta(s, \mathbf{p}_b)$  τότε από το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου σε οποιαδήποτε συνεχή διαδρομή που συνδέει το  $\mathbf{p}_a$  με το  $\mathbf{p}_b$  και βρίσκεται εξ'ολοκλήρου εντός του  $\Omega$  θα υπάρχει μια τιμή  $\mathbf{p}_c \in \Omega$  του διανύσματος παραμέτρων για την οποία το πολυώνυμο θα έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο σύνορο  $\partial\mathcal{S}$ . Αυτό σημαίνει ότι η παρουσία ασταθών πολυωνύμων στην οικογένεια είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ριζών στο σύνορο. Αν  $s^*$  είναι ρίζα ενός πολυωνύμου τότε  $0 \in \Delta(s^*)$ . Μπορούμε να εντοπίσουμε την ύπαρξη ασταθών στοιχείων στην οικογένεια των πολυωνύμων αν βρούμε έστω και μία τιμή  $s^*$  κατά μήκος του συνόρου  $\partial\mathcal{S}$  που είναι ρίζα πολυωνύμου της οικογένειας. Αντίστροφα αν διατρέχοντας όλα τα  $s^*$  κατά μήκος του συνόρου ικανοποιείται η σχέση  $0 \notin \Delta(s^*)$  τότε όλη η οικογένεια είναι ευσταθής και αυτό ακριβώς εκφράζει η Αρχή Εξαίρεσης του Μηδενός.

## 1.3 Το Θεώρημα Hermite-Biehler

Για απλότητα θα περιοριστούμε στην περίπτωση πολυωνύμων που οι συντελεστές τους είναι πραγματικοί αριθμοί. Ένα πολυώνυμο  $P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n$  είναι Hurwitz αν και μόνο αν οι ρίζες του βρίσκονται στο ανοιχτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Οι συνθήκες για να συμβαίνει αυτό διατυπώνονται στην εργασία [19]. Για να είναι το  $P(s)$  ένα πραγματικό πολυώνυμο Hurwitz θα πρέπει όλοι οι συντελεστές του να είναι μη μηδενικοί και να έχουν το ίδιο πρόσημο, είτε θετικό είτε αρνητικό. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι το  $P(s)$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε παράγοντες πρώτου και δεύτερου βαθμού που είναι πραγματικά πολυώνυμα Hurwitz και για τους οποίους ισχύει η παραπάνω ιδιότητα. Μία ακόμη ιδιότητα των πολυωνύμων Hurwitz είναι η εξής:

**Ιδιότητα 1.1.** Αν  $P(s)$  είναι ένα πολυώνυμο Hurwitz  $n$  βαθμού τότε η φάση του  $\arg[P(j\omega)]$  καθώς το  $s$  διατρέχει το φανταστικό άξονα με το  $\omega$  να παίρνει τιμές  $(-\infty, \infty)$  είναι συνεχής και αυστηρά αύξουσα συνάρτηση του  $\omega$ . Επιπλέον η καθαρή αύξηση στη φάση για  $\omega$  που κινείται στο παραπάνω διάστημα είναι  $n\pi$ .

*Απόδειξη.* Το  $P(s)$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί όπως παρακάτω

$$P(s) = p_n \prod_{i=1}^n (s - s_i),$$

όπου  $s_i = a_i + jb_i$  με το  $a_i < 0$ , αφού το  $P(s)$  είναι πολυώνυμο Hurwitz. Η φάση του  $P(s)$  για  $s$  που μεταβάλλεται πάνω στο φανταστικό άξονα είναι

$$\arg[P(j\omega)] = \arg[p_n] + \sum_{i=1}^n \arg[j\omega - a_i - jb_i] = \arg[p_n] + \sum_{i=1}^n \arctan \left[ \frac{\omega - b_i}{-a_i} \right].$$

Το  $\arg[P(j\omega)]$  είναι άθροισμα ενός σταθερού όρου και  $n$  συναρτήσεων που αυξάνουν μονότονα με το  $\omega$ . Η κάθε συνάρτηση που συμμετέχει στο άθροισμα συνεισφέρει  $\pi$  στη φάση του  $P(s)$  καθώς το  $\omega$  μεταβάλλεται στο διάστημα  $[-\infty, \infty]$ .  $\square$

Τα άρτια (even) και περιττά (odd) μέρη ενός πραγματικού πολυωνύμου ορίζονται ως εξής:

$$P^{even}(s) := p_0 + p_2s^2 + p_4s^4 + \dots$$

$$P^{odd}(s) := p_1s + p_3s^3 + p_5s^5 + \dots$$

Επιπλέον ορίζουμε

$$P^e(\omega) = P^{even}(j\omega) = p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \dots + (-1)^m p_{2m}\omega^{2m} \quad (1.2)$$

$$P^o(\omega) = \frac{P^{odd}(j\omega)}{j\omega} = p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \dots + (-1)^{m-1} p_{2m-1}\omega^{2m-2} \quad (1.3)$$

με την υπόθεση ότι ο μεγαυτοβάθμιος όρος είναι υψωμένος σε άρτια δύναμη  $n = 2m$ . Επειδή τα παραπάνω πολυώνυμα έχουν εξάρτηση από το  $\omega^2$  οι ρίζες τους θα είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων. Ένα πραγματικό πολυώνυμο  $P(s)$  ικανοποιεί την Ιδιότητα της Συνδιαπλοκής (Interlacing Property) αν

- τα  $p_{2m}$  και  $p_{2m-1}$  έχουν το ίδιο πρόσημο
- όλες οι ρίζες  $\omega_{e,i}$  και  $\omega_{o,j}$  των  $P^e(\omega)$  και  $P^o(\omega)$ , αντίστοιχα για  $i = 1, \dots, m$  και  $j = 1, \dots, m-1$  είναι πραγματικές και διακριτές και διαπλέκονται με τον ακόλουθο τρόπο

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \dots < \omega_{e,m-1} < \omega_{o,m-1} < \omega_{e,m}.$$

Αν ο μεγιστοβάθμιος όρος είναι περιττός, δηλαδή  $n = 2m + 1$ , τα  $P^e(\omega)$  και  $P^o(\omega)$  γίνονται

$$\begin{aligned} P^e(\omega) &= p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \dots + (-1)^m p_{2m}\omega^{2m} \\ P^o(\omega) &= p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \dots + (-1)^m p_{2m+1}\omega^{2m}. \end{aligned}$$

Η Ιδιότητα της Συνδιαπλοκής ορίζει ότι

- a) τα  $p_{2m+1}$  και  $p_{2m}$  έχουν το ίδιο πρόσημο
- b) όλες οι ρίζες  $\omega_{e,i}$  και  $\omega_{o,i}$  των  $P^e(\omega)$  και  $P^o(\omega)$ , αντίστοιχα για  $i = 1, \dots, m$  είναι πραγματικές και διακριτές και διαπλέκονται με τον ακόλουθο τρόπο

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \dots < \omega_{e,m-1} < \omega_{o,m-1} < \omega_{e,m} < \omega_{o,m}.$$

Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ευστάθεια πολυωνύμων κατά Hurwitz περιγράφονται από το Θεώρημα Hermite-Biehler [18], [4].

**Θεώρημα 1.3.** (Hermite-Biehler για πραγματικά πολυώνυμα)

*Ένα πραγματικό πολυώνυμο  $P(s)$  είναι Hurwitz αν και μόνο αν ικανοποιεί την Ιδιότητα της Συνδιαπλοκής.*

*Απόδειξη.* Θα ασχοληθούμε μόνο με το τμήμα που αφορά στην αναγκαιότητα της συνδιαπλοκής για να είναι ένα πολυώνυμο Hurwitz. Έστω το πραγματικό πολυώνυμο Hurwitz

$$P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n.$$

Αφού το  $P(s)$  είναι Hurwitz όλοι οι συντελεστές του έχουν το ίδιο πρόσημο και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι όλοι θετικοί. Κατ' αυτόν τον τρόπο επαληθεύεται το πρώτο μέρος της Ιδιότητας της Συνδιαπλοκής. Για το δεύτερο μέρος της ιδιότητας υποθέτουμε ότι  $n = 2m$ . Γνωρίζουμε από την Ιδιότητα 1.1 ότι η φάση του  $P(j\omega)$  αυξάνει από 0 σε  $n\pi/2$  καθώς το  $\omega$  μεταβάλλεται από 0 σε  $\infty$ . Το  $P(j\omega)$  για  $\omega = 0$  βρίσκεται στο θετικό πραγματικό ημιάξονα  $P(j0) = p_0$  και αφού περιστραφεί ανθρωπολογικά γύρω από την αρχή των αξόνων  $m\pi$  radians καταλήγει στο άπειρο χωρίς να επιστρέψει στην αρχή των αξόνων. Σαν αποτέλεσμα μια γραφική παράσταση του  $P(j\omega)$ , καθώς το  $\omega$  αυξάνει, τέμνει τον άξονα των φανταστικών αριθμών  $m$  φορές καθώς το πραγματικό μέρος μηδενίζεται στις τιμές

$$\omega_{\mathcal{R},1}, \omega_{\mathcal{R},2}, \dots, \omega_{\mathcal{R},m}.$$

Αναλόγως, η γραφική παράσταση του  $P(j\omega)$  τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών  $m - 1$  φορές καθώς το φανταστικό μέρος μηδενίζεται στις τιμές

$$0, \omega_{\mathcal{I},1}, \omega_{\mathcal{I},2}, \dots, \omega_{\mathcal{I},m-1}.$$

Επειδή το  $P(j\omega)$  περικυκλώνει προς μία μοναδική φορά την αρχή των αξόνων είναι φανερό ότι

$$0 < \omega_{\mathcal{R},1} < \omega_{\mathcal{I},1} < \omega_{\mathcal{R},2} < \omega_{\mathcal{I},2} < \dots < \omega_{\mathcal{R},m-1} < \omega_{\mathcal{I},m-1} < \omega_{\mathcal{R},m}.$$

Το δεύτερο τμήμα της συνδιαπλοκής αποδεικνύεται παρατηρώντας ότι το πραγματικό μέρος του  $P(j\omega)$  δεν είναι τίποτε άλλο από το  $P^e(\omega)$  και το φανταστικό το  $\omega P^o(\omega)$ .  $\square$

Εναλλακτικά η ευστάθεια ενός πολυωνύμου μπορεί να διαπιστωθεί αν κατασκευάσουμε τις ποσότητες

$$x(\omega) = \frac{P^e(\omega)}{S(\omega)}, \quad y(\omega) = \frac{P^o(\omega)}{T(\omega)},$$

όπου  $S(\omega)$  και  $T(\omega)$  αυθαίρετες συνεχείς θετικές συναρτήσεις του  $\omega$  που ορίζονται σε όλο το διάστημα  $0 \leq \omega < \infty$ . Το επόμενο Λήμμα θέτει τις προϋποθέσεις για να είναι ένα πολυώνυμο ευσταθές.

**Λήμμα 1.1.** Ένα πραγματικό πολυώνυμο είναι Hurwitz αν και μόνο αν η παράσταση  $z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$  στο μιγαδικό επίπεδο κινείται αυστηρά ανθρωρολογιακά και διέρχεται από  $n$  τεταρτημόρια.

Η ποσότητα  $P(j\omega)$  δε φράζεται για  $\omega \rightarrow \infty$  σε αντίθεση με τη  $z(\omega)$  η οποία είναι πάντοτε φραγμένη αν επιλεγούν κατάλληλες πολυωνυμικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα οι  $S(\omega)$  και  $T(\omega)$  μπορούν να αντικατασταθούν από πολυώνυμα με βαθμό ίσο με το βαθμό των  $P^e(\omega)$  και  $P^o(\omega)$ , αντίστοιχα.

### 1.3.1 Επέκταση του Θεωρήματος Hermite-Biehler στα πολυώνυμα με μιγαδικούς συντελεστές

Το Θεώρημα Hermite-Biehler μπορεί να εφαρμοσθεί και στην περίπτωση ενός πολυωνύμου με μιγαδικούς συντελεστές

$$P(s) = (a_0 + jb_0) + (a_1 + jb_1)s + \dots + (a_{n-1} + jb_{n-1})s^{n-1} + (a_n + jb_n)s^n.$$

Για τιμές του  $s$  πάνω στον φανταστικό άξονα το  $P(j\omega)$  μπορεί να αναλυθεί σε

$$P(j\omega) = P^r(\omega) + jP^i(\omega),$$

όπου  $P^r(\omega) = a_0 - b_1\omega - a_2\omega^2 + b_3\omega^3 \dots$  και  $P^i(\omega) = b_0 + a_1\omega - b_2\omega^2 - a_3\omega^3 + \dots$  δύο πραγματικά πολυώνυμα που αντιστοιχούν στο πραγματικό και στο φανταστικό μέρος του  $P(j\omega)$ .

**Θεώρημα 1.4.** (Hermite-Biehler για μιγαδικά πολυώνυμα)

Το μιγαδικό πολυώνυμο  $P(s)$  είναι πολυώνυμο Hurwitz αν και μόνο αν

a)  $a_{n-1}a_n + b_{n-1}b_n > 0$ ,

b) Τα μηδενικά των  $P^r(\omega)$  και  $P^i(\omega)$  είναι όλα απλά και πραγματικά και αλληλοδιαπλέκονται καθώς το  $\omega$  διατρέχει τις τιμές από  $-\infty$  στο  $\infty$ .

Μπορούμε πολύ εύκολα να αποδείξουμε το πρώτο μέρος γνωρίζοντας ότι το άθροισμα των ρίζων για το πολυώνυμο  $P(s)$  είναι

$$-\frac{a_{n-1} + jb_{n-1}}{a_n + jb_n} = -\frac{a_{n-1}a_n + b_{n-1}b_n + j(b_{n-1}a_n - a_{n-1}b_n)}{a_n^2 + b_n^2}.$$

Έτσι αν το  $P(s)$  είναι Hurwitz τότε το πραγματικό μέρος του παραπάνω μιγαδικού αριθμού πρέπει να είναι αρνητικό.

Στην περίπτωση πραγματικών πολυωνύμων μπορούμε να επιβεβαιώσουμε την ευστάθεια κατά Hurwitz αν οι ρίζες αλληλοδιαπλέκονται για θετικές τιμές του  $\omega$ . Στην περίπτωση όμως των μιγαδικών πολυωνύμων επειδή τα  $P^r(\omega)$  και  $P^i(\omega)$  δεν είναι άρτιες συναρτήσεις του  $\omega$  απαιτείται να ελέγξουμε τη συνδιαπλοκή για  $\omega$  σε όλο το διάστημα από  $(-\infty, \infty)$ .

## 1.4 Το Θεώρημα Hermite-Biehler: Η περίπτωση Schur

Σε ανάλογα αποτελέσματα μπορούμε να καταλήξουμε και σε σχέση με άλλες περιοχές ευστάθειας  $\mathcal{S}$  που έχουν την ιδιότητα η φάση ενός ευσταθούς πολυωνύμου που υπολογίζεται κατά μήκος του συνόρου ευστάθειας να αυξάνεται μονότονα. Σε αυτήν την ενότητα θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση που η  $\mathcal{S}$  είναι ο ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος που είναι άλλωστε και η περιοχή ευστάθειας για τα συστήματα διακριτού χρόνου. Ένα πολυώνυμο

$$P(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_1 z + p_0$$

είναι Schur αν όλες οι ρίζες του βρίσκονται στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο του μιγαδικού επιπέδου. Οι συνθήκες για να συμβαίνει αυτό διατυπώνονται στην εργασία [36]. Μία απαραίτητη συνθήκη για ευστάθεια Schur είναι  $|p_n| > |p_0|$ . Η συνθήκη εύκολα αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας ότι για το γινόμενο των ριζών ενός πολυωνύμου ισχύει η σχέση

$$(-1)^n \prod_{i=1}^n z_i = \frac{p_0}{p_n}.$$

Με δεδομένο ότι οι ρίζες  $z_1, \dots, z_i, \dots, z_n$  του  $P(z)$  βρίσκονται λόγω ευστάθειας Schur στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου προκύπτει ότι

$$\left| \frac{p_0}{p_n} \right| = \prod_{i=1}^n |z_i| < 1.$$



Για τον ίδιο λόγο σε ένα πολυώνυμο Schur καθώς το  $z$  μεταβάλλεται κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου  $z = e^{j\theta}$  η φάση του  $P(e^{j\theta})$  αυξάνει μονότονα. Ένα πολυώνυμο Schur έχει καθαρή αύξηση φάσης  $2n\pi$  και αυτό σημαίνει ότι μία γραφική παράσταση του  $P(e^{j\theta})$  περικυκλώνει την αρχή των αξόνων  $n$  φορές. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν κριτήριο στο πεδίο της συχνότητας για ευστάθεια Schur. Επειδή για την ισχύ αυτού του κριτηρίου απαιτείται να μετρήσουμε αν το  $P(e^{j\theta})$  περικυκλώνει  $n$  φορές την αρχή των αξόνων, είναι προτιμότερο να ελέγξουμε ένα εναλλακτικό κριτήριο. Το κριτήριο αυτό προτείνει να χρησιμοποιήσουμε το αντίστροφο πολυώνυμο  $Q(z) = z^n P(z^{-1})$  αφού απαιτείται μόνο να ελέγξουμε αν η γραφική παράσταση του  $Q(e^{j\theta})$  αποκλείει την αρχή των αξόνων.

Το  $P(e^{j\theta})$  μπορεί να γραφεί σαν  $P(e^{j\theta}) = R(\theta) + jI(\theta)$ , όπου  $R(\theta)$  και  $I(\theta)$  είναι το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος, αντίστοιχα.

**Λήμμα 1.2.** Ένα πραγματικό πολυώνυμο  $P(z)$  είναι Schur με  $|p_n| > |p_0|$  αν και μόνο αν

- α) το  $R(\theta)$  έχει ακριβώς  $n$  μηδενικά στο διάστημα  $[0, \pi]$
- β) το  $I(\theta)$  έχει ακριβώς  $n + 1$  μηδενικά στο διάστημα  $[0, \pi]$ , και
- γ) τα μηδενικά των  $R(\theta)$  και  $I(\theta)$  αλληλοδιαπλέκονται.

Αυτές οι συνθήκες μπορούν να επαναδιατυπωθούν για την περίπτωση δύο πολυωνύμων  $P_s(z)$  και  $P_a(z)$  που αναπαριστούν το συμμετρικό και το αντισυμμετρικό μέρος ενός πραγματικού πολυωνύμου  $P(z) = P_s(z) + P_a(z)$  και δίνονται από τις σχέσεις

$$P_s(z) = \frac{1}{2} \left[ P(z) + z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \right] \quad P_a(z) = \frac{1}{2} \left[ P(z) - z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \right].$$

**Θεώρημα 1.5.** Ένα πραγματικό πολυώνυμο  $P(z)$  είναι πολυώνυμο Schur αν και μόνο αν τα  $P_s(z)$  και  $P_a(z)$  ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

- α) Τα  $P_s(z)$  και  $P_a(z)$  είναι πολυώνυμα  $n$  βαθμού με τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων να έχουν το ίδιο πρόσημο.
- β) Τα  $P_s(z)$  και  $P_a(z)$  έχουν μόνο απλά μηδενικά που ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο.
- γ) Τα μηδενικά των  $P_s(z)$  και  $P_a(z)$  αλληλοδιαπλέκονται στο μοναδιαίο κύκλο.

*Απόδειξη.* Απομονώνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων διαπιστώνουμε ότι η συνθήκη α) επιβάλλει  $p_n^2 - p_0^2 > 0$  που είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη  $|p_n| > |p_0|$  η οποία ισχύει για ένα ευσταθές κατά Schur πολυώνυμο. Για την απόδειξη της ευστάθειας σε συστήματα διακριτού χρόνου χρησιμοποιούμε το διγραμμικό μετασχηματισμό

$$z = \frac{s + 1}{s - 1}$$

που απεικονίζει τον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο στο ανοιχτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Ένα

πολυώνυμο  $P(z)$  απεικονίζεται στο  $\hat{P}(s)$  μέσω του μετασχηματισμού  $T$  ως εξής:

$$(s-1)^n P\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \hat{P}(s).$$

Εάν ο μετασχηματισμός διατηρεί το βαθμό τότε ένα πολυώνυμο  $P(z)$  είναι ευσταθές κατά Schur αν και μόνο αν το  $\hat{P}(s)$  είναι ευσταθές κατά Hurwitz. Ο βαθμός διατηρείται αν

$$\hat{p}_n = \sum_{i=0}^n p_i = P(1) \neq 0$$

που απορρέει από τη συνθήκη  $\gamma$ ) του Θεωρήματος. Θεωρούμε ότι  $T$  είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το  $P(z)$  στο  $\hat{P}(s)$  και με  $TP_s(z)$  και  $TP_a(z)$  συμβολίζουμε τις εικόνες του συμμετρικού και αντισυμμετρικού μέρους ενός πολυωνύμου, αντίστοιχα. Μετά από ευθείς υπολογισμούς καταλήγουμε στη διαπίστωση ότι

$$TP_s(z) = \hat{P}^{even}(s), \quad TP_a(z) = \hat{P}^{odd}(s), \quad n \text{ even}$$

και

$$TP_s(z) = \hat{P}^{odd}(s), \quad TP_a(z) = \hat{P}^{even}(s), \quad n \text{ odd.}$$

Οι συνθήκες  $\beta$ ) και  $\gamma$ ) προκύπτουν άμεσα από την Ιδιότητα της Συνδιαπλοκής για τα πολυώνυμα Hurwitz όταν αυτή εφαρμοσθεί στο  $\hat{P}(s)$ .  $\square$

## 1.5 Το κριτήριο ευστάθειας κατά Schur

Θα περιγράψουμε σ' αυτήν την ενότητα μια διαδικασία η οποία μας επιτρέπει να ελέγξουμε αν ένα πολυώνυμο είναι ευστάθες κατά Schur. Με  $\bar{z}$  δηλώνουμε το συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού  $z$ . Ορίζουμε τα πολυώνυμα

$$Q(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \bar{p}_0 z^n + \bar{p}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{p}_{n-1} z + \bar{p}_n$$

και

$$R(z) = \frac{1}{z} \left[ P(z) - \frac{p_0}{\bar{p}_n} Q(z) \right].$$

Το  $R(z)$  έχει πάντα βαθμό μικρότερο ή ίσο με  $n-1$ . Το Λήμμα που ακολουθεί μας επιτρέπει να μειώσουμε το βαθμό ενός πολυωνύμου που εξετάζουμε ως προς την ευστάθεια του χωρίς να απωλέσουμε πληροφορία που αφορά την ευστάθεια.

**Λήμμα 1.3.** *Αν το  $P(z)$  ικανοποιεί τη σχέση  $|p_n| > |p_0|$  τότε ισχύει η ισοδυναμία:*

$$P(z) \text{ είναι ένα πολυώνυμο Schur} \iff R(z) \text{ είναι ένα πολυώνυμο Schur.}$$

Από το παραπάνω Λήμμα μπορούμε να οδηγηθούμε σε μια διαδικασία που μας επιτρέπει να μειώνουμε σταδιακά το βαθμό ενός πολυωνύμου και να ελέγχουμε την ευστάθειά του.

**Αλγόριθμος 1.1.** (Έλεγχος της ευστάθειας κατά Schur για πραγματικά και μιγαδικά πολυώνυμα)

- 1) Στο πρώτο βήμα θέτουμε  $P^0(z) = P(z)$ .
- 2) Στο βήμα  $i$  ελέγχουμε αν  $|p_n^{(i)}| > |p_0^{(i)}|$ .
- 3) Στο βήμα  $i + 1$  κατασκευάζουμε το πολυώνυμο  $P^{(i+1)}(z) = \frac{1}{z} \left[ P(z) - \frac{p_0^{(i)}}{p_n^{(i)}} Q(z) \right]$ .
- 4) Επιστρέφουμε στο 2) μέχρι είτε να βρούμε ότι το 2) παραβιάζεται ( $P(z)$  δεν είναι πολυώνυμο Schur) είτε να καταλήξουμε στο  $P^{(n-1)}(z)$  που είναι πρώτου βαθμού στην οποία περίπτωση η 2) είναι ικανή συνθήκη για να είναι το πολυώνυμο ευσταθές κατά Schur.

## 1.6 Το κριτήριο ευστάθειας κατά Hurwitz

Θα αναπτύξουμε εδώ μια διαδικασία ανάλογη με αυτή του προηγούμενου κριτηρίου για τον έλεγχο ευστάθειας κατά Hurwitz για πραγματικά πολυώνυμα που βασίζεται στο Θεώρημα της Συνδιαπλοκής. Αυτή η διαδικασία καταλήγει να είναι ισοδύναμη με το κριτήριο Routh [34]. Η κατασκευή του αλγορίθμου που προτείνεται στη συνέχεια και ισοδυναμεί με το κριτήριο Routh καθώς και του αλγορίθμου που περιγράφηκε προηγουμένως και αντιστοιχεί στο κριτήριο Jury [20] βασίζονται σε αποδείξεις που κάνουν χρήση του Θεωρήματος Διάσχισης του Συνόρου και αναπτύσσονται στην εργασία [15].

Έστω  $P(s) = p_0 + p_1s + \dots + p_n s^n$  ένα πραγματικό πολυώνυμο  $n$  βαθμού που όλοι οι συντελεστές του είναι θετικοί. Το  $P(s)$  όπως είπαμε και προηγουμένως μπορεί καταταμηθεί σε ένα άρτιο και σε ένα περιττό μέρος

$$P(s) = P^{even}(s) + P^{odd}(s).$$

Ορίζουμε ένα πολυώνυμο  $Q(s)$  βαθμού  $n - 1$  με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\begin{aligned} Q(s) &= \left[ P^{even}(s) - \frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} s P^{odd}(s) \right] + P^{odd}(s) & \text{αν } n = 2m \\ Q(s) &= \left[ P^{odd}(s) - \frac{p_{2m+1}}{p_{2m}} s P^{even}(s) \right] + P^{even}(s) & \text{αν } n = 2m + 1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Αν με  $\mu$  ορίσουμε γενικά  $\mu = \frac{p_n}{p_{n-1}}$  τότε το  $Q(s)$  γράφεται αναλυτικά ως

$$Q(s) = p_{n-1} s^{n-1} + (p_{n-2} - \mu p_{n-3}) s^{n-2} + p_{n-3} s^{n-3} + (p_{n-4} - \mu p_{n-5}) s^{n-4} + \dots$$

Το Λήμμα που ακολουθεί συσχετίζει την ευστάθεια πολυωνύμων με την ευστάθεια πολυωνύμων των οποίων ο βαθμός έχει μειωθεί.

**Λήμμα 1.4.** Αν ένα πολυώνυμο  $P(s)$  έχει όλους τους συντελεστές θετικούς τότε

$$P(s) \text{ ευσταθής} \iff Q(s) \text{ ευσταθής.}$$

Το παραπάνω Λήμμα μας υποδεικνύει έναν αλγόριθμο για τον έλεγχο της ευστάθειας ενός πολυωνύμου  $P(s)$  μέσω της διαδοχικής μείωσης του βαθμού του.

**Αλγόριθμος 1.2.** (Έλεγχος ευστάθειας κατά Hurwitz για τα πραγματικά πολυώνυμα)

- 1) Στο πρώτο βήμα θέτουμε  $P^{(0)}(s) = P(s)$ .
- 2) Ελέγχουμε αν όλοι οι συντελεστές του  $P^{(i)}(s)$  είναι θετικοί.
- 3) Κατασκευάζουμε το  $P^{(i+1)}(s)$  σύμφωνα με τη σχέση  $P^{(i+1)}(s) = Q(s)$ .
- 4) Επιστρέφουμε στο 2) μέχρι είτε να βρούμε ότι το 2) παραβιάζεται ( $P(s)$  δεν είναι πολυώνυμο Hurwitz) είτε να καταλήξουμε στο  $P^{(n-2)}(s)$  που είναι δευτέρου βαθμού στην οποία περίπτωση 2) είναι ικανή συνθήκη για να είναι το πολυώνυμο ευσταθές κατά Hurwitz.

Αυτή η διαδικασία είναι όμοια με το κριτήριο Routh αφού παράγει τον πίνακα Routh. Η παραπάνω διαδικασία καταδεικνύει ότι για ένα ευσταθές πολυώνυμο θα πρέπει όλοι οι συντελεστές του πίνακα να είναι θετικοί. Παρ' όλ' αυτά η διαδικασία που περιγράφηκε εδώ δε μας επιτρέπει να απαριθμήσουμε τον αριθμό των ευσταθών και μη ευσταθών ριζών σε ένα πολυώνυμο όπως μπορεί να γίνει με το Θεώρημα Routh.

Αν  $P(s)$  είναι ένα μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού  $n$

$$P(s) = (a_0 + jb_0) + (a_1 + jb_1)s + \dots + (a_{n-1} + jb_{n-1})s^{n-1} + (a_n + jb_n)s^n$$

τότε μπορεί να αναπτυχθεί μια αντίστοιχη διαδικασία για να ελέγξουμε την ευστάθεια του κατά Hurwitz. Αν  $T(s) = \frac{1}{a_n + jb_n}P(s)$  τότε το  $T(s)$  μπορεί να γραφεί σαν

$$T(s) = (c_0 + jd_0) + (c_1 + jd_1)s + \dots + (c_{n-1} + jd_{n-1})s^{n-1} + s^n,$$

όπου

$$c_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_n + b_{n-1}b_n}{a_n^2 + b_n^2}.$$

Η συνθήκη  $c_{n-1} > 0$  είναι αναγκαία για να είναι ένα μιγαδικό πολυώνυμο ευσταθές κατά Hurwitz όπως προκύπτει από το α) μέρος του Θεωρήματος 1.4. Το  $T(s)$  μπορεί να αναλυθεί σε ένα πραγματικό και ένα φανταστικό μέρος

$$T(s) = T_R(s) + T_I(s).$$

Κατά ανάλογο τρόπο με τη σχέση (1.4) μπορούμε να ορίσουμε τα πολυώνυμα

$$Q(s) = \left[ T_R(s) - \frac{1}{c_{2m-1}} s T_I(s) \right] + T_I(s) \quad \text{αν } n = 2m$$

$$Q(s) = \left[ T_I(s) - \frac{1}{c_{2m}} s T_R(s) \right] + T_R(s) \quad \text{αν } n = 2m + 1.$$

Όπως και στην περίπτωση των πραγματικών πολυωνύμων του Λήμματος 1.4 έτσι και εδώ μπορεί να αποδειχθεί το παρακάτω Λήμμα.

**Λήμμα 1.5.** Αν το  $P(s)$  ικανοποιεί τη σχέση  $a_{n-1}a_n + b_{n-1}b_n > 0$ , τότε

$$P(s) \text{ ευσταθές} \iff Q(s) \text{ ευσταθές.}$$

Από το παραπάνω Λήμμα μπορεί να προκύψει ένας αλγόριθμος για έλεγχο της ευστάθειας που στηρίζεται στη μείωση του βαθμού του πολυωνύμου σε κάθε βήμα του. Ο αλγόριθμος ελέγχει σε κάθε βήμα αν τηρείται η συνθήκη  $a_{n-1}a_n + b_{n-1}b_n > 0$  και κατασκευάζει το επόμενο πολυώνυμο  $P^{(i+1)}(s) = Q(s)$  που είναι μικροτέρου βαθμού κατά ένα σε σχέση με το πολυώνυμο του προηγούμενου βήματος. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να παραβιασθεί η συνθήκη ή να καταλήξει σε ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

## 1.7 Παραδείγματα εφαρμογής των κριτηρίων ευστάθειας

Στην ενότητα αυτή θα προχωρήσουμε σε αριθμητική εφαρμογή του κριτηρίου της συνδιαπλοκής των ριζών καθώς και της ιδιότητας της μονότονης αύξησης της φάσης για τον έλεγχο της ευστάθειας κατά Hurwitz ενός πραγματικού πολυωνύμου.

**Παράδειγμα 1.2.** Έστω ότι μας δίνεται το πολυώνυμο

$$P(s) = s^9 + 11s^8 + 52s^7 + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6.$$

Από έναν πρώτο έλεγχο διαπιστώνουμε ότι όλοι οι συντελεστές έχουν το ίδιο πρόσημο, βασική προϋπόθεση για να είναι το  $P(s)$  ευσταθές κατά Hurwitz. Για τιμές του  $s$  πάνω στο φανταστικό άξονα ένα πολυώνυμο γράφεται γενικά σαν άθροισμα δύο όρων που προέκυψαν από την ανάλυση του σε δύο τμήματα που περιλαμβάνουν τις άρτιες και περιττές δυνάμεις του  $\omega$ , αντίστοιχα

$$P(j\omega) = P^e(\omega) + j\omega P^o(\omega).$$

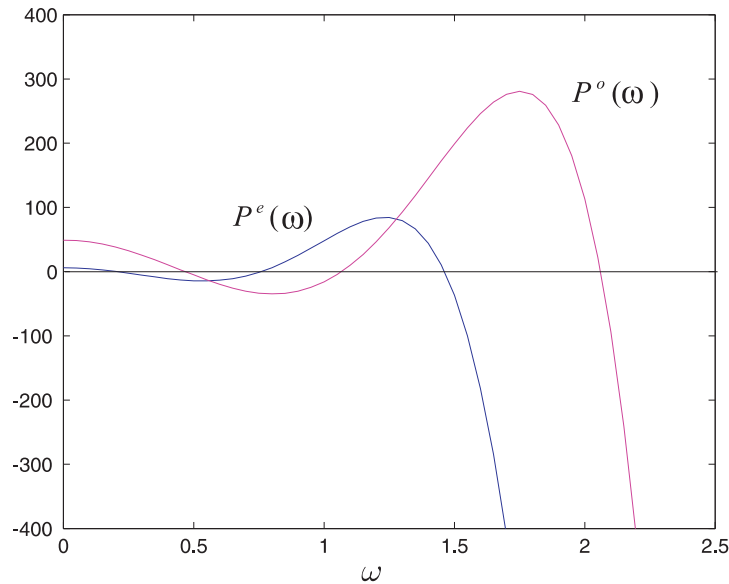
Για το συγκεκριμένο πολυώνυμο έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P^e(\omega) &= 11\omega^8 - 145\omega^6 + 331\omega^4 - 155\omega^2 + 6 \\ P^o(\omega) &= \omega^8 - 52\omega^6 + 266\omega^4 - 280\omega^2 + 49. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Τα  $P^e(\omega)$  και  $P^o(\omega)$  έχουν 4 ρίζες πραγματικές για  $\omega > 0$ . Από τη γραφική παράσταση των  $P^e(\omega)$  και  $P^o(\omega)$  (Σχήμα 1.1) είναι φανερό ότι για το διάστημα του  $\omega$  που απεικονίζεται οι ρίζες του ενός εναλλάσσονται με τις ρίζες του άλλου, επομένως το πολυώνυμο  $P(s)$  είναι Hurwitz.

**Παράδειγμα 1.3.** Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το πολυώνυμο

$$P(s) = s^9 + 21s^8 + 52s^7 + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6.$$



Σχήμα 1.1: Συνδιαπλοκή των ριζών του άρτιου και περιττού τμήματος ενός πολυωνύμου Hurwitz.

το οποίο διαφέρει μόνο ως προς το άρτιο μέρος σε σχέση με το πολυώνυμο του παραδείγματος 1.2. Τα  $P^e(\omega)$  και  $P^o(\omega)$  στην περίπτωση αυτή γίνονται

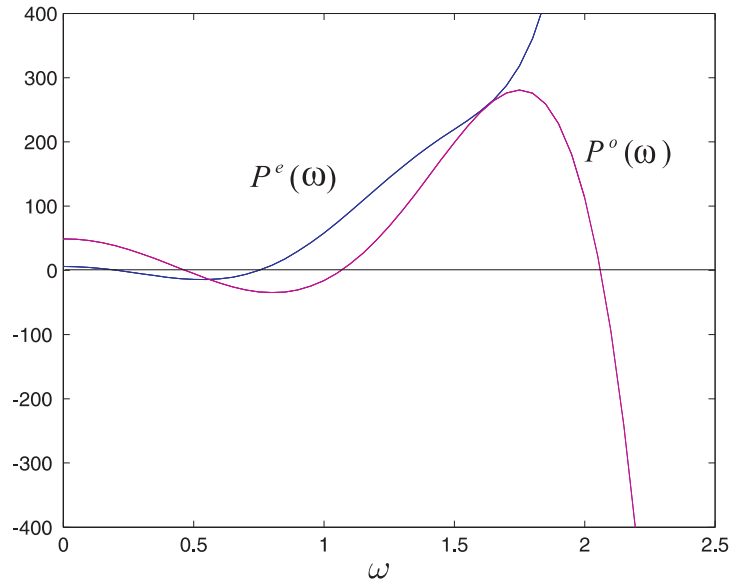
$$\begin{aligned} P^e(\omega) &= 21\omega^8 - 145\omega^6 + 331\omega^4 - 155\omega^2 + 6 \\ P^o(\omega) &= \omega^8 - 52\omega^6 + 266\omega^4 - 280\omega^2 + 49. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Επειδή το  $P(s)$  είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού για να είναι Hurwitz θα έπρεπε το  $P^e(\omega)$  να έχει 4 θετικές πραγματικές ρίζες που αλληλοδιαπλέκονται με τις 4 θετικές πραγματικές ρίζες του  $P^o(\omega)$ . Το  $P^e(\omega)$  έχει μόνο 2 θετικές πραγματικές ρίζες (Σχήμα 1.2) με αποτέλεσμα να μην ικανοποιείται η Ιδιότητα της Συνδιαπλοκής όπως προκύπτει και από τη γραφική παράσταση. Άρα το πολυώνυμο δεν είναι Hurwitz.

**Παράδειγμα 1.4.** Χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο του παραδείγματος 1.2 μπορούμε να απεικονίσουμε τη μεταβολή της  $z(\omega)$  με τη συχνότητα στο μιγαδικό επίπεδο. Σαν συναρτήσεις  $S(\omega)$  και  $T(\omega)$  επιλέγουμε τις πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$S(\omega) = \omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1 \quad T(\omega) = \omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1.$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις έχουν βαθμό ίσο προς το βαθμό των  $P^e(\omega)$  και  $P^o(\omega)$ . Με έναν ακόμη τρόπο επαληθεύσαμε ότι το πολυώνυμο είναι ευσταθές αφού η γραφική παράσταση του  $z(\omega)$  (Σχήμα 1.3) διέρχεται αυστηρά ανθωρολογιακά διαμέσου 9 τεταρτημορίων.



Σχήμα 1.2: Έλλειψη συνδιαπλοκής των ριζών του άρτιου και περιττού τμήματος ενός ασταθούς πολυωνύμου.

**Παράδειγμα 1.5.** Στο παράδειγμα αυτό θα εφαρμόσουμε στο πολυώνυμο

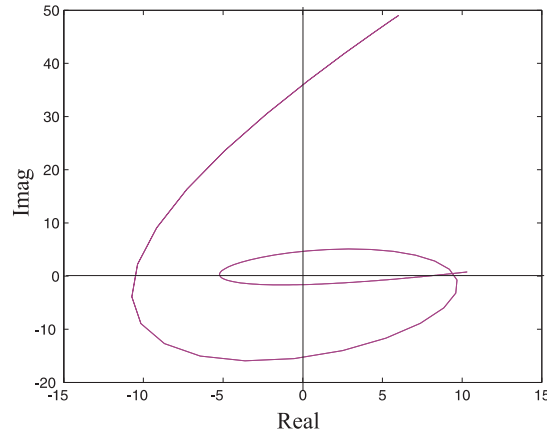
$$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$$

με πραγματικούς συντελεστές το κριτήριο ευστάθειας κατά Schur για να βρούμε τις σχέσεις που πρέπει να τηρούνται μεταξύ των συντελεστών του για να είναι ευσταθές. Το δεύτερο βήμα της πρώτης επανάληψης της διαδικασίας που περιγράφηκε στον Αλγόριθμο 1.1 επιβάλλει  $|p_n| > |p_0|$  από το οποίο προκύπτει η συνθήκη  $1 > |c|$ . Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το πολυώνυμο

$$\begin{aligned} P^{(1)}(z) &= \frac{1}{z} \left[ P(z) - cz^3 \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)} \right] \\ &= (1 - c^2)z^2 + (a - bc)z + b - ac. \end{aligned}$$

Η συνθήκη που μας επιβάλλει ο αλγόριθμος να ικανοποιήσουμε στη δεύτερη επανάληψη είναι  $|c^2 - 1| > |ac - b|$ . Στην τρίτη επανάληψη κατασκευάζουμε το πολυώνυμο

$$\begin{aligned} P^{(2)}(z) &= \frac{1}{z} \left[ P^{(1)}(z) - \frac{b - ac}{1 - c^2} z^2 \overline{P^{(1)}\left(\frac{1}{z}\right)} \right] \\ &= \frac{(1 - c^2)^2 - (b - ac)^2}{1 - c^2} z + (a - bc) \left( 1 - \frac{b - ac}{1 - c^2} \right) \end{aligned}$$



Σχήμα 1.3: Απεικόνιση στο μιγαδικό επίπεδο της συνάρτησης  $z(\omega)$ .

από το οποίο καταλήγουμε στη συνθήκη

$$|(c^2 - 1)^2 - (ca - b)^2| > |(cb - a) [(c^2 - 1) - (ca - b)]|.$$

Θα προχωρήσουμε τώρα στην κατασκευή του πίνακα του κριτηρίου Jury που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της ευστάθειας ενός διακριτού συστήματος

$$\begin{bmatrix} c & b & a & 1 \\ 1 & a & b & c \\ c^2 - 1 & cb - a & ca - b & \\ ca - b & cb - a & c^2 - 1 & \\ (c^2 - 1)^2 - (ca - b)^2 & (cb - a) [(c^2 - 1) - (ca - b)] & & \end{bmatrix}.$$

Στην πρώτη γραμμή του πίνακα αναγράφονται οι συντελεστές του πολυώνυμου. Σύμφωνα με το κριτήριο  $|c| < 1$  που ταυτίζεται με τη συνθήκη της πρώτης επανάληψης του αλγορίθμου. Αν με  $b_0$  αναπαραστήσουμε το πρώτο στοιχείο της τρίτης σειράς και με  $b_2$  το τελευταίο τότε σύμφωνα με το κριτήριο Jury για να είναι το πολυώνυμο ευσταθές θα πρέπει  $|b_0| > |b_2|$ . Αντίστοιχα αν με  $c_0$  δηλώσουμε το πρώτο στοιχείο της πέμπτης γραμμής και με  $c_1$  το τελευταίο για την ευστάθεια απαιτείται  $|c_0| > |c_1|$ . Από την τρίτη και την πέμπτη γραμμή προκύπτουν συνθήκες ίδιες ή ανάλογες εκτός μιας σταθεράς ως προς αυτές που ανέδειξε η αλγοριθμική διαδικασία.



## Κεφάλαιο 2

### Ευστάθεια ενός Ευθυγράμμου Τμήματος

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε κάποια αποτελέσματα πάνω στην ευστάθεια ευθυγράμμου τμήματος πολωνύμων. Ακόμα και αν μας δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα πολωνύμων που τα ακραία σημεία του είναι ευσταθή ενδέχεται ένα πολώνυμο που περιλαμβάνεται στο εσωτερικό του τμήματος να έχει ρίζα στην ασταθή περιοχή. Θα δώσουμε επίσης μια πλήρη ανάλυση του προβλήματος για την περίπτωση της ευστάθειας κατά Hurwitz και Schur και τα αποτελέσματα θα τα συνοψίσουμε στο Λήμμα Ευθυγράμμου Τμήματος πολωνύμων. Επίσης θα παρουσιάσουμε τα Λήμματα Πραγματικής και Μιγαδικής Κυρτής Διεύθυνσης τα οποία παρέχουν χρήσιμες συνθήκες για να την ευστάθεια ενός Ευθυγράμμου Τμήματος πολωνύμων όταν τα άκρα του είναι ευσταθή. Όταν το πολώνυμο που αντιστοιχεί στη διαφορά των ακραίων σημείων λαμβάνει συγκεκριμένες μορφές μπορούμε να αποδείξουμε την ευστάθεια ολόκληρου του τμήματος. Αυτές οι μορφές είναι ανεξάρτητες από τη συχνότητα και περιγράφονται στο Λήμμα Κορυφής.

#### 2.1 Η Συνθήκη Φραγμένης Φάσης

Έστω  $S$  ένα ανοιχτό σύνολο στο μιγαδικό επίπεδο που παριστάνει την περιοχή ευστάθειας και  $\partial S$  το σύνορο αυτής της περιοχής. Υποθέτουμε ότι  $\delta_1(s)$  και  $\delta_2(s)$  είναι πολώνυμα  $n$  βαθμού. Θεωρούμε τον κυρτό συνδυασμό των δύο αυτών πολωνύμων

$$\delta_\lambda(s) = \lambda\delta_1(s) + (1 - \lambda)\delta_2(s). \quad (2.1)$$

Ορίζουμε την μονοπαραμετρική οικογένεια πολωνύμων

$$[\delta_1(s), \delta_2(s)] \equiv \{\delta_\lambda(s) : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Αυτή η οικογένεια αναφέρεται ως ευθύγραμμο τμήμα πολωνύμων. Το τμήμα αυτό είναι ευσταθές αν κάθε πολώνυμο του τμήματος είναι ευσταθές. Αυτή η ιδιότητα αναφέρεται σαν ισχυρή

ευστάθεια του ζεύγους  $(\delta_1(s), \delta_2(s))$ . Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια ένα Λήμμα που προκύπτει ευθέως από το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου. Έστω ότι με  $\phi_{\delta_i}(s_0)$  δηλώνουμε το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού  $\delta_i(s_0)$ .

**Λήμμα 2.1.** Έστω  $\delta_1(s)$  και  $\delta_2(s)$  δύο πολυώνυμα ευσταθή σε σχέση με το  $\mathcal{S}$ . Επιπλέον κάνουμε την υπόθεση ότι ο βαθμός του  $\delta_\lambda(s)$  είναι  $n$  για κάθε  $\lambda \in [0, 1]$ . Οι προτάσεις που ακολουθούν είναι ισοδύναμες:

α) Το τμήμα  $[\delta_1(s), \delta_2(s)]$  είναι ευσταθές σε σχέση με το  $\mathcal{S}$ .

β)  $\delta_\lambda(s^*) \neq 0, \quad \forall s^* \in \partial\mathcal{S}, \quad \lambda \in [0, 1]$ .

γ)  $|\phi_{\delta_1}(s^*) - \phi_{\delta_2}(s^*)| \neq \pi \text{ radians}, \quad \forall s^* \in \partial\mathcal{S}$ .

δ) Η γραφική παράσταση στο μιγαδικό επίπεδο του  $\frac{\delta_1(s^*)}{\delta_2(s^*)}$  για  $s^* \in \partial\mathcal{S}$  δεν τέμνει τον άξονα των αρνητικών πραγματικών αριθμών.

*Απόδειξη.* Η ισοδυναμία των α) και β) προκύπτει από το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου. Η διάψευση της πρότασης β), δηλαδή  $\delta_\lambda(s^*) = 0$  για κάποιο  $\lambda \in [0, 1]$ , συνεπάγεται ότι τα στρεφόμενα διανύσματα  $\delta_1(s^*)$  και  $\delta_2(s^*)$  πρέπει να ευθυγραμμιστούν με την αρχή των αξόνων με τα ακραία τους σημεία να βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα  $|\phi_{\delta_1}(s^*) - \phi_{\delta_2}(s^*)| = \pi$  που αποδεικνύει την ισοδυναμία των προτάσεων β) και γ).

Η διάψευση της β) συνεπάγεται επίσης ότι

$$\lambda\delta_1(s^*) + (1 - \lambda)\delta_2(s^*) = 0$$

από την οποία προκύπτει

$$\frac{\delta_1(s^*)}{\delta_2(s^*)} = -\left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right).$$

Καθώς η παράμετρος  $\lambda$  διατρέχει τις τιμές από 0 έως 1 το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης παράγει τον άξονα των αρνητικών πραγματικών αριθμών. Αυτό αποδεικνύει την ισοδυναμία των προτάσεων β) και δ). □

Το Λήμμα καθορίζει τις συνθήκες που απαιτούνται για να είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα πολυωνύμων ευσταθές όταν είναι και τα άκρα του. Οι συνθήκες που επιβάλλει ισχύουν με την υπόθεση ότι ο βαθμός των πολυωνύμων παραμένει αμετάβλητος. Η συνθήκη που απαιτεί η διαφορά φάσης των ακραίων σημείων υπολογισμένη κατά μήκος του συνόρου της περιοχής ευστάθειας να έχει άνω όριο το  $\pi$  είναι γνωστή ως Συνθήκη της Φραγμένης Φάσης.

## 2.2 Το Λήμμα Ευθυγράμμου Τμήματος (Segment Lemma)

### 2.2.1 Η περίπτωση Hurwitz

Σε αυτήν την υποενότητα θα ασχοληθούμε με την ισχυρή ευστάθεια ενός ευθυγράμμου τμήματος πολυωνύμων που συνδέει δυο πολυώνυμα Hurwitz. Για το σκοπό αυτό θα παραθέσουμε ένα Λήμμα που αναφέρεται στους κυρτούς συνδυασμούς δυο πραγματικών πολυωνύμων και βρίσκει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ένα τέτοιος συνδυασμός έχει μια καθαρά φανταστική ρίζα.

**Λήμμα 2.2.** Έστω  $\delta_1(\cdot)$  και  $\delta_2(\cdot)$  δύο πραγματικά πολυώνυμα, όχι απαραίτητα ευσταθή. Τότε, υπάρχει  $\lambda \in [0, 1]$  τέτοιο ώστε  $\lambda\delta_1(\cdot) + (1 - \lambda)\delta_2(\cdot)$  να έχει μια καθαρά φανταστική ρίζα  $j\omega$  με  $\omega > 0$ , αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0 \\ \delta_1^e(\omega)\delta_2^e(\omega) \leq 0 \\ \delta_1^o(\omega)\delta_2^o(\omega) \leq 0, \end{cases}$$

όπου τα  $\delta^e$  και  $\delta^o$  ορίζονται ανάλογα με τις (1.2) και (1.3).

Στηριζόμενοι στο Λήμμα 2.2 είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το Λήμμα Ευθυγράμμου Τμήματος πολυωνύμων για την περίπτωση Hurwitz [10].

**Λήμμα 2.3.** (Segment Lemma: Hurwitz Case)

Έστω  $\delta_1(s)$  και  $\delta_2(s)$  πραγματικά πολυώνυμα βαθμού  $n$  με τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων να έχουν το ίδιο πρόσημο. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα πολυωνύμων  $[\delta_1(s), \delta_2(s)]$  είναι ευσταθές κατά Hurwitz αν και μόνο αν δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός  $\omega > 0$  τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned} 1) \quad & \delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0 \\ 2) \quad & \delta_1^e(\omega)\delta_2^e(\omega) \leq 0 \\ 3) \quad & \delta_1^o(\omega)\delta_2^o(\omega) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

*Απόδειξη.* Σημειώνουμε ότι αν δύο πολυώνυμα  $\delta_1(s)$  και  $\delta_2(s)$  είναι  $n$  βαθμού με τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων να έχουν το ίδιο πρόσημο τότε κάθε πολυώνυμο στο ευθύγραμμο τμήμα είναι  $n$  βαθμού. Επιπλέον κανένα πολυώνυμο στο ευθύγραμμο τμήμα δεν έχει πραγματική ρίζα στο  $s = 0$  επειδή σ' αυτήν την περίπτωση θα ίσχυε  $\delta_1(0)\delta_2(0) \leq 0$ . Αυτό θα σήμαινε ότι οι σταθεροί όροι των πολυωνύμων θα είχαν διαφορετικό πρόσημο. Σε συνδυασμό όμως με την υπόθεση ότι οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων έχουν το ίδιο πρόσημο το προηγούμενο συμπέρασμα έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι τα  $\delta_1(s)$  και  $\delta_2(s)$  είναι και τα δύο πολυώνυμα αφού θα έπρεπε όλοι οι συντελεστές τους να έχουν το ίδιο πρόσημο. Έτσι ένα ασταθές κατά Hurwitz πολυώνυμο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να προκύψει αν και μόνο αν έχει ρίζα στον φανταστικό άξονα  $s = j\omega$  με  $\omega > 0$ . Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2 αυτό μπορεί να συμβεί αν και μόνο αν ισχύουν οι συνθήκες (2.2).  $\square$

Οι συνθήκες (2.2) του Λήμματος Ευθυγράμμου Τμήματος πολυωνύμων είναι αναγκαίες και ικανές ώστε το ευθύγραμμο τμήμα  $[\delta_1(j\omega), \delta_2(j\omega)]$  να διέρχεται από την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου. Αυτό είναι ισοδύναμο με τη συνθήκη που επιβάλλει διαφορά φάσης των ακραίων πολυωνύμων  $|\phi_{\delta_1}(s^*) - \phi_{\delta_2}(s^*)| = \pi$ .

### 2.2.2 Η περίπτωση Schur

Ας περάσουμε τώρα στο πρόβλημα που ελέγχει την ευστάθεια κατά Schur κατά μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει δύο πραγματικά πολυώνυμα  $P_1(z)$  και  $P_2(z)$ . Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι αν κάθε πολυώνυμο της μορφής

$$\lambda P_1(z) + (1 - \lambda)P_2(z), \quad \lambda \in [0, 1]$$

είναι ευσταθές κατά Schur. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ευσταθές πολυώνυμο κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος και ότι ο βαθμός των πολυωνύμων παραμένει σταθερός κατά μήκος του τμήματος. Τότε από το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου αν υπάρχει ένα πολυώνυμο του ευθυγράμμου τμήματος με μία ασταθή ρίζα έξω από τον μοναδιαίο κύκλο, λόγω συνέχειας θα πρέπει να υπάρχει ένα πολυώνυμο στο ευθύγραμμο τμήμα με τη ρίζα του πάνω στο σύνορο της περιοχής ευστάθειας, που είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Είμαστε σε θέση τώρα να περάσουμε σε μια σειρά από κριτήρια που θα μας επιτρέψουν να εντοπίσουμε την ύπαρξη μιας τέτοιας ρίζας. Σε ό,τι επακολουθεί θα κάνουμε την υπόθεση ότι οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων στα ακραία πολυώνυμα του ευθυγράμμου τμήματος έχουν το ίδιο πρόσημο. Αυτό μας εξασφαλίζει ότι τα πολυώνυμα κατά μήκος του τμήματος δε χάνουν βαθμό. Το Λήμμα που διατυπώνεται στη συνέχεια για την ευστάθεια κατά Schur ευθυγράμμου τμήματος πολυωνύμων οφείλεται στον Zeheb [44].

#### Λήμμα 2.4. (Schur Segment Lemma I)

*Έστω  $P_1(z)$  και  $P_2(z)$  δύο πραγματικά πολυώνυμα Schur βαθμού  $n$  με τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων να έχουν το ίδιο πρόσημο. Ένα πολυώνυμο στο ευθύγραμμο τμήμα  $[P_1(z), P_2(z)]$  έχει μια ρίζα στο μοναδιαίο κύκλο αν και μόνο αν υπάρχει  $z_0$  με  $|z_0| = 1$  τέτοιο ώστε*

$$P_1(z_0)P_2(z_0^{-1}) - P_2(z_0)P_1(z_0^{-1}) = 0$$

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{P_1(z_0)}{P_2(z_0)} \right] = 0$$

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{P_1(z_0)}{P_2(z_0)} \right] \leq 0.$$

Ένα πραγματικό πολυώνυμο  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = h(z) + g(z)$  μπορεί να αναλυθεί σε ένα συμμετρικό  $h(z)$  και σε ένα αντισυμμετρικό μέρος  $g(z)$ , όπου  $h(z) =$

$\frac{1}{2} (P(z) + z^n P(z^{-1}))$  και  $g(z) = \frac{1}{2} (P(z) - z^n P(z^{-1}))$ . Οι συντελεστές των όρων για το συμμετρικό και αντισυμμετρικό τμήμα δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\alpha_i = \frac{a_i + a_{n-1}}{2} \text{ και } \beta_i = \frac{a_i - a_{n-1}}{2}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Αυτή η ανάλυση παίζει ρόλο αντίστοιχο με την ανάλυση σε άρτιο και περιττό μέρος στην περίπτωση Hurwitz. Είμαστε σε θέση τώρα να επαναδιατυπώσουμε το Λήμμα Ευθυγράμμου Τμήματος για την περίπτωση Schur χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος [40].

**Λήμμα 2.5.** (Schur Segment Lemma II)

Εστω  $P_1(z)$  και  $P_2(z)$  δύο πραγματικά πολυώνυμα βαθμού  $n$  που αναλύονται σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος ως εξής:

$$P_1(z) = h_1(z) + g_1(z) \text{ και } P_2(z) = h_2(z) + g_2(z).$$

Τότε υπάρχουν  $\lambda \in [0, 1]$  και  $z_0$  με  $|z_0| = 1$  τέτοια ώστε

$$\lambda P_1(z_0) + (1 - \lambda) P_2(z_0) = 0$$

αν και μόνο αν

$$h_1(z_0)g_2(z_0) - g_1(z_0)h_2(z_0) = 0 \tag{2.3}$$

και

$$z_0^{-n} h_1(z_0)h_2(z_0) \leq 0, \quad z_0^{-n} g_1(z_0)g_2(z_0) \geq 0. \tag{2.4}$$

Σ' αυτή την εκδοχή του Λήμματος Ευθυγράμμου Τμήματος δεν απαιτείται τα ακραία πολυώνυμα να είναι ευσταθή κατά Schur. Κάποιος μπορεί να υπολογίσει τις ρίζες  $z_0$  της (2.3) και να ελέγξει αν βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Επιπλέον θα πρέπει να παραβιάζονται οι (2.4) για να ικανοποιεί το ευθύγραμμο τμήμα την ισχυρή ευστάθεια.

## 2.3 Βασικές σχέσεις που αφορούν τη φάση

Οι σχέσεις που πρόκειται να παραθέσουμε θα μας βοηθήσουν να διατυπώσουμε το Λήμμα Κυρτής Διεύθυνσης για ευστάθεια Hurwitz και το Λήμμα Κορυφής για ευστάθεια Hurwitz και Schur. Τα δύο αυτά αποτελέσματα βασίζονται στο ρυθμό αλλαγής της φάσης σε σχέση με τη συχνότητα. Ειδικά το Λήμμα Κορυφής διαπραγματεύεται περιπτώσεις που ο ρυθμός αυτός μηδενίζεται.

### 2.3.1 Ιδιότητες της φάσης για πολυώνυμο Hurwitz

Έστω  $\delta(s)$  ένα πραγματικό ή μιγαδικό πολυώνυμο που για  $s = j\omega$  γράφεται σαν

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega),$$

όπου  $p(\omega)$  και  $q(\omega)$  είναι πραγματικές συναρτήσεις. Επίσης

$$X(\omega) = \frac{q(\omega)}{p(\omega)}$$

και

$$\phi_\delta(\omega) = \tan^{-1} \frac{q(\omega)}{p(\omega)} = \tan^{-1} X(\omega).$$

**Λήμμα 2.6.** Αν  $\delta(s)$  είναι ένα πραγματικό ή μιγαδικό πολυώνυμο Hurwitz τότε

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} > 0, \quad \forall \omega \in [-\infty, \infty]. \quad (2.5)$$

Για ένα πολυώνυμο Hurwitz η φάση είναι μία αύξουσα συνάρτηση της συχνότητας από την οποία συνεπάγεται η (2.5) αφού

$$\frac{d\phi_\delta(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{1 + X^2(\omega)} \frac{dX(\omega)}{d\omega}. \quad (2.6)$$

Κάθε πραγματικό πολυώνυμο  $\delta(s)$  μπορεί να αναλυθεί όπως έχουμε δει σε ένα άρτιο και ένα περιττό μέρος

$$\delta(s) = \delta^{even}(s) + \delta^{odd}(s) = h(s^2) + sg(s^2)$$

ή

$$\delta(s) = \delta^e(s) + s\delta^o(s).$$

Από το  $\delta(s)$  μπορούν να προκύψουν δύο βοηθητικά μιγαδικά πολυώνυμα άρτιου βαθμού

$$\underline{\delta}(s) = h(s^2) + jg(s^2)$$

και

$$\bar{\delta}(s) = h(s^2) - js^2g(s^2).$$

Στα επόμενα 2 Λήμματα στα πολυώνυμα  $\underline{\delta}(s)$  και  $\bar{\delta}(s)$  αποδίδονται ιδιότητες μονοτονίας στη φάση. Η απόδειξη αυτών των Λημμάτων μπορεί να αναζητηθεί στην εργασία [29].

**Λήμμα 2.7.** Αν  $\delta(s)$  είναι ένα πολυώνυμο Hurwitz βαθμού  $\geq 2$  τότε

$$\frac{d\phi_{\underline{\delta}}(\omega)}{d\omega} > 0$$

και

$$\frac{d\phi_{\bar{\delta}}(\omega)}{d\omega} > 0.$$

Ένα πολυώνυμο  $\delta(s)$  είναι antiHurwitz όταν όλες οι ρίζες του βρίσκονται στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο.

**Λήμμα 2.8.** Αν  $\delta(s)$  είναι ένα πολυώνυμο antiHurwitz τότε

$$\frac{d\phi_{\delta}(\omega)}{d\omega} < 0$$

και

$$\frac{d\phi_{\bar{\delta}}(\omega)}{d\omega} < 0.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος που ακολουθεί βρίσκεται στην εργασία [22].

**Θεώρημα 2.1.** Για ένα πραγματικό πολυώνυμο Hurwitz

$$\delta(s) = h(s^2) + sg(s^2)$$

ο ρυθμός αλλαγής του ορίσματος του  $\delta(j\omega)$  φράζεται από κάτω από

$$\frac{d\phi_{\delta}(\omega)}{d\omega} \geq \left| \frac{\sin(2\phi_{\delta}(\omega))}{2\omega} \right|, \quad \forall \omega > 0. \quad (2.7)$$

Ισοδύναμα ισχύει ότι

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} \geq \left| \frac{X(\omega)}{\omega} \right|, \quad (2.8)$$

όπου  $X(\omega) = \frac{\omega g(-\omega^2)}{h(-\omega^2)}$ . Η ισότητα στις (2.7) και (2.8) ισχύει μόνο όταν ο βαθμός του  $\delta(s)$  είναι 1.

Η μεταβολή της φάσης με τη συχνότητα συνδέεται με τη μεταβολή του  $X(\omega)$  μέσω της (2.6). Επομένως από τη (2.7) έπεται η (2.8) καθώς

$$\frac{1}{1 + X^2(\omega)} \left| \frac{X(\omega)}{\omega} \right| = \left| \frac{\sin(2\phi_{\delta}(\omega))}{2\omega} \right|.$$

### 2.3.2 Σχέσεις που αφορούν τη φάση ενός ευθυγράμμου τμήματος

Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $\lambda\delta_1(s) + (1 - \lambda)\delta_2(s)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  που παράγεται από δύο πραγματικά πολυώνυμα  $\delta_1(s)$  και  $\delta_2(s)$  βαθμού  $n$  με τους συντελεστές των μεγατοβάθμιων όρων και των σταθερών να έχουν το ίδιο πρόσημο. Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχει ένα πολυώνυμο που βρίσκεται στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος ρίζα  $s = j\omega_0$  πάνω στον φανταστικό άξονα είναι να υπάρχει  $\lambda_0 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε

$$\lambda_0\delta_1(j\omega_0) + (1 - \lambda_0)\delta_2(j\omega_0) = 0. \quad (2.9)$$

Αφού επιβάλλαμε τη συνθήκη οι σταθεροί όροι να έχουν το ίδιο πρόσημο δεν είναι δυνατόν το ευθύγραμμο τμήμα να εμφανίσει ρίζα στο 0. Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για τα  $\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2, \bar{\delta}_1$  και  $\bar{\delta}_2$

$$\lambda_0 \underline{\delta}_1(j\omega_0) + (1 - \lambda_0) \underline{\delta}_2(j\omega_0) = 0 \quad (2.10)$$

$$\lambda_0 \bar{\delta}_1(j\omega_0) + (1 - \lambda_0) \bar{\delta}_2(j\omega_0) = 0. \quad (2.11)$$

Ορίζουμε το πολυώνυμο  $\delta_0$  από τη σχέση

$$\delta_0(s) \equiv \delta_1(s) - \delta_2(s).$$

Επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$\underline{\delta}_0(j\omega) = \underline{\delta}_1(j\omega) - \underline{\delta}_2(j\omega)$$

και

$$\bar{\delta}_0(j\omega) = \bar{\delta}_1(j\omega) - \bar{\delta}_2(j\omega).$$

**Λήμμα 2.9.** Έστω  $\delta_1(s)$  και  $\delta_2(s)$  πραγματικά πολυώνυμα βαθμού  $n$  με τους συντελεστές των μεριστοβάθμιων όρων να έχουν το ίδιο πρόσημο. Αν επιπλέον κάνουμε την υπόθεση ότι υπάρχει  $\lambda_0 \in (0, 1)$  και  $\omega_0 > 0$  που ικανοποιεί τις σχέσεις (2.9), (2.10) και (2.11) τότε

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\phi_{\delta_0}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} &= \lambda_0 \left. \frac{d\phi_{\delta_2}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} + (1 - \lambda_0) \left. \frac{d\phi_{\delta_1}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}, \\ \left. \frac{d\phi_{\underline{\delta}_0}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} &= \lambda_0 \left. \frac{d\phi_{\underline{\delta}_2}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} + (1 - \lambda_0) \left. \frac{d\phi_{\underline{\delta}_1}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \end{aligned} \quad (2.12)$$

και

$$\left. \frac{d\phi_{\bar{\delta}_0}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \lambda_0 \left. \frac{d\phi_{\bar{\delta}_2}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} + (1 - \lambda_0) \left. \frac{d\phi_{\bar{\delta}_1}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}.$$

Ένα Λήμμα αντίστοιχο με το προηγούμενο μπορεί να διατυπωθεί σε σχέση με το  $X(\omega)$ .

**Λήμμα 2.10.** Έστω ότι υπάρχει  $\lambda_0 \in (0, 1)$  και  $\omega_0$  για το οποίο επαληθεύεται η σχέση (2.9) ακόμα και στην περίπτωση μιγαδικών πολυωνύμων. Τότε ισχύει ότι

$$\left. \frac{dX_0(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \lambda_0 \left. \frac{dX_2(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} + (1 - \lambda_0) \left. \frac{dX_1(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}. \quad (2.13)$$

Τα αποτελέσματα που διατυπώσαμε θα μας βοηθήσουν να διατυπώσουμε στην επόμενη ενότητα τα Λήμματα Κυρτής Διεύθυνσης και Κορυφής.



## 2.4 Κυρτές διευθύνσεις

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για το πολυώνυμο  $\delta_0(s)$  κάτω από τις οποίες η ισχυρή ευστάθεια του ζεύγους  $(\delta_2(s), \delta_0(s) + \delta_2(s))$  θα ισχύει για κάθε  $\delta_2(s)$  και  $\delta_0(s) + \delta_2(s)$  που είναι πολυώνυμο Hurwitz. Ένα πολυώνυμο  $\delta_0(s)$  που εξασφαλίζει την ισχυρή ευστάθεια για άκρα ευσταθή κατά Hurwitz ονομάζεται κυρτή διεύθυνση (convex direction). Διακρίνουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις ανάλογα με το αν τα πολυώνυμα που εμπλέκονται είναι μιγαδικά ή πραγματικά. Τα Λήμματα Κυρτής Διεύθυνσης που διατυπώνονται στη συνέχεια για μιγαδικά και πραγματικά πολυώνυμα οφείλονται στον Rantzer [33].

**Λήμμα 2.11.** (Λήμμα Μιγαδικής Κυρτής Διεύθυνσης)

Έστω  $\delta_\lambda(s) = \lambda\delta_1(s) + (1 - \lambda)\delta_2(s) : \lambda \in [0, 1]$  ένα μιγαδικό ευθύγραμμο τμήμα πολυωνύμων βαθμού  $n$  όπως ορίζεται από τη σχέση (2.1). Το μιγαδικό πολυώνυμο  $\delta_0(s)$  είναι κυρτή διεύθυνση για άκρα του διαστήματος ευσταθή κατά Hurwitz αν και μόνο αν

$$\frac{d\phi_{\delta_0}(\omega)}{d\omega} \leq 0$$

για κάθε συχνότητα  $\omega \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\delta_0(j\omega) \neq 0$ . Ισοδύναμα

$$\frac{dX_0(\omega)}{d\omega} \leq 0 \tag{2.14}$$

για κάθε συχνότητα  $\omega \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\delta_0(j\omega) \neq 0$ .

*Απόδειξη.* Θα αποδείξουμε μόνο ότι οι συνθήκες που τίθενται στο Θεώρημα είναι ικανές για να είναι το  $\delta_0(s)$  κυρτή διεύθυνση. Αφού οι συνθήκες είναι ισοδύναμες θα προχωρήσουμε με αφετηρία την αλήθεια της (2.14). Αν το  $\omega_0$  είναι τέτοιο ώστε  $\delta_0(j\omega_0) = 0$ , προκύπτει ότι  $\delta_2(j\omega_0) + \lambda_0\delta_0(j\omega_0) \neq 0$  για κάθε πραγματικό  $\lambda \in [0, 1]$  καθώς διαφορετικά θα ερχόταν σε αντίθεση με το γεγονός ότι το  $\delta_2(s)$  είναι πολυώνυμο Hurwitz. Από το Λήμμα 2.10 προκύπτει ότι το ευθύγραμμο τμήμα περιλαμβάνει πολυώνυμο με ρίζα  $s = j\omega$  μόνο αν

$$\left. \frac{dX_0(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \lambda_0 \left. \frac{dX_2(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} + (1 - \lambda_0) \left. \frac{dX_1(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}. \tag{2.15}$$

Επειδή  $\delta_1(s)$  και  $\delta_2(s)$  είναι πολυώνυμο Hurwitz από το Λήμμα 2.6 έχουμε ότι

$$\frac{dX_i(\omega)}{d\omega} > 0, \omega \in \mathbb{R}, i = 1, 2.$$

Έτσι προκύπτει ότι το δεξί μέλος της (2.15) είναι αυστηρά θετικό ενώ το αριστερό είναι μη θετικό. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να υπάρχει κάποιο  $\omega \in \mathbb{R}$  για το οποίο να ισχύει η (2.15). Με αυτό σαν δεδομένο η ευστάθεια του ευθυγράμμου τμήματος προκύπτει από το Θεώρημα Διάσχισης του

Συνόρου.

Για την απόδειξη της αναγκαιότητας θα δεχθούμε ότι η (2.14) παραβιάζεται και θα πρέπει να είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα ευσταθή πολυώνυμα που η διαφορά τους δίνει το  $\delta_0(s)$  το οποίο όμως περιλαμβάνει στο εσωτερικό του ασταθές πολυώνυμο.  $\square$

Τις συνθήκες για να είναι ένα πολυώνυμο  $\delta_0(s)$  κυρτή διεύθυνση στα πραγματικά πολυώνυμα διαπραγματεύεται το επόμενο Λήμμα.

**Λήμμα 2.12.** (Λήμμα Πραγματικής Κυρτής Διεύθυνσης)

Έστω  $\delta_\lambda(s) = \lambda\delta_1(s) + (1 - \lambda)\delta_2(s) : \lambda \in [0, 1]$  ένα πραγματικό ευθύγραμμο τμήμα πολυωνύμων βαθμού  $n$ . Το πραγματικό πολυώνυμο  $\delta_0(s)$  είναι κυρτή διεύθυνση αν και μόνο αν η σχέση

$$\frac{d\phi_{\delta_0}(\omega)}{d\omega} \leq \left| \frac{\sin(2\phi_{\delta_0}(\omega))}{2\omega} \right|$$

ικανοποιείται για κάθε συχνότητα  $\omega > 0$  τέτοια ώστε  $\delta_0(j\omega) \neq 0$ . Ισοδύναμα

$$\frac{dX_0(\omega)}{d\omega} \leq \left| \frac{X_0(\omega)}{\omega} \right|$$

για κάθε συχνότητα  $\omega > 0$  τέτοια ώστε  $\delta_0(j\omega) \neq 0$ .

*Απόδειξη.* Θα περιοριστούμε μόνο στην απόδειξη της ικανής συνθήκης. Αρχικά θα αποκλείσουμε την περίπτωση να έχουν τα πολυώνυμα ενός ευθυγράμμου τμήματος ρίζα στο  $s = 0$  αν τα πολυώνυμα στα άκρα του είναι βαθμού  $\deg[\delta_i(s)] \geq 1$ . Αυτό προκύπτει από την απαίτηση ο βαθμός των πολυωνύμων να παραμένει αμετάβλητος κατά μήκος του τμήματος πράγμα που συνεπάγεται ότι οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων είναι του ίδιου προσήμου καθώς και από την απαίτηση τα ακραία πολυώνυμα να είναι Hurwitz που συνεπάγεται ότι οι σταθεροί τους όροι έχουν το ίδιο πρόσημο. Επίσης μπορούμε να αποκλείσουμε την περίπτωση για  $\omega > 0$  να ισχύει  $\delta_0(j\omega_0) = 0$  γιατί αυτό αντιβαίνει στο γεγονός το πολυώνυμο  $\delta_2(j\omega_0)$  να είναι Hurwitz. Η απόδειξη ακολουθεί τη φιλοσοφία της απόδειξης του Λήμματος 2.11 με τη διαφορά ότι γίνεται χρήση του Θεωρήματος 2.1 και του Λήμματος 2.9.  $\square$

## 2.5 Το Λήμμα Κορυφής

Οι συνθήκες που δίνονται από τα Λήμματα Κυρτής Διεύθυνσης εξαρτώνται από τη συχνότητα. Είναι δυνατόν να διατυπώσουμε συνθήκες για το  $\delta_0(s)$  που είναι ανεξάρτητες από τη συχνότητα κάτω από τις οποίες η ευστάθεια κατά Hurwitz των κορυφών συνεπάγεται την ευστάθεια κάθε πολυωνύμου στο ευθύγραμμο τμήμα  $[\delta_1(s), \delta_2(s)]$ . Σ' αυτήν την παράγραφο εξετάζουμε ειδικές

περιπτώσεις των πολυωνύμων διαφοράς  $\delta_0(s)$  για τα οποία αυτό είναι εφικτό. Στη συνέχεια συνδυάζουμε τις ειδικές περιπτώσεις για να καταλήξουμε στο γενικό αποτέλεσμα που είναι γνωστό σαν Λήμμα Κορυφής (Vertex Lemma).

Θεωρούμε πραγματικά πολυώνυμα της μορφής

$$\delta_0(s) = s^t(as + b)P(s), \quad (2.16)$$

όπου  $t$  είναι ένα μη αρνητικός ακέραιος και το  $P(s)$  είναι ένα πολυώνυμο άρτιο ή περιττό. Στη συνέχεια κάνουμε την αυθαίρετη υπόθεση ότι  $t$  είναι άρτιο και ότι  $P(s)$  είναι ένα άρτιο πολυώνυμο. Τότε

$$\delta_0(s) = \underbrace{s^t P(s) b}_{\delta_0^{even}(s)} + \underbrace{s^{t+1} P(s) a}_{\delta_0^{odd}(s)}. \quad (2.17)$$

Αν ορίσουμε το  $\delta_0(j\omega)$  σύμφωνα με την (2.17) τότε ισχύει ότι

$$\frac{d\phi_{\delta_0}}{d\omega} = 0$$

αφού η φάση του  $\delta_0$  δίνεται από

$$\phi_{\delta_0} = \tan^{-1} \delta_0 = \arctan \frac{a}{b}$$

που είναι ανεξάρτητη της συχνότητας. Από το Λήμμα 2.9 και ειδικότερα τη σχέση (2.12) έχουμε ότι

$$\lambda_0 \frac{d\phi_{\delta_2}}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} + (1 - \lambda_0) \frac{d\phi_{\delta_1}}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} = 0 \quad (2.18)$$

ενώ από το Λήμμα 2.7 έχουμε ότι το αριστερό μέλος είναι θετικό αν τα  $\delta_1(s)$  και  $\delta_2(s)$  είναι πολυώνυμα Hurwitz. Επομένως δεν υπάρχει  $\lambda_0 \in [0, 1]$  για το οποίο να ικανοποιείται η (2.18) και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το ευθύγραμμο τμήμα  $[\delta_1(s), \delta_2(s)]$  είναι ευσταθές. Έχοντας υπόψη το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορούμε να διατυπώσουμε το επόμενο Λήμμα.

**Λήμμα 2.13.** (Λήμμα Κορυφής: Η περίπτωση Hurwitz)

*α) Έστω  $\delta_1(s)$  και  $\delta_2(s)$  πραγματικά πολυώνυμα βαθμού  $n$  με συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων του ιδίου προσήμου και επιπλέον*

$$\begin{aligned} \delta_0(s) &= \delta_1(s) - \delta_2(s) \\ &= A(s)s^t(as + b)P(s), \end{aligned} \quad (2.19)$$

όπου  $A(s)$  είναι ένα antiHurwitz πολυώνυμο,  $t$  ακέραιος,  $a, b$  είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί και  $P(s)$  είναι άρτιο ή περιττό πολυώνυμο. Τότε η ευστάθεια του ευθυγράμμου τμήματος  $[\delta_1(s), \delta_2(s)]$  έπεται από την ευστάθεια των άκρων  $\delta_1(s)$  και  $\delta_2(s)$ .

β) Όταν το  $\delta_0(s)$  δεν είναι της μορφής που ορίζει το α), η ευστάθεια των άκρων δεν αρκεί για να διασφαλίσει την ευστάθεια του ευθυγράμμου τμήματος.

Αντίστοιχα μπορούμε να διατυπώσουμε το Λήμμα Κορυφής για την περίπτωση Schur.

**Λήμμα 2.14.** (Λήμμα Κορυφής: Η περίπτωση Schur)

α) Έστω  $\delta_1(z)$  και  $\delta_2(z)$  πολυώνυμα βαθμού  $n$  με  $\delta_1(1)$  και  $\delta_2(1)$  διάφορα του μηδενός και του ιδίου προσήμου και με τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων να έχουν το ίδιο πρόσημο. Επιπλέον ορίζουμε

$$\begin{aligned}\delta_0(z) &= \delta_1(z) - \delta_2(z) \\ &= A(z)(z-1)^{t_1}(z+1)^{t_2}(az+b)P(z),\end{aligned}\tag{2.20}$$

όπου  $A(z)$  είναι ένα antiSchur πολυώνυμο,  $t_1, t_2 \geq 0$  ακέραιοι αριθμοί,  $a, b$  αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί και  $P(z)$  ένα συμμετρικό ή αντισυμμετρικό πολυώνυμο. Τότε η ευστάθεια του τμήματος  $[\delta_1(z), \delta_2(z)]$  κατά Schur έπεται από την ευστάθεια των άκρων  $\delta_1(z)$  και  $\delta_2(z)$ .

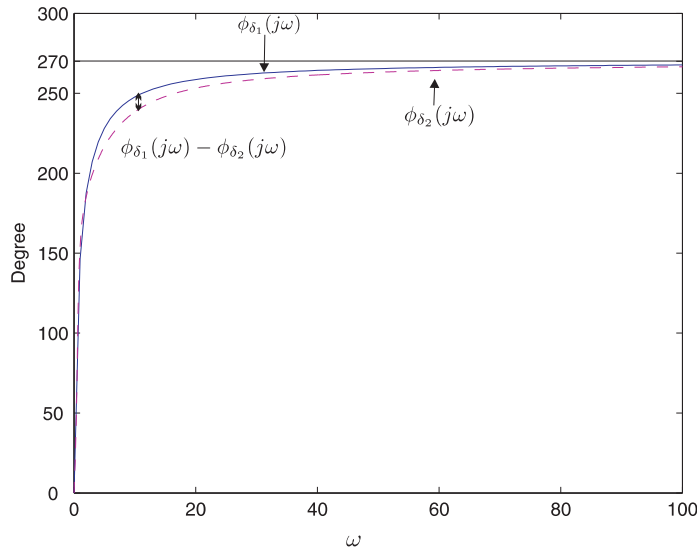
β) Όταν το  $\delta_0(z)$  δεν είναι της μορφής που ορίζει το α), η ευστάθεια των άκρων κατά Schur δεν αρκεί για να διασφαλίσει την ευστάθεια του ευθυγράμμου τμήματος.

## 2.6 Παραδείγματα ελέγχου ευστάθειας ευθυγράμμου τμήματος πολυωνύμων

Στην ενότητα αυτή θα εφαρμόσουμε γραφικά το κριτήριο φραγμένης φάσης σε αριθμητικά παραδείγματα για να διαπιστώσουμε αν ένα ευθύγραμμο τμήμα πολυωνύμων είναι ευσταθές κατά Hurwitz όταν τα άκρα του είναι ευσταθή. Η εύρωστη ευστάθεια συνεχών ή διακριτών συστημάτων με τα πολυώνυμα των συναρτήσεων μεταφοράς να διατάσσονται κατά μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος θα ελεγχθεί επίσης με χρήση του Λήμματος Ευθυγράμμου Τμήματος για την περίπτωση Hurwitz και Schur, αντίστοιχα. Τέλος θα ελέγξουμε γραφικά αν ικανοποιείται το κριτήριο για να είναι το πολυώνυμο διαφοράς που σχηματίζεται από τα ακραία πολυώνυμα του ευθυγράμμου τμήματος κυρτή διεύθυνση. Η ύπαρξη κυρτής διεύθυνσης εγγυάται την ευστάθεια του ευθυγράμμου τμήματος.

**Παράδειγμα 2.1.** Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα  $\delta_\lambda(s) = \lambda\delta_1(s) + (1-\lambda)\delta_2(s)$  που προσδιορίζεται από τα ακραία πολυώνυμα

$$\begin{aligned}\delta_1(s) &= s^3 + 4s^2 + 3s + 1 \\ \delta_2(s) &= s^3 + 6s^2 + 4s + 2.\end{aligned}$$



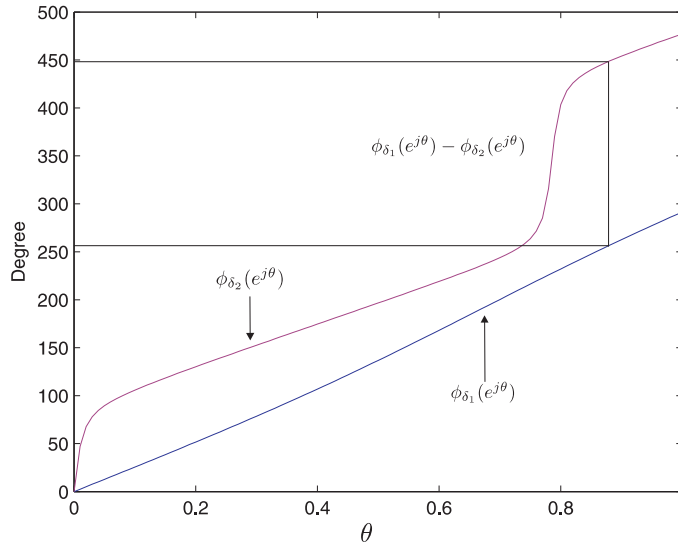
Σχήμα 2.1: Το ευθύγραμμο τμήμα είναι ευσταθές καθώς η διαφορά φάσης μένει κάτω από τις  $180^\circ$ .

Τα ακραία πολυώνυμα είναι ευσταθή καθώς το πραγματικό μέρος των ριζών τους είναι αρνητικό. Σαν συνέπεια η φάση κάθε πολυωνύμου αυξάνεται μονότονα καθώς η μεταβλητή  $\omega$  διατρέχει το διάστημα  $[0, \infty]$  μέχρι να φθάσει τη μέγιστη τιμή των  $3 \times 90^\circ = 270^\circ$ . Για να διαπιστώσουμε την ευστάθεια υπολογίζουμε την απόλυτη τιμή της διαφοράς φάσης  $|\phi_{\delta_1}(j\omega) - \phi_{\delta_2}(j\omega)|$  η οποία δεν πρέπει να φθάσει τις  $180^\circ$  για τιμές του  $\omega$  από 0 έως  $\infty$ . Όπως φαίνεται και από το σχήμα 2.1 αυτό δε συμβαίνει σε κανένα σημείο του διαστήματος τιμών.

**Παράδειγμα 2.2.** Θα εξετάσουμε την ευστάθεια κατά Schur του τμήματος που συνδέει τα πολυώνυμα

$$\begin{aligned}\delta_1(z) &= z^5 + 0.4z^4 - 0.33z^3 + 0.058z^2 + 0.1266z + 0.059 \\ \delta_2(z) &= z^5 - 2.59z^4 + 2.8565z^3 - 1.4733z^2 + 0.2236z - 0.0121.\end{aligned}$$

Πριν εφαρμόσουμε το κριτήριο για τον έλεγχο της ευστάθειας του ευθυγράμμου τμήματος θα ελεγχουμε τα άκρα του που στην περίπτωση μας είναι ευσταθή καθώς οι ρίζες των πολυωνύμων περιλαμβάνονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Επειδή τα  $\delta_1(z)$  και  $\delta_2(z)$  είναι ευσταθή η φάση τους αυξάνεται μονότονα μέχρι τις  $5 \times 180^\circ = 900^\circ$  καθώς η  $z = e^{j\theta}$  παίρνει τιμές πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή η μεταβλητή  $\theta$  διατρέχει το διάστημα από 0 έως  $2\pi$ . Σχεδιάζοντας την εξέλιξη της φάσης στο Σχήμα 2.2 διαπιστώνουμε ότι υπάρχει τιμή  $\theta$  στην περιοχή των  $0.8 \text{ rad}$  για την οποία η διαφορά φάσης  $|\phi_{\delta_1}(e^{j\theta}) - \phi_{\delta_2}(e^{j\theta})|$  ξεπερνά το όριο των  $180^\circ$ . Επομένως το ευθύγραμμο τμήμα είναι ασταθές.



Σχήμα 2.2: Το ευθύγραμμο τμήμα είναι ασταθές καθώς η διαφορά φάσης ξεπερνά τις  $180^\circ$ .

**Παράδειγμα 2.3.** Εναλλακτικά η ευστάθεια ενός ευθυγράμμου τμήματος πολωνύμων μπορεί να ελεγχθεί εφαρμόζοντας το Λήμμα Ευθυγράμμου Τμήματος είτε για συστήματα συνεχούς χρόνου είτε για συστήματα διακριτού χρόνου. Στην αριθμητική εφαρμογή που θα παραθέσουμε θα κάνουμε χρήση του *Schur Segment Lemma II* όπου τα κριτήρια που εμπλέκονται βασίζονται στην ανάλυση του πολωνύμου σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό τμήμα. Θεωρούμε το τμήμα που συνδέει τα πολώνυμα

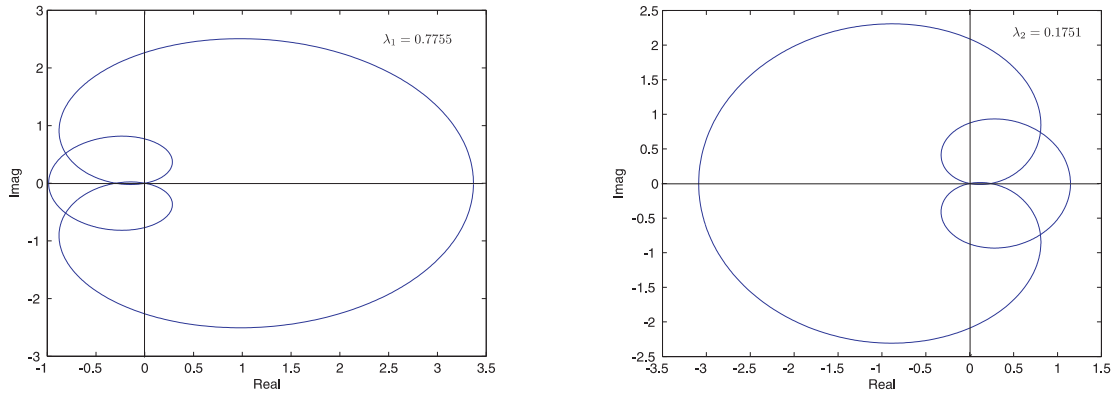
$$P_1(z) = z^3 + 1.5z^2 + 1.2z + 0.5 \quad P_2(z) = z^3 - 1.2z^2 + 1.1z - 0.4.$$

Με  $h_1(z)$  και  $g_1(z)$  συμβολίζουμε την ανάλυση σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό τμήμα του  $P_1(z)$ . Αντίστοιχοι συμβολισμοί χρησιμοποιούνται και για το  $P_2(z)$ . Αρχικά απαιτείται να βρεθούν οι ρίζες του

$$h_1(z)g_2(z) - g_1(z)h_2(z) = 0 \tag{2.21}$$

που βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Το πολώνυμο διαθέτει 6 ρίζες μοναδιαίου μέτρου που είναι οι

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= -1 \\ z_3 &= -0.298 + 0.9546j \\ z_4 &= -0.298 - 0.9546j \\ z_5 &= 0.2424 + 0.9702j \\ z_6 &= 0.2424 - 0.9702j. \end{aligned}$$



Σχήμα 2.3: Εικόνες των ασταθών πολυωνύμων  $P_{u1}$  και  $P_{u2}$  στο μιγαδικό επίπεδο για τιμές του  $\theta$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

Θα ελέγξουμε στη συνέχεια κατά πόσον υπάρχει ρίζα  $z_k$ ,  $k = 1, \dots, 6$  για την οποία ικανοποιούνται οι συνθήκες

$$z_k^{-3} h_1(z_k) h_2(z_k) \leq 0 \quad z_k^{-3} g_1(z_k) g_2(z_k) \geq 0. \quad (2.22)$$

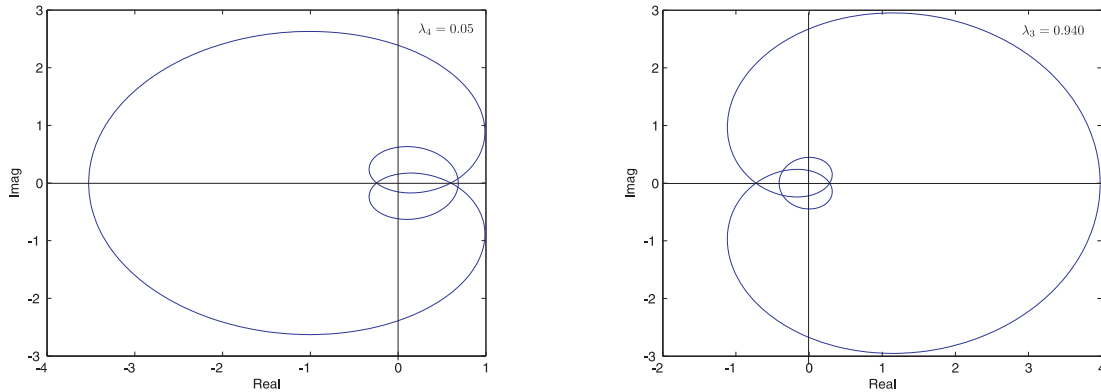
Το δεύτερο ζευγάρι συζυγών ριζών ικανοποιεί τις (2.22). Από τις ρίζες αυτές προκύπτει ένα πολυώνυμο  $P_{u1}$  πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο είναι ασταθές. Κάθε πολυώνυμο του ευθυγράμμου τμήματος παράγεται από την  $P_\lambda(z) = \lambda P_1(z) + (1 - \lambda) P_2(z)$  για τιμές του  $\lambda$  στο διάστημα  $[0, 1]$ . Το  $P_{u1}$  προκύπτει για  $\lambda_{u1} = P_2(z_k) / (P_2(z_k) - P_1(z_k))$  με  $k = 3, 4$ . Η τιμή του  $\lambda_{u1}$  μπορεί εναλλακτικά να υπολογιστεί από την εξίσωση

$$\begin{aligned} \lambda_u z_k^{-\frac{3}{2}} h_1(z_k) + (1 - \lambda_u) z_k^{-\frac{3}{2}} h_2(z_k) &= 0 \\ \lambda_u z_k^{-\frac{3}{2}} \frac{g_1(z_k)}{j} + (1 - \lambda_u) z_k^{-\frac{3}{2}} \frac{g_2(z_k)}{j} &= 0 \end{aligned} \quad , \quad \text{για } k = 3, 4$$

από τις οποίες τελικά έχουμε ότι  $\lambda_{u1} = 0.7755$ . Για αυτήν την τιμή του  $\lambda$  παίρνουμε το πολυώνυμο

$$P_{u1} = z^3 + 0.8939z^2 + 1.1775z + 0.2979$$

το οποίο εμφανίζει ρίζες πάνω στο σύνορο της περιοχής αστάθειας. Σε αντίστοιχους υπολογισμούς προχωράμε και για το τρίτο ζευγάρι συζυγών ριζών με  $k = 5, 6$  το οποίο επίσης ικανοποιεί τις συνθήκες (2.22) από το οποίο υπολογίζεται η τιμή του  $\lambda_{u2} = 0.1751$  που οδηγεί σε ένα ακόμη πολυώνυμο στο όριο της αστάθειας. Στο Σχήμα 2.3 παραθέτουμε τη γραφική παράσταση του φανταστικού μέρους των εικόνων των  $P_{u1}(e^{j\theta})$  και  $P_{u2}(e^{j\theta})$  ως προς το πραγματικό τους μέρος καθώς η μεταβλητή  $z$  κινείται πάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου. Έτσι διαπιστώνουμε εναλλακτικά ότι τα πολυώνυμα είναι ασταθή καθώς η αρχή των αξόνων περιλαμβάνεται στη γρα-



Σχήμα 2.4: Εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των ευσταθών πολυωνύμων  $P_{below}$  και  $P_{upper}$  στο μιγαδικό επίπεδο.

φική τους παράσταση. Αφού λοιπόν εντοπίσαμε τουλάχιστον ένα πολυώνυμο του ευθύγραμμου τμήματος για το οποίο καταρρέει η ευστάθεια όλο το ευθύγραμμο τμήμα είναι ασταθές.

Οι τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες εμφανίζονται οι ρίζες μοναδιαίου μέτρου της (2.21) που ικανοποιούν τις συνθήκες (2.22) καθορίζουν τα σημεία πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα πολυωνύμων στα οποία έχουμε μετάβαση από την ευστάθεια στην αστάθεια και αντίστροφα. Ευσταθή είναι όλα τα πολυώνυμα με  $\lambda$  στο διάστημα  $[0, \lambda_{u1}]$  και στο διάστημα  $(\lambda_{u2}, 1]$  ενώ από  $\lambda_{u1}$  έως  $\lambda_{u2}$  υπάρχει αστάθεια. Ενδεικτικά θεωρούμε δύο τιμές του  $\lambda$  μία μικρότερη από την  $\lambda_{u1}$ , έστω  $\lambda_{below} = 0.05$ , και μία μεγαλύτερη από την  $\lambda_{u2}$ , έστω  $\lambda_{upper} = 0.94$ . Στο Σχήμα 2.4 δίνονται οι απεικονίσεις στο μιγαδικό επίπεδο των εικόνων των πολυωνύμων που προκύπτουν για  $\lambda_{below}$  και  $\lambda_{upper}$  από όπου φαίνεται ότι η αρχή των αξόνων δεν περιλαμβάνεται στα πολυώνυμα αυτά.

**Παράδειγμα 2.4.** Στο παράδειγμα αυτό αφού ελέγξουμε την ευστάθεια κατά Hurwitz του ευθύγραμμου τμήματος πολυωνύμων με ακραία πολυώνυμα τα

$$\delta_1(s) = 1.4s^4 + 6s^3 + 2.2s^2 + 1.6s + 0.2$$

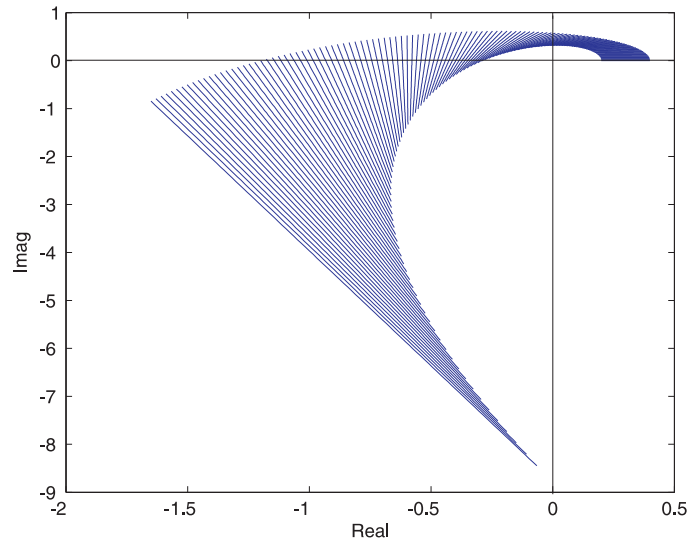
$$\delta_2(s) = 0.4s^4 + 1.6s^3 + 2s^2 + 1.6s + 0.4$$

μας ενδιαφέρει να διαπιστώσουμε στη συνέχεια αν το  $\delta_0(s) = \delta_1(s) - \delta_2(s)$  αποτελεί μια κυρτή διεύθυνση. Επειδή τα  $\delta_1(s)$  και  $\delta_2(s)$  είναι ευσταθή μπορούμε να περάσουμε στην εφαρμογή του Λήμματος Ευθύγραμμου Τμήματος. Για να γίνει αυτό υπολογίζουμε τις ρίζες της εξίσωσης

$$\delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει μία θετική ρίζα για την οποία δεν επαληθεύονται οι συνθήκες που τίθε-





Σχήμα 2.5: Εικόνα του ευσταθούς ευθυγράμμου τμήματος  $[\delta_1(s), \delta_2(s)]$  στο μιγαδικό επίπεδο.

νται από το Λήμμα 2.3 για να υπάρχει μία καθαρά φανταστική ρίζα καθώς

$$\delta_1^e(\omega)\delta_2^e(\omega) > 0 \quad \delta_1^o(\omega)\delta_2^o(\omega) > 0.$$

Επομένως το ευθύγραμμο τμήμα είναι ευσταθές όπως επαλήθευεται από την απεικόνιση της μετακίνησης του ευθυγράμμου τμήματος πάνω στο μιγαδικό επίπεδο με τη συχνότητα στο Σχήμα 2.5. Διαπιστώνουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα για καμιά τιμή του  $\omega$  δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων που είναι η προϋπόθεση για ευστάθεια. Θα εφαρμόσουμε τώρα το Λήμμα Πραγματικής Κυρτής Διεύθυνσης στο πολυώνυμο διαφοράς

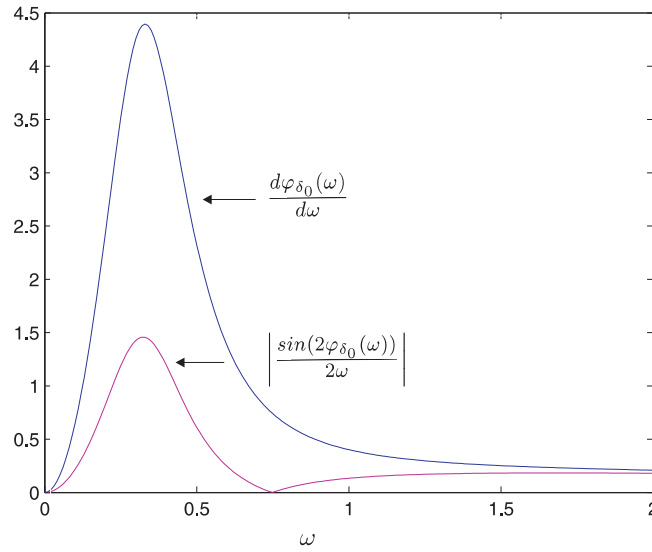
$$\delta_0(s) = s^4 + 4.4s^3 + 0.2s^2 - 0.2.$$

Για  $s$  πάνω στο φανταστικό άξονα η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$\delta_0(j\omega) = \underbrace{(\omega^4 - 0.2\omega^2 - 0.2)}_{p(\omega)} + j \underbrace{(-4.4\omega^3)}_{q(\omega)}.$$

Για το Λήμμα Κυρτής Διεύθυνσης απαιτείται ο υπολογισμός του  $\sin(2\phi_\delta(\omega)) / (2\omega)$  που δίνεται από την

$$\left| \frac{\sin(2\phi_\delta(\omega))}{2\omega} \right| = \frac{1}{1 + X^2(\omega)} \left| \frac{X(\omega)}{\omega} \right| = \left| \frac{(\omega^4 - 0.2\omega^2 - 0.2)(-4.4\omega^2)}{(\omega^4 - 0.2\omega^2 - 0.2)^2 + (-4.4\omega^3)^2} \right|,$$



Σχήμα 2.6: Το πολυώνυμο της διαφοράς  $\delta_0(s)$  δεν είναι κυρτή διεύθυνση.

όπου  $X(\omega) = p(\omega)/q(\omega)$  ενώ απαραίτητος είναι και ο υπολογισμός της μεταβολής της φάσης  $d\phi_{\delta_0}(\omega)/d\omega$  που δίνεται από

$$\frac{d\phi_{\delta_0}(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{1 + X^2(\omega)} \left| \frac{dX(\omega)}{d\omega} \right| = \frac{(\omega^4 - 0.2\omega^2 - 0.2)(-13.2\omega^2) - (4\omega^3 - 0.4\omega)(-4.4\omega^3)}{(\omega^4 - 0.2\omega^2 - 0.2)^2 + (-4.4\omega^3)^2}.$$

Για να είναι η  $\delta_0(s)$  κυρτή διεύθυνση πρέπει

$$\frac{d\phi_{\delta_0}(\omega)}{d\omega} \leq \left| \frac{\sin(2\phi_{\delta_0}(\omega))}{2\omega} \right|$$

γεγονός που δεν επαληθεύεται από τη γραφική παράσταση του Σχήματος 2.6 καθώς σε όλο το διάστημα που παίρνει τιμές το  $\omega$  η  $\frac{d\phi_{\delta_0}(\omega)}{d\omega}$  υπερिशύει της  $\left| \frac{\sin(2\phi_{\delta_0}(\omega))}{2\omega} \right|$ . Αυτό που έγινε εμφανές από το παράδειγμα είναι ότι το ευθύγραμμο τμήμα είναι ευσταθές παρόλο που το πολυώνυμο διαφοράς δεν είναι κυρτή διεύθυνση. Αυτό σηματοδοτεί την ύπαρξη τουλάχιστον ενός πολυωνύμου  $\delta_s$  4ου βαθμού για το οποίο το ευθύγραμμο τμήμα  $[\delta_s(s), \delta_s(s) + \delta_0(s)]$  είναι ασταθές για άκρα ευσταθή.

## Κεφάλαιο 3

### Η Σφαίρα Ευστάθειας στο Χώρο των Συντελεστών

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τεχνικές για να προσδιορίσουμε τις περιοχές ευστάθειας στο χώρο των συντελεστών ενός πολυωνύμου. Η κεντρική ιδέα βασίζεται στο Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου ή την εναλλακτική του μορφή που είναι η Αρχή Εξάιρεσης του Μηδενός. Θα υπολογίσουμε τη μεγαλύτερη ακτίνα της σφαίρας ευστάθειας με βάση την Ευκλείδεια νόρμα που έχει κέντρο ένα δεδομένο σημείο στο χώρο συντελεστών ενός πολυωνύμου. Ακριβείς σχέσεις υπολογισμού θα δοθούν για τις περιπτώσεις Hurwitz και Schur εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ορθογώνιας Προβολής. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια γραφική προσέγγιση των Tsytkin και Polyak για να υπολογίσουμε τη μεγαλύτερη  $\ell_p$  σφαίρα ευστάθειας για αυθαίρετη νόρμα  $p$ .

#### 3.1 Η σφαίρα των ευσταθών πολυωνύμων

Για μια περιοχή ευστάθειας στο μιγαδικό επίπεδο και ένα ευσταθές πολυώνυμο το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι η εύρεση της μεγαλύτερης περιοχής δεδομένου σχήματος στο χώρο των συντελεστών γύρω από το πολυώνυμο εντός της οποίας διατηρείται η ιδιότητα της ευστάθειας. Για δεδομένο  $n$ , το σύνολο  $P_n$  των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με  $n$  είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης  $n + 1$  που είναι ισομορφικός με τον  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Με  $\|\cdot\|$  ορίζουμε μια αυθαίρετη νόρμα στο  $P_n$ . Η ανοιχτή σφαιρική περιοχή που ορίζεται με βάση αυτή τη νόρμα είναι της μορφής

$$B(P_0(s), r) = \{P(s) \in P_n : \|P(s) - P_0(s)\| < r\},$$

όπου  $P_0(s)$  είναι ένα στοιχείο του συνόλου. Με την ανοιχτή σφαιρική περιοχή συνδέεται η υπερσφαίρα

$$S(P_0(s), r) = \{P(s) \in P_n : \|P(s) - P_0(s)\| = r\},$$

που είναι το σύνολο της  $B(P_0(s), r)$ . Το υποσύνολο του  $P_n$  που περιλαμβάνει όλα τα πολυώνυμα  $\delta(s)$  που έχουν βαθμό  $n$  και όλες τις ρίζες τους στην περιοχή ευστάθειας  $S$  είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Με δεδομένο ένα πολυώνυμο  $\delta(s)$  βαθμού  $n$  υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός  $\epsilon$  τέτοιος ώστε κάθε πολυώνυμο  $\beta(s)$  που περιλαμβάνεται στην  $B(\delta(s), \epsilon)$  να είναι βαθμού  $n$  και να έχει όλες τις ρίζες του στο  $S$ . Αν με  $d^o(\cdot)$  δηλώσουμε το βαθμό του πολυωνύμου ο πραγματικός αριθμός  $\epsilon$  ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα

**Ιδιότητα 3.1.**

$$\|\beta(s) - \delta(s)\| < \epsilon \implies \begin{cases} d^o(\beta(s)) = n \\ \beta(s) \text{ έχει όλες τις ρίζες στο } S. \end{cases}$$

Ας συμβολίσουμε με  $R_\delta$  το υποσύνολο όλων των θετικών πραγματικών αριθμών  $\epsilon$  που ικανοποιούν την Ιδιότητα 3.1. Στην πραγματικότητα το  $R_\delta$  είναι ένα διάστημα  $[0, \rho(\delta)]$ , όπου  $\rho(\delta) = \sup_{\epsilon \in R_\delta} \epsilon$ . Ο πραγματικός αριθμός  $\rho(\delta)$  είναι μοναδικός και χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι ικανοποιεί την Ιδιότητα 3.1 ενώ δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός  $r$  μεγαλύτερος από αυτόν που να ικανοποιεί την Ιδιότητα 3.1. Επιπλέον το  $\rho(\delta)$  είναι τέτοιο ώστε τουλάχιστον ένα πολυώνυμο πάνω στην υπερσφαίρα να έχει μία από τις ρίζες του στο σύνολο της περιοχής ευστάθειας  $\mathcal{U}^o$  ή να είναι βαθμού μικρότερου του  $n$ . Παρ' ολ' αυτά για το δεδομένο  $\rho(\delta)$  κανένα πολυώνυμο που κείται στην υπερσφαίρα (ακόμα και με βαθμό μικρότερο του  $n$ ) δεν μπορεί να έχει ρίζα στο εσωτερικό της περιοχής αστάθειας  $\mathcal{U}^o$ .

## 3.2 Η πραγματική $\ell_2$ σφαίρα ευστάθειας

Έστω δύο πολυώνυμα

$$P(s) = p_0 + p_1s + \dots + p_n s^n \quad \text{and} \quad R(s) = r_0 + r_1s + \dots + r_n s^n.$$

Πάνω στο σύνολο πολυωνύμων  $P_n$  μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle P(s), R(s) \rangle = p_0r_0 + p_1r_1 + \dots + p_n r_n = \sum_{i=0}^n p_i r_i$$

καθώς και την Ευκλείδεια νόρμα που σχετίζεται με αυτό

$$\|P(s)\|_2^2 = \langle P(s), P(s) \rangle = p_0^2 + p_1^2 + \dots + p_n^2.$$

### 3.2.1 Ευστάθεια Hurwitz

Θα ορίσουμε αρχικά κάποιους υποχώρους του διανυσματικού χώρου  $P_n$  των πολυωνύμων βαθμού  $n$ . Έστω  $\Delta_0$  ένα υποσύνολο του  $P_n$  τέτοιο ώστε

$$P(0) = 0.$$

Το  $\Delta_0$  είναι ένας υπόχωρος διάστασης  $n$  που παράγεται από τα διανύσματα βάσης

$$s, s^2, s^3, \dots, s^{n-1}, s^n.$$

Με  $\Delta_n$  θα συμβολίσουμε το υποσύνολο των στοιχείων του  $P_n$  που έχουν βαθμό μικρότερο του  $n$ , δηλαδή των στοιχείων για τα οποία  $p_n = 0$ . Το  $\Delta_n$  είναι επίσης ένας υπόχωρος διάστασης  $n$  που παράγεται από τα διανύσματα βάσης

$$1, s, s^2, \dots, s^{n-2}, s^{n-1}.$$

Για κάθε πραγματικό  $\omega \geq 0$  ορίζουμε το υποσύνολο  $\Delta_\omega$  όλων των στοιχείων του  $P_n$  που διαιρούνται με το  $s^2 + \omega^2$ . Ισοδύναμα το  $\Delta_\omega$  είναι το σύνολο των στοιχείων που περιλαμβάνουν στις ρίζες τους τα  $+j\omega$  και  $-j\omega$ . Επίσης είναι ένας υπόχωρος διάστασης  $n - 1$  που παράγεται από τα διανύσματα βάσης

$$s^2 + \omega^2, s^3 + \omega^2 s, \dots, s^{n-1} + \omega^2 s^{n-3}, s^n + \omega^2 s^{n-2}.$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το  $\Delta_\omega$  ορίζεται μόνο όταν  $n \geq 2$  και θα εξετάσουμε αργότερα τι συμβαίνει όταν  $n < 2$ . Επειδή το  $P_n$  είναι ένας διανυσματικός χώρος στον οποίο ορίζεται η Ευκλείδεια νόρμα είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Ορθογώνιας Προβολής. Για κάθε στοιχείο  $\delta(s)$  του  $P_n$  και για κάθε υπόχωρο  $\mathcal{V}$  υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα  $\pi_{\mathcal{V}}(s)$  στο  $\mathcal{V}$  για το οποίο η απόσταση μεταξύ του  $P(s)$  και όλων των στοιχείων του  $\mathcal{V}$  ελαχιστοποιείται. Με δεδομένο ένα ευσταθές πολυώνυμο Hurwitz

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \dots + \delta_n s^n$$

ορίζουμε τις ελάχιστες αποστάσεις  $d_0$ ,  $d_n$  και  $d_\omega$  του  $\delta(s)$  από τους υποχώρους  $\Delta_0$ ,  $\Delta_n$  και  $\Delta_\omega$ . Τέλος ορίζουμε το  $d_{\min}$  να είναι

$$d_{\min} = \inf_{\omega \geq 0} d_\omega \quad (3.1)$$

επειδή μας ενδιαφέρει η ευστάθεια ανεξαρτήτως συχνότητας και γι' αυτό η απόσταση προσδιορίζεται από την τιμή της συχνότητας που έχει τη δυσμενέστερη επίπτωση στην ευστάθεια. Είμαστε σε θέση τώρα να διατυπώσουμε ένα Θεώρημα που καθορίζει την υπερσφαίρα  $S(\delta(s), \rho(\delta))$

μέγιστης ακτίνας  $\rho(\delta)$  γύρω από ένα ευσταθές πολυώνυμο  $\delta(s)$  έτσι ώστε κάθε πολυώνυμο στο εσωτερικό της να παραμένει ευσταθές. Ας θυμηθούμε ότι εντός της ανοιχτής σφαιρικής περιοχής ο βαθμός των πολυωνύμων είναι  $n$  ενώ τουλάχιστον ένα πολυώνυμο στο σύνορο της υπερσφαίρας έχει ρίζα στον φανταστικό άξονα. Ο υπολογισμός της ακτίνας της μέγιστης  $\ell_2$  σφαίρας ευστάθειας στο χώρο των συντελεστών αποτέλεσε αντικείμενο της εργασίας [38].

**Θεώρημα 3.1.** *Η ακτίνα  $\rho(\delta)$  της μεγαλύτερης υπερσφαίρας ευστάθειας γύρω από ένα ευσταθές πολυώνυμο  $\delta(s)$  δίνεται από τη σχέση*

$$\rho(\delta) = \min(d_0, d_n, d_{\min}). \quad (3.2)$$

Για τον υπολογισμό των αποστάσεων γίνεται χρήση της Ευκλείδειας νόρμας. Όσον αφορά τις αποστάσεις του πολυωνύμου  $\delta(s)$  από την προβολή του στους υπόχωρους  $\Delta_0$  και  $\Delta_n$ , αντίστοιχα, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$d_0 = |\delta_0| \text{ και } d_n = |\delta_n|.$$

Με το Θεώρημα που ακολουθεί θα δούμε ότι το  $d_\omega$  μπορεί να ευρεθεί σε κλειστή μορφή για πολυώνυμο οποιουδήποτε βαθμού  $n$ . Γνωρίζοντας το  $d_\omega$  το  $d_{\min}$  προκύπτει από τη σχέση (3.1).

Μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε την ακτίνα της υπερσφαίρας εντός της οποίας τα πολυώνυμα ικανοποιούν την Ιδιότητα 3.1, δηλαδή διατηρούν το βαθμό τους και έχουν ρίζες στην ευσταθή περιοχή. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι αν τα ακραία πολυώνυμα ενός ευθυγράμμου τμήματος πολυωνύμων είναι ευσταθή κατά Hurwitz και το ευθύγραμμο τμήμα είναι ισχυρά ευσταθές κανένα πολυώνυμό του δεν μπορεί να έχει ρίζα στο  $s = 0$ . Το Θεώρημα 3.1 μας υποδεικνύει ότι η ακτίνα προσδιορίζεται από τη μικρότερη απόσταση που απαιτείται είτε για να χάσει ένα πολυώνυμο βαθμό, είτε για να παρουσιάσει ρίζα στο  $s = 0$ , είτε για να εμφανίσει ρίζα στο φανταστικό άξονα. Το επόμενο Θεώρημα μας βοηθά να υπολογίσουμε την απόσταση  $d_\omega$ .

**Θεώρημα 3.2.** *Η απόσταση  $d_\omega$  μεταξύ των  $\delta(s)$  και  $\Delta_\omega$  δίνεται από τις σχέσεις*

i)  $n = 2p$ :

$$d_\omega^2 = \frac{[\delta^e(\omega)]^2}{1 + \omega^4 + \dots + \omega^{4p}} + \frac{[\delta^o(\omega)]^2}{1 + \omega^4 + \dots + \omega^{4(p-1)}} \quad (3.3)$$

ii)  $n = 2p + 1$ :

$$d_\omega^2 = \frac{[\delta^e(\omega)]^2 + [\delta^o(\omega)]^2}{1 + \omega^4 + \dots + \omega^{4p}}, \quad (3.4)$$

όπου τα  $\delta^e$  και  $\delta^o$  ορίζονται ανάλογα με τις (1.2) και (1.3).

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι το  $P_n$  είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης  $n + 1$ . Με δεδομένο ότι  $\Delta_\omega$  είναι ένας υπόχωρος διάστασης  $n - 1$ , ο ορθογώνιος σ' αυτόν υπόχωρος  $\Delta_\omega^\perp$  έχει

διάσταση 2. Αν  $v_\delta^\omega(s)$  είναι η ορθογώνια προβολή του  $\delta(s)$  στο  $\Delta_\omega$  τότε κάθε στοιχείο του  $\Delta_\omega^\perp$  μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης  $p_1$  και  $p_2$ . Το τετράγωνο της απόστασης  $d_\omega$  δίνεται τότε από τη σχέση

$$d_\omega^2 = \|\delta - v_\delta^\omega(s)\|^2 = \frac{\langle \delta, p_1 \rangle^2}{\|p_1\|^2} + \frac{\langle \delta, p_2 \rangle^2}{\|p_2\|^2}.$$

Για την περίπτωση i) τα διανύσματα βάσης του χώρου  $\Delta_\omega^\perp$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} p_1(s) &= 1 - \omega^2 s^2 + \omega^4 s^4 + \dots + (-1)^p \omega^{2p} s^{2p} \\ p_2(s) &= s - \omega^2 s^3 + \omega^4 s^5 + \dots + (-1)^{p-1} \omega^{2(p-1)} s^{2p-1}. \end{aligned}$$

Τα  $p_1(s)$  και  $p_2(s)$  είναι ορθογώνια μεταξύ τους αλλά και ορθογώνια σε κάθε διάνυσμα βάσης του χώρου  $\Delta_\omega$ . Εκτελώντας το εσωτερικό γινόμενο με το  $\delta(s)$  ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \langle p_1, \delta \rangle &= \delta_0 - \delta_2 \omega^2 + \dots + (-1)^p \delta_{2p} \omega^{2p} = \delta^e(\omega) \\ \langle p_2, \delta \rangle &= \delta_1 - \delta_3 \omega^2 + \dots + (-1)^{p-1} \delta_{2p-1} \omega^{2(p-1)} = \delta^o(\omega). \end{aligned}$$

Παίρνοντας το τετράγωνο του μέτρου των  $p_1(s)$  και  $p_2(s)$  καταλήγουμε στην έκφραση (3.3). Αντίστοιχα ισχύουν και για την περίπτωση ii). □

Υπάρχει τρόπος να προσδιοριστεί το ελάχιστο  $d_{\min}$  του  $d_\omega$  χωρίς να διατρέξουμε το  $\omega$  στο άπειρο διάστημα  $[0, \infty)$ . Το  $d_{\min}$  μπορεί ισοδύναμα να ευρεθεί από τη σχέση

$$d_{\min}^2 = \min \left( \inf_{\omega \in [0,1]} d_\omega^2, \inf_{\omega \in [0,1]} d_{\frac{1}{\omega}}^2 \right).$$

Αν εκτελέσουμε τους υπολογισμούς στο  $d_{\frac{1}{\omega}}^2$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} d_{\frac{1}{\omega}}^2 &= \frac{[\delta_{2p} - \delta_{2p-2}\omega^2 + \delta_{2p-4}\omega^4 + \dots + (-1)^p \delta_0 \omega^{2p}]^2}{1 + \omega^4 + \omega^8 + \dots + \omega^{4p}} \\ &+ \frac{[\delta_{2p-1} - \delta_{2p-3}\omega^2 + \delta_{2p-5}\omega^4 + \dots + (-1)^{p-1} \delta_1 \omega^{2p-2}]^2}{1 + \omega^4 + \omega^8 + \dots + \omega^{4p}}. \end{aligned}$$

Όπως φαίνεται από την προηγούμενη σχέση το  $d_{\frac{1}{\omega}}^2$  μπορεί να προκύψει ως υπολογισμός του  $d_\omega^2$  ενός άλλου πολυωνύμου  $\delta^*(s)$  που συνδέεται με το αρχικό μέσω της σχέσης  $\delta'(s) = s^n \delta\left(\frac{1}{s}\right)$  και είναι

$$\delta'(s) = \delta_{2p} + \delta_{2p-1}s + \delta_{2p-2}s^2 + \dots + \delta_2 s^{2p-2} + \delta_1 s^{2p-1} + \delta_0 s^{2p}.$$

Στην περίπτωση που ο βαθμός του πολυωνύμου είναι  $n = 1$  η ελάχιστη απόσταση του από τον

υπόχωρο  $\Delta_\omega$  μπορεί να υπολογιστεί με εφαρμογή της (3.4) για  $p = 0$  και είναι

$$d_\omega^2 = \delta_0^2 + \delta_1^2, \quad \forall \omega \geq 0.$$

Επομένως το τετράγωνο της ακτίνας της μέγιστης σφαίρας ευστάθειας δίνεται σε αυτήν την περίπτωση από τη σχέση

$$\rho^2(\delta) = \min(\delta_0^2, \delta_1^2, \delta_0^2 + \delta_1^2) = \min(\delta_0^2, \delta_1^2).$$

### Η περίπτωση του monic πολωνύμου

Σε ορισμένες περιπτώσεις ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι δεδομένος και δεν υπόκειται σε διαταραχές. Η προηγούμενη ανάλυση που αφορά την περίπτωση πολωνύμων όπου όλοι οι συντελεστές επιδέχονται μεταβολής μπορεί να εφαρμοστεί και στην ειδική περίπτωση ενός monic πολωνύμου

$$\beta(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

για να υπολογίσουμε την ελάχιστη απόσταση  $d_\omega$  από τον υπόχωρο monic πολωνυμών που έχουν ρίζες στον φανταστικό άξονα. Στο Θεώρημα που ακολουθεί και πραγματεύεται αυτήν την περίπτωση θα συμβολίσουμε με  $d_\omega^n[\delta(s)]$  την απόσταση ενός πολωνύμου βαθμού  $n$  από τον υπόχωρο  $\Delta_\omega$ .

**Θεώρημα 3.3.** *Η απόσταση  $\bar{d}_\omega^n[\beta(s)]$  ενός monic πολωνύμου βαθμού  $n$  από τον αφινικό υπόχωρο όλων των monic πολωνύμων με ρίζα στο  $j\omega$  δίνεται από*

$$\bar{d}_\omega^n[\beta(s)] = d_\omega^{n-1}[\beta(s) - s^n - \omega^2 s^{n-2}].$$

Παρατηρούμε ότι η απόσταση ενός monic πολωνύμου  $\beta(s)$  με βαθμό  $n$  από τον υπόχωρο  $\Delta_\omega$  διάστασης  $n - 1$  δεν είναι τίποτα άλλο από την απόσταση του πολωνύμου  $\beta(s) - s^n - \omega^2 s^{n-2}$  βαθμού  $n - 1$  από τον υπόχωρο  $\Delta_\omega$  διάστασης  $n - 2$ .

### 3.2.2 Ευστάθεια κατά Schur

Σ' αυτήν την ενότητα θα υπολογίσουμε την  $\ell_2$  σφαίρα ευστάθειας στο χώρο των συντελεστών ενός πολωνύμου ευσταθούς κατά Schur στην ονομαστική του τιμή το οποίο όμως υπόκειται σε διαταραχές των συντελεστών του. Με  $P(z)$  θα συμβολίζουμε από εδώ και στο εξής ένα πολωνύμου βαθμού  $n$  και με  $\mathcal{P}_n$  τον αντίστοιχο διανυσματικό χώρο. Κατά αντιστοιχία με την ευστάθεια κατά Hurwitz θα ορίσουμε τους υποχώρους που είναι καθοριστικοί για τον προσδιορισμό της ακτίνας της σφαίρας ευστάθειας. Με  $\Delta_{+1}$  ορίζουμε το σύνολο των πολωνύμων του  $\mathcal{P}_n$  που έχουν ρίζα



στο  $z = +1$ . Ο  $\Delta_{+1}$  είναι ένας υπόχωρος διάστασης  $n$  που παράγεται από τα διανύσματα βάσης

$$z - 1, z(z - 1), z^2(z - 1), \dots, z^{n-1}(z - 1).$$

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε ο χώρος  $\Delta_{+1}^\perp$  που είναι ορθογώνιος στον  $\Delta_{+1}$  παράγεται από το πολυώνυμο

$$P_{+1}(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n,$$

αφού κάθε διάνυσμα βάσης του  $\Delta_{+1}$  είναι ορθογώνιο στον αντίστοιχο υπόχωρο του  $\Delta_{+1}^\perp$ , π.χ.  $\langle z - 1, 1 + z \rangle = 0$ . Με  $\Delta_{-1}$  ορίζουμε το υποσύνολο των στοιχείων του  $P_n$  που έχουν ρίζα στο  $z = -1$ . Ο υπόχωρος  $\Delta_{-1}$  είναι διάστασης  $n$  και μια βάση του αποτελεί το σύνολο

$$z + 1, z(z + 1), z^2(z + 1), \dots, z^{n-1}(z + 1).$$

Ο ορθογώνιος σ' αυτόν χώρος  $\Delta_{-1}^\perp$  παράγεται από το πολυώνυμο

$$P_{-1}(z) = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n.$$

Για κάθε  $0 < \theta < \pi$  εισάγουμε τον υπόχωρο  $\Delta_\theta$  εκείνων των πολυωνύμων του  $P_n$  που έχουν ρίζες στο  $e^{j\theta}$  και  $-e^{j\theta}$ . Ο  $\Delta_\theta$  είναι ένας υπόχωρος διάστασης  $n - 1$  με διανύσματα βάσης

$$z^2 - 2z \cos \theta + 1, z(z^2 - 2z \cos \theta + 1), z^2(z^2 - 2z \cos \theta + 1), \dots, z^{n-2}(z^2 - 2z \cos \theta + 1).$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι μια βάση του ορθογώνιου χώρου  $\Delta_\theta^\perp$  είναι

$$\begin{aligned} q_\theta^1(z) &= 1 + (\cos \theta)z + (\cos 2\theta)z^2 + \dots + (\cos(n-1)\theta)z^{n-1} + (\cos(n\theta))z^n \\ q_\theta^2(z) &= (\sin \theta)z + (\sin 2\theta)z^2 + \dots + (\sin(n-1)\theta)z^{n-1} + (\sin(n\theta))z^n. \end{aligned}$$

Έστω ένα πραγματικό πολυώνυμο Schur βαθμού  $n$

$$P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_n z^n.$$

Με  $d_{+1}$ ,  $d_{-1}$  και  $d_\theta$  δηλώνουμε τις αποστάσεις του  $P(z)$  από τους υποχώρους  $\Delta_{+1}$ ,  $\Delta_{-1}$  και  $\Delta_\theta$ , αντίστοιχα. Με  $d_{\min}$  ορίζουμε

$$d_{\min} = \inf_{0 < \theta < \pi} d_\theta.$$

Όπως και στην περίπτωση συστημάτων συνεχούς χρόνου ισχύει και εδώ ένα αντίστοιχο Θεώρημα για τον προσδιορισμό της μέγιστης επιτρεπτής ακτίνας της υπερσφαιράς εντός της οποίας πρέπει να βρίσκεται ένα πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές έχουν υποστεί διαταραχή για να είναι ευσταθές κατά Schur.

**Θεώρημα 3.4.** Η ακτίνα της μεγαλύτερης υπερσφαίρας ευστάθειας γύρω από ένα πολυώνυμο Schur  $P(z)$  βαθμού  $n$  δίνεται από

$$\rho(P) = \min(d_{+1}, d_{-1}, d_{\min}).$$

Οι αποστάσεις του  $P(z)$  από τους υπόχωρους  $\Delta_{+1}$  και  $\Delta_{-1}$  είναι αντίστοιχα

$$d_{+1} = \frac{|\langle P(z), P_{+1}(z) \rangle|}{\|P_{+1}(z)\|} = \frac{|P(1)|}{\sqrt{n+1}}$$

και

$$d_{-1} = \frac{|\langle P(z), P_{-1}(z) \rangle|}{\|P_{-1}(z)\|} = \frac{|P(-1)|}{\sqrt{n+1}}.$$

Η απόσταση  $d_\theta$  του  $P(z)$  από τον υπόχωρο  $\Delta_\theta$  δίνεται από τη σχέση

$$d_\theta^2 = \frac{\lambda_2^2 \|q_\theta^1(z)\|^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \langle q_\theta^1(z), q_\theta^2(z) \rangle + \lambda_1^2 \|q_\theta^2(z)\|^2}{\|q_\theta^1(z)\|^2 \|q_\theta^2(z)\|^2 - \langle q_\theta^1(z), q_\theta^2(z) \rangle^2}, \quad (3.5)$$

όπου

$$\lambda_1 = \langle q_\theta^1(z), P(z) \rangle = \operatorname{Re} [P(e^{j\theta})], \quad \lambda_2 = \langle q_\theta^2(z), P(z) \rangle = \operatorname{Im} [P(e^{j\theta})].$$

Τα  $\|q_\theta^1(z)\|$ ,  $\|q_\theta^2(z)\|$  και  $\langle q_\theta^1(z), q_\theta^2(z) \rangle$  μπορούν να υπολογιστούν από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} \|q_\theta^1(z)\|^2 &= \sum_{k=0}^n \cos^2 k\theta = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}(\cos n\theta) \left( \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \right), \\ \|q_\theta^2(z)\|^2 &= \sum_{k=0}^n \sin^2 k\theta = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}(\cos n\theta) \left( \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \right), \\ \langle q_\theta^1(z), q_\theta^2(z) \rangle &= \frac{1}{2}(\sin n\theta) \left( \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \right). \end{aligned}$$

Η σχέση (3.5) που δίνει την απόσταση από τον υπόχωρο των πολυωνύμων με ρίζες  $e^{j\theta}$  και  $-e^{j\theta}$  είναι πολύ πιο σύνθετη από την αντίστοιχη απόσταση για την περίπτωση Hurwitz και απαιτεί αρκετές πράξεις για να αποδειχθεί. Αυτό συμβαίνει διότι τα πολυώνυμα  $q_\theta^1(z)$  και  $q_\theta^2(z)$  που παράγουν τον υπόχωρο  $\Delta_\theta^\perp$  δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους όπως τα  $p_1(s)$  και  $p_2(s)$  που παράγουν τον  $\Delta_\omega^\perp$ .

### 3.3 Ο γεωμετρικός τύπος Tsyarkin-Polyak: Η $\ell_p$ σφαίρα ευστάθειας

Αυτή η ενότητα διαπραγματεύεται το πρόβλημα του καθορισμού της ευστάθειας κατά Hurwitz σε μια σφαιρική περιοχή πολυωνύμων που καθορίζεται από μια σταθμισμένη  $\ell_p$  νόρμα στο χώρο

των συντελεστών για αυθαίρετο θετικό συντελεστή  $p$ . Η λύση που αναπτύχθηκε από τους Tsyrykin και Polyak [42] είναι γραφική στη φύση της αφού βασίζεται στην απεικόνιση μιας συνάρτησης στο μιγαδικό επίπεδο καθώς μεταβάλλεται η συχνότητα. Οι περιπτώσεις που παρουσιάζουν ενδιαφέρον όσον αφορά τη νόρμα είναι οι α)  $p = \infty$  που αντιστοιχεί στην ασάφεια διαστήματος, β)  $p = 2$  που συσχετίζεται με την ελλειψοειδή ασάφεια και γ)  $p = 1$  που συνδέεται με την οκταεδρική ασάφεια.

Ένα πραγματικό πολυώνυμο

$$A(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n$$

παραμετροποιείται από το διάνυσμα των συντελεστών  $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ . Θεωρούμε την οικογένεια πολυωνύμων  $A(s)$  με τα διανύσματα συντελεστών τους να ανήκουν στην  $\ell_p$  σφαίρα  $\mathcal{B}_p(\mathbf{a}^0, \rho)$  ακτίνας  $\rho$  γύρω από ένα ονομαστικό πολυώνυμο με διάνυσμα συντελεστών  $\mathbf{a}^0 = [a_0^0, a_1^0, \dots, a_n^0]$

$$\mathcal{B}_p(\mathbf{a}^0, \rho) = \left\{ \mathbf{a} : \left[ \sum_{k=0}^n \left| \frac{a_k - a_k^0}{\bar{\alpha}_k} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \rho \right\}. \quad (3.6)$$

Τα  $\bar{\alpha}_k$  που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση είναι βάρη τα οποία προσφέρουν διαφορετική στάθμιση σε κάθε συντελεστή. Το  $p$  ανήκει στο διάστημα  $1 \leq p \leq \infty$  ενώ  $\rho \geq 0$  είναι το περιθώριο της διαταραχής. Η περίπτωση  $p = \infty$  αντιστοιχεί στο κουτί

$$\mathcal{B}_\infty(\mathbf{a}^0, \rho) = \left\{ \mathbf{a} : \max_k \left| \frac{a_k - a_k^0}{\bar{\alpha}_k} \right| \leq \rho \right\}.$$

Για  $\bar{\alpha}_k = \bar{\alpha}$  το σύνολο  $\mathcal{B}_p(\mathbf{a}^0, \rho)$  είναι μια σφαιρική περιοχή ακτίνας  $\rho$  στον  $\ell_p$  χώρο. Για  $p = 1$  το σύνολο  $\mathcal{B}_1(\mathbf{a}^0, \rho)$  είναι ένα σταθμισμένο διαμάντι. Στόχος μας στην παρούσα ενότητα είναι να διατυπώσουμε κριτήρια ελέγχου της ευστάθειας όλων των πολυωνύμων της σφαιρικής περιοχής  $\mathcal{B}_p(\mathbf{a}^0, \rho)$ .

Έστω  $A_0(s)$  το ονομαστικό πολυώνυμο το οποίο είναι ευσταθές κατά Hurwitz και γύρω από το οποίο ελέγχεται η ευστάθεια. Αν υπολογίσουμε το  $A_0(s)$  πάνω στον φανταστικό άξονα και το αναλύσουμε σε άρτιο και περιττό μέρος παίρνουμε

$$A_0(j\omega) = A_0^{\text{even}}(\omega) + A_0^{\text{odd}}(j\omega) = U_0(\omega) + j\omega V_0(\omega),$$

όπου

$$U_0 = a_0^0 - a_2^0 \omega^2 + a_4^0 \omega^4 - \dots$$

$$V_0 = a_1^0 - a_3^0 \omega^2 + a_5^0 \omega^4 - \dots$$

Η συζυγής της  $p$  νόρμας είναι η  $q$  νόρμα για το δείκτη της οποίας ισχύει

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τους όρους  $S_p(\omega)$  και  $T_p(\omega)$  οι οποίοι συσχετίζονται με την  $q$  νόρμα των  $U_0(j\omega)$  και  $V_0(j\omega)$  όπου στη θέση όμως των συντελεστών του πολυωνύμου εμφανίζονται τα βάρη  $\bar{\alpha}_k$

$$S_p(\omega) = [\bar{\alpha}_0^q + (\bar{\alpha}_2\omega^2)^q + (\bar{\alpha}_4\omega^4)^q + \dots]^{\frac{1}{q}}$$

$$T_p(\omega) = [\bar{\alpha}_1^q + (\bar{\alpha}_3\omega^2)^q + (\bar{\alpha}_5\omega^4)^q + \dots]^{\frac{1}{q}}.$$

Για  $p = 1$  οι παραπάνω σχέσεις γίνονται

$$S_1(\omega) = \max_{k \text{ even}} \bar{\alpha}_k \omega^k$$

$$T_1(\omega) = \max_{k \text{ odd}} \bar{\alpha}_k \omega^{k-1}$$

ενώ για  $p = \infty$  παίρνουν τη μορφή

$$S_\infty(\omega) = \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_2\omega^2 + \dots \quad T_\infty(\omega) = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3\omega^2 + \dots.$$

Για κάθε  $p$  ορίζουμε τις πραγματικές συναρτήσεις του  $\omega$

$$x(\omega) = \frac{U_0(\omega)}{S_p(\omega)}, \quad y(\omega) = \frac{V_0(\omega)}{T_p(\omega)}.$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις υπεισέρχονται στην

$$z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega).$$

Κατά αναλογία με ότι κάναμε στο Κεφάλαιο 1 για να ελέγξουμε την ευστάθεια ενός πολυωνύμου θα χρειαστεί να παράγουμε τη γραφική παράσταση της  $z(\omega)$  καθώς το  $\omega$  διατρέχει το διάστημα από 0 έως  $\infty$ . Σε σχέση με την απεικόνιση στο μιγαδικό επίπεδο του άρτιου ως προς το περιττό μέρος ενός πολυωνύμου η γραφική παράσταση της  $z(\omega)$  παρουσιάζει το πλεονέκτημα ότι είναι φραγμένη στα άκρα της,  $z(0)$  και  $z(\infty)$ . Οι τιμές που παίρνουν τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη είναι

$$x(0) = \frac{a_0^0}{\bar{\alpha}_0} \tag{3.7}$$

$$x(\infty) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{a_n^0}{\bar{\alpha}_n}, & n \text{ άρτιο} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{a_{n-1}^0}{\bar{\alpha}_{n-1}}, & n \text{ περιττό} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$y(0) = \frac{a_1^0}{\bar{\alpha}_1} \quad (3.9)$$

$$y(\infty) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{a_{n-1}^0}{\bar{\alpha}_{n-1}}, & n \text{ άρτιο} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{a_n^0}{\bar{\alpha}_n}, & n \text{ περιττό.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Για να θέσουμε τις προϋποθέσεις ώστε να περιλαμβάνει μία σφαιρική περιοχή πολυωνύμων  $\mathcal{B}_p(\mathbf{a}^0, \rho)$  μόνο ευσταθή πολώνυμα ορίζουμε στο μιγαδικό επίπεδο τον  $\ell_p$  δίσκο με ακτίνα  $\rho$

$$\mathcal{D}_p(\rho) = \left\{ z = x + jy : [|x|^p + |y|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \rho \right\}.$$

Είμαστε σε θέση τώρα να διατυπώσουμε το σχετικό Θεώρημα.

**Θεώρημα 3.5.** Κάθε πολώνυμο της σφαιρικής περιοχής  $\mathcal{B}_p(\mathbf{a}^0, \rho)$  είναι ευσταθές κατά Hurwitz αν και μόνο αν η γραφική παράσταση του  $z(\omega)$  καθώς το  $\omega$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $[0, \infty)$

A) διέρχεται από  $n$  τεταρτημόρια σε ανθρωρολογιακή κατεύθυνση

B) δεν τέμνει τον  $\ell_p$  δίσκο  $\mathcal{D}_p(\rho)$  με ακτίνα  $\rho$

Γ) τα συνοριακά σημεία  $z(0)$  και  $z(\infty)$  έχουν συνιστώσες με απόλυτες τιμές μεγαλύτερες του  $\rho$ .

Η συνθήκη B) είναι ισοδύναμη με την απαίτηση

$$[|x(\omega)|^p + |y(\omega)|^p]^{\frac{1}{p}} > \rho, \quad \forall 0 \leq \omega < \infty$$

ενώ η Γ) ισοδυναμεί είτε με τις συνθήκες

$$|x(0)| > \rho, |y(0)| > \rho, |x(\infty)| > \rho, |y(\infty)| > \rho$$

είτε αφού αντικαταστήσουμε τα  $x(0), x(\infty), y(0)$  και  $y(\infty)$  από τις σχέσεις (3.7), (3.8), (3.9) και (3.10) με τις συνθήκες

$$a_0^0 > \rho \bar{\alpha}_0, a_n^0 > \rho \bar{\alpha}_n, a_1^0 > \rho \bar{\alpha}_1, a_{n-1}^0 > \rho \bar{\alpha}_{n-1}.$$

*Απόδειξη.* Θα παραθέσουμε μόνο το τμήμα της απόδειξης που αφορά στην αναγκαία συνθήκη. Καταρχάς θα αποδείξουμε ότι αν όλα τα πολώνυμα της σφαίρας είναι Hurwitz τότε ισχύουν οι συνθήκες A) και Γ). Ήδη γνωρίζουμε από το πρώτο κεφάλαιο ότι για κάθε πολώνυμο Hurwitz η φάση είναι αυστηρά αύξουσα συνάρτηση του  $\omega$  που παίρνει τιμές μέχρι  $n\pi/2$  καθώς το  $\omega$  μεταβάλλεται από 0 έως  $\infty$ . Επομένως η συνθήκη A) έχει αποδειχθεί.

Όσον αφορά τη συνθήκη Γ) γνωρίζουμε ότι για να είναι ένα πολυώνυμο  $A(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k$ , όπου  $a_0 > 0$ , Hurwitz θα πρέπει  $a_k > 0$  για  $k = 0, 1, \dots$ . Αν επιλέξουμε  $a_k = a_k^0 - \rho \bar{a}_k$  για κάποιο  $k$  και  $a_i = a_i^0$  για  $i \neq k$  τότε το  $A(s)$  βρίσκεται εντός της σφαίρας πολυωνύμων όπως προκύπτει από την (3.6) και επειδή  $a_k > 0$  έχουμε σαν αποτέλεσμα  $a_k^0 > \rho \bar{a}_k$ , οπότε η συνθήκη Γ) έχει αποδειχθεί.

Θα αποδείξουμε τη συνθήκη Β) δια της αντίφασης, δηλαδή αφού δεχθούμε ότι η Β) δεν ισχύει θα πρέπει να ανακαλύψουμε τουλάχιστον ένα πολυώνυμο εντός της σφαίρας  $\mathcal{B}_p(\mathbf{a}^0, \rho)$  το οποίο είναι ασταθές. Αυτή η διαδικασία την οποία δε θα παραθέσουμε αναλυτικά μπορεί να εφαρμοσθεί και για τις 3 περιπτώσεις του δείκτη  $p$  που μας ενδιαφέρουν,  $1 < p < \infty$ ,  $p = 1$  και  $p = \infty$ . Υποθέτουμε ότι για κάποια συχνότητα  $\omega_0$  το  $z(\omega_0)$  ανήκει στο δίσκο  $\mathcal{D}_p(\rho)$ . Αν συμβολίσουμε το  $x(\omega_0)$  με  $x_0$  και το  $y(\omega_0)$  με  $y_0$  η προηγούμενη υπόθεσή μας μεταφράζεται στις σχέσεις

$$\begin{aligned} |x_0|^p + |y_0|^p &\leq \rho^p \quad \text{για } 1 \leq p < \infty \\ |x_0| < \rho \text{ και } |y_0| < \rho &\text{ για } p = \infty \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ανάλογα με την νόρμα που χρησιμοποιείται μπορούμε να ορίσουμε έτσι τους συντελεστές  $a_k^1$  ενός πολυωνύμου  $A_1 = \sum_{k=0}^n a_k^1 s^k$  ώστε κάνοντας χρήση κατά περίπτωση της (3.11) αυτό να ανήκει στη σφαιρική περιοχή των πολυωνύμων  $\mathcal{B}_p(\mathbf{a}^0, \rho)$ . Το  $A_1(s)$  για  $s = j\omega$  παίρνει τη μορφή

$$A_1(j\omega) = [U_0(\omega_0) - x_0 S_p(\omega_0)] + j\omega_0 [V_0(\omega_0) - y_0 T_p(\omega_0)].$$

Αν θυμηθούμε ότι  $x_0 = \frac{U_0(\omega_0)}{S_p(\omega_0)}$  και  $y_0 = \frac{V_0(\omega_0)}{T_p(\omega_0)}$  είναι προφανές ότι  $A_1(j\omega_0) = 0$ , δηλαδή ότι το  $j\omega_0$  αποτελεί ρίζα του. Σαν συμπέρασμα λοιπόν το  $A_1(s)$  δεν είναι πολυώνυμο Hurwitz.  $\square$

## Συμπεράσματα επί του Θεωρήματος Tsytkin-Polyak

α) Το Θεώρημα 3.5 θα μπορούσε να ερμηνευθεί στα πλαίσια της Αρχής Εξαίρεσης του Μη-δενός. Ειδικότερα αν με  $A(s)$  δηλώνουμε τα πολυώνυμο της σφαιρικής περιοχής  $\mathcal{B}_p(\mathbf{a}^0, \rho)$  τότε το  $A(j\omega) = U(\omega) + j\omega V(\omega)$  είναι το σύνολο εκείνο για το οποίο ισχύει η ανισότητα

$$\left[ \left| \frac{U(\omega) - U_0(\omega)}{S_p(\omega)} \right|^p + \left| \frac{V(\omega) - V_0(\omega)}{T_p(\omega)} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \rho, \quad \forall \omega. \quad (3.12)$$

Σύμφωνα με τις συνθήκες που επιβάλλονται από το Θεώρημα 3.5 και συγκεκριμένα τη Β) η γραφική απεικόνιση των πολυωνύμων που ανήκουν στη σφαιρική περιοχή  $\mathcal{B}_p(\mathbf{a}^0, \rho)$  ικανοποιεί τη σχέση

$$\|z(\omega)\|_p = (|x(\omega)|^p + |y(\omega)|^p)^{\frac{1}{p}} = \left( \left| \frac{U(\omega)}{S_p(\omega)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \left| \frac{V(\omega)}{S_p(\omega)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} > \rho, \quad \forall \omega.$$

Από τη συνθήκη A) του Θεωρήματος επειδή το ονομαστικό πολυώνυμο είναι Hurwitz ισχύει ότι

$$\left( \left| \frac{U_0(\omega)}{S_p(\omega)} \right|^p + \left| \frac{V_0(\omega)}{S_p(\omega)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} > \rho. \quad (3.13)$$

Αν  $\omega_0$  είναι ρίζα του  $A(j\omega)$  τότε  $U(\omega_0) = 0$  και  $V(\omega_0) = 0$  και κατά συνέπεια στο σύνολο θα περιλαμβάνεται η αρχή των αξόνων. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την (3.13) αν στην (3.12) για  $\omega = \omega_0$  θέσουμε όπου  $U(\omega_0)$  και  $V(\omega_0)$  το 0. Υπό αυτό το πρίσμα το Θεώρημα 3.5 ταυτίζεται με την Αρχή Εξαίρεσης του Μηδενός.

β) Αν οι συνθήκες B) και Γ) ικανοποιούνται ενώ η A) δεν ισχύει τότε το ονομαστικό πολυώνυμο  $A^0(s)$  δεν είναι Hurwitz. Όλα τα πολυώνυμα της σφαιρικής περιοχής  $\mathcal{B}_p(\rho)$  έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο ανοιχτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο όπως και το πολυώνυμο με ονομαστικές τιμές παραμέτρων.

γ) Αν  $\rho_{\max}$  είναι η ακτίνα του μεγαλύτερου  $\ell_p$  δίσκου που μπορεί να εγγραφεί εντός της γραφικής παράστασης του  $z(\omega)$  με το  $z(\omega_0)$  να είναι το σημείο επαφής και επιπλέον οι συνθήκες A), B) και Γ) ισχύουν τότε το πολυώνυμο  $A(s)$  από το οποίο παράγεται το  $z(\omega)$  είναι το κρίσιμο πολυώνυμο για το οποίο καταστρέφεται η ευστάθεια. Το  $A(s)$  ταυτίζεται με το  $A_1(s)$  στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.5 για τις τιμές των συντελεστών του οποίου εμφανίζεται οριακή ευστάθεια.

δ) Η συνθήκη Γ) που αφορά τα ακραία σημεία μας επιβάλλει αυτά να βρίσκονται έξω από το δίσκο  $\mathcal{D}_p(\rho)$  που είναι κεντραρισμένος γύρω από την αρχή των αξόνων στο μιγαδικό επίπεδο. Ο δίσκος αυτός αντιστοιχεί σε κυκλικό δίσκο ακτίνας  $\rho$  στην περίπτωση της ευκλείδειας νόρμας, σε τετράγωνο με μήκος πλευράς  $2\rho$  για την άπειρη νόρμα και σε ρόμβο πλευράς  $\sqrt{2}\rho$  για την 1 νόρμα.

ε) Για να ελέγξουμε αν μία περιοχή αποτελεί σφαίρα ευστάθειας πολυωνύμων είναι προτιμότερο να προχωρήσουμε σε μια γραφική απεικόνιση του  $z(\omega)$  για  $0 < \omega < \infty$  ώστε να ελέγξουμε αν διέρχεται ανθρωπολογικά από  $n$  τεταρτημόρια, αν αποφεύγει να διέλθει μέσα από το δίσκο  $\mathcal{D}_p(\rho)$  και αν τελικά τα ακραία σημεία βρίσκονται εκτός του δίσκου.

### 3.4 Μελέτη της εύρωστης ευστάθειας στα πολυώνυμα δίσκων

Σε αυτή την ενότητα θα μας απασχολήσει ένα άλλο είδος ασάφειας, αυτό που προκύπτει αν κάθε συντελεστής ενός στοιχείου του συνόλου των πολυωνύμων μπορεί να είναι ένας οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός σε έναν αυθαίρετο αλλά δεδομένο δίσκο στο μιγαδικό επίπεδο. Τα πολυώνυμα που ανήκουν σε αυτές τις περιοχές δίσκων στο μιγαδικό επίπεδο καλούνται πολυώνυμα δίσκων. Θεωρούμε  $n + 1$  δίσκους  $D_i, i = 0, 1, \dots, n$  στο μιγαδικό επίπεδο. Κάθε δίσκος  $D_i$  είναι κεντραρισμένος σε ένα σημείο  $\beta_i$  και έχει ακτίνα  $r_i \geq 0$ . Έστω  $\mathcal{F}_D$  ένα σύνολο πολυωνύμων

δίσκων

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n,$$

όπου  $\delta_j \in D_j$  για  $j = 0, \dots, n$ . Κάθε συντελεστής  $\delta_j$  του πολυωνύμου  $\delta(z)$  του συνόλου  $\mathcal{F}_D$  ικανοποιεί τη σχέση  $|\delta_j - \beta_j| \leq r_j$ . Βασική είναι η υπόθεση ότι κάθε πολυώνυμο στο  $\mathcal{F}_D$  είναι βαθμού  $n$ . Αυτό σημαίνει ότι  $0 \notin D_n$ . Το πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε είναι ο προσδιορισμός των ικανών και αναγκαίων συνθηκών για να έχουν όλα τα πολυώνυμα του  $\mathcal{F}_D$  τις ρίζες τους στην περιοχή ευστάθειας  $S$  για την περίπτωση Hurwitz αλλά και για τη Schur. Το πρόβλημα αυτό διατυπώθηκε για πρώτη φορά και αντιμετωπίστηκε στην εργασία [11].

### 3.4.1 Η περίπτωση Hurwitz

Έστω  $g(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$  μια κανονική ρητή συνάρτηση μιγαδικών πολυωνύμων. Αυτό σημαίνει ότι ο βαθμός του  $n(s)$  είναι μικρότερος ή ίσος από το βαθμό του  $d(s)$ . Επιπλέον τα  $n(s)$  και  $d(s)$  είναι πολυώνυμα Hurwitz. Η  $H_\infty$  νόρμα της  $g(s)$  ορίζεται ως εξής

$$\|g(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \frac{n(j\omega)}{d(j\omega)} \right|.$$

Με  $\beta(s)$  ορίζουμε το πολυώνυμο

$$\beta(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_n s^n$$

οι συντελεστές του οποίου είναι τα κέντρα των δίσκων  $D_j$ . Επίσης προχωράμε στην κατασκευή των πολυωνύμων  $\gamma_1(s)$  και  $\gamma_2(s)$  ως ακολούθως

$$\gamma_1(s) = r_0 - jr_1 s - r_2 s^2 + jr_3 s^3 + r_4 s^4 - jr_5 s^5 - \dots$$

$$\gamma_2(s) = r_0 + jr_1 s - r_2 s^2 - jr_3 s^3 + r_4 s^4 + jr_5 s^5 - \dots$$

Υπενθυμίζουμε ότι τα  $r_i, i = 0, \dots, n$  που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις είναι οι ακτίνες των δίσκων εντός των οποίων μεταβάλλονται οι συντελεστές. Επίσης θα ορίσουμε τα  $g_1(s)$  και  $g_2(s)$  να είναι δύο ρητές κανονικές συναρτήσεις

$$g_1(s) = \frac{\gamma_1(s)}{\beta(s)}, \quad g_2(s) = \frac{\gamma_2(s)}{\beta(s)}.$$

Θα διατυπώσουμε τώρα ένα Λήμμα που θα μας χρειαστεί για να αποδείξουμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι τα πολυώνυμα δίσκων ευσταθή.

**Λήμμα 3.1.** *Αν  $g(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$  είναι μια κανονική ρητή μιγαδική ευσταθής συνάρτηση με μέγιστο βαθμό πολυωνύμου στον παρονομαστή  $\deg(d(s)) = n$ , τότε  $\|g\|_\infty < 1$  αν και μόνο αν*



a1)  $|n_n| < |d_n|$

b1)  $d(s) + e^{j\theta}n(s)$  είναι Hurwitz για κάθε  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Όσον αφορά την ευστάθεια κατά Hurwitz των πολυωνύμων δίσκων ισχύει

**Θεώρημα 3.6.** Κάθε μέλος της οικογένειας των πολυωνύμων  $\mathcal{F}_D$  είναι Hurwitz αν και μόνο αν

- 1)  $\beta(s)$  είναι Hurwitz και
- 2)  $\|g_1\|_\infty < 1$  και  $\|g_2\|_\infty < 1$ .

Απόδειξη. Κάθε πολυώνυμο της οικογένειας  $\mathcal{F}_D$  μπορεί να γραφεί ως

$$\delta(s) = \beta(s) + \sum_{k=0}^n z_k r_k s^k,$$

όπου  $r_k$  είναι η ακτίνα κάθε δίσκου πολυωνύμων και  $z_k$  είναι τυχαίος μιγαδικός αριθμός  $z_k = t_k e^{j\theta_k}$  με  $\theta_k \in [0, 2\pi)$  και  $t_k \in [0, 1]$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Ορίζουμε το  $n(s)$  από τη σχέση

$$n(s) = z_0 r_0 + z_1 r_1 s + \dots + z_n r_n s^n.$$

Αν εξετάσουμε τη μορφή του  $n(s)$  για τιμές του  $s$  πάνω στον φανταστικό άξονα  $j\omega$  έχουμε

$$n(j\omega) = \sum_{k=0}^n z_k r_k (j\omega)^k = \sum_{k=0}^n t_k r_k e^{j(\theta_k + k\pi/2)} \omega^k. \quad (3.14)$$

Η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει το μέτρο της συνάρτησης  $n(j\omega)$  για  $\omega \geq 0$  είναι

$$|n(j\omega)| \leq \sum_{k=0}^n r_k \omega^k \quad (3.15)$$

ενώ για  $\omega \leq 0$  είναι

$$|n(j\omega)| \leq \sum_{k=0}^n (-1)^k r_k \omega^k. \quad (3.16)$$

Για να ελέγξουμε αν οι συνθήκες 1) και 2) είναι ικανές δεχόμαστε ότι ισχύουν. Αν η συνθήκη 2) αληθεύει τότε

$$\|g_1\|_\infty = \left\| \frac{\sum_{k=0}^n r_k e^{jk3\pi/2} s^k}{\beta(s)} \right\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sum_{k=0}^n r_k \omega^k}{\beta(j\omega)} \right| < 1 \quad (3.17)$$

και

$$\|g_2\|_\infty = \left\| \frac{\sum_{k=0}^n r_k e^{jk\pi/2} s^k}{\beta(s)} \right\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k r_k \omega^k}{\beta(j\omega)} \right| < 1. \quad (3.18)$$

Λόγω των (3.15) και (3.16) σε συνδυασμό με την (3.14) από τις (3.17) και (3.18) συνεπάγεται ότι

για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z_k$  με  $|z_k| \leq 1$

$$\left\| \frac{\sum_{k=0}^n z_k r_k s^k}{\beta(s)} \right\|_{\infty} < 1. \quad (3.19)$$

Η (3.19) αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την αλήθεια της συνθήκης 2) του Θεωρήματος 3.6.

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι η (3.19) με την επιπλέον υπόθεση ότι το  $\beta(s)$  είναι πολυώνυμο Hurwitz αποτελούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι η οικογένεια πολυωνύμων  $\mathcal{F}_D$  ευσταθής. Λόγω της (3.19) ισχύει

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=0}^n z_k r_k (j\omega)^k \right| \leq \inf_{\omega \in \mathbb{R}} |\beta(j\omega)|. \quad (3.20)$$

Από την (3.20) και το Θεώρημα 1.1 γνωρίζουμε ότι η  $\beta(s) + \sum_{k=0}^n z_k r_k s^k$  θα έχει τον ίδιο αριθμό μηδενικών με τη  $\beta(s)$  εντός μιας κλειστής καμπύλης  $\mathcal{C}$  που περικλείει τον φανταστικό άξονα. Επειδή το  $\beta(s)$  είναι ένα πολυώνυμο Hurwitz δεν περιλαμβάνει ρίζες στον φανταστικό άξονα. Το ίδιο ισχύει και για κάθε πολυώνυμο  $\delta(s)$  της οικογένειας  $\mathcal{F}_D$ . Από το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου συνεπάγεται ότι κανένα πολυώνυμο με συντελεστές  $\delta_j$  εντός των δίσκων  $D_j$  δεν έχει ρίζες στην ασταθή περιοχή και άρα όλη η οικογένεια είναι ευσταθής κατά Hurwitz.

Αφού αποδείξαμε ότι η (3.19) είναι ικανή συνθήκη για να είναι η οικογένεια  $\mathcal{F}_D$  ευσταθής θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι είναι και αναγκαία. Επειδή στις αρχικές υποθέσεις περιλαμβάνεται η υπόθεση ότι ο δίσκος γύρω από το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου με βαθμό  $n$  δεν περικλείει την αρχή των αξόνων ισχύει ότι

$$\left| \frac{z_n r_n}{\beta_n} \right| \leq \frac{r_n}{|\beta_n|} < 1. \quad (3.21)$$

Για να αποδείξουμε ότι η (3.19) είναι αναγκαία θα κάνουμε την υπόθεση ότι παραβιάζεται και θα ελέγξουμε αν στην οικογένεια  $\mathcal{F}_D$  περιλαμβάνονται μη ευσταθή πολυώνυμα. Παραβίαση της (3.19) σημαίνει ότι

$$\left\| \frac{\sum_{k=0}^n z_k r_k s^k}{\beta(s)} \right\|_{\infty} \geq 1 \Rightarrow \left\| \frac{n(s)}{d(s)} \right\|_{\infty} \geq 1 \Rightarrow \|g\|_{\infty} \geq 1,$$

όπου  $n(s) = \sum_{k=0}^n z_k r_k s^k$  και  $d(s) = \beta(s)$ . Από το Λήμμα 3.1 προκύπτει ότι επειδή  $\|g\|_{\infty} \geq 1$  και η συνθήκη a1) λόγω της (3.21) επαληθεύεται θα πρέπει η b1) να παραβιάζεται. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$  τέτοιο ώστε

$$\beta(s) + e^{j\theta_0} \sum_{k=0}^n z_k r_k s^k \quad (3.22)$$

να είναι ασταθές. Μπορούμε να θέσουμε  $z'_k = e^{j\theta_0} z_k$  για κάθε  $k = 0, \dots, n$  και οι μιγαδικοί αριθμοί  $z'_k$  να έχουν μέτρο μικρότερο ή ίσο της μονάδας. Σε αυτήν την περίπτωση η σχέση (3.22) υποδηλώνει ότι υπάρχει ασταθές πολυώνυμο εντός της οικογένειας των πολυωνύμων  $\mathcal{F}_D$ . Άρα η (3.19) αποτελεί αναγκαία συνθήκη ώστε η  $\mathcal{F}_D$  να είναι μία οικογένεια ευσταθών κατά Hurwitz πολυωνύμων.  $\square$

### 3.4.2 Η περίπτωση Schur

Στην περίπτωση της ευστάθειας Schur μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι μια οικογένεια πολυωνύμων που οι συντελεστές ευρίσκονται εντός δίσκων με διαφορετικές ακτίνες ευσταθής κατά Schur. Και εδώ θεωρούμε μια κανονική ρητή συνάρτηση  $g(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$  μιγαδικών πολυωνύμων. Η ρητή συνάρτηση είναι ευσταθής αν ο παρονομαστής  $d(z)$  είναι πολυώνυμο Schur, δηλαδή έχει ρίζες εντός του ανοιχτού μοναδιαίου δίσκου. Η άπειρη νόρμα της ρητής συνάρτησης μιγαδικών πολυωνύμων ορίζεται από τη σχέση

$$\|g\|_\infty = \sup_{\theta \in [0, 2\pi)} \left| \frac{n(e^{j\theta})}{d(e^{j\theta})} \right|.$$

Το πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές λαμβάνουν τις κεντρικές τιμές των δίσκων είναι

$$\beta(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_n z^n.$$

Κατά αναλογία με την περίπτωση Hurwitz ισχύει το παρακάτω Θεώρημα

**Θεώρημα 3.7.** *Η οικογένεια των πολυωνύμων δίσκων  $\mathcal{F}_D$  περιλαμβάνει μόνο πολυώνυμα Schur αν και μόνο αν ισχύουν οι συνθήκες*

- 1)  $\beta(z)$  είναι πολυώνυμο Schur και
- 2) ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$$\sum_{k=0}^n r_k < \inf_{\theta \in [0, 2\pi)} \left| \beta(e^{j\theta}) \right|. \quad (3.23)$$

Δεδομένου ότι ένα πολυώνυμο εντός του δίσκου περιγράφεται από τη σχέση

$$\delta(z) = \beta(z) + \sum_{k=0}^n m_k r_k z^k,$$

όπου  $m_k$  μιγαδικός αριθμός με μέτρο μικρότερο ή ίσο της μονάδας, η συνθήκη 2) του Θεωρήματος 3.7 βρίσκεται σε απόλυτη αναλογία με τη συνθήκη 2) του Θεωρήματος 3.6. Το αριστερό μέλος της (3.23) προκύπτει από το  $\sup_{\theta} \left| \sum_{k=0}^n m_k r_k e^{j\theta} \right| \leq \sum_{k=0}^n r_k$ .

### 3.4.3 Παρατηρήσεις σχετικά με την ευστάθεια των πολυωνύμων δίσκων

1) Στην περίπτωση που οι δίσκοι έχουν τα κέντρα τους στον πραγματικό άξονα, δηλαδή το  $\beta(s)$  είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, τα πολυώνυμα  $g_1(s)$  και  $g_2(s)$  που εμφανίζονται στο Θεώρημα 3.6 έχουν την ίδια  $H_\infty$  νόρμα. Άρα αρκεί να υπολογίσουμε την άπειρη νόρμα μιας εκ των δύο ρητών συναρτήσεων.

2) Η ανάλυση που παρουσιάστηκε βρίσκει εφαρμογή στην περίπτωση που έχουμε στη διάθεσή μας ένα ευσταθές πολυώνυμο  $\beta^o(s)$  με ονομαστικές τιμές παραμέτρων

$$\beta^o(s) = \beta_0^o + \beta_1^o(s) + \dots + \beta_n^o s^n$$

του οποίου οι συντελεστές μπορούν να υποστούν διαταραχές εντός σφαιρών ακτίνων  $r_0, \dots, r_j, \dots, r_n$ . Στόχος της ανάλυσης είναι να προσδιοριστεί ο μεγαλύτερος θετικός αριθμός  $\epsilon_{\max}$  όλων των θετικών αριθμών  $\epsilon$  έτσι ώστε η οικογένεια των πολυωνύμων δίσκων της οποίας οι συντελεστές περιλαμβάνονται σε ανοιχτούς δίσκους με κέντρα  $\beta_j^o$  και ακτίνες  $\epsilon r_j$  να είναι ευσταθής. Όπως δηλώνεται στο Θεώρημα 3.6 θα πρέπει να σχηματίσουμε τα πολυώνυμα

$$g_1(s) = \frac{\gamma_1(s)}{\beta^o(s)}, \quad g_2(s) = \frac{\gamma_2(s)}{\beta^o(s)}.$$

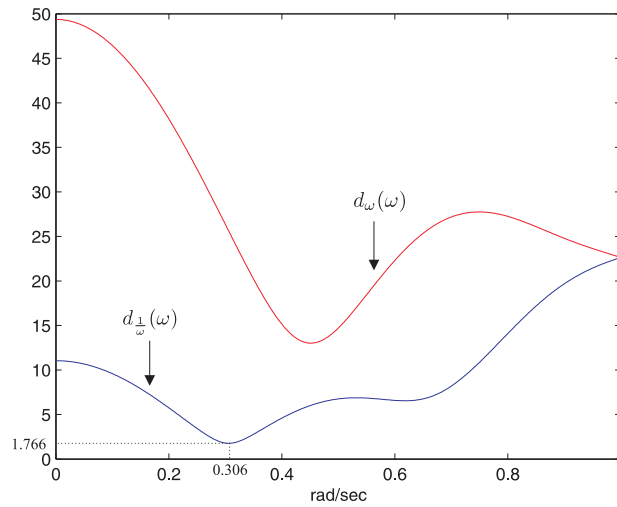
Αν  $\|g_1\|_\infty = \eta_1$  και  $\|g_2\|_\infty = \eta_2$  τότε το  $\epsilon_{\max}$  προκύπτει από τη σχέση

$$\epsilon_{\max} = \min \left\{ \frac{1}{\eta_1}, \frac{1}{\eta_2} \right\}.$$

Εκτός από τον υπολογιστικό προσδιορισμό των  $\eta_1$  και  $\eta_2$  οι ποσότητες αυτές μπορούν να προκύψουν και από τα πολικά διαγράμματα των  $g_1(j\omega)$  και  $g_2(j\omega)$ , αντίστοιχα τα οποία πρέπει να περιλαμβάνονται εντός κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

## 3.5 Παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε δύο παραδείγματα υπολογισμού της ακτίνας ευστάθειας πολυωνύμων που βασίζονται στην απόσταση που έχουν τα πολυώνυμα από το χώρο των ριζών που βρίσκονται πάνω στο σύνορο της περιοχής ευστάθειας. Εναλλακτικά με τη βοήθεια της γραφικής απεικόνισης στο μιγαδικό επίπεδο μιας σταθμισμένης συνάρτησης που καθορίζεται από το κριτήριο Tsyurkin-Polyak και την οποία συνάντησαμε στο Κεφάλαιο 1 όταν ελέγχαμε την ευστάθεια ενός πολυωνύμου είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε την ακτίνα της  $\ell_p$  σφαίρας ευστάθειας ενός πολυωνύμου Hurwitz. Τέλος θα εφαρμόσουμε τα κριτήρια ελέγχου ευστάθειας σε



Σχήμα 3.1: Η απόσταση του πολυωνύμου από τον υπόχωρο των πολυωνύμων που έχουν φανταστικές ρίζες ως συνάρτηση της συχνότητας.

πολυώνυμα δίσκων με απώτερο στόχο τον προσδιορισμό και σε αυτήν την περίπτωση της ακτίνας ευστάθειας.

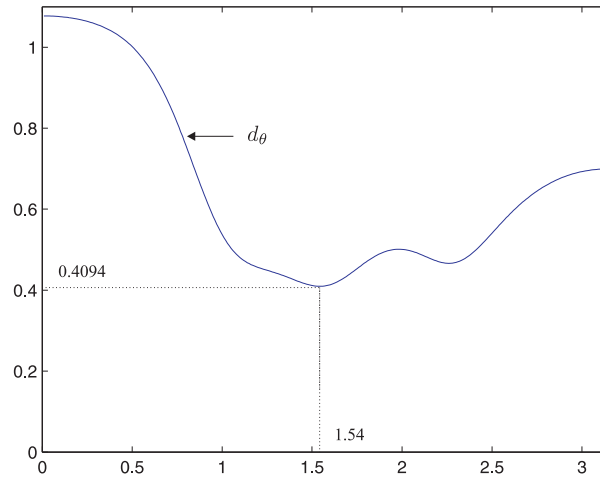
**Παράδειγμα 3.1.** Έστω ότι ένα σύστημα περιγράφεται στην ονομαστική του λειτουργία από το πολυώνυμο

$$\delta(s) = s^9 + 11s^8 + 52s^7 + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6.$$

Αν δεχθούμε ότι όλοι οι συντελεστές του υπόκεινται σε διαταραχές μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το μέγιστο περιθώριο ευστάθειας στην  $\ell_2$  νόρμα έτσι ώστε κάθε πολυώνυμο με συντελεστές που βρίσκονται εντός της υπερσφαίρας με ακτίνα ίση με το μέγιστο περιθώριο ευστάθειας να παραμένει ευσταθές. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2 για  $p = 4$  η απόσταση από το χώρο των ριζών πάνω στο φανταστικό άξονα δίνεται για κάθε συχνότητα από τη σχέση

$$d_{\omega}^2 = \frac{[\delta^e(\omega)]^2 + [\delta^o(\omega)]^2}{1 + \omega^4 + \dots + \omega^{4p}}.$$

Το ελάχιστο της παραπάνω ποσότητας μπορεί να προσδιοριστεί είτε αριθμητικά θέτοντας την παράγωγο ίση με το μηδέν είτε γραφικά. Εμείς επιλέγουμε τη δεύτερη μέθοδο και για να περιορίσουμε το παράθυρο της απεικόνισης για τιμές του  $\omega$  στο διάστημα  $[0, 1]$  κατασκευάζουμε την ποσότητα  $d_{\omega}^2$ . Στο Σχήμα 3.1 απεικονίζονται η εξέλιξη των  $d_{\omega}(\omega)$  και  $d_{\perp}(\omega)$  με το  $\omega$  να διατρέχει το διάστημα  $[0, 1]$ . Αυτό που προκύπτει είναι ότι η ελάχιστη τιμή  $d_{\min}$  παρατηρείται στην περίπτωση της  $d_{\perp}(\omega)$  και αντιστοιχεί στην  $d_{\omega}(\omega)$  για  $\omega \simeq 3.26$ . Η απόσταση από τον υπόχωρο των πολυωνύμων με ρίζα 0 καθώς και από τον υπόχωρο των πολυωνύμων που χάνουν βαθμό είναι



Σχήμα 3.2: Η απόσταση του πολυωνύμου ως συνάρτηση του  $\theta$  από τον υπόχωρο των πολυωνύμων που έχουν μη πραγματικές ρίζες πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

$d_0 = \delta_0 = 6$  και  $d_n = \delta_n = 1$ , αντίστοιχα. Επόμενως η ακτίνα  $\rho(\delta)$  της  $\ell_2$  σφαίρας ευστάθειας είναι

$$\rho(\delta) = \min(d_0, d_n, d_{\min}) = 1.$$

**Παράδειγμα 3.2.** Στο παράδειγμα αυτό θα ακολουθήσουμε μια ανάλογη διαδικασία για να προσδιορίσουμε την ακτίνα της  $\ell_2$  σφαίρας ευστάθειας για ένα διακριτό σύστημα που περιγράφεται από το πολύωνμο

$$\delta(z) = z^4 + 0.3z^3 + 0.4z^2 + 0.2z + 0.1.$$

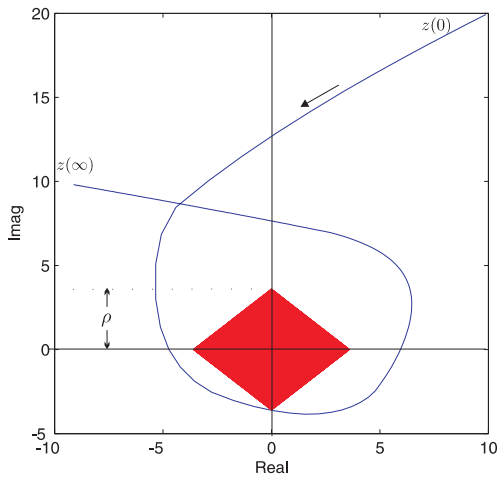
Θα κάνουμε την υπόθεση ότι όλοι οι συντελεστές μπορούν να υποστούν διαταραχές. Το  $d_\theta$  υπολογίζεται από την (3.5) και απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 3.2. Από τη γραφική παράσταση βρίσκουμε ότι η ελάχιστη τιμή  $d_{\min}$  του  $d_\theta$  είναι 0.4094 και συμβαίνει για  $\theta = 1.54$ . Η ακτίνα  $\rho(\delta) = 0.4094$  της σφαίρας ευστάθειας προκύπτει σαν την ελάχιστη των αποστάσεων  $d_{+1}$ ,  $d_{-1}$  και  $d_{\min}$  με  $d_{+1} = \frac{|\delta(1)|}{\sqrt{5}} = 0.8944$  και  $d_{-1} = \frac{|\delta(-1)|}{\sqrt{5}} = 0.4472$ .

**Παράδειγμα 3.3.** Η ακτίνα ευστάθειας μπορεί να προκύψει εναλλακτικά από το γεωμετρικό τόπο Tsytkin-Polyak. Ο γραφικός προσδιορισμός θα γίνει για την 1, την άπειρη και την Ευκλείδεια νόρμα. Έστω το πολύωνμο

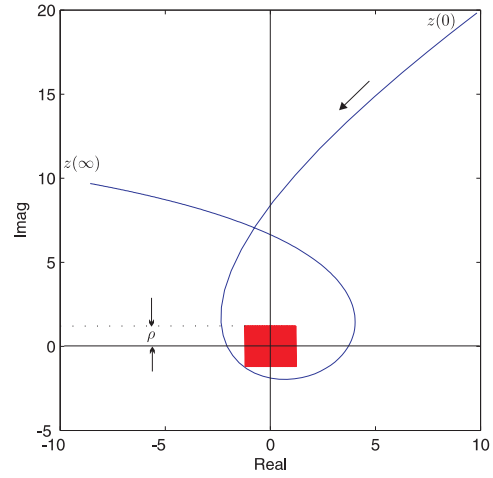
$$A(s) = s^6 + 14s^5 + 80.25s^4 + 251.25s^3 + 502.25s^2 + 667.25s + 433.5.$$

Το διάνυσμα  $\bar{\alpha}$  των βαρών που χρησιμοποιείται για τη στάθμιση των συντελεστών του πολυωνύμου είναι

$$\bar{\alpha} = [0.1, 1.4, 5.6175, 15.075, 25.137, 33.36, 43.35].$$

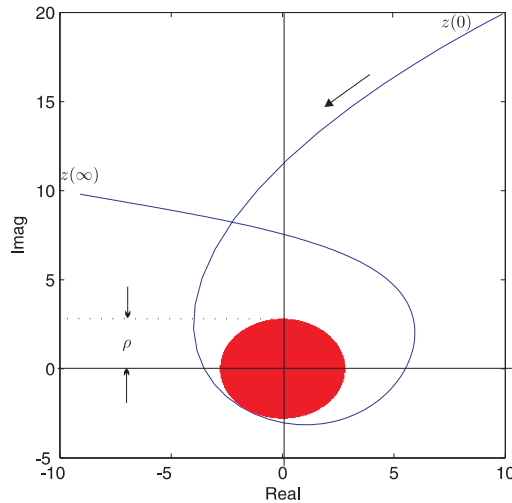


Σχήμα 3.3: Γεωμετρικός τόπος Tsyarkin-Polyak για την  $\ell_1$  σφαίρα ευστάθειας.



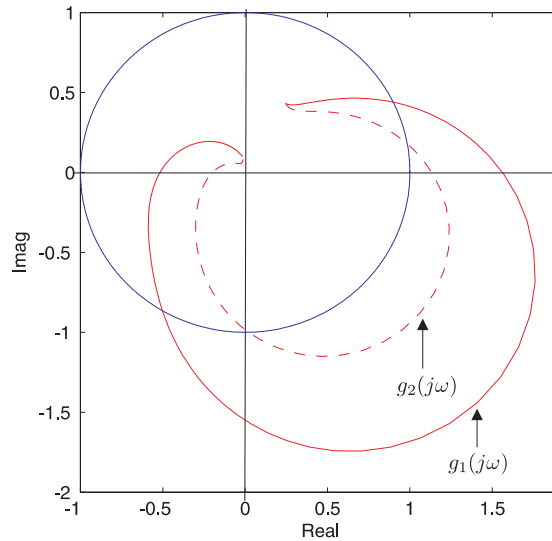
Σχήμα 3.4: Γεωμετρικός τόπος Tsyarkin-Polyak για την  $\ell_\infty$  σφαίρα ευστάθειας.

Οι γραφικές απεικονίσεις της  $z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$  στο μιγαδικό επίπεδο ως συνάρτηση της



Σχήμα 3.5: Γεωμετρικός τόπος Tsyarkin-Polyak για την  $\ell_2$  σφαίρα ευστάθειας.

συχνότητας  $\omega$  για τις νόρμες που προαναφέραμε δίνονται στα Σχήματα 3.3, 3.4 και 3.5. Για να καθορίσουμε τη μέγιστη ακτίνα ευστάθειας  $\rho$  στην περίπτωση της νόρμας με  $p = 1$  τοποθετούμε με κέντρο την αρχή των αξόνων το μεγαλύτερο ρόμβο που δεν τέμνεται από τη γραφική παράσταση του  $z(\omega)$  με την επιφύλαξη οι ακραίες τιμές  $z(0)$  και  $z(\infty)$  να πληρούν τη συνθήκη  $\Gamma$  του Θεωρήματος 3.5. Η περιοχή του ρόμβου περιγράφεται από τη σχέση  $|x| + |y| \leq \rho$  ενώ προκύπτει ότι  $\rho = 3.62$ . Η τιμή αυτή δεν περιορίζεται από τη συνθήκη  $\Gamma$  του Θεωρήματος διότι οι απόλυτες



Σχήμα 3.6: Εικόνα των  $g_1(j\omega)$  και  $g_2(j\omega)$  στο μιγαδικό επίπεδο.

τιμές  $|x(0)| = 10$  και  $|x(\infty)| = 10$  του πραγματικού μέρους των ακραίων τιμών καθώς και οι αντίστοιχες τιμές  $|y(0)| = 20$  και  $|y(\infty)| = 10$  του φανταστικού μέρους υπερβαίνουν το περιθώριο  $\rho$  που υπολογίστηκε. Για  $p = \infty$  τοποθετούμε ένα τετράγωνο που περιορίζεται από τις σχέσεις  $|x| \leq \rho$  και  $|y| \leq \rho$  τις πλευρές του οποίου επεκτείνουμε όσο το δυνατόν περισσότερο χωρίς όμως να αγγίζουν τη  $z(\omega)$ . Όταν συμβεί αυτό κάθε πλευρά του έχει μήκος 2.46. Επειδή οι απόλυτες τιμές που λαμβάνουν τα πραγματικά μέρη των ακραίων τιμών είναι  $|x(0)| = 10$  και  $|x(\infty)| = 10$  ενώ των φανταστικών είναι  $|y(0)| = 20$  και  $|y(\infty)| = 10$  η ακτίνα της  $\ell_\infty$  σφαίρας ευστάθειας είναι 1.23. Τέλος για  $p = 2$  το μέγιστο περιθώριο ευστάθειας θα προκύψει από την ακτίνα του μεγαλύτερου δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων που προκύπτει από τη σχέση  $|x|^2 + |y|^2 \leq \rho^2$  και που δεν εφάπτεται στη  $z(\omega)$ . Η ακτίνα της  $\ell_2$  σφαίρας ευστάθειας που προσδιορίζεται από τη γραφική παράσταση είναι  $\rho = 2.83$ .

**Παράδειγμα 3.4.** Θα ολοκληρώσουμε τα παραδείγματα με ένα παράδειγμα που αφορά στην εύρωστη ευστάθεια πολυωνύμων δίσκων. Έστω το πολυώνυμο

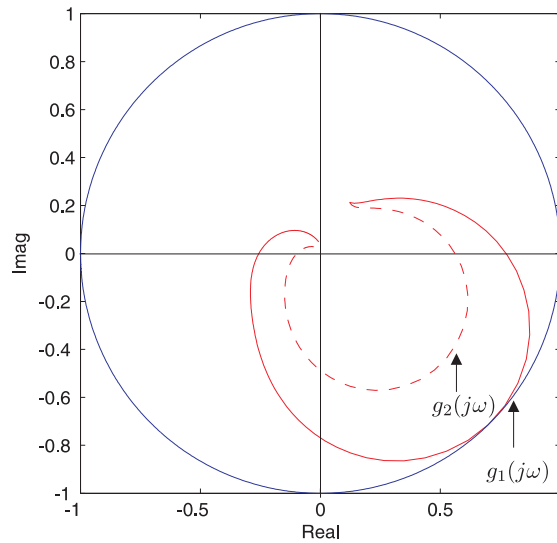
$$\beta(s) = (-1 - j11)s^4 + (3.5 - j18)s^3 + (9 - j27)s^2 + (1.5 - j6)s + (2 - j3.5)$$

που περιγράφει ένα σύστημα στις ονομαστικές συνθήκες λειτουργίας του. Κάθε συντελεστής του  $\beta(s)$  μπορεί να υποστεί διαταραχές εντός δίσκων που έχουν ακτίνες

$$r_4 = 1, r_3 = 3, r_2 = 8, r_1 = 1, r_0 = 2.$$

Οι ρίζες του  $\beta(s)$  έχουν πραγματικό μέρος που είναι αρνητικό επομένως το πολυώνυμο είναι ευ-





Σχήμα 3.7: Εικόνα των  $g_1(j\omega)$  και  $g_2(j\omega)$  στο μιγαδικό επίπεδο.

σταθές. Για να διαπιστώσουμε την εύρωστη ευστάθεια σχηματίζουμε τα πολυώνυμα

$$\gamma_1(s) = 2 - js - 8s^2 + j3s^3 + s^4 \quad \gamma_2(s) = 2 + js - 8s^2 - j3s^3 + s^4.$$

Με βάση το Θεώρημα 3.6 η άπειρη νόρμα των  $g_1(s) = \frac{\gamma_1(s)}{\beta(s)}$  και  $g_2(s) = \frac{\gamma_2(s)}{\beta(s)}$  θα πρέπει να είναι μικρότερη της μονάδας σε όλο το διάστημα που το  $s$  παίρνει τιμές πάνω στον φανταστικό άξονα για να είναι το πολυώνυμο δίσκων ευσταθές. Από το Σχήμα 3.6 όπου απεικονίζονται γραφικά οι  $g_1(j\omega)$  και  $g_2(j\omega)$  καθώς και ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των εν λόγω συναρτήσεων δεν περικλείονται για όλο το εύρος των συχνοτήτων εντός του κύκλου. Κατά συνέπεια δεν υφίσταται εύρωστη ευστάθεια. Η μέγιστη τιμή που παίρνει η άπειρη νόρμα των  $g_1$  και  $g_2$  είναι  $\|g_1\|_\infty = \eta_1 = 2.016$  και  $\|g_2\|_\infty = \eta_2 = 1.379$ . Το  $\epsilon_{\max}$  προκύπτει από τη σχέση  $\epsilon_{\max} = \min(\frac{1}{\eta_1}, \frac{1}{\eta_2}) = 0.496$ . Αν η νέα ακτίνα  $r'_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$  κάθε δίσκου ορισθεί από τη σχέση  $r'_i = \epsilon_{\max} r_i$  τότε οι προηγούμενες ακτίνες θα έχουν συρρικνωθεί κατά τον συντελεστή  $\epsilon_{\max}$  και θα έχουμε εξασφαλίσει την εύρωστη ευστάθεια του πολυωνύμου δίσκων. Από το Σχήμα 3.7 εύκολα διαπιστώνουμε ότι με τη νέα περιοχή τιμών που έχει αποδοθεί στους συντελεστές του πολυωνύμου το σύστημα έχει αποκτήσει εύρωστη ευστάθεια καθώς οι γραφικές παραστάσεις των  $g_1(j\omega)$  και  $g_2(j\omega)$  βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.



# Κεφάλαιο 4

## Το Παραμετρικό Περιθώριο Ευστάθειας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι ένα πολυώνυμο ευσταθές στην περίπτωση που κάθε συντελεστής του μπορεί να υποστεί διαταραχές ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους συντελεστές και υπολογίσαμε την απόσταση των συντελεστών από τις ονομαστικές τους τιμές σε κάποιο νόρμα για να συμβαίνει αυτό. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αντιμετωπίσουμε την περίπτωση που υπάρχουν εξαρτήσεις μεταξύ των συντελεστών του πολυωνύμου κάνοντας επιπλέον την υπόθεση ότι η αβεβαιότητα υπεισέρχεται στους πολυωνυμικούς συντελεστές κατά τρόπο γραμμικό ή αφινικό. Στόχος μας για μια ακόμη φορά είναι ο προσδιορισμός της ακτίνας της μέγιστης σφαίρας ευστάθειας.

### 4.1 Εισαγωγή

Σε ένα πραγματικό σύστημα οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δεν μεταβάλλονται γενικώς ανεξάρτητα. Κάθε σύστημα με ανάδραση αποτελείται από δύο υποσυστήματα, τον ελεγκτή και το προς έλεγχο σύστημα. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός τέτοιου συστήματος είναι συνάρτηση των παραμέτρων των δύο υποσυστημάτων. Τα δύο σύνολα αυτά των παραμέτρων είναι διαφορετικά ως προς τη φύση τους. Το προς έλεγχο σύστημα περιγράφεται από παραμέτρους οι οποίες δεν μπορούν σαφώς να καθοριστούν και οφείλονται στις συνθήκες λειτουργίας, σε διαταραχές και σφάλματα μοντελοποίησης σε αντίθεση με τις παραμέτρους του ελεγκτή που είναι καθορισμένες κατά τη διάρκεια λειτουργίας του συστήματος. Έστω ότι οι συναρτήσεις μεταφοράς του προς έλεγχο συστήματος και του ελεγκτή είναι

$$G(s) = G(s, \mathbf{p}), \quad C(s) = C(s, \mathbf{x}),$$

όπου  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{x}$  είναι διανύσματα παραμέτρων που περιγράφουν πλήρως το προς έλεγχο σύστημα και τον ελεγκτή, αντίστοιχα. Στη συνέχεια με  $\mathbf{p}^0$  συμβολίζουμε την ονομαστική τιμή του διανύσματος

παραμέτρων  $\mathbf{p}$  ενώ με  $\mathbf{x}^0$  το διάνυσμα παραμέτρων του ελεγκτή που σταθεροποιεί το σύστημα στην ονομαστική του λειτουργία. Στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος που θα προκύψει οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δε θα μεταβάλλονται γενικά ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο αλλά θα συνδέονται μεταξύ τους καθώς κάποιες από τις συνιστώσες του  $\mathbf{p}$  θα εμφανίζονται σε περισσότερους από έναν συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Έστω  $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}^0$  μία διαταραχή του διανύσματος παραμέτρων του προς έλεγχο συστήματος από την ονομαστική τιμή. Το ερώτημα που ανακύπτει είναι πόσο μεγάλη μπορεί να είναι αυτή η διαταραχή ώστε να μη καταστραφεί η ευστάθεια κλειστού βρόχου. Άρα για μια ακόμη φορά το ζητούμενο είναι η εύρεση της ακτίνας της σφαίρας εντός της οποίας μπορούν να μεταβάλλονται οι συντελεστές του συστήματος χωρίς να διαταραχθεί η ευστάθεια του κλειστού βρόχου. Η ακτίνα της σφαίρας ισοδυναμεί με το παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας. Στην περίπτωση που το  $\mathbf{p}$  μπορεί να κινηθεί εντός μιας περιοχής αβεβαιότητας  $\Omega$  μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε τη χειρότερη περίπτωση όσον αφορά το περιθώριο ευστάθειας που αποτελεί μέτρο της χειρότερης απόδοσης του ελεγκτή  $\mathbf{x}^0$  σε σχέση με την περιοχή αβεβαιότητας  $\Omega$ . Το περιθώριο σε σχέση με την περιοχή  $\Omega$  αποτελεί μέτρο της εύρωστης απόδοσης του ελεγκτή. Κατ' επέκταση δύο ελεγκτές μπορούν να συγκριθούν στη βάση των μέγιστων περιθωρίων που επιτρέπουν.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος μπορεί να περιγραφεί γενικά από τη σχέση

$$\delta(s, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{i=0}^n \delta_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) s^i.$$

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τις παρακάτω συναρτήσεις μεταφοράς του προς έλεγχο συστήματος και του ελεγκτή

$$G(s, \mathbf{p}) = \frac{p_3}{s^2 + p_1 s + p_2}, \quad C(s, \mathbf{x}) = \frac{x_3}{x_1 s + x_2}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου δίνεται από τη σχέση

$$\delta(s, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \underbrace{x_1}_{\delta_3(\mathbf{x}, \mathbf{p})} s^3 + \underbrace{(p_1 x_1 + x_2)}_{\delta_2(\mathbf{x}, \mathbf{p})} s^2 + \underbrace{(p_2 x_1 + p_1 x_2)}_{\delta_1(\mathbf{x}, \mathbf{p})} s + \underbrace{(p_2 x_2 + p_3 x_3)}_{\delta_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})}.$$

Παρατηρούμε ότι για δεδομένες τιμές του διανύσματος παραμέτρων του προς έλεγχο συστήματος  $\mathbf{p}$  οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι γραμμικές συναρτήσεις του διανύσματος παραμέτρων του ελεγκτή  $\mathbf{x}$ . Αντιστοίχως για δεδομένο  $\mathbf{x}$  οι συντελεστές είναι γραμμικές συναρτήσεις του  $\mathbf{p}$ . Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να ξαναγραφεί στη μορφή

$$\delta(s, \mathbf{p}) = \underbrace{(x_1 s^2 + x_2 s)}_{q_1(s)} p_1 + \underbrace{(x_1 s + x_2)}_{q_2(s)} p_2 + \underbrace{x_3}_{q_3(s)} p_3 + \underbrace{(x_1 s^3 + x_2 s^2)}_{b(s)}. \quad (4.1)$$

Στην πορεία θα θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα του ελεγκτή παραμένει σταθερό και επομένως τα  $\delta_i(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  είναι γραμμικές συναρτήσεις των στοιχείων του  $\mathbf{p}$ . Αυτή η περίπτωση είναι γνωστή σαν γραμμική περίπτωση.

## 4.2 Η σφαίρα ευστάθειας στο χώρο των παραμέτρων

Στόχος της ανάλυσης που ακολουθεί είναι ο προσδιορισμός της μεγαλύτερης σφαίρας ευστάθειας γύρω από ένα ονομαστικό διάνυσμα παραμέτρων  $\mathbf{p}^0$ . Η περιοχή ευστάθειας  $\mathcal{S}$  είναι κατά τα γνωστά για τα συνεχή συστήματα το ανοιχτό αριστερό ημιέπιπεδο ενώ για τα διακριτά συστήματα ο ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος καθώς και υποσύνολα τους. Έστω  $\mathbf{p}$  ένα διάνυσμα πραγματικών παραμέτρων

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_l]^T.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$\delta(s, \mathbf{p}) = \delta_n(\mathbf{p})s^n + \delta_{n-1}(\mathbf{p})s^{n-1} + \dots + \delta_0(\mathbf{p}). \quad (4.2)$$

με τους συντελεστές του να εξαρτώνται συνεχώς από το  $\mathbf{p}$ . Με  $\delta(s, \mathbf{p}^0) = \delta^0(s)$  συμβολίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο για τις ονομαστικές τιμές των παραμέτρων το οποίο είναι ευσταθές στην περιοχή ευστάθειας  $\mathcal{S}$ . Με

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}^0 = [p_1 - p_1^0, p_2 - p_2^0, \dots, p_l - p_l^0]^T$$

συμβολίζουμε τη μέγιστη διαταραχή του  $\mathbf{p}$  γύρω από την ονομαστική τιμή  $\mathbf{p}^0$ . Αφού εισάγουμε μία νόρμα θεωρούμε ότι οι διαταραχές του  $\mathbf{p}$  συμβαίνουν εντός μιας σφαίρας ακτίνας  $\rho$

$$\mathcal{B}(\rho, \mathbf{p}^0) = \{\mathbf{p} : \|\mathbf{p} - \mathbf{p}^0\| < \rho\}.$$

Με τη σφαίρα αυτή συσχετίζουμε μία οικογένεια πολυωνύμων

$$\Delta_\rho(s) = \{\delta(s, \mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p}) : \|\Delta\mathbf{p}\| < \rho\}.$$

Το πραγματικό παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας είναι η ακτίνα  $\rho^*$  της μεγαλύτερης σφαίρας  $\mathcal{B}(\rho^*, \mathbf{p}^0)$  που έχει κέντρο στο  $\mathbf{p}^0$  για την οποία το  $\delta(s, \mathbf{p})$  είναι ευσταθές όταν το  $\mathbf{p}$  παίρνει τιμές που ανήκουν σε αυτήν. Κατά αναλογία με το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου το μέγιστο παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας προσδιορίζεται με βάση τις υποθέσεις ότι

- Για κάθε  $\mathbf{p}' \in \mathcal{B}(\rho^*, \mathbf{p}^0)$  το πολυώνυμο  $\delta(s, \mathbf{p}')$  είναι ευσταθές και βαθμού  $n$ .
- Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο  $\mathbf{p}''$  στην επιφάνεια  $\mathcal{S}(\rho^*, \mathbf{p}^0)$  της σφαίρας τέτοιο ώστε το  $\delta(s, \mathbf{p}'')$  να είναι ασταθές ή να έχει βαθμό μικρότερο του  $n$ . Αν το  $\delta(s, \mathbf{p}'')$  είναι ασταθές τότε όλες

οι ασταθείς ρίζες του βρίσκονται πάνω στο σύνορο της περιοχής ευστάθειας.

### 4.3 Προσδιορισμός του μέγιστου περιθωρίου μέσω της απεικόνισης στο μιγαδικό επίπεδο

Το παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την εικόνα της οικογένειας  $\Delta_\rho(s)$  στο μιγαδικό επίπεδο υπολογισμένη σε κάθε σημείο πάνω στο σύνορο ευστάθειας  $\partial\mathcal{S}$ . Κάνουμε την υπόθεση ότι τα πολυώνυμα της οικογένειας είναι βαθμού  $n$  και ότι το  $\delta^0(s)$  είναι ευσταθές αλλά περιλαμβάνεται ένα τουλάχιστον ασταθές πολυώνυμο σε αυτήν. Τότε από τη συνέχεια των ριζών και το Θεώρημα της Διάσχισης του Συνόρου η οικογένεια θα περιλαμβάνει ένα πολυώνυμο που θα έχει ρίζα σε ένα σημείο  $s^*$  του συνόρου  $\partial\mathcal{S}$ . Για να αποκλείσουμε την ύπαρξη ασταθών πολυωνύμων εντός της οικογένειας μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή Εξαιρέσεως του Μηδενός η οποία μας υποδεικνύει ότι η εικόνα του  $\Delta_\rho(s^*)$  πρέπει να αποκλείει την αρχή των αξόνων για κάθε  $s^* \in \partial\mathcal{S}$ .

Μία διαδικασία για τον προσδιορισμό του μέγιστου περιθωρίου  $\rho^*$  περιλαμβάνει τον καθορισμό ενός σημείου  $s^*$  στο σύνορο  $\partial\mathcal{S}$  και την αύξηση του  $\rho$  μέχρι μια οριακή τιμή  $\rho_0(s^*)$  ώστε κάποιο από τα πολυώνυμα της οικογένειας να αποκτήσει ρίζα για  $s = s^*$ , δηλαδή μέχρι  $0 \in \Delta_{\rho_0}(s^*)$ . Αν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί για κάθε  $s^* \in \partial\mathcal{S}$

$$\rho_b = \inf_{s^* \in \partial\mathcal{S}} \rho_0(s^*)$$

είναι η μέγιστη τιμή για την οποία κανένα πολυώνυμο δεν αποκτά ρίζα πάνω στο σύνορο της περιοχής ευστάθειας. Με αντίστοιχο τρόπο μπορεί να υπολογιστεί η οριακή τιμή του  $\rho$  για κάθε  $s^* \in \partial\mathcal{S}$  για την οποία κάποιο πολυώνυμο της οικογένειας χάνει βαθμό και που ορίζεται ως

$$\rho_d = \inf \{ \rho : \delta_n(\mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p}) = 0, \|\Delta\mathbf{p}\| < \rho \}.$$

Το μέγιστο παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\rho^* = \min\{\rho_b, \rho_d\}.$$

### 4.4 Υπολογισμός του περιθωρίου ευστάθειας στη γραμμική περίπτωση

Με χρήση της μορφής (4.1) κάθε πολυώνυμο της οικογένειας  $\Delta_\rho(s)$  μπορεί να γραφεί ως

$$\delta(s, \mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p}) = \delta^0(s) + q_1(s)\Delta p_1 + \cdots + q_l(s)\Delta p_l.$$

Αν  $s^* \in \vartheta\mathcal{S}$  τότε για να είναι το  $s^*$  ρίζα του  $\delta(s, \mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p})$  θα πρέπει

$$\delta^0(s^*) + q_1(s^*)\Delta p_1 + \dots + q_l(s^*)\Delta p_l = 0. \quad (4.3)$$

Εισάγοντας βάρη η (4.3) ξαναγράφεται ως

$$\delta^0(s^*) + \frac{q_1(s^*)}{w_1}w_1\Delta p_1 + \dots + \frac{q_l(s^*)}{w_l}w_l\Delta p_l = 0. \quad (4.4)$$

Προφανώς η λύση  $[w_1\Delta p_1, \dots, w_l\Delta p_l]$  με την ελάχιστη νόρμα  $\|\Delta\mathbf{p}\|^w$  μας δίνει το  $\rho_b$  σε σχέση με το σημείο  $s^* \in \vartheta\mathcal{S}$ .

Σχετικά με την απώλεια βαθμού ενός πολυωνύμου ισχύει ότι

$$\delta_n(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = 0.$$

Αν με  $q_{in}$  δηλώσουμε το συντελεστή βαθμού  $n$  του πολυωνύμου  $q_i(s)$ ,  $i = 1, \dots, l$  τότε με βάση την προηγούμενη εξίσωση ισχύει

$$\underbrace{q_{1n}p_1^0 + q_{2n}p_2^0 + \dots + q_{ln}p_l^0}_{\delta_n(\mathbf{p}^0)} + \frac{q_{1n}}{w_1}w_1\Delta p_1 + \frac{q_{2n}}{w_2}w_2\Delta p_2 + \dots + \frac{q_{ln}}{w_l}w_l\Delta p_l = 0. \quad (4.5)$$

Στην (4.5) έχουμε ήδη ενσωματώσει τα βάρη κατά αναλογία με την (4.4). Η λύση της (4.5) με την ελάχιστη νόρμα  $\|\Delta\mathbf{p}\|^w$  θα καθορίσει το  $\rho_d$ . Αν υποθέσουμε ότι τα πολυώνυμα είναι πραγματικά η (4.5) μπορεί να γραφεί υπό μορφή πινάκων ως εξής

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{q_{1n}}{w_1} & \dots & \frac{q_{ln}}{w_l} \end{bmatrix}}_{A_n} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1\Delta p_1 \\ \vdots \\ w_l\Delta p_l \end{bmatrix}}_{t_n} = \underbrace{-\delta_n^0}_{b_n}. \quad (4.6)$$

Από την (4.4) μπορούν να προκύψουν μία ή δύο εξισώσεις ανάλογα αν το  $s^*$  είναι πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός. Αν  $s^* = s_r$ , όπου  $s_r$  πραγματικός τότε η (4.4) ξαναγράφεται ως

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{q_1(s_r)}{w_1} & \dots & \frac{q_l(s_r)}{w_l} \end{bmatrix}}_{A(s_r)} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1\Delta p_1 \\ \vdots \\ w_l\Delta p_l \end{bmatrix}}_{t(s_r)} = \underbrace{-\delta^0(s_r)}_{b(s_r)}. \quad (4.7)$$

Αν  $s^* = s_c$ , όπου  $s_c$  μιγαδικός και με  $q_{kr}$  και  $q_{ki}$  συμβολίσουμε το πραγματικό και το φανταστικό

μέρος αντίστοιχα ενός πολυωνύμου  $q_k, k = 1, \dots, l$  τότε η (4.4) ισοδυναμεί με

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{q_{1r}(s_c)}{w_1} & \dots & \frac{q_{lr}(s_c)}{w_l} \\ \frac{q_{1i}(s_c)}{w_1} & \dots & \frac{q_{li}(s_c)}{w_l} \end{bmatrix}}_{A(s_c)} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \Delta p_1 \\ \vdots \\ w_l \Delta p_l \end{bmatrix}}_{t(s_c)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\delta_r^0(s_c) \\ -\delta_i^0(s_c) \end{bmatrix}}_{b(s_c)}. \quad (4.8)$$

Με  $t_n^*$ ,  $t^*(s_r)$  και  $t^*(s_c)$  συμβολίζουμε τις λύσεις με ελάχιστη νόρμα των (4.6), (4.7) και (4.8). Η νόρμα αυτών των λύσεων μας δίνει τις αντίστοιχες οριακές τιμές του  $\rho$  είτε για να χάσει κάποιο πολυώνυμο της οικογένειας το βαθμό του είτε για να αποκτήσει ρίζα στο σημείο  $s^* = s_r$  ή  $s^* = s_c$  του συνόρου της περιοχής ευστάθειας

$$\|t_n^*\| = \rho_d$$

$$\|t^*(s_r)\| = \rho(s_r)$$

$$\|t^*(s_c)\| = \rho(s_c).$$

Αν την ίδια διαδικασία την εφαρμόσουμε σε όλα τα σημεία του συνόρου τότε

$$\rho_r = \inf_{s_r \in \partial S} \rho(s_r)$$

$$\rho_c = \inf_{s_c \in \partial S} \rho(s_c)$$

και το  $\rho_b$  προκύπτει σαν

$$\rho_b = \inf\{\rho_r, \rho_c\}.$$

## 4.5 Το περιθώριο ευστάθειας στην Ευκλείδια νόρμα

Το πρόβλημα εύρεσης του  $\ell_2$  περιθωρίου ευστάθειας στο χώρο των παραμέτρων έχει επιλυθεί στις εργασίες [5], [7], [12]. Οι λύσεις των (4.6), (4.7) και (4.8) που οδηγούν σε ελαχιστοποίηση του σταθμισμένου διανύσματος  $\Delta \mathbf{p}$  ως προς την Ευκλείδια νόρμα είναι

$$t_n^* = A_n^T [A_n A_n^T]^{-1} b_n$$

$$t^*(s_r) = A^T(s_r) [A(s_r) A^T(s_r)]^{-1} b(s_r)$$

$$t^*(s_c) = A^T(s_c) [A(s_c) A^T(s_c)]^{-1} b(s_c).$$

Σε κάθε περίπτωση επειδή το  $\delta^0(s)$  είναι ευσταθές δεν έχει ρίζες πάνω στο σύνορο  $\partial S$  και επομένως  $b_n \neq 0$ ,  $b(s_r) \neq 0$  και  $b(s_c) \neq 0$ . Αν τα  $A_n$  και  $A(s_r)$  είναι μη μηδενικά διανύσματα τότε υπάρχει λύση και τα  $\rho_d$  και  $\rho(s_r)$  είναι πεπερασμένα. Αν ο πίνακας  $A(s_c)$  έχει πλήρη τάξη τότε



το  $\rho(s_c)$  είναι πεπερασμένο. Διαφορετικά πρέπει να διακρίνουμε μεταξύ δύο περιπτώσεων

α) Αν η τάξη του  $A(s_c)$  είναι μηδενική τότε το σύστημα είναι αδύνατο και δεν υπάρχει οριακή τιμή για το  $\rho(s_c)$  που απειρίζεται.

β) Αν η τάξη του  $A(s_c)$  είναι  $\text{rank}A(s_c) = 1$  για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει  $\text{rank}[A(s_c), b(s_c)] = 1$  όποτε μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις δύο εξισώσεις με μία και η λύση με την ελάχιστη νόρμα να προσδιοριστεί από αυτήν. Στην περίπτωση που  $\text{rank}[A(s_c), b(s_c)] = 2$  τότε  $\rho(s_c) = \infty$ .

## 4.6 Πολυτοπικές οικογένειες

Στο Κεφάλαιο αυτό κάνουμε την υπόθεση ότι κάθε συνιστώσα  $p_i$  του διανύσματος  $\mathbf{p}$  μεταβάλλεται ανεξάρτητα από τις άλλες. Ειδικότερα το  $\mathbf{p}$  βρίσκεται εντός ενός συνόλου που έχει τη μορφή κουτιού

$$\mathbf{\Pi} = \{\mathbf{p} : p_i^- \leq p_i \leq p_i^+, i = 1, 2, \dots, l\}.$$

Σύμφωνα με την (4.1) το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος μπορεί να γραφεί σαν

$$\delta(s, \mathbf{p}) = \delta_0(\mathbf{p}) + \delta_1(\mathbf{p})s + \dots + \delta_n(\mathbf{p})s^n = p_1q_1(s) + p_2q_2(s) + \dots + p_lq_l(s) + y(s). \quad (4.9)$$

Αν με  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$  αναφερόμαστε στους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου που συνοδεύουν τους όρους με τις αντίστοιχες δυνάμεις του  $s$  και με  $\underline{\delta}$  συμβολίσουμε το διάνυσμα  $[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n]$  τότε από την (4.9) εξισώνοντας τους συντελεστές των αντιστοίχων δυνάμεων του  $s$  προκύπτει

$$\underline{\delta} = T\mathbf{p} + \mathbf{y}.$$

Το  $\mathbf{y}$  είναι ένα διάνυσμα στήλης που περιλαμβάνει στις συνιστώσες του τους συντελεστές των μονονύμων του  $y(s)$ . Τα  $\underline{\delta}$  και  $\mathbf{p}$  είναι επίσης διανύσματα στήλης ενώ το  $T$  είναι μια γραμμική απεικόνιση

$$T : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}.$$

Τα πολυώνυμα  $\delta(s, \mathbf{p})$  ανήκουν στην πολυτοπική οικογένεια πολυωνύμων  $\Delta(s)$  η οποία παραμετροποιείται από το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  το οποίο ανήκει στο σύνολο  $\mathbf{\Pi}$  που είναι ένα κουτί.

## 4.7 Εκτεθειμένες ακμές και κορυφές

Το σύνολο  $\mathbf{\Pi}$  αποτελεί μια ειδική περίπτωση ενός πολυτόπου. Το πολύτοπο σε ένα χώρο  $n$  διαστάσεων αποτελεί το κυρτό περίβλημα ενός συνόλου σημείων που ονομάζονται παράγωγα σημεία του χώρου. Το σύνολο αυτό είναι ελάχιστο αν η αφαίρεση οποιουδήποτε από τα σημεία αλλοιώ-

σει το κυρτό περίβλημα. Το ελάχιστο σύνολο παραγώγων σημείων είναι μοναδικό και αποτελεί το σύνολο κορυφών του πολυτόπου. Το σύνολο κορυφών  $\mathbf{V}$  του κουτιού  $\mathbf{\Pi}$  προκύπτει αν θέσουμε κάθε σημείο  $p_i$  του  $\mathbf{\Pi}$  είτε στο  $p_i^-$  είτε στο  $p_i^+$

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{p} : p_i = p_i^- \text{ or } p_i = p_i^+, \forall i\}.$$

Κάθε εκτεθειμένη ακμή του  $\mathbf{\Pi}$  για δεδομένο  $i$  ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{E}_i = \{\mathbf{p} : p_i^- \leq p_i \leq p_i^+, p_j = p_j^- \text{ or } p_j = p_j^+, \forall j \neq i\}$$

με το σύνολο  $\mathbf{E}$  των εκτεθειμένων ακμών να δίνεται από

$$\mathbf{E} = \cup_{i=1}^l \mathbf{E}_i.$$

Για τις εκτεθειμένες ακμές και κορυφές μιας οικογένειας πολυωνύμων που οι παραμέτροι αβεβαιότητας ικανοποιούν περιορισμούς κουτιού ισχύει το ακόλουθο Λήμμα

**Λήμμα 4.1.** *Η οικογένεια  $\Delta$  των πολυωνύμων που παράγεται από τη γραμμική απεικόνιση  $T$  του κουτιού  $\mathbf{\Pi}$  είναι ένα πολύτοπο. Για τις κορυφές του  $\Delta_V$  και τις εκτεθειμένες ακμές του  $\Delta_E$  ισχύει*

$$\begin{aligned} \Delta_V &\subset TV + \mathbf{y} \\ \Delta_E &\subset TE + \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Το Λήμμα 4.1 καταδεικνύει ότι οι εκτεθειμένες ακμές και οι κορυφές της πολυτοπικής οικογένειας πολυωνύμων είναι υποσύνολο των απεικονισμένων εκτεθειμένων ακμών και κορυφών του κουτιού. Αυτό είναι χρήσιμο δεδομένου ότι είναι δύσκολο να καθοριστούν υπολογιστικά οι εκτεθειμένες ακμές ενός αυθαίρετου πολυτόπου σε αντίθεση με τις εκτεθειμένες ακμές ενός κουτιού που είναι παράλληλες με τους άξονες του συστήματος αξόνων. Με άλλα λόγια το Λήμμα 4.1 μας επιτρέπει να θεωρούμε ότι οι εκτεθειμένες ακμές και οι κορυφές του πολυτόπου περιλαμβάνονται μεταξύ των απεικονισμένων εκτεθειμένων ακμών και απεικονισμένων κορυφών του κουτιού. Θέτουμε το  $s$  στο σημείο  $s^*$  και δηλώνουμε με  $\Delta(s^*)$  την εικόνα της πολυωνυμικής οικογένειας  $\Delta$  στο μιγαδικό επίπεδο για δεδομένο  $s = s^*$ . Η εικόνα αυτή αποτελεί ένα κυρτό πολύγωνο για το οποίο ισχύουν οι προτάσεις του Λήμματος που ακολουθεί. Με  $\Delta_V(s^*)$  και  $\Delta_E(s^*)$  δηλώνουμε τα σύνολα που παράγονται για δεδομένο  $s^*$  αν το  $\mathbf{p}$  παίρνει τιμές στο  $\mathbf{V}$  και στο  $\mathbf{E}$ , αντίστοιχα.

**Λήμμα 4.2.**

- 1) Το  $\Delta(s^*)$  είναι κυρτό περίβλημα του  $\Delta_V(s^*)$ .
- 2) Οι κορυφές του  $\Delta(s^*)$  περιέχονται στο  $\Delta_V(s^*)$ .
- 3) Οι εκτεθειμένες ακμές του  $\Delta(s^*)$  περιέχονται στο  $\Delta_E(s^*)$ .

Και στην περίπτωση της εικόνας στο μιγαδικό επίπεδο οι κορυφές και οι εκτεθειμένες ακμές του πολυγώνου περιλαμβάνονται στις απεικονισμένες μέσω της  $T$  κορυφές και ακμές του κουτιού για δεδομένο  $s^*$ . Με το Θεώρημα που θα διατυπώσουμε στη συνέχεια ο έλεγχος της ευστάθειας για την παραμετρική οικογένεια πολυωνύμων  $\Delta(s)$  περιορίζεται σε έλεγχο ευστάθειας ευθυγράμμων τμημάτων.

**Θεώρημα 4.1.** *Με δεδομένο ότι*

*α) η οικογένεια πολυωνύμων είναι σταθερού βαθμού,*

*β) περιλαμβάνει ένα τουλάχιστον ευσταθές πολυώνυμο και*

*γ) ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο  $s^0 \in \vartheta\mathcal{S}$  τέτοιο ώστε  $0 \notin \Delta(s^0)$*

*η οικογένεια είναι ευσταθής σε σχέση με την περιοχή ευστάθειας  $S$  αν και μόνο αν το σύνολο  $\Delta_E(s)$  είναι ευσταθές ως προς την ίδια περιοχή ευστάθειας.*

*Απόδειξη.* Με την υπόθεση ότι η οικογένεια περιλαμβάνει πολυώνυμο σταθερού βαθμού και ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ευσταθές πολυώνυμο από τη διαδικασία απεικόνισης στο μιγαδικό επίπεδο που περιγράψαμε στην ενότητα 4.3 για να καταστραφεί η εύρωστη ευστάθεια της οικογένειας  $\Delta(s)$  θα πρέπει για κάποιο  $s^* \in \vartheta\mathcal{S}$  να υπάρχει πολυώνυμο της οικογένειας το οποίο να αποκτά ρίζα στο σύνορο της περιοχής ευστάθειας  $\vartheta\mathcal{S}$ . Για δεδομένο σημείο  $s^*$  του  $\vartheta\mathcal{S}$  το πολύτοπο που προκύπτει από το γραμμικό μετασχηματισμό του χώρου  $\Pi$  των παραμέτρων απεικονίζεται στο μιγαδικό επίπεδο σαν ένα πολύγωνο  $\Delta(s^*)$ . Με δεδομένο ότι για  $s = s^0$  το πολύγωνο  $\Delta(s^0)$  δεν περιλαμβάνει την αρχή των αξόνων και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι εικόνες των πολυτόπων στο μιγαδικό επίπεδο μετακινούνται συνεχώς καθώς το  $s^*$  μεταβάλλεται για να αποτελέσει η αρχή των αξόνων εσωτερικό σημείο κάποιου πολυγώνου θα πρέπει πρώτα να υπάρξει πολύγωνο που να περιλαμβάνει την αρχή των αξόνων στις ακμές του. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.2 οι ακμές του  $\Delta(s^*)$  περιλαμβάνονται στο  $\Delta_E(s^*)$ . Επομένως αρκεί να ελέγξουμε την ευστάθεια των ευθυγράμμων τμημάτων του  $\Delta_E(s^*)$  για να διαπιστώσουμε την ευστάθεια της παραμετρικής οικογένειας  $\Delta(s)$ .  $\square$

Το προφανές κέρδος που προκύπτει από την εφαρμογή του Θεωρήματος 4.1 είναι ότι η επαλήθευση της ευστάθειας μιας πολυπαραμετρικής οικογένειας ανάγεται στην απλούστερη περίπτωση της ευστάθειας μονοπαραμετρικών οικογενειών, όπως είναι τα ευθύγραμμα τμήματα.

## 4.8 Συνθηκές φραγμένης φάσης για τον έλεγχο της εύρωστης ευστάθειας πολυτόπων

Για να είναι η πολυτοπική οικογένεια πολυωνύμων ευσταθής πρέπει κάθε εικόνα της στο μιγαδικό επίπεδο για  $s^* \in \vartheta\mathcal{S}$  να αποκλείει την αρχή των αξόνων. Όταν οι εικόνες αυτές είναι κυρτά πολύγωνα όπως στην περίπτωσή μας μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η αρχή των αξόνων

εξαιρείται αν οι γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ των ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν την αρχή των αξόνων με τις κορυφές είναι όλες μικρότερες από  $\pi$  ακτίνια.

Ας θεωρήσουμε ένα κυρτό πολύγωνο  $\mathcal{P}$  στο μιγαδικό επίπεδο με σύνολο κορυφών  $V = [v_1, v_2, \dots]$ . Με δεδομένο ένα τυχαίο σημείο  $p_0$  του  $\mathcal{P}$  ορίζουμε τη γωνία  $\phi_{v_i}$  που σχηματίζεται μεταξύ των τμημάτων που συνδέουν το  $p_0$  και κάθε κορυφή  $v_i$  με την αρχή των αξόνων

$$\phi_{v_i} = \arg \left( \frac{v_i}{p_0} \right).$$

Η γωνία μπορεί να παίρνει τιμές μεταξύ 0 και  $2\pi$ . Ορίζουμε με  $\phi^+$  τη μέγιστη των γωνιών και με  $\phi^-$  την ελάχιστη

$$\phi^+ = \sup_{v_i \in V} \phi_{v_i} \quad \phi^- = \inf_{v_i \in V} \phi_{v_i}.$$

Η μέγιστη διαφορά φάσης που επιτυγχάνεται μεταξύ των κορυφών του πολυγώνου είναι

$$\Phi_{\mathcal{P}} = \phi^+ - \phi^-.$$

Από το πολύγωνο  $\mathcal{P}$  εξαιρείται η αρχή των αξόνων αν και μόνο αν  $\Phi_{\mathcal{P}} < \pi$ . Αυτή η συνθήκη σε συνδυασμό με την πρόταση 2) του Λήμματος 4.2 οδηγεί στο επόμενο Θεώρημα.

**Θεώρημα 4.2.** (Θεώρημα Φραγμένης Φάσης)

*Αν όλα τα πολυώνυμα της πολυτοπικής οικογένειας  $\Delta(s)$  είναι σταθερού βαθμού και τουλάχιστον ένα πολυώνυμο της  $\Delta(s)$  είναι ευσταθές σε σχέση με την περιοχή ευστάθειας  $\mathcal{S}$  τότε το σύνολο των πολυωνύμων είναι ευσταθές σε σχέση με το  $\mathcal{S}$  αν και μόνο αν*

$$\Phi_{\Delta_V}(s^*) < \pi, \quad \forall s^* \in \partial\mathcal{S}.$$

Η ευστάθεια μιας πολυτοπικής οικογένειας ανάγεται στην εξαίρεση της αρχής των αξόνων από τις εικόνες της στο μιγαδικό επίπεδο καθώς το  $s$  διατρέχει το σύνορο της περιοχής ευστάθειας. Για να διατηρείται η ευστάθεια καθώς οι εικόνες κινούνται στο μιγαδικό επίπεδο δε θα πρέπει οι ακμές τους να διέλθουν από την αρχή των αξόνων. Θα μας ενδιέφερε λοιπόν να προσδιορίσουμε την ελάχιστη ακτίνα  $\rho(\mathbf{p})$  μιας σφαίρας στα πλαίσια κάποιας νόρμας  $\|\mathbf{p}\|$  για την οποία τα πολυώνυμα στο εσωτερικό της παραμένουν ευσταθή καθώς το  $\mathbf{p}$  παίρνει τιμές στο σύνολο  $\mathbf{\Pi}$ . Σε συμφωνία με το Θεώρημα 4.1 για τον υπολογισμό της ακτίνας αρκεί η μεταβολή του  $\mathbf{p}$  να περιοριστεί στις εκτεθειμένες ακμές του συνόλου  $\mathbf{\Pi}$ . Αυτό διατυπώνεται μαθηματικά στο επόμενο Θεώρημα.

**Θεώρημα 4.3.**

$$\inf_{\mathbf{p} \in \mathbf{\Pi}} \rho(\mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{p} \in E} \rho(\mathbf{p}).$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να διατυπώσουμε ένα αποτελεσμα που περιορίζει ακόμα περισσότερο το σύνολο τιμών του  $\mathbf{p}$  που πρέπει να ελέγξουμε για να καθορίσουμε την ελάχιστη ακτίνα.

Είναι δυνατόν αν η οικογένεια πολυωνύμων τηρεί ορισμένες προϋποθέσεις η ελάχιστη ακτίνα να προκύψει για  $\mathbf{p}$  που παίρνει τις τιμές των κορυφών. Στηριζόμενοι στο Λήμμα Κορυφής του Κεφαλαίου 2 παραθέτουμε το επόμενο Θεώρημα για την περίπτωση πολυωνύμων Hurwitz.

**Θεώρημα 4.4.** *Εστω  $\delta(s)$  ένα πολύτοπο πραγματικών ευσταθών κατά Hurwitz πολυωνύμων βαθμού  $n$  της μορφής (4.1) με  $u_i(s)$  που γράφεται σαν*

$$u_i(s) = s^{t_i}(\alpha_i s + b_i)A_i(s)P_i(s),$$

όπου  $t_i \geq 0$  είναι ακέραιοι,  $\alpha_i$  και  $b_i$  είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί,  $A_i$  είναι antiHurwitz και  $P_i$  είναι άρτια ή περιττά πολυώνυμα. Τότε ισχύει ότι

$$\inf_{\mathbf{p} \in \Pi} \rho(\mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{V}} \rho(\mathbf{p}).$$

## 4.9 Η γραφική παράσταση Tsytkin-Polyak

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε με τη βοήθεια γραφικής αναπαράστασης την ευστάθεια χαρακτηριστικών πολυωνύμων της μορφής

$$\delta(s, \mathbf{p}) = F_1(s)P_1(s) + F_2(s)P_2(s) + \dots + F_m(s)P_m(s), \quad (4.10)$$

όπου  $F_i(s)$  είναι πραγματικά ή μιγαδικά πολυώνυμα και με τους συντελεστές των πραγματικών πολυωνύμων  $P_i(s)$  να είναι οι παράμετροι αβεβαιότητας και να αποτελούν συνιστώσες του διανύσματος διαταραχών  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots]$ . Κάθε  $P_i(s)$  αναλύεται σε  $P_i(s) = p_{i0} + p_{i1}s + \dots$ . Με  $P_i^0(s)$  δηλώνουμε τα πολυώνυμα  $P_i^0(s) = p_{i0}^0 + p_{i1}^0 s + \dots$  με τιμές των συντελεστών που είναι οι ονομαστικές. Οι παράμετροι των πολυωνύμων  $P_i(s)$  περιορίζονται στο διάστημα  $|p_{ik} - p_{ik}^0| \leq \rho \bar{\alpha}_{ik}$  που καθορίζεται από το κοινό περιθώριο ευστάθειας  $\rho$ . Τα  $\bar{\alpha}_{ik}$  είναι παράμετροι που προσδίδουν διαφορετικό βάρος στάθμισης σε κάθε συντελεστή. Στόχος μας είναι να ελέγξουμε αν η οικογένεια πολυωνύμων που περιλαμβάνει πολυώνυμα της μορφής (4.10) είναι ευσταθής με δεδομένο περιθώριο ευστάθειας  $\rho$  σε μια περιοχή πολυωνύμων που καθορίζεται από την  $\ell_\infty$  νόρμα.

Θεώρουμε στη συνέχεια την οικογένεια πολυωνύμων

$$\mathbf{Q}(s) = \left\{ A(s) + \rho \sum_{i=1}^l r_i B_i(s) : |r_i| < 1, \quad i = 1, \dots, l \right\}.$$

Το  $A(s)$  είναι ένα πολυώνυμο  $n$  βαθμού ενώ τα  $B_1(s), \dots, B_l(s)$  είναι πολυώνυμα βαθμού  $\leq n$  και τα  $r_i$  αποτελούν πραγματικές παραμέτρους αβεβαιότητας. Αν θέσουμε  $s = s^*$  στο  $\mathbf{Q}(s)$  θα πάρουμε την εικόνα της οικογένειας στο μιγαδικό επίπεδο για το συγκεκριμένο σημείο. Επειδή οι παράμετροι αβεβαιότητας  $r_i$  παίρνουν τιμές σε διάστημα η εικόνα της  $\mathbf{Q}(s)$  είναι πολύγωνο.

Για να υπάρχει εύρωστη ευστάθεια της οικογένειας πολυωνύμων προϋπόθεση αποτελεί η  $\mathbf{Q}(s)$  να είναι σταθερού βαθμού. Η  $\mathbf{Q}(s)$  είναι ευσταθής αν περιλαμβάνει ένα τουλάχιστον ευσταθές πολυώνυμο και η εικόνα της για κάθε σημείο του συνόρου ευστάθειας αποκλείει την αρχή των αξόνων. Αν αντικαταστήσουμε  $s = s^*$  στα  $A(s), B_1(s), \dots, B_l(s)$  παίρνουμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $A, B_1, \dots, B_l$  οι οποίοι σε πολική μορφή γράφονται ως

$$B_k = |B_k|e^{j\phi_k}, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

και  $A = |A|e^{j\theta}$ . Η εικόνα της οικογένειας αυτής στο μιγαδικό επίπεδο είναι ένα μετατεθειμένο πολύγωνο ως προς την αρχή των αξόνων κατά το διάνυσμα  $A$ . Θεωρούμε από εδώ και στο εξής τα διανύσματα  $B_i$  που έχουν αρχή το  $A$  και τέλος τα  $B_1, \dots, B_l$ . Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{B} = \left\{ \sum_{i=1}^l r_i B_i : |r_i| \leq 1 \right\}$$

το οποίο είναι ένα πολύγωνο με  $2l$  ή λιγότερες κορυφές και τις απέναντι πλευρές παράλληλες στο διάνυσμα  $B_i$ . Σε σχέση με το  $\mathcal{B}$  το σύνολο  $A + \rho\mathcal{B}$  είναι μετατεθειμένο ενώ επιπλέον έχει υποστεί σμίκρυνση ή μεγέθυνση  $\rho > 0$  σε σχέση με το αρχικό σύνολο  $\mathcal{B}$ . Διατυπώνουμε μέσω του Λήμματος που ακολουθεί τις συνθήκες για να μην περιλαμβάνει μια εικόνα της οικογένειας την αρχή των αξόνων.

**Λήμμα 4.3.** *Η συνθήκη*

$$0 \notin A + \rho\mathcal{B},$$

*είναι ισοδύναμη με*

$$\max_{1 \leq k \leq l} \frac{|A| |\sin(\theta - \phi_k)|}{\sum_{i=1}^l |B_i| |\sin(\phi_i - \phi_k)|} > \rho, \quad \text{αν } \sin(\phi_i - \phi_k) \neq 0 \text{ για κάποιο } i, k$$

$$\max_{1 \leq k \leq l} \frac{|A|}{\sum_{i=1}^l |B_i|} > \rho, \quad \text{αν } \sin(\phi_i - \phi_k) \equiv 0 \text{ και } \sin(\theta - \phi_k) \equiv 0 \forall i, k,$$

όπου  $\theta$  και  $\phi_k$  είναι οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα  $A, B_1, \dots, B_l$  με τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Η δεύτερη σχέση αφορά την εκφυλισμένη περίπτωση που όλα τα  $A, B_1, \dots, B_l$  διατάσσονται σε μια γραμμή.

Θα εφαρμόσουμε τώρα το Λήμμα στην περίπτωση μιας οικογένειας πολυωνύμων που είναι της μορφής (4.10). Η εικόνα μιας τέτοιας οικογένειας στο μιγαδικό επίπεδο έχει τη μορφή

$$A(j\omega) + \rho\mathcal{Q}(\omega)$$

με  $A(j\omega)$  την τιμή της (4.10) στο  $s = j\omega$  για τις ονομαστικές τιμές των συντελεστών των  $P_i(s)$

$$A(j\omega) = F_1(j\omega)P_1^0(j\omega) + \cdots + F_m(j\omega)P_m^0(j\omega). \quad (4.11)$$

Το σύνολο  $\mathcal{Q}(\omega)$  για κάθε τιμή του  $\omega$  δίνεται από

$$\mathcal{Q}(\omega) = \left\{ \sum_{i=1}^m [r_i S_i(\omega) F_i(j\omega) + r_{m+1} T_i(\omega) j F_i(j\omega)], |r_i| \leq 1, |r_{m+1}| \leq 1, i = 1, \dots, m \right\},$$

όπου  $0 \leq \omega \leq \infty$  και επιπλέον

$$S_i(\omega) = \bar{\alpha}_{i0} + \bar{\alpha}_{i2}\omega^2 + \cdots \quad \text{και} \quad T_i(\omega) = \omega(\bar{\alpha}_{i1} + \bar{\alpha}_{i3}\omega^2 + \cdots).$$

Το Λήμμα 4.3 μπορεί να εφαρμοστεί αν θέσουμε  $l = 2m$ ,

$$B_i = S_i(\omega) F_i(j\omega), \quad \text{για } i = 1, \dots, m \quad (4.12)$$

και

$$B_i = T_i(\omega) j F_i(j\omega), \quad \text{για } i = m+1, \dots, 2m. \quad (4.13)$$

Επιπλέον  $\arg F_i(j\omega) = \phi_i(\omega)$  και  $\arg(j F_i(j\omega)) = \phi_{m+i}(\omega) = \phi_i(\omega) + \frac{\pi}{2}$ . Μετά από αυτές τις αντικαταστάσεις οι συνθήκες για να εξαιρεθεί το μηδέν από την εικόνα γίνονται

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq m} \frac{|A(j\omega)| |\sin(\theta(\omega) - \phi_k(\omega))|}{v_k} &> \rho \\ \max_{m+1 \leq k \leq 2m} \frac{|A(j\omega)| |\cos(\theta(\omega) - \phi_k(\omega))|}{u_k} &> \rho, \end{aligned} \quad (4.14)$$

όπου τα  $v_k(\omega)$  και  $u_k(\omega)$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} u_k(\omega) &= \sum_{i=1}^m S_i(\omega) |F_i(j\omega)| |\cos(\phi_i(\omega) - \phi_k(\omega))| \\ &+ T_i(\omega) |F_i(j\omega)| |\sin(\phi_i(\omega) - \phi_k(\omega))|, \quad k = 1, \dots, m \\ v_k(\omega) &= \sum_{i=1}^m S_i(\omega) |F_i(j\omega)| |\sin(\phi_i(\omega) - \phi_k(\omega))| \\ &+ T_i(\omega) |F_i(j\omega)| |\cos(\phi_i(\omega) - \phi_k(\omega))|, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Από τη δεύτερη σχέση των (4.14) ορίζουμε το  $x_k(\omega)$

$$x_k(\omega) = \frac{|A(j\omega)| |\cos(\theta(\omega) - \phi_k(\omega))|}{u_k}$$

ενώ από την πρώτη σχέση το  $y_k(\omega)$

$$y_k(\omega) = \frac{|A(j\omega)| |\sin(\theta(\omega) - \phi_k(\omega))|}{v_k}$$

για  $k = 1, \dots, m$ . Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για  $\omega$  για τα οποία δεν παρουσιάζονται ασυνέ-

χειες λόγω μηδενισμού του παρονομαστή των  $x_k(\omega)$  και  $y_k(\omega)$ . Στην περίπτωση όμως που αυτό συμβαίνει οι σχέσεις που δίνουν τα  $x_k(\omega)$  και  $y_k(\omega)$  μεταβάλλονται στις

$$x_k(\omega) = \frac{|A(j\omega)|}{\sum_{i=1}^m S_i(\omega)|F_i(j\omega)| + T_i(\omega)|F_i(j\omega)|}$$

και

$$y_k(\omega) = \frac{|A(j\omega)|}{\sum_{i=1}^m S_i(\omega)|F_i(j\omega)| + T_i(\omega)|F_i(j\omega)|}.$$

Η μέγιστη απόσταση για κάθε  $\omega$  από την αρχή των αξόνων καθορίζεται από το μέγιστο ως προς  $k$  των  $x_k(\omega)$  και  $y_k(\omega)$  και είναι

$$\mu(\omega) = \max_{1 \leq k \leq m} \max\{x_k(\omega), y_k(\omega)\}, \quad 0 < \omega < \infty. \quad (4.15)$$

Η συνάρτηση  $\mu(\omega)$  μπορεί να είναι ασυνεχής για  $\omega = 0$  και  $\omega \rightarrow \infty$ . Από τις (4.14) αν διατηρήσουμε τους αριθμητές και παρονομαστές στη μιγαδική τους μορφή και προβούμε σε αντικατάσταση του  $\omega = 0$  στις (4.11), (4.12) και (4.13) η (4.13) μηδενίζεται ενώ στις υπόλοιπες παραμένουν μόνο οι σταθεροί όροι, οπότε παίρνουμε

$$\mu_0 = \mu(0) = \frac{|\sum_{i=1}^m p_{i0}^0 f_{i0}|}{\sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_{i0} |f_{i0}|}. \quad (4.16)$$

Αντίστοιχα για  $\omega \rightarrow \infty$  παραμένουν μόνο οι μεγατοβάθμιοι όροι

$$\mu_n = \frac{|\sum_{i=1}^m \sum_{k+l=n} p_{ik}^0 f_{il}|}{\sum_{i=1}^m \sum_{k+l=n} \bar{\alpha}_{ik} |f_{il}|} \quad (4.17)$$

και αυτό είναι το περιθώριο ευστάθειας για να παραμείνει ο βαθμός των πολωνύμων της οικογένειας σταθερός και ίσος με  $n$ . Για τις υπόλοιπες τιμές του  $\omega$  θα πρέπει να ευρεθεί το ελάχιστο  $\mu_{\min}$  της  $\mu(\omega)$  ως προς  $\omega$

$$\mu_{\min} = \inf_{0 < \omega < \infty} \mu(\omega).$$

Το μέγιστο περιθώριο ευστάθειας  $\rho^*$  προκύπτει ως

$$\rho^* = \min\{\mu_0, \mu_n, \mu_{\min}\}.$$

Ο καθορισμός της εύρωστης ευστάθειας συναρτάται με το  $\rho^*$  όπως περιγράφεται από το επόμενο Θεώρημα.

**Θεώρημα 4.5.** *Μία οικογένεια πολωνύμων της μορφής (4.10) είναι ευσταθής αν το πολώνυμο  $A(s)$  είναι ευσταθές κατά Hurwitz και*

$$\rho^* > \rho.$$



Η συνθήκη για να είναι το πολυώνυμο με ονομαστικές τιμές των παραμέτρων ευσταθές μπορεί να ενσωματωθεί στο κριτήριο του Θεωρήματος 4.5 για εύρωστη ευστάθεια της οικογένειας πολυωνύμων και να οδηγήσει στο Θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 4.6.** *Μία οικογένεια πολυωνύμων της μορφής (4.10) είναι ευσταθής αν και μόνο αν  $A(j\omega) \neq 0$ ,  $\rho < \mu(0)$ ,  $\rho < \mu_n$  και η γραφική παράσταση στο μιγαδικό επίπεδο της συνάρτησης*

$$z(\omega) = \frac{A(j\omega)}{|A(j\omega)|} \mu(\omega) \quad (4.18)$$

διέρχεται από  $n$  τεταρτημόρια καθώς το  $\omega$  μεταβάλλεται από  $0$  στο  $\infty$  και δεν τέμνει τον κύκλο ακτίνας  $\rho$  με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Τα Θεωρήματα 4.5 και 4.6 καθώς επίσης και η τεχνική προσδιορισμού του  $\ell_p$  περιθωρίου ευστάθειας που βασίζεται στη γραφική παράσταση Tsyarkin-Polyak παρουσιάστηκαν στις εργασίες [41], [42].

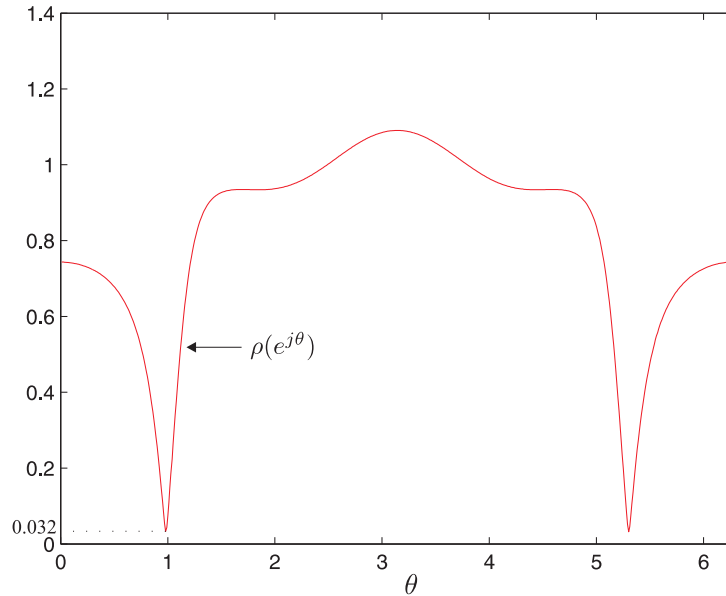
Η  $z(\omega)$  είναι μία μιγαδική συνάρτηση με φάση  $\arg A(j\omega)$  και μέτρο  $\mu(\omega)$ . Από την Ιδιότητα 1.1 γνωρίζουμε ότι η φάση ενός ευσταθούς κατά Hurwitz πολυωνύμου αυξάνεται μονότονα και φθάνει το  $n\pi/2$  καθώς το  $\omega$  διατρέχει το διάστημα από  $0$  έως  $\infty$ . Κατά συνέπεια η  $z(\omega)$  διατρέχει  $n$  τεταρτημόρια με απόσταση από την αρχή των αξόνων που προσαρμόζεται βάσει της  $\mu(\omega)$ . Αν ισχύει ότι  $\rho < \mu(0)$  και  $\rho < \mu_n$  και η  $z(\omega)$  καθώς περιστρέφεται γύρω από την αρχή των αξόνων δεν τμήσει τον κύκλο ακτίνας  $\rho$  τότε η οικογένεια πολυωνύμων είναι ευσταθής με περιθώριο ευστάθειας τουλάχιστον  $\rho$ .

## 4.10 Παραδείγματα

Στα παραδείγματα που θα παρουσιάσουμε θα εξετάσουμε την εύρωστη ευστάθεια πολυωνύμων με εξαρτήσεις μεταξύ των συντελεστών τους που μπορούν να παίρνουν τιμές εντός διαστημάτων αβεβαιότητας. Η αβεβαιότητα υπεισέρχεται στους συντελεστές μέσω παραμέτρων που μεταβάλλονται ανεξάρτητα μεταξύ τους και γραμμικά ενώ οι συντελεστές εξαρτώνται από αυτές με γραμμικό τρόπο. Αρχικά θα προσδιορίσουμε το περιθώριο ευστάθειας ως προς την Ευκλείδια νόρμα ενώ στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε το κριτήριο φραγμένης φάσης. Τέλος θα παρουσιάσουμε απεικονιστικές τεχνικές που βασίζονται στο διάγραμμα Tsyarkin-Polyak και με τις οποίες μπορεί να προσδιορισθεί το μέγιστο περιθώριο ευστάθειας.

**Παράδειγμα 4.1.** Θεωρούμε το σύστημα διακριτού χρόνου που αποτελείται από τον ελεγκτή και το προς έλεγχο σύστημα που περιγράφονται από τις παρακάτω συναρτήσεις μεταφοράς

$$C(z) = \frac{z+1}{z^2}, \quad G(z, \mathbf{p}) = \frac{(-0.5 - 2p_0)z + (0.1 + p_0)}{z^2 - (1 + 0.4p_2)z + (0.6 + 10p_1 + 2p_0)}.$$



Σχήμα 4.1: Η μεταβολή του  $\rho(e^{j\theta})$  με το  $\theta$ .

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού βρόχου είναι

$$\delta(z, \mathbf{p}) = z^4 - (1 + 0.4p_2)z^3 + (0.1 + 10p_1)z^2 - (0.4 + p_0)z + (0.1 + p_0).$$

Η ονομαστική τιμή του διανύσματος παραμέτρων είναι

$$\mathbf{p}^0 = [p_0^0, p_1^0, p_2^0] = [0, 0.1, 1]$$

ενώ οι διαταραχές που μπορούν να υποστούν οι παράμετροι του προς έλεγχο συστήματος σημειώνονται με το διάνυσμα  $\Delta \mathbf{p}$

$$\Delta \mathbf{p} = [\Delta p_0 \ \Delta p_1 \ \Delta p_2].$$

Τα βάρη που σταθμίζουν τις μεταβολές των στοιχείων του  $\Delta \mathbf{p}$  τίθενται όλα στη μονάδα. Το αρχικό πολυώνυμο μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα του πολυωνύμου των διαταραχών και του ονομαστικού πολυωνύμου ως εξής

$$\delta(z, \mathbf{p}^0 + \Delta \mathbf{p}) = \underbrace{(-z + 1)\Delta p_0 + 10z^2\Delta p_1 - 0.4z^3\Delta p_2}_{A(z)} + \underbrace{(z^4 - 1.4z^3 + 1.1z^2 - 0.4z + 0.1)}_{b(z)}.$$

Επειδή ο βαθμός των πολυωνύμων παραμένει αμετάβλητος για όλες τις διαταραχές προκύπτει

ότι  $\rho_d = \infty$ . Αρχικά θα υπολογίσουμε το περιθώριο ευστάθειας που οφείλεται στις πραγματικές τιμές του συνόρου ευστάθειας που είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Για  $z = 1$

$$\rho(1) = \|t^*(1)\|_2 = \|A^T(1)[A(1)A^T(1)]^{-1}b(1)\| = 0.04$$

ενώ για  $z = -1$

$$\rho(-1) = \|t^*(-1)\|_2 = \|A^T(-1)[A(-1)A^T(-1)]^{-1}b(-1)\| = 0.3919.$$

Επομένως  $\rho_r = 0.04$ . Για την εύρεση του περιθωρίου ευστάθειας για την υπόλοιπη περιοχή του συνόρου θα θέσουμε όπου  $z = e^{j\theta}$  και θα σχηματίσουμε του πίνακες  $A(z)$  και  $b(z)$  με δύο γραμμές μία που περιλαμβάνει μόνο το πραγματικό μέρος των όρων που προέκυψαν μετά την αντικατάσταση του  $z$  με  $e^{j\theta}$  και μία ακόμη που περιλαμβάνει τους φανταστικούς όρους. Η νόρμα της λύσης με την ελάχιστη Ευκλείδεια νόρμα προκύπτει από τη σχέση

$$\rho(e^{j\theta}) = \|t^*(\theta)\|_2 = \|A^T(\theta)[A(\theta)A^T(\theta)]^{-1}b(\theta)\|$$

και απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 4.1 ως συνάρτηση του  $\theta$ . Το  $\rho_c$  ταυτίζεται με την ελάχιστη τιμή του  $\rho(e^{j\theta})$  που είναι 0.032 και προκύπτει για  $\theta \simeq 1$ . Το  $\rho_b$  είναι το ελάχιστο των  $\rho_r$  και  $\rho_c$ , οπότε  $\rho_b = 0.032$ . Επειδή  $\rho_d = \infty$  το μέγιστο παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας είναι  $\rho^* = 0.032$ .

**Παράδειγμα 4.2.** Θεωρούμε το σύστημα κλειστού βρόχου με μοναδιαία αρνητική ανάδραση όπου το προς έλεγχο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{s + a}{s^2 + bs + c}$$

σταθεροποιείται με τη βοήθεια ελεγκτή με συνάρτηση μεταφοράς

$$C(s) = \frac{3s + 2}{s + 5}.$$

Από τη μεταβολή των παραμέτρων στα διαστήματα

$$\begin{aligned} a &\in [1, 2] = [a^-, a^+] \\ b &\in [9, 11] = [b^-, b^+] \\ c &\in [15, 18] = [c^-, c^+] \end{aligned}$$

προκύπτει το πολύτοπο  $\Delta(s)$  των πολυωνύμων του οποίου την εύρωστη ευστάθεια κατά Hurwitz θέλουμε να ελέγξουμε. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού βρόχου είναι

$$\delta(s) = a(3s + 2) + b(s^2 + 5s) + c(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s).$$

Από το μεγιστοβάθμιο όρο διαπιστώνουμε ότι ο βαθμός των πολυωνύμων παραμένει αμετάβλητος. Επιπλέον για το κέντρο του παραμετρικού συνόλου το πολυώνυμο που προκύπτει είναι ευσταθές. Για  $\omega = 0$   $\Delta(j0) = 2a + 5c = 2[1, 2] + 5[15, 18] \neq 0$ . Εφόσον λοιπόν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.1 η εύρωστη ευστάθεια της πολυτοπικής οικογένειας εξαρτάται από την ευστάθεια του συνόλου  $\Delta_E(s)$ . Το σύνολο  $\Delta_E(s)$  περιλαμβάνει τα πολυώνυμα των ακμών που κατασκευάζονται αν θέσουμε όλες τις παραμέτρους σε καθεμιά από τις κορυφές εκτός μιας που παίρνει τιμές κατά μήκος του γραμμικού τμήματος που ορίζουν οι ακραίες τιμές της. Αν  $m$  είναι το πλήθος των παραμέτρων ο αριθμός των διαφορετικών ακμών που μπορούν να προκύψουν είναι  $m2^{m-1}$ . Για το παράδειγμα μας ο αριθμός των διαφορετικών ακμών είναι 12. Ενδεικτικά αναφέρουμε

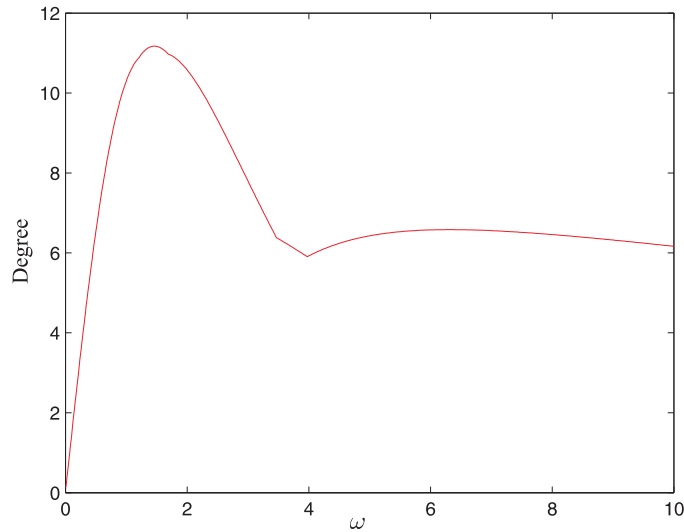
$$\begin{aligned} \delta_{E_1}(s) &= (\lambda a^- + (1 - \lambda)a^+)(3s + 2) + b^-(s^2 + 5s) + c^-(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s) \\ \delta_{E_2}(s) &= (\lambda a^- + (1 - \lambda)a^+)(3s + 2) + b^+(s^2 + 5s) + c^-(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s) \\ \delta_{E_3}(s) &= (\lambda a^- + (1 - \lambda)a^+)(3s + 2) + b^-(s^2 + 5s) + c^+(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s) \\ \delta_{E_4}(s) &= (\lambda a^- + (1 - \lambda)a^+)(3s + 2) + b^+(s^2 + 5s) + c^+(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s) \\ \delta_{E_5}(s) &= a^-(3s + 2) + (\lambda b^- + (1 - \lambda)b^+)(s^2 + 5s) + c^-(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s) \\ \delta_{E_6}(s) &= a^+(3s + 2) + (\lambda b^- + (1 - \lambda)b^+)(s^2 + 5s) + c^-(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s) \\ \delta_{E_7}(s) &= a^-(3s + 2) + (\lambda b^- + (1 - \lambda)b^+)(s^2 + 5s) + c^+(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s) \\ \delta_{E_8}(s) &= a^+(3s + 2) + (\lambda b^- + (1 - \lambda)b^+)(s^2 + 5s) + c^+(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s). \end{aligned}$$

Ο έλεγχος για ευστάθεια της πολυτοπικής οικογένειας μπορεί να πραγματοποιηθεί και με χρήση του Θεωρήματος 4.2. Με βάση το Θεώρημα εφόσον υπάρχει ευσταθές πολυώνυμο στην οικογένεια αρκεί να ελέγξουμε τη συνθήκη

$$\Phi_{\Delta_V}(j\omega) < \pi, \quad \forall \omega,$$

όπου  $\Delta_V$  είναι το σύνολο των πολυωνύμων κορυφής και προκύπτουν θέτοντας τις παραμέτρους στις ακραίες τιμές τους. Το πλήθος των διαφορετικών πολυωνύμων κορυφής είναι  $2^m$  και σε αυτά περιλαμβάνονται τα

$$\begin{aligned} \delta_{V_1}(s) &= a^-(3s + 2) + b^-(s^2 + 5s) + c^-(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s) \\ \delta_{V_2}(s) &= a^+(3s + 2) + b^-(s^2 + 5s) + c^-(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s) \\ \delta_{V_3}(s) &= a^-(3s + 2) + b^+(s^2 + 5s) + c^-(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s) \\ \delta_{V_4}(s) &= a^+(3s + 2) + b^+(s^2 + 5s) + c^-(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s) \\ \delta_{V_5}(s) &= a^-(3s + 2) + b^-(s^2 + 5s) + c^+(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s) \\ \delta_{V_6}(s) &= a^+(3s + 2) + b^-(s^2 + 5s) + c^+(s + 5) + (s^3 + 8s^2 + 2s) \end{aligned}$$



Σχήμα 4.2: Η μέγιστη διαφορά φάσης των πολωνύμων κορυφής παραμένει κάτω από τις  $180^\circ$ .

$$\begin{aligned}\delta_{V_7}(s) &= a^-(3s+2) + b^+(s^2+5s) + c^+(s+5) + (s^3+8s^2+2s) \\ \delta_{V_8}(s) &= a^+(3s+2) + b^+(s^2+5s) + c^+(s+5) + (s^3+8s^2+2s).\end{aligned}$$

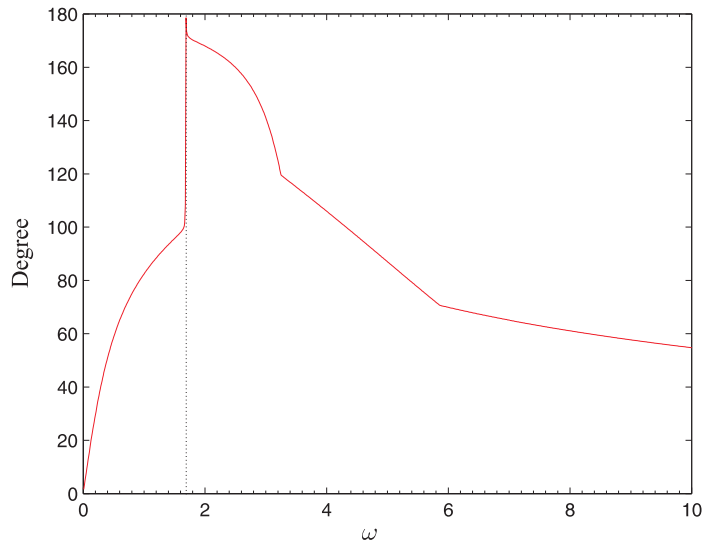
Στο Σχήμα 4.2 για το παράθυρο συχνοτήτων που περιορίζουμε την απεικόνισή μας η μέγιστη διαφορά φάσης αποκτά ένα μέγιστο 11 μοιρών περίπου στο 1.5 rad/sec. Επειδή η μέγιστη διαφορά φάσης των κορυφών παραμένει μικρότερη από  $\pi$  ακτίνια για όλο το εύρος των συχνοτήτων η οικογένεια πολωνύμων χαρακτηρίζεται από εύρωστη ευστάθεια. Μπορούμε να επεκτείνουμε το παράδειγμα μας διευρύνοντας το διάστημα τιμών των παραμέτρων κατά  $2\epsilon$

$$\begin{aligned}a &\in [a^- - \epsilon, a^+ + \epsilon] \\ b &\in [b^- - \epsilon, b^+ + \epsilon] \\ c &\in [c^- - \epsilon, c^+ + \epsilon]\end{aligned}$$

και ελέγχοντας για ποιο  $\epsilon$  θα καταστραφεί η εύρωστη ευστάθεια. Αυξάνοντας σταδιακά την τιμή του  $\epsilon$  διαπιστώνουμε από το Σχήμα 4.3 ότι για  $\epsilon = 6.91$  η μέγιστη διαφορά φάσης αγγίζει τις  $180^\circ$ . Άρα για αυτή την τιμή του  $\epsilon$  έχουμε μετάβαση στην αστάθεια.

**Παράδειγμα 4.3.** Θεωρούμε την οικογένεια πολωνύμων

$$\Delta(s) = s + p_1 - jp_2,$$



Σχήμα 4.3: Η μέγιστη διαφορά φάσης των πολυωνύμων κορυφής αγγίζει τις  $180^\circ$ .

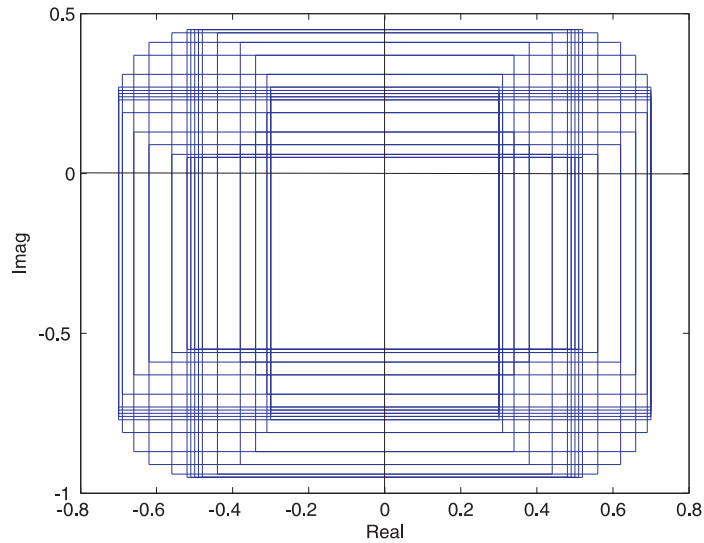
όπου  $p_1 \in [1, 2]$  και  $p_2 \in [0, 1]$ . Ως ευσταθή περιοχή θεωρούμε την περιοχή έξω από το δίσκο

$$\mathcal{S} = \{s \in \mathbb{C} : |s + (1.5 - j0.25)| > 0.2\}.$$

Οι εκτεθειμένες ακμές της πολυτοπικής οικογένειας περιλαμβάνονται στο σύνολο  $\Delta_E(s)$  που κατασκευάζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα πολυώνυμα κορυφής  $\Delta_V(s) = \{s + 1, s + 1 - j, s + 2, s + 2 - j\}$ . Οι ακμές αυτές είναι όλες ευσταθείς καθώς οι εικόνες τους για τιμές του  $s$  στο σύνορο της περιοχής ευστάθειας δε διέρχονται από το μηδέν και τα αντίστοιχα πολυώνυμα κορυφής είναι ευσταθή. Για να καταλήξουμε όμως στο συμπέρασμα ότι η οικογένεια πολυωνύμων είναι ευσταθής θα πρέπει σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1 να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στο σύνορο της περιοχής ευστάθειας για το οποίο η εικόνα της οικογένειας στο μιγαδικό επίπεδο να μην περιλαμβάνει την αρχή των αξόνων. Στο Σχήμα 4.4 παραθέτουμε τις εικόνες του συνόλου  $\Delta_E(s)$  για τιμές του συνόρου ευστάθειας που στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι η περιφέρεια του κύκλου με ακτίνα 0.2 και κέντρο  $(-1.5, 0.25)$ . Είναι σαφές από τη γραφική απεικόνιση ότι η αρχή των αξόνων περιλαμβάνεται στο εσωτερικό των πολυγώνων που οριοθετούνται από το σύνολο  $\Delta_E(s)$  για όλες τις τιμές του  $s$  πάνω στο σύνορο. Επόμενως η οικογένεια είναι ασταθής.

**Παράδειγμα 4.4.** Θεωρούμε την οικογένεια πολυωνύμων

$$\delta(s, \mathbf{p}) = \underbrace{(s^2 + 2s + 2)}_{F_1(s)} \underbrace{(p_{11}s + p_{10})}_{P_1(s)} + \underbrace{(s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s)}_{F_2(s)} \underbrace{(p_{22}s^2 + p_{21}s + p_{20})}_{P_2(s)}.$$



Σχήμα 4.4: Εικόνα των ακμών της  $\Delta_E(s)$  υπολογισμένη κατά μήκος της περιφέρειας του δίσκου.

Το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  λαμβάνει σαν ονομαστικές τιμές των συνιστωσών του τις

$$\mathbf{p}^0 = [p_{11}^0 \ p_{10}^0 \ p_{22}^0 \ p_{21}^0 \ p_{20}^0] = [0.287 \ 0.265 \ 0.215 \ 2.06 \ 2.735].$$

Το ονομαστικό πολυώνυμο  $A(s) = F_1(s)P_1^0(s) + F_2(s)P_2^0(s)$  είναι ευσταθές κατά Hurwitz. Στο παράδειγμα αυτό μας ενδιαφέρει να καθορίσουμε το μέγιστο περιθώριο  $\rho^*$  έτσι ώστε η οικογένεια πολυωνύμων με συντελεστές που ανήκουν στο διάστημα  $|p_{ik} - p_{ik}^0| \leq \rho^* \alpha_{ik}$  να παραμένει ευσταθής. Τα βάρη  $\alpha_{ik}$  που σταθμίζουν τους συντελεστές τίθενται στη μονάδα. Για τον προσδιορισμό του περιθωρίου ευστάθειας θα κάνουμε χρήση του διαγράμματος Tsytkin-Polyak. Αντί για τους τριγωνομετρικούς τύπους που απαιτούνται για τον υπολογισμό των  $x_k(\omega)$  και  $y_k(\omega)$  θα προτιμήσουμε τους παρακάτω τύπους

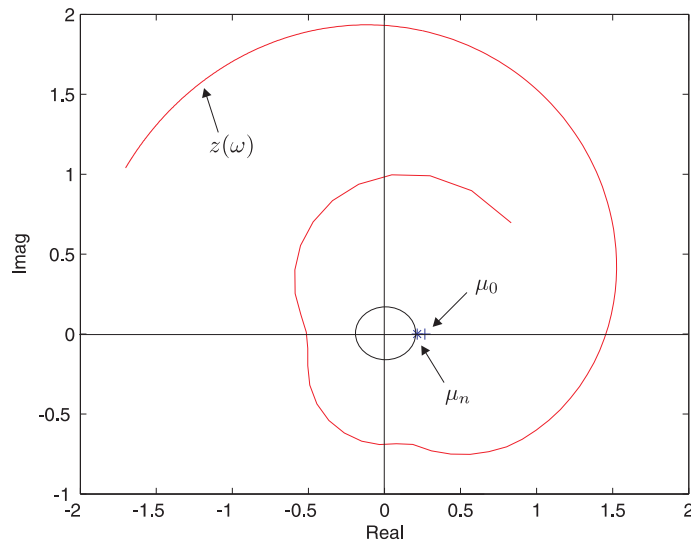
$$x_k(\omega) = \frac{|U_{0k}(\omega)|}{\sum_{i=1}^m S_i(\omega)|U_{ik}(\omega)| + T_i(\omega)|V_{ik}(\omega)|},$$

$$y_k(\omega) = \frac{|V_{0k}(\omega)|}{\sum_{i=1}^m S_i(\omega)|V_{ik}(\omega)| + T_i(\omega)|U_{ik}(\omega)|},$$

με τα  $U_{0k}(\omega)$ ,  $V_{0k}(\omega)$ ,  $U_{ik}(\omega)$  και  $V_{ik}(\omega)$  να προσδιορίζονται από τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των σχέσεων

$$\frac{A(j\omega)}{F_k(j\omega)} = U_{0k}(\omega) + jV_{0k}(\omega)$$

$$\frac{F_i(j\omega)}{F_k(j\omega)} = U_{ik}(\omega) + jV_{ik}(\omega)$$



Σχήμα 4.5: Γραφική παράσταση Tsytkin-Polyak για το καθορισμό του μέγιστου περιθώριου ευστάθειας της πολυτοπικής οικογένειας.

για εκείνα τα  $\omega$  για τα οποία τα  $U_{ik}(\omega)$  και  $V_{ik}(\omega)$  δεν εμφανίζουν κοινές ρίζες. Τα  $i$  και  $k$  παίρνουν τιμές 1 και 2. Τα  $\mu(\omega)$ ,  $\mu_0$  και  $\mu_n$  προσδιορίζονται από τις (4.15), (4.16) και (4.17) ενώ το  $\mu_{\min}$  προκύπτει σαν το ελάχιστο  $\mu(\omega)$  ως προς εκείνα τα  $\omega$  για τα οποία τα  $U_{ik}(\omega)$  και  $V_{ik}(\omega)$  δεν εμφανίζουν κοινές ρίζες. Το μέγιστο περιθώριο ευστάθειας  $\rho^*$  καθορίζεται σαν το ελάχιστο των  $\mu_{\min}$ ,  $\mu_0$  και  $\mu_n$ . Στο Σχήμα 4.5 απεικονίζουμε το  $z(\omega)$  ενώ ταυτόχρονα σημειώνουμε πάνω στον πραγματικό άξονα τις τιμές των  $\mu_0$  και  $\mu_n$  για να είναι εφικτή η σύγκριση. Κατ' αρχάς το ονομαστικό πολυώνυμο  $A(s)$  είναι ευσταθές καθώς η γραφική παράσταση του  $z(\omega)$  κινείται ανθρωπολογικά με το  $\omega$  και διέρχεται από 6 τεταρτημόρια όσα δηλαδή και ο βαθμός του ονομαστικού πολυωνύμου. Επιπλέον όσον αφορά στο περιθώριο ευστάθειας το  $\rho^*$  περιορίζεται από τον κύκλο που εφάπτεται στο σημείο του πραγματικού άξονα με τιμή 0.215 που αντιστοιχεί στο  $\mu_n$  ενώ σε κοντινή απόσταση στο σημείο με τιμή 0.265 βρίσκεται το σημείο  $\mu_0$ .



# Κεφάλαιο 5

## Το Θεώρημα Kharitonov σε Πολυώνυμα Διαστήματος

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Kharitonov για να ελέγξουμε την εύρωστη ευστάθεια κατά Hurwitz μιας οικογένειας πολυωνύμων που οι συντελεστές της μεταβάλλονται εντός διαστήματος, γι' αυτό και άλλωστε τα πολυώνυμα αυτά καλούνται πολυώνυμα διαστήματος. Επίσης θα μας απασχολήσει κατά πόσο το κριτήριο του Kharitonov μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί η εύρωστη ευστάθεια μίας οικογένειας πολυωνύμων κατά Schur. Η απόδειξη του Θεωρήματος του Kharitonov μπορεί να στηριχθεί είτε στην ιδιότητα της συνδιαπλοκής που ισχύει για τα πολυώνυμα Hurwitz είτε σε τεχνικές που κάνουν χρήση της εικόνας μιας οικογένειας πολυωνύμων στο μιγαδικό επίπεδο.

### 5.1 Το Θεώρημα Kharitonov για πραγματικά πολυώνυμα

Θεωρούμε το σύνολο  $\mathcal{I}(s)$  των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού  $n$  της μορφής

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \cdots + \delta_n s^n, \quad (5.1)$$

όπου οι συντελεστές ανήκουν στα διαστήματα

$$\delta_0 \in [x_0, y_0], \delta_1 \in [x_1, y_1], \cdots, \delta_n \in [x_n, y_n].$$

Ορίζουμε το διάνυσμα  $\underline{\delta} = [\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_n]$  και το κουτί  $\Delta$  του συνόλου στο οποίο ανήκουν οι συντελεστές των πολυωνύμων

$$\Delta = \{ \underline{\delta} : \underline{\delta} \in \mathbb{R}^{n+1}, x_i \leq \delta_i \leq y_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n \}.$$

Επειδή οι συντελεστές μεταβάλλονται εντός διαστήματος τιμών το σύνολο των πολωνύμων που προκύπτει αποτελεί μία πραγματική οικογένεια διαστήματος (interval family) την οποία συμβολίζουμε με  $\mathcal{I}(s)$ . Για να παραμείνει ο βαθμός των πολωνύμων αμετάβλητος εντός της οικογένειας θα πρέπει  $0 \notin [x_n, y_n]$ . Το Θεώρημα Kharitonov μας επιτρέπει ελέγχοντας ένα περιορισμένο αριθμό πολωνύμων να διαπιστώσουμε την ευστάθεια μιας οικογένειας διαστήματος και αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Hermite-Biehler για ένα ευσταθές κατά Hurwitz πολώνυμο. Σύμφωνα με το Θεώρημα Hermite-Biehler οι ρίζες που συνδέονται κατάλληλα με το άρτιο και περιττό τμήμα ενός πραγματικού πολωνύμου Hurwitz είναι πραγματικές και διακριτές και αλληλοδιαπλέκονται. Επιπλέον οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων του άρτιου και του περιττού τμήματος έχουν το ίδιο πρόσημο. Στο πνεύμα της ιδιότητας της συνδιαπλοκής των ριζών διατυπώνουμε το επόμενο Λήμμα.

**Λήμμα 5.1.** *Έστω δύο ευσταθή κατά Hurwitz πολώνυμα*

$$\begin{aligned} P_1(s) &= P^{even}(s) + P_1^{odd}(s) \\ P_2(s) &= P^{even}(s) + P_2^{odd}(s) \end{aligned}$$

που έχουν τον ίδιο βαθμό και το ίδιο άρτιο μέρος. Επιπλέον έστω ότι για  $s = j\omega$  ισχύει

$$P_1^o(\omega) \leq P_2^o(\omega), \quad \forall \omega \in [0, \infty),$$

όπου  $P^e(\omega) = P^{even}(j\omega)$  και  $P^o(\omega) = \frac{P^{odd}(j\omega)}{j\omega}$ . Τότε κάθε πολώνυμο  $P(s) = P^{even}(s) + P^{odd}(s)$  είναι ευσταθές αν το  $P^o(\omega)$  ικανοποιεί τη σχέση

$$P_1^o(\omega) \leq P^o(\omega) \leq P_2^o(\omega), \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (5.2)$$

*Απόδειξη.* Επειδή τα  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι ευσταθή κατά Hurwitz τα  $P_1^o(\omega)$  και  $P_2^o(\omega)$  ικανοποιούν την Ιδιότητα της Συνδιαπλοκής με το  $P^e(\omega)$ . Από την ίδια ιδιότητα ισχύει ότι οι μεγιστοβάθμιοι όροι των  $P_1^o(\omega)$ ,  $P_2^o(\omega)$  και  $P^e(\omega)$  έχουν το ίδιο πρόσημο. Για να ισχύει η (5.2) για  $\omega \rightarrow \infty$  θα πρέπει και ο μεγιστοβάθμιος όρος του  $P^o(\omega)$  να έχει το ίδιο πρόσημο με τα προηγούμενα πολώνυμα. Επειδή το  $P^o(\omega)$  βρίσκεται μεταξύ των ορίων που καθορίζουν τα  $P_1^o(\omega)$  και  $P_2^o(\omega)$  είναι φανερό ότι και για αυτό ισχύει η Ιδιότητα της Συνδιαπλοκής με το  $P^e(\omega)$ . Έτσι σύμφωνα με το Θεώρημα Hermite-Biehler το  $P(s)$  είναι ευσταθές.  $\square$

Αντίστοιχα με το Λήμμα 5.1 μπορεί να διατυπωθεί ένα Λήμμα στο οποίο τα ευσταθή κατά Hurwitz πολώνυμα  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  θα έχουν το ίδιο περιττό μέρος και διαφορετικό άρτιο μέρος.

**Λήμμα 5.2.** *Αν  $P_1^o(\omega) = P_2^o(\omega) = P^o(\omega)$  και  $P_1^e(\omega) \leq P_2^e(\omega)$ ,  $\forall \omega \in [0, \infty)$  τότε κάθε πολυώ-*

νυμο  $P(s)$  για το οποίο ισχύει

$$P_1^e(\omega) \leq P^e(\omega) \leq P_2^e(\omega), \quad \forall \omega \in [0, \infty)$$

είναι ευσταθές.

Τα αποτελέσματα των δυο προηγούμενων Λημμάτων είναι απαραίτητα για να τεθούν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες μία οικογένεια διαστήματος είναι ευσταθής σύμφωνα με το Θεώρημα Kharitonov [26] που διατυπώνουμε στη συνέχεια.

**Θεώρημα 5.1.** (Kharitonov)

Κάθε πολυώνυμο της οικογένειας  $\mathcal{I}(s)$  είναι πολυώνυμο Hurwitz αν και μόνο αν τα παρακάτω ακραία πολυώνυμα είναι πολυώνυμα Hurwitz:

$$\begin{aligned} K^1(s) &= x_0 + x_1s + y_2s^2 + y_3s^3 + x_4s^4 + x_5s^5 + y_6s^6 + \dots \\ K^2(s) &= x_0 + y_1s + y_2s^2 + x_3s^3 + x_4s^4 + y_5s^5 + y_6s^6 + \dots \\ K^3(s) &= y_0 + x_1s + x_2s^2 + y_3s^3 + y_4s^4 + x_5s^5 + x_6s^6 + \dots \\ K^4(s) &= y_0 + y_1s + x_2s^2 + x_3s^3 + y_4s^4 + y_5s^5 + x_6s^6 + \dots \end{aligned} \tag{5.3}$$

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι σαν συντελεστές των πολυωνύμων τίθενται οι ακραίες τιμές των διαστημάτων εντός των οποίων μπορούν να βρίσκονται οι συνιστώσες του διανύσματος  $\underline{\delta}$  που περιγράφει τα πολυώνυμα διαστήματος της μορφής (5.1). Τα πολυώνυμα της σχέσης (5.3) καλούνται πολυώνυμα Kharitonov και συντίθεται από τους 4 συνδυασμούς δύο διαφορετικών άρτιων πολυωνύμων  $K_{max}^{even}(s)$  και  $K_{min}^{even}(s)$  και δύο διαφορετικών περιττών πολυωνύμων  $K_{max}^{odd}(s)$  και  $K_{min}^{odd}(s)$ . Τα άρτια πολυώνυμα είναι

$$\begin{aligned} K_{max}^{even}(s) &= y_0 + x_2s^2 + y_4s^4 + x_6s^6 + \dots \\ K_{min}^{even}(s) &= x_0 + y_2s^2 + x_4s^4 + y_6s^6 + \dots \end{aligned}$$

ενώ τα περιττά είναι

$$\begin{aligned} K_{max}^{odd}(s) &= y_1s + x_3s^3 + y_5s^5 + x_7s^7 + \dots \\ K_{min}^{odd}(s) &= x_1s + y_3s^3 + x_5s^5 + y_7s^7 + \dots \end{aligned}$$

Τα πολυώνυμα Kharitonov μπορούν να διατυπωθούν συναρτήσει των παραπάνω πολυωνύμων ως εξής

$$\begin{aligned}
 K^1(s) &= K_{min}^{even}(s) + K_{min}^{odd}(s) \\
 K^2(s) &= K_{min}^{even}(s) + K_{max}^{odd}(s) \\
 K^3(s) &= K_{max}^{even}(s) + K_{min}^{odd}(s) \\
 K^4(s) &= K_{max}^{even}(s) + K_{max}^{odd}(s).
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Χρησιμοποιήσαμε σαν δείκτες στα άρτια και περιττά πολυώνυμα το  $max$  και  $min$  γιατί θέλουμε να δηλώσουμε που βρίσκονται σε σχέση με το άρτιο και το περιττό μέρος ενός πολυωνύμου  $\delta(s)$  της μορφής (5.1). Για το άρτιο μέρος  $\delta^e(s)$  του  $\delta(s)$  υπολογισμένο στο  $s = j\omega$  ισχύει

$$\delta^e(\omega) = \delta_0 - \delta_2\omega^2 + \delta_4\omega^4 - \delta_6\omega^6 + \dots$$

Τα πρόσημα εναλλάσσονται και στα πολυώνυμα  $K_{max}^{even}(s)$  και  $K_{min}^{even}(s)$  για  $s = j\omega$ . Έχοντας υπόψη ότι  $K_{max}^{even}(\omega) = K_{max}^e(\omega)$  προκύπτει σαν αποτέλεσμα

$$K_{max}^e(\omega) - \delta^e(\omega) = (y_0 - \delta_0) + (\delta_2 - x_2)\omega^2 + (y_4 - \delta_4)\omega^4 + (\delta_6 - x_6)\omega^6 + \dots \geq 0.$$

Αντίστοιχα σε σχέση με το  $K_{min}^e(s)$  έχουμε

$$\delta^e(\omega) - K_{min}^e(\omega) = (\delta_0 - x_0) + (y_2 - \delta_2)\omega^2 + (\delta_4 - x_4)\omega^4 + (y_6 - \delta_6)\omega^6 + \dots \geq 0.$$

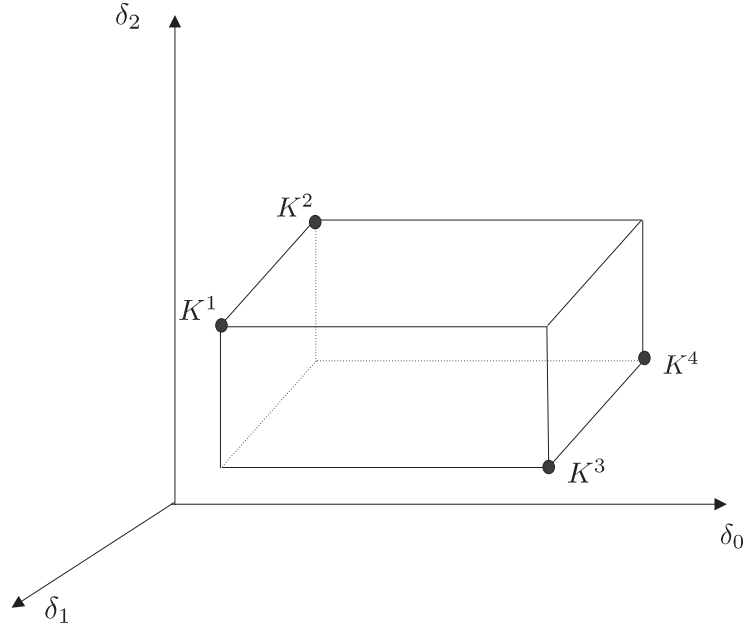
Προκύπτει λοιπόν ότι

$$K_{min}^e(\omega) \leq \delta^e(j\omega) \leq K_{max}^e(\omega), \quad \forall \omega \in [0, \infty). \tag{5.5}$$

Για το περιττό τμήμα  $\delta^{odd}(j\omega) = j\omega\delta^o(\omega)$  μπορεί αντίστοιχα να επαληθευτεί ότι

$$K_{min}^o(\omega) \leq \delta^o(\omega) \leq K_{max}^o(\omega), \quad \forall \omega \in [0, \infty), \tag{5.6}$$

όπου  $K_{min}^o(\omega) = \frac{K_{min}^{odd}(\omega)}{j\omega}$  και  $K_{max}^o(\omega) = \frac{K_{max}^{odd}(\omega)}{j\omega}$ . Η εικόνα  $\mathcal{I}(j\omega)$  της οικογένειας διαστήματος στο μιγαδικό επίπεδο είναι ένα ορθογώνιο με τις δύο πλευρές του παράλληλες προς τον πραγματικό άξονα και συντεταγμένες στον άξονα των φανταστικών  $K_{min}^o(\omega)$  και  $K_{max}^o(\omega)$ , αντίστοιχα, ενώ οι άλλες πλευρές είναι παράλληλες προς τον άξονα των φανταστικών με συντεταγμένες στον άξονα των πραγματικών  $K_{min}^e(\omega)$  και  $K_{max}^e(\omega)$ , αντίστοιχα. Από τις (5.5) και (5.6) είναι φανερό ότι το  $\delta(j\omega)$  βρίσκεται στο μιγαδικό επίπεδο εντός αυτού του ορθογωνίου. Άμεσα επαληθεύεται η αναγκαιότητα της συνθήκης του Θεωρήματος αφού αν όλα τα πολυώνυμα με συντελεστές στο  $\Delta$  είναι ευσταθή τότε είναι και τα πολυώνυμα Kharitonov αφού οι συντελεστές τους περιλαμβάνονται στο  $\Delta$ . Για να αποδείξουμε ότι η ευστάθεια των πολυωνύμων Kharitonov είναι ικανή συνθήκη για την ευστάθεια της οικογένειας διαστήματος θεωρούμε ένα αυθαίρετο πο-



Σχήμα 5.1: Το κουτί  $\Delta$  των συντελεστών και οι κορυφές που αντιστοιχούν στα πολυώνυμα Kharitonov.

λυώνυμο  $\delta(s) = \delta^{even}(s) + \delta^{odd}(s)$  της οικογένειας  $\mathcal{I}(s)$ . Δεδομένου ότι τα  $K^3(s)$  και  $K^4(s)$  είναι ευσταθή από το Λήμμα 5.1 γνωρίζουμε ότι κάθε πολυώνυμο

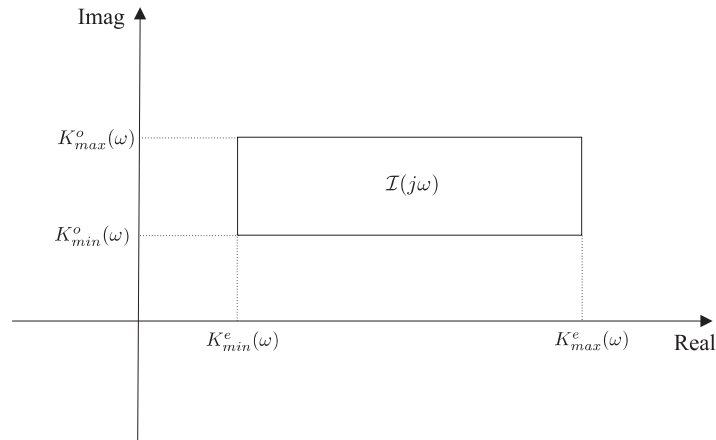
$$P_1(s) = K_{max}^{even}(s) + \delta^{odd}(s)$$

που αποτελείται από το κοινό άρτιο τμήμα  $K_{max}^{even}(s)$  των  $K^3(s)$  και  $K^4(s)$  είναι ευσταθές αν  $K_{min}^o(\omega) \leq \delta^o(\omega) \leq K_{max}^o(\omega)$  για κάθε  $\omega \in [0, \infty)$  πράγμα που ισχύει αφού το  $\delta(s)$  ανήκει στην  $\mathcal{I}(s)$ . Αν το ίδιο Λήμμα εφαρμοσθεί στα  $K^1(s)$  και  $K^2(s)$  που διαθέτουν το κοινό άρτιο τμήμα  $K_{min}^{even}(s)$  προκύπτει με τα ίδια επιχειρήματα ότι και το πολυώνυμο

$$P_2(s) = K_{min}^{even}(s) + \delta^{odd}(s)$$

είναι ευσταθές. Αφού τα  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι ευσταθή και έχουν κοινό περιττό μέρος με εφαρμογή του Λήμματος 5.2 προκύπτει ότι το  $\delta(s) = \delta^{even}(s) + \delta^{odd}(s)$  είναι ευσταθές διότι ισχύει ότι  $K_{min}^e(\omega) \leq \delta^e(\omega) \leq K_{max}^e(\omega)$  για κάθε  $\omega \in [0, \infty)$ .  $\square$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Kharitonov ανεξάρτητα από το βαθμό των πολυωνύμων που καθορίζει τη διάσταση του διανυσματικού πολυωνυμικού χώρου στον οποίο ανήκει μια οικογένεια διαστήματος αρκεί να ελέγξουμε τα πολυώνυμα  $K^1(s)$ ,  $K^2(s)$ ,  $K^3(s)$  και  $K^4(s)$  που συσχετίζονται με τις 4 κορυφές του ορθογωνίου που προκύπτει από την απεικόνιση της οικογένειας στο μιγαδικό επίπεδο για να βεβαιωθούμε για την ευστάθεια της. Στο Σχήμα 5.1 απεικονίζεται το σύνολο των



Σχήμα 5.2: Η εικόνα της οικογένειας στο μιγαδικό επίπεδο.

συντελεστών μιας οικογένειας διαστήματος η οποία εμφανίζει αβεβαιότητα σε 3 μόνο από τους συντελεστές της για λόγους εποπτείας. Στο ορθογώνιο κουτί του συνόλου σημειώνονται οι κορυφές που αντιστοιχούν στα πολυώνυμα Kharitonov της οικογένειας. Στο Σχήμα 5.2 φαίνεται ότι η εικόνα της οικογένειας στο μιγαδικό επίπεδο για δεδομένη συχνότητα  $\omega$  είναι ένα ορθογώνιο με τις πλευρές παράλληλες προς τους άξονες και κορυφές τα πολυώνυμα Kharitonov υπολογισμένα στην ίδια συχνότητα. Η επισήμανση ότι η εικόνα της οικογένειας είναι ένα ορθογώνιο ανήκει στον Dasgupta [16].

Εξετάζοντας τα πραγματικά πολυώνυμα παρατηρήσαμε ότι η ανάλυσή τους σε άρτιο και περιττό μέρος είναι απαραίτητη για τον καθορισμό μέσω του Θεώρηματος Hermite-Biehler της ευστάθειάς τους. Η κατασκευή των πολυωνύμων Kharitonov βασίζεται στην εύρεση ακραίων πολυωνύμων που ορίζουν σωλήνες εντός των οποίων μεταβάλλεται είτε το τμήμα  $P^e(\omega)$  είτε το τμήμα  $P^o(\omega)$  ενός πολυωνύμου  $P(j\omega)$  της υπό εξέταση οικογένειας. Οι συνδυασμοί που δημιουργούνται αν επιλέξουμε τα ακραία πολυώνυμα από κάθε σωλήνα είναι επαρκείς για τον έλεγχο της ευστάθειας όλης της οικογένειας διαστήματος. Η συλλογιστική αυτή αποτυπώνεται στο επόμενο Θεώρημα όπου με  $\omega_{e_i}^{max}(\omega_{e_i}^{min})$  δηλώνουμε τις θετικές ρίζες των  $K_{max}^e(\omega)(K_{min}^e(\omega))$  και με  $\omega_{o_i}^{max}(\omega_{o_i}^{min})$  τις θετικές ρίζες των  $K_{max}^o(\omega)(K_{min}^o(\omega))$ .

**Θεώρημα 5.2.** Η οικογένεια  $\mathcal{I}(s)$  περιλαμβάνει μόνο ευσταθή πολυώνυμα αν και μόνο αν  
 1) τα πολυώνυμα  $K_{max}^e(\omega)$ ,  $K_{min}^e(\omega)$ ,  $K_{max}^o(\omega)$  και  $K_{min}^o(\omega)$  έχουν μόνο πραγματικές ρίζες και το σύνολο των θετικών ριζών αλληλοδιαπλέκονται με τον ακόλουθο τρόπο

$$0 < \omega_{e_1}^{min} < \omega_{e_1}^{max} < \omega_{o_1}^{min} < \omega_{o_1}^{max} < \omega_{e_2}^{min} < \omega_{e_2}^{max} < \omega_{o_2}^{min} < \omega_{o_2}^{max} \quad (5.7)$$

2) τα  $K_{max}^e(0)$ ,  $K_{min}^e(0)$ ,  $K_{max}^o(0)$  και  $K_{min}^o(0)$  είναι μη μηδενικά και έχουν το ίδιο πρόσημο.

Από το Θεώρημα Hermite-Biehler απαιτείται οι μεγιστοβάθμιοι όροι των πολυωνύμων των οποίων οι ρίζες αλληλοδιαπλέκονται να έχουν το ίδιο πρόσημο. Επιπλέον για να είναι τα πολυώ-

νυμα Kharitonov ευσταθή προϋπόθεση είναι όλοι οι συντελεστές να είναι μη μηδενικοί και να έχουν το ίδιο πρόσημο. Συνδυάζοντας τα δύο προηγούμενα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για την ευστάθεια απαιτείται οι σταθεροί όροι των πολυωνύμων Kharitonov που προκύπτουν για  $s = 0$  να είναι μη μηδενικοί και να έχουν το ίδιο πρόσημο όπως αναφέρει η πρόταση 2) του προηγούμενου Θεωρήματος.

## 5.2 Το Θεώρημα Kharitonov για μιγαδικά πολυώνυμα

Ο Kharitonov επέκτεινε το Θεώρημα που ίσχυε αρχικά στα πραγματικά πολυώνυμα και στη μιγαδική περίπτωση [27]. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η διαδικασία από την οποία θα προκύψουν οι έλεγχοι που πρέπει να γίνουν προκειμένου να διαπιστωθεί η ευστάθεια στα μιγαδικά πολυώνυμα.

Θεωρούμε το σύνολο  $\mathcal{I}^*(s)$  των μιγαδικών πολυωνύμων της μορφής

$$\delta(s) = (\alpha_0 + j\beta_0) + (\alpha_1 + j\beta_1)s + \dots + (\alpha_n + j\beta_n)s^n,$$

όπου  $\alpha_0 \in [x_0, y_0], \alpha_1 \in [x_1, y_1], \dots, \alpha_n \in [x_n, y_n]$  και  $\beta_0 \in [u_0, v_0], \beta_1 \in [u_1, v_1], \dots, \beta_n \in [u_n, v_n]$ .

Στην περίπτωση των μιγαδικών πολυωνύμων η πληροφορία για την ευστάθεια προκύπτει από την ανάλυσή τους πάνω στον φανταστικό άξονα σε πραγματικό και φανταστικό μέρος. Το Θεώρημα Hermite-Biehler για μιγαδικά πολυώνυμα συνδέει την ευστάθεια με την αλληλοδιαπλοκή των ριζών του πραγματικού και του φανταστικού τους μέρους. Και ενώ στην περίπτωση των πραγματικών πολυωνύμων τα τμήματα  $P^e(\omega)$  και  $P^o(\omega)$  ενός πολυωνύμου  $P(j\omega)$  της οικογένειας είναι άρτιες συναρτήσεις του  $\omega$  οπότε απαιτείται έλεγχος της συνδιαπλοκής μόνο στις θετικές τιμές του  $\omega$  κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει με τα μιγαδικά πολυώνυμα όπου απαιτείται έλεγχος των τιμών του  $\omega$  και στην αρνητική περιοχή τιμών.

Θα εξετάσουμε στην πορεία πως διαμορφώνονται τα πολυώνυμα Kharitonov στην περίπτωση μιγαδικών πολυωνύμων. Για την περιοχή των θετικών  $\omega$  οι σωλήνες που αφορούν στο πραγματικό μέρος ενός πολυωνύμου καθορίζονται από τα

$$\begin{aligned} R_{max}^+(s) &= y_0 + ju_1s + x_2s^2 + jv_3s^3 + y_4s^4 + \dots \\ R_{min}^+(s) &= x_0 + jv_1s + y_2s^2 + ju_3s^3 + x_4s^4 + \dots \end{aligned}$$

ενώ για το φανταστικό μέρος από τα

$$\begin{aligned} I_{max}^+(s) &= jv_0 + y_1s + ju_2s^2 + x_3s^3 + jv_4s^4 + \dots \\ I_{min}^+(s) &= ju_0 + x_1s + jv_2s^2 + y_3s^3 + ju_4s^4 + \dots \end{aligned}$$

Αντίστοιχα για την αρνητική περιοχή των  $\omega$  τα πολυώνυμα που οριοθετούν τους σωλήνες για το πραγματικό μέρος είναι

$$\begin{aligned} R_{max}^-(s) &= y_0 + jv_1s + x_2s^2 + ju_3s^3 + y_4s^4 + \dots \\ R_{min}^-(s) &= x_0 + ju_1s + y_2s^2 + jv_3s^3 + x_4s^4 + \dots \end{aligned}$$

ενώ για το φανταστικό είναι

$$\begin{aligned} I_{max}^-(s) &= jv_0 + x_1s + ju_2s^2 + y_3s^3 + jv_4s^4 + \dots \\ I_{min}^-(s) &= ju_0 + y_1s + jv_2s^2 + x_3s^3 + ju_4s^4 + \dots \end{aligned}$$

Τα  $R_{max}^\pm(j\omega)$  και  $R_{min}^\pm(j\omega)$  είναι πραγματικά πολυώνυμα ενώ τα  $I_{max}^\pm(j\omega)$  και  $I_{min}^\pm(j\omega)$  είναι φανταστικά. Όσον αφορά ένα μιγαδικό πολυώνυμο  $\delta(s)$  το πραγματικό του μέρος  $\delta^r(s)$  και το φανταστικό του  $\delta^i(s)$  τηρούν τις σχέσεις

$$\begin{cases} R_{min}^+(\omega) \leq \delta^r(\omega) \leq R_{max}^+(\omega), & \forall \omega \in [0, \infty) \\ \frac{I_{min}^+(j\omega)}{j} \leq \delta^i(\omega) \leq \frac{I_{max}^+(j\omega)}{j}, & \forall \omega \in [0, \infty) \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} R_{min}^-(\omega) \leq \delta^r(\omega) \leq R_{max}^-(\omega), & \forall \omega \in (-\infty, 0] \\ \frac{I_{min}^-(j\omega)}{j} \leq \delta^i(\omega) \leq \frac{I_{max}^-(j\omega)}{j}, & \forall \omega \in (-\infty, 0] \end{cases} \quad (5.9)$$

Λόγω των (5.8) και (5.9) απαιτείται για τον έλεγχο της ευστάθειας μιας μιγαδικής οικογένειας διαστήματος να κατασκευαστούν 4 πολυώνυμα Kharitonov για τις θετικές τιμές του  $\omega$

$$\begin{aligned} K_1^+(s) &= R_{min}^+(s) + I_{min}^+(s) \\ K_2^+(s) &= R_{min}^+(s) + I_{max}^+(s) \\ K_3^+(s) &= R_{max}^+(s) + I_{min}^+(s) \\ K_4^+(s) &= R_{max}^+(s) + I_{max}^+(s) \end{aligned} \quad (5.10)$$

και 4 πολυώνυμα Kharitonov για τις αρνητικές τιμές του  $\omega$

$$\begin{aligned} K_1^-(s) &= R_{min}^-(s) + I_{min}^-(s) \\ K_2^-(s) &= R_{min}^-(s) + I_{max}^-(s) \\ K_3^-(s) &= R_{max}^-(s) + I_{min}^-(s) \\ K_4^-(s) &= R_{max}^-(s) + I_{max}^-(s). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Σε σχέση λοιπόν με τα πραγματικά πολυώνυμα στην περίπτωση των μιγαδικών απαιτείται έλεγχος διπλάσιου αριθμού πολυωνύμων. Η απόδειξη ότι η ευστάθεια των πολυωνύμων Kharitonov των (5.10) και (5.11) αποτελεί ικανή συνθήκη για να είναι η οικογένεια διαστήματος ευσταθής στηρίζεται στο Θεώρημα Hermite-Biehler για μιγαδικά πολυώνυμα.



## 5.3 Απεικόνιση της οικογένειας διαστήματος στο μιγαδικό επίπεδο

Η απεικόνιση της οικογένειας διαστήματος στο μιγαδικό επίπεδο μας παρέχει εναλλακτικούς τρόπους για να αποδείξουμε ότι η ευστάθεια των πολυωνύμων Kharitonov αποτελεί ικανή συνθήκη για την ευστάθεια ολόκληρης της οικογένειας διαστήματος. Επιπλέον μπορεί να μας οδηγήσει σε οικογένειες που περιγράφονται από μικρότερο αριθμό παραμέτρων, διαθέτουν όμως ίδιες εικόνες συνόλου.

### 5.3.1 Απόδειξη του Θεωρήματος Kharitonov με βάση τη μιγαδική εικόνα συνόλου

Η απόδειξη του Θεωρήματος Kharitonov που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια και η οποία στηρίζεται στη μιγαδική εικόνα συνόλου δόθηκε στην εργασία [30].

Έστω  $\mathcal{I}(j\omega)$  η εικόνα που προκύπτει στο μιγαδικό επίπεδο αν προσδιορίσουμε την  $\mathcal{I}(s)$  κατά μήκος του φανταστικού άξονα αφήνοντας το  $\underline{d}$  να διατρέξει όλες τις τιμές εντός του κουτιού  $\Delta$ . Η εικόνα αυτή για δεδομένες τιμές των παραμέτρων είναι όπως έχουμε δει προηγουμένως ένα ορθογώνιο με τις 2 πλευρές του παράλληλες προς τον πραγματικό και τις άλλες δύο παράλληλες προς το φανταστικό άξονα που στις κορυφές του βρίσκονται τα πολυώνυμα Kharitonov. Καθώς μεταβάλλονται οι τιμές των παραμέτρων το σχήμα παραμένει ορθογώνιο με τις πλευρές του παράλληλες στους άξονες. Αν τα πολυώνυμα Kharitonov είναι ευσταθή τότε οι απεικονίσεις τους στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται ανθρωπολογικά για κάποιο αριθμό τεραρτημορίων χωρίς να επιστρέφουν στην αρχή των αξόνων πριν διαφύγουν στο άπειρο. Κάνουμε τώρα την υπόθεση ότι τα πολυώνυμα Kharitonov είναι ευσταθή. Για να είναι η οικογένεια  $\mathcal{I}(j\omega)$  ευσταθής σύμφωνα με το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου δεν πρέπει κανένα πολυώνυμό της να έχει ρίζα στο φανταστικό άξονα. Αυτό μπορεί να εξασφαλισθεί αν το ορθογώνιο της εικόνας αποκλείει την αρχή των αξόνων για κάθε  $s^* = j\omega^*$  που ανήκει στον φανταστικό άξονα. Είναι προφανές ότι  $\omega^* = 0$  δεν μπορεί να είναι ρίζα κάποιου πολυωνύμου της οικογένειας διότι οι σταθεροί όροι των άρτιων πολυωνύμων Kharitonov  $K_{max}^{even}(0)$  και  $K_{min}^{even}(0)$  θα είχαν διαφορετικό πρόσημο γεγονός που αντιβαίνει στην πρόταση 2) του Θεωρήματος 5.2. Επομένως θα εξετάσουμε την περίπτωση ριζών  $\omega^* > 0$ . Ας υποθέσουμε ότι  $0 \in \mathcal{I}(j\omega^*)$ . Από τη στιγμή που το  $\mathcal{I}(0)$  δεν περιλαμβάνει την αρχή των αξόνων πάντοτε μπορούμε να βρούμε  $\omega_0 \leq \omega^*$  τέτοιο ώστε η αρχή των αξόνων να βρίσκεται στο σύνορο του συνόλου  $\mathcal{I}(j\omega_0)$  και με αυξανόμενες τιμές του  $\omega$  να εισέρχεται στο εσωτερικό του ορθογώνιου της εικόνας. Άρα το ορθογώνιο μπορεί να βρεθεί σε 4 θέσεις σε καθεμία από τις οποίες η αρχή των αξόνων βρίσκεται πάνω σε μία του πλευρά. Οποιαδήποτε μετακίνηση του ορθογώνιου με στόχο η αρχή των αξόνων να βρεθεί σε κάποιο εσωτερικό του σημείο θα έχει σαν αποτέλεσμα ένα από τα αντίστοιχα πολυώνυμα Kharitonov των κορυφών της πλευράς που πρόκειται να έρθει

σε επαφή είτε με τον άξονα των φανταστικών είτε με των πραγματικών να κινηθεί προς την κατεύθυνση μείωσης της φάσης του με αυξανόμενο  $\omega^*$ . Αυτό αντιβαίνει στην αρχική μας υπόθεση ότι τα πολυώνυμα Kharitonov είναι πολυώνυμα Hurwitz.

### 5.3.2 Απόδειξη του Θεωρήματος Kharitonov μέσω των εκτεθειμένων ακμών ενός πολυτόπου

Ο χώρος των συντελεστών  $\Delta$  μιας οικογένειας διαστήματος αποτελεί ένα πολύτοπο. Σύμφωνα με όσα συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 4 η ευστάθεια μιας πολυτοπικής οικογένειας μπορεί να διερευνηθεί μέσω της εικόνας της στο μιγαδικό επίπεδο που είναι ένα πολύγωνο αν αφήσουμε το  $s$  να διατρέξει όλες τις τιμές πάνω στο σύνορο της περιοχής ευστάθειας. Για την εξακρίβωση της ευστάθειας της αρκεί να ελεγχθούν οι εκτεθειμένες ακμές του πολυγώνου. Το ίδιο μπορεί να εφαρμοσθεί και στην περίπτωση της οικογένειας διαστήματος η οποία παράγει μια εικόνα συνόλου στο μιγαδικό επίπεδο που είναι ορθογώνιο. Η ευστάθεια της οικογένειας είναι ισοδύναμη με την ευστάθεια των 4 ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζουν την περιοχή του ορθογωνίου και έχουν άκρα τους τα πολυώνυμα Kharitonov. Τα 4 ευθύγραμμα τμήματα είναι τα  $[K^1(s), K^2(s)]$ ,  $[K^1(s), K^3(s)]$ ,  $[K^2(s), K^4(s)]$  και  $[K^3(s), K^4(s)]$ . Για να εξετάσουμε την ευστάθεια των ευθυγράμμων τμημάτων θα πρέπει τα σχηματίσουμε τα πολυώνυμα της διαφοράς των άκρων. Κάθε ζευγάρι πολυωνύμων Kharitonov που βρίσκεται στα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος αποτελείται από ένα κοινό άρτιο ή περιττό τμήμα το οποίο αν σχηματίσουμε τη διαφορά θα απαλειφθεί και έτσι στη διαφορά θα παραμείνει μόνο το περιττό ή το άρτιο τμήμα, αντίστοιχα. Μια ειδική περίπτωση του Λήμματος Κορυφής είναι αυτή που περιγράφεται από την (2.16) στην οποία αν θέσουμε  $t = 0$ ,  $a = 0$  και  $b = 1$  προκύπτει ότι το πολυώνυμο διαφοράς ταυτίζεται με ένα άρτιο είτε με ένα περιττό πολυώνυμο όπως ισχύει με τις διαφορές των πολυωνύμων Kharitonov που καθορίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα. Αφού λοιπόν ισχύει το Λήμμα Κορυφής η ευστάθεια της οικογένειας διαστήματος έπεται από την ευστάθεια των πολυωνύμων στις κορυφές του ορθογωνίου. Επομένως καταλήξαμε ξανά στο Θεώρημα Kharitonov.

### 5.3.3 Αναπαράσταση των πολυωνύμων διαστήματος με 2 παραμέτρους

Είναι εφικτό να ορίσουμε μία άλλη οικογένεια πολυωνύμων  $\mathcal{I}_R(s)$  η οποία είναι υποσύνολο της  $\mathcal{I}(s)$  αλλά έχει την ιδιότητα να παράγει την ίδια μιγαδική εικόνα συνόλου  $\mathcal{I}(j\omega)$  για κάθε  $\omega$ . Έστω  $\beta_0$  το κεντρικό πολυώνυμο της οικογένειας  $\mathcal{I}(s)$

$$\beta_0(s) = \frac{x_0 + y_0}{2} + \frac{x_1 + y_1}{2}s + \dots + \frac{x_n + y_n}{2}s^n.$$

Σχηματίζουμε στη συνέχεια το άρτιο πολυώνυμο  $\beta_e(s)$  της διαφοράς των άρτιων πολυωνύμων Kharitonov και το περιττό πολυώνυμο  $\beta_o(s)$  της διαφοράς των περιττών πολυωνύμων Kharitonov

$$\begin{aligned}\beta_e(s) &= K_{max}^{even}(s) - K_{min}^{even}(s) \\ \beta_o(s) &= K_{max}^{odd}(s) - K_{min}^{odd}(s).\end{aligned}$$

Κατόπιν ορίζουμε την οικογένεια  $\mathcal{I}_R(s)$

$$\mathcal{I}_R(s) = \{\beta(s) = \beta_0(s) + \lambda_1\beta_e(s) + \lambda_2\beta_o(s) : |\lambda_i| \leq 1, i = 1, 2\}. \quad (5.12)$$

η οποία παράγει την ίδια εικόνα με την  $\mathcal{I}(s)$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι κάθε κριτήριο ευστάθειας που αφορά στην εικόνα μιας οικογένειας διαστήματος με  $n+1$  παραμέτρους μπορεί να εφαρμοστεί σε μια διπαραμετρική οικογένεια της μορφής (5.12).

## 5.4 Οι ιδιότητες ακροτάτου των πολυωνύμων Kharitonov

Θεωρούμε μία οικογένεια διαστήματος που είναι ευσταθής με βαθμό πολυωνύμων  $n$ . Είναι δυνατόν να συνδέσουμε με κάθε πολυώνυμο της οικογένειας τη μέγιστη δυνατή σφαίρα που μπορούμε να έχουμε γύρω από αυτό εντός της οποίας όλα τα πολυώνυμα παραμένουν ευσταθή και ο βαθμός τους διατηρείται  $n$ . Έτσι λοιπόν ορίζεται για κάθε πολυώνυμο  $\delta(s)$  το μέγιστο περιθώριο ευστάθειας  $\rho(\delta)$  που είναι η απόσταση σε κάποιο νόρμα που έχει το διάνυσμα  $\underline{\delta}$  των συντελεστών του από το σύνολο  $\mathcal{U}$  των πολυωνύμων που είναι ασταθή ή έχουν βαθμό μικρότερο του  $n$

$$\rho(\delta) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \|\underline{\delta} - \mathbf{u}\|_p. \quad (5.13)$$

Αυτό που θα μας απασχολήσει είναι αν η συνάρτηση αυτή έχει ελάχιστο και για ποιο σημείο του υπερθωγώνιου  $\Delta$  των συντελεστών των πολυωνύμων συμβαίνει. Την απάντηση δίνει το Θεώρημα [8] που ακολουθεί.

**Θεώρημα 5.3.** (Ιδιότητα ακροτάτου των πολυωνύμων Kharitonov)

*Η συνάρτηση  $\rho(\delta)$  του μέγιστου περιθωρίου ευστάθειας για το κάθε πολυώνυμο  $\delta(s)$  έχει ελάχιστο και το αποκτά σε ένα από τα 4 πολυώνυμα Kharitonov  $K^1(s)$ ,  $K^2(s)$ ,  $K^3(s)$ ,  $K^4(s)$  που σχετίζονται με το κουτί  $\Delta$ .*

*Απόδειξη.* Αρχικά θεωρούμε τις ακτίνες των μέγιστων σφαιρών ευστάθειας που σχετίζονται με τα 4 πολυώνυμα Kharitonov. Δεχόμαστε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η ακτίνα  $\rho_1$  που αντιστοιχεί στο πρώτο πολυώνυμο Kharitonov είναι η μικρότερη των 4 ακτίνων. Στη συνέχεια κάνουμε την υπόθεση ότι το περιθώριο ευστάθειας  $\rho$  που συσχετίζεται με κάποιο πολυώνυμο  $\gamma(s)$  της οικογένειας με διάνυσμα συντελεστών  $\gamma = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n]$  είναι μικρότερο από αυτό που αντιστοιχεί

στο πρώτο πολυώνυμο Kharitonov

$$\rho_\gamma \equiv \rho(\gamma) < \rho_1.$$

Το γεγονός ότι γύρω από το πολυώνυμο  $\gamma(s)$  υπάρχει ένα περιθώριο ευστάθειας  $\rho_\gamma$  σημαίνει ότι υπάρχει πολυώνυμο  $\beta(s)$  πάνω στην υπερσφαίρα  $\mathcal{S}(\gamma(s), \rho_\gamma)$  που είναι ασταθές ή με βαθμό μικρότερο του  $n$ . Αυτό σημαίνει ότι με βάση τη σχέση (5.13) υπάρχει διάνυσμα  $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$  με  $\|\alpha\| = 1$  τέτοιο ώστε το  $\beta(s)$  να μπορεί να γραφεί σαν

$$\beta(s) = \gamma_0 + \alpha_0 \rho_\gamma + (\gamma_1 + \alpha_1 \rho_\gamma)s + \dots + (\gamma_n + \alpha_n \rho_\gamma)s^n.$$

Αφού  $\rho_\gamma < \rho_1$  με το  $\rho_1$  να είναι η μικρότερη από τις ακτίνες των σφαιρών ευστάθειας γύρω από τα πολυώνυμα Kharitonov μπορούμε να ορίσουμε 4 νέα πολυώνυμα  $\bar{K}^1(s), \bar{K}^2(s), \bar{K}^3(s), \bar{K}^4(s)$  που είναι ευσταθή

$$\begin{aligned} \bar{K}_1(s) &= (x_0 - |\alpha_0| \rho_\gamma) + (x_1 - |\alpha_1| \rho_\gamma)s + (y_2 + |\alpha_2| \rho_\gamma)s^2 + (y_3 + |\alpha_3| \rho_\gamma)s^3 + \dots \\ \bar{K}_2(s) &= (x_0 - |\alpha_0| \rho_\gamma) + (y_1 + |\alpha_1| \rho_\gamma)s + (y_2 + |\alpha_2| \rho_\gamma)s^2 + (x_3 - |\alpha_3| \rho_\gamma)s^3 + \dots \\ \bar{K}_3(s) &= (y_0 + |\alpha_0| \rho_\gamma) + (x_1 - |\alpha_1| \rho_\gamma)s + (x_2 - |\alpha_2| \rho_\gamma)s^2 + (y_3 + |\alpha_3| \rho_\gamma)s^3 + \dots \\ \bar{K}_4(s) &= (y_0 + |\alpha_0| \rho_\gamma) + (y_1 + |\alpha_1| \rho_\gamma)s + (x_2 - |\alpha_2| \rho_\gamma)s^2 + (x_3 - |\alpha_3| \rho_\gamma)s^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.14)$$

Η ευστάθεια των παραπάνω πολυωνύμων εύκολα επαληθεύεται επειδή ισχύει η σχέση

$$\|\bar{K}_i(s) - K_i(s)\| = \rho_\gamma < \rho_1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Εφαρμόζουμε στη συνέχεια το Θεώρημα Kharitonov χρησιμοποιώντας ως πολυώνυμο Kharitonov τα πολυώνυμα της σχέσης. Γνωρίζουμε ότι τα πολυώνυμα με συντελεστές που ανήκουν στο κουτί

$$\Delta = [x_0 - |\alpha_0| \rho_\gamma, y_0 + |\alpha_0| \rho_\gamma] \times \dots \times [x_n - |\alpha_n| \rho_\gamma, y_n + |\alpha_n| \rho_\gamma] \quad (5.15)$$

που καθορίζεται από τα πολυώνυμα Kharitonov είναι ευσταθή και βαθμού  $n$ . Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το  $\beta(s)$  περιλαμβάνεται στο σύνολο  $\Delta$ . Αυτό σημαίνει ότι το  $\beta(s)$  είναι ευσταθές γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την αρχική μας υπόθεση για το  $\beta(s)$ . Επομένως από όλα τα πολυώνυμα της οικογένειας διαστήματος τα πολυώνυμα Kharitonov είναι πιο κοντά στην αστάθεια.  $\square$

Αφού τα πολυώνυμα Kharitonov είναι πιο κοντά στην αστάθεια είναι εφικτό να ορίσουμε μία νέα οικογένεια πολυωνύμων αντικαθιστώντας στο κουτί των συντελεστών της (5.15) το  $\rho_\gamma$  με τη μικρότερη από τις ακτίνες των σφαιρών ευστάθειας  $\rho_i, i = 1, 2, 3, 4$  γύρω από τα πολυώνυμα Kharitonov. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εγγυηθούμε την ευστάθεια σε μια επαυξημένη

περιοχή αβεβαιότητας των συντελεστών των πολυωνύμων.

## 5.5 Ακρότατα του περιθωρίου κέρδους για τα συστήματα διαστήματος

Οι ιδιότητες των ακροτάτων που είδαμε να χαρακτηρίζουν τα πολυώνυμα Kharitonov αποδεικνύονται χρήσιμες για τον έλεγχο της ευστάθειας στα συστήματα κλειστού βρόχου και μπορούν να αξιοποιηθούν για τον καθορισμό του περιθωρίου κέρδους.

Έστω λοιπόν  $G(s)$  η συνάρτηση μεταφοράς ενός ανοιχτού συστήματος που ορίζεται σαν το πηλίκο των πολυωνύμων  $n(s)$  και  $d(s)$ . Κάνουμε επιπλέον την υπόθεση ότι η  $G(s)$  είναι μια κανονική ρητή συνάρτηση πολυωνύμων. Καθένα από τα  $n(s)$  και  $d(s)$  μπορεί να μεταβάλλεται ανεξάρτητα και να παίρνει τιμές από τις αντίστοιχες οικογένειες διαστήματος  $\mathcal{N}(s)$  και  $\mathcal{D}(s)$ . Μία τέτοια οικογένεια συστημάτων καλείται σύστημα διαστήματος. Για να είναι το σύστημα κλειστού βρόχου ευσταθές θα πρέπει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο βαθμού  $n$

$$\Pi(s) = d(s) + n(s)$$

να είναι ευσταθές κατά Hurwitz. Ορίζουμε στη συνέχεια την οικογένεια

$$\mathbf{\Pi}(s) = \{\Pi(s) = n(s) + d(s) : n(s) \in \mathcal{N}(s), d(s) \in \mathcal{D}(s)\}$$

των πολυωνύμων του κλειστού συστήματος. Για να υπάρχει εύρωστη ευστάθεια θα πρέπει η  $\mathbf{\Pi}(s)$  να είναι ευσταθής και βαθμού  $n$ . Αν με  $K_{\mathcal{N}}^i(s)$  και  $K_{\mathcal{D}}^i(s)$ , όπου  $i = 1, 2, 3, 4$ , συμβολίσουμε τα πολυώνυμα Kharitonov που συνδέονται με τις οικογένειες διαστήματος  $\mathcal{N}(s)$  και  $\mathcal{D}(s)$  μπορούμε να ορίσουμε το θετικό σύνολο των συστημάτων Kharitonov  $\mathbf{G}_K^+(s)$

$$\mathbf{G}_K^+(s) = \left\{ \frac{K_{\mathcal{N}}^i(s)}{K_{\mathcal{D}}^i(s)}, i = 1, 2, 3, 4 \right\}$$

για το οποίο ισχύει το Θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 5.4.** Ένα σύστημα κλειστού βρόχου που έχει σαν συνάρτηση μεταφοράς του προς έλεγχο συστήματος την  $G(s)$  παρουσιάζει εύρωστη ευστάθεια αν και μόνο αν τα θετικά συστήματα Kharitonov του συνόλου  $\mathbf{G}_K^+(s)$  είναι ευσταθή.

Το περιθώριο κέρδους είναι η μεγαλύτερη τιμή  $k^*$  για  $k \geq 1$  για την οποία διατηρείται η ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου για όλες τις τιμές  $k \in [1, k^*)$  αν η  $G(s)$  αντικατασταθεί από την  $kG(s)$ . Για το περιθώριο κέρδους της οικογένειας  $\mathbf{G}(s)$  των κανονικών ρητών πολυωνύμων  $G(s)$  ισχύει το επόμενο Θεώρημα.

**Θεώρημα 5.5.** Η χειρότερη περίπτωση περιθωρίου κέρδους ενός συστήματος που περιγράφεται από συναρτήσεις μεταφοράς της οικογένειας  $G(s)$  είναι το ελάχιστο περιθώριο κέρδους που αντιστοιχεί στα θετικά συστήματα Kharitonov  $G_K^+(s)$ .

## 5.6 Εύρωστη σταθεροποίηση με ανάδραση κατάστασης

Η ανάδραση κατάστασης είναι μία τεχνική που χρησιμοποιείται στα συστήματα ανάδρασης με μια είσοδο για την επανατοποθέτηση των πόλων κλειστού βρόχου σε δεδομένες θέσεις στο μιγαδικό επίπεδο. Όπως δηλώνεται και από το όνομα της τεχνικής το σήμα εισόδου  $u(t)$  που ελέγχει το σύστημα είναι της μορφής

$$u(t) = -Kx(t) + r(t),$$

όπου  $K = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}]$  είναι το διάνυσμα ανάδρασης κατάστασης ενώ  $r(t)$  είναι το σήμα αναφοράς για την έξοδο. Οι εξισώσεις κατάστασης για το σύστημα ανοιχτού βρόχου είναι

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \\ y &= Cx + Du, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Εδώ κάνουμε την υπόθεση ότι οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι εκφρασμένοι στην κανονική μορφή ελεγχιμότητας με αποτέλεσμα να γράφονται σαν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

όπου τα  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  είναι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού monic πολυωνύμου  $\delta(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$ . Αν προσθέσουμε ανάδραση κατάστασης στο σύστημα τότε η εξίσωση κατάστασης κλειστού βρόχου γίνεται

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bu.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο παίρνει τότε τη μορφή

$$\delta(s) = (a_0 + k_0) + (a_1 + k_1)s + \dots + (a_{n-1} + k_{n-1})s^{n-1} + s^n. \quad (5.16)$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Kharitonov για να εξασφαλίσουμε την εύρωστη ευστάθεια της οικογένειας χαρακτηριστικών πολυωνύμων ενός συστήματος στο οποίο έχουμε επιβάλλει ανάδραση κατάστασης. Έστω ότι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ανοι-

χτού βρόχου μεταβάλλονται σε διαστήματα αβεβαιότητας  $\Delta a_0, \Delta a_1, \dots, \Delta a_{n-1}$

$$\delta_0 \in \left[ a_0^0 - \frac{\Delta a_0}{2}, a_0^0 + \frac{\Delta a_0}{2} \right], \dots, \delta_{n-1} \in \left[ a_{n-1}^0 - \frac{\Delta a_{n-1}}{2}, a_{n-1}^0 + \frac{\Delta a_{n-1}}{2} \right],$$

όπου  $a_0^0, a_1^0, \dots, a_{n-1}^0$  είναι οι ονομαστικές τιμές των συντελεστών. Αν τα διαστήματα αβεβαιότητας παραμείνουν ως έχουν μας ενδιαφέρει να βρούμε ένα διάνυσμα  $K$  τέτοιο ώστε η νέα οικογένεια διαστήματος  $\mathcal{I}_K(s)$  με πολυώνυμα της μορφής (5.16) να είναι ευσταθής κατά Hurwitz. Στην εύρεση του διανύσματος  $K$  βασικό ρόλο παίζει το επόμενο Λήμμα.

**Λήμμα 5.3.** Έστω  $P(s)$  ένα ευσταθές πολυώνυμο βαθμού  $n - 1$

$$P(s) = p_0 + p_1 s + \dots + p_{n-1} s^{n-1}, \quad p_i > 0.$$

Υπάρχει  $\alpha > 0$  τέτοιο ώστε

$$Q(s) = P(s) + p_n s^n = p_0 + p_1 s + \dots + p_{n-1} s^{n-1} + p_n s^n$$

να είναι ευσταθές αν και μόνο αν  $p_n \in [0, \alpha)$ .

Θεωρούμε στη συνέχεια ότι μας δίνεται ένα ονομαστικό πολυώνυμο  $Q(s)$  βαθμού  $n$  καθώς και το εύρος των διαταραχών που μπορεί να υποστεί ο κάθε συντελεστής του. Στόχος μας είναι να επανατοποθετήσουμε τους πόλους σε συγκεκριμένες τιμές έτσι ώστε το νέο ονομαστικό πολυώνυμο να είναι ευσταθές και παράλληλα να διατηρήσει την ευστάθεια του σε ένα εύρος τιμών των διαταραχών ίδιο με το αρχικό. Το πρώτο βήμα είναι να πάρουμε ένα ευσταθές πολυώνυμο  $R(s)$  βαθμού  $n - 1$ . Έστω  $\rho(R)$  η ακτίνα της μεγαλύτερης υπερσφαίρας ευστάθειας γύρω από το  $R(s)$ . Υπολογίζουμε από το εύρος των διαταραχών που μας δίνονται την ακτίνα  $\rho(Q)$  που θέλουμε να έχει η σφαίρα ευστάθειας

$$\rho(Q) = \sqrt{\frac{\Delta a_0^2}{4} + \frac{\Delta a_1^2}{4} + \dots + \frac{\Delta a_{n-1}^2}{4}}.$$

Είναι δυνατόν να βρούμε ένα θετικό αριθμό  $\lambda$  τέτοιο ώστε η ακτίνα της σφαίρας ευστάθειας ενός πολυωνύμου  $P(s) = \lambda R(s)$  να είναι μεγαλύτερη από την  $\rho(Q)$  αφού ισχύει ότι  $\rho(\lambda R) = \lambda \rho(R)$ . Θεώρουμε στη συνέχεια τα πολυώνυμα Kharitonov  $P_j$  που συσχετίζονται με το ευσταθές πολυώνυμο  $P(s) = p_0^0 + p_1^0 s + \dots + p_{n-1}^0 s^{n-1}$  του οποίου οι συντελεστές μεταβάλλονται στα ίδια διαστήματα με τους συντελεστές του  $Q(s)$ . Τα  $P_j$  σχηματίζονται από τις ακραίες τιμές του κουτιού

$$\left[ p_0^0 - \frac{\Delta a_0}{2}, p_0^0 + \frac{\Delta a_0}{2} \right] \times \left[ p_1^0 - \frac{\Delta a_1}{2}, p_1^0 + \frac{\Delta a_1}{2} \right] \times \dots \times \left[ p_{n-1}^0 - \frac{\Delta a_{n-1}}{2}, p_{n-1}^0 + \frac{\Delta a_{n-1}}{2} \right].$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 5.3 υπάρχουν θετικοί αριθμοί  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  τέτοιοι ώστε κάθε  $P_j(s) +$

$p_n s^n$  να είναι ευσταθές για  $0 \leq p_n < \alpha_j$  με  $j = 1, 2, 3, 4$ . Μπορούμε να επιλέξουμε ένα μόνο θετικό αριθμό  $\alpha$  τέτοιο ώστε όλα τα πολυώνυμα

$$P_j(s) + \alpha s^n \quad (5.17)$$

να είναι ευσταθή. Αν τα  $\alpha_j \geq 1$  επιλέγουμε  $\alpha = 1$  διαφορετικά πολλαπλασιάζουμε το πολυώνυμο της (5.17) με την ποσότητα  $\frac{1}{\alpha}$  που είναι μεγαλύτερη της μονάδας και σχηματίζουμε τα πολυώνυμα

$$K_j(s) = \frac{1}{\alpha} P_j(s) + s^n.$$

Τα  $K_j(s)$  είναι ευσταθή λόγω της (5.17). Θεωρούμε ότι τα  $K_j$  είναι τα πολυώνυμα Kharitonov που σχετίζονται με την οικογένεια των χαρακτηριστικών πολυωνύμων

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_{n-1} s^{n-1} + s^n,$$

της (5.16) που έχουν προκύψει από την ανάδραση κατάστασης. Οι συντελεστές ανήκουν στα διαστήματα

$$\begin{aligned} \delta_0 &\in \left[ \frac{1}{\alpha} p_0 - \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta a_0}{2}, \frac{1}{\alpha} p_0 + \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta a_0}{2} \right], \dots, \\ \delta_{n-1} &\in \left[ \frac{1}{\alpha} p_{n-1} - \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta a_{n-1}}{2}, \frac{1}{\alpha} p_{n-1} + \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta a_{n-1}}{2} \right]. \end{aligned}$$

Λόγω της ευστάθειας των  $K_j$  που είναι πολυώνυμα Kharitonov το Θεώρημα Kharitonov επιβάλλει την ευστάθεια όλης της οικογένειας πολυωνύμων  $\delta(s)$ . Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε οι συνιστώσες του  $K$  να υπολογιστούν από τις σχέσεις

$$k_i + a_i^0 = \frac{1}{\alpha} p_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Το περιθώριο ευστάθειας  $\rho(Q)$  προσδιορίζεται τελικά από τη σχέση

$$\rho(Q) = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} \frac{\Delta a_0^2}{4} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\Delta a_1^2}{4} + \dots + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\Delta a_{n-1}^2}{4}}.$$

Επειδή όμως  $\frac{1}{\alpha} > 1$  το  $\rho(Q)$  είναι μεγαλύτερο από τις αρχικές προδιαγραφές κατά τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα  $\frac{1}{\alpha}$ .



## 5.7 Ευστάθεια κατά Schur των πολυωνύμων διαστήματος

Το Θεώρημα Kharitonov ισχύει στην περίπτωση που θέλουμε να ελέγξουμε την ευστάθεια κατά Hurwitz αλλά δεν μπορεί να εφαρμοσθεί γενικά σε αυθαίρετες περιοχές. Για να είναι ευσταθή κατά Schur τα πολυώνυμα μιας οικογένειας διαστήματος  $\delta(z)$  θα πρέπει όλες οι ρίζες τους να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Για να ισχύει το Θεώρημα Kharitonov θα πρέπει η ευστάθεια των 4 πολυωνύμων Kharitonov κατά αντιστοιχία με την περίπτωση Hurwitz να συνεπάγεται την ευστάθεια της οικογένειας. Υπάρχουν περιπτώσεις όμως που αυτό δε συμβαίνει. Ακόμα και αν διευρύνουμε τον έλεγχο της ευστάθειας σε όλα τα πολυώνυμα κορυφών της οικογένειας αυτό δεν είναι αρκετό για να εξασφαλίσει την ευστάθεια κατά Schur ολόκληρης της οικογένειας. Όπως είδαμε στην περίπτωση Hurwitz η αλληλοδιαπλοκή των ριζών που συσχετίζονται με το άρτιο και το περιττό τμήμα των πολυωνύμων Kharitonov κατά τον τρόπο που ορίζει η (5.7) εξασφαλίζει την αλληλοδιαπλοκή κατά μήκος του φανταστικού άξονα των ριζών που συσχετίζονται με τα άρτια και περιττά τμήματα όλων των πολυωνύμων της οικογένειας. Αυτό αποτελεί σύμφωνα με το Θεώρημα Hermite-Biehler απαραίτητη προϋπόθεση για την ευστάθεια της οικογένειας. Η ευστάθεια κατά Schur είναι ισοδύναμη με την αλληλοδιαπλοκή των ριζών του συμμετρικού και του αντισυμμετρικού τμήματος ενός πολυωνύμου κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου. Παρ' ολ' αυτά η αλληλοδιαπλοκή των ριζών του συμμετρικού και αντισυμμετρικού τμήματος κάθε πολυωνύμου Kharitonov δεν είναι δυνατόν να εξασφαλίσει την αλληλοδιαπλοκή των ριζών των αντίστοιχων τμημάτων για όλα τα πολυώνυμα της οικογένειας και επομένως δεν μπορεί να εγγυηθεί την ευστάθεια.

Θεωρούμε στη συνέχεια την οικογένεια πολυωνύμων διαστήματος  $\mathcal{I}(z)$  που αποτελείται από πολυώνυμα της μορφής

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

με τους συντελεστές να ανήκουν στο κουτί

$$\mathbf{A} = \{ \underline{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in [a_i^-, a_i^+], i = 0, \dots, n \}.$$

Με  $\mathbf{V}$  και  $\mathbf{E}$  συμβολίζουμε το σύνολο των κορυφών και των ακμών του κουτιού  $\mathbf{A}$ . Οι αντίστοιχες οικογένειες των πολυωνύμων των κορυφών και των ακμών ορίζονται από τις σχέσεις

$$\mathcal{I}_V(z) = \{ P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 : (a_n, \dots, a_0) \in \mathbf{V} \}$$

$$\mathcal{I}_E(z) = \{ P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 : (a_n, \dots, a_0) \in \mathbf{E} \}.$$

Επειδή η οικογένεια διαστήματος ανήκει στις πολυτοπικές οικογένειες είναι φανερό ότι η ευστά-

θεια της οικογένειας μπορεί να καθοριστεί από την ευστάθεια των εκτεθειμένων ακμών του πολυτόπου όπως και διατυπώνεται στο επόμενο Θεώρημα.

**Θεώρημα 5.6.** *Έστω ότι η οικογένεια πολωνύμων  $\mathcal{I}(z)$  έχει σταθερό βαθμό. Τότε η  $\mathcal{I}(z)$  είναι ευσταθής κατά Schur αν και μόνο αν η  $\mathcal{I}_E(z)$  είναι ευσταθής κατά Schur.*

Παρ' ολ' αυτά όταν έχουμε να εξετάσουμε την ευστάθεια κατά Schur ο αριθμός των ακμών που πρέπει να ελεγχθούν μπορεί να μειωθεί. Στην κατεύθυνση αυτή παραθέτουμε το επόμενο Λήμμα το οποίο διαπραγματεύεται το πρόβλημα της ευστάθειας στην περίπτωση που η οικογένεια διαστήματος έχει σταθερούς συντελεστές ανώτερης τάξης.

**Λήμμα 5.4.** *Για βαθμό πολωνύμων  $n > 1$  υποθέτουμε ότι τα πολώνυμα της οικογένειας  $\mathcal{I}(z)$  έχουν σταθερούς συντελεστές ανώτερης τάξης, δηλαδή ότι  $a_i^- = a_i^+$  για  $i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$  αν  $n$  είναι άρτιο και  $i = \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n$  αν  $n$  είναι περιττό. Τότε ολόκληρη η οικογένεια  $\mathcal{I}(z)$  είναι ευσταθής αν και μόνο αν η οικογένεια  $\mathcal{I}_V(z)$  των πολωνύμων των κορυφών είναι ευσταθής.*

*Απόδειξη.* Είναι δυνατόν η ευστάθεια κατά Schur να θεμελιωθεί μέσα από τον έλεγχο της ευστάθειας κατά Hurwitz του πολωνύμου  $F(s)$  που προκύπτει μετά από εφαρμογή στο πολώνυμο  $P(z)$  του μετασχηματισμού  $z = \frac{s+1}{s-1}$

$$F(s) = (s-1)^n P\left(\frac{s+1}{s-1}\right).$$

Στην περίπτωση που  $n$  είναι άρτιο το  $F(s)$  μπορεί να γραφεί αναλυτικά σαν

$$\begin{aligned} F(s) &= a_0(s-1)^n + a_1(s-1)^{n-1}(s+1) + a_2(s-1)^{n-2}(s+1)^2 + \dots \\ &+ a_{\frac{n}{2}}(s-1)^{\frac{n}{2}}(s+1)^{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}(s-1)^{\frac{n}{2}-1}(s+1)^{\frac{n}{2}+1} + \dots + a_n(s+1)^n. \end{aligned}$$

Κάθε όρος που δημιουργείται από έναν όρο του αρχικού πολωνύμου  $P(z)$  βαθμού μικρότερου ή ίσου με το  $\frac{n}{2}$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε ένα πολώνυμο που έχει ρίζες στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο και σε ένα άρτιο πολώνυμο, για παράδειγμα

$$a_i(s-1)^{n-i}(s+1)^i = a_i(s-1)^{n-2i}(s-1)^i(s+1)^i = a_i(s-1)^{n-2i}(s^2-1)^i,$$

όπου  $i = 0, \dots, \frac{n}{2}$ . Εφόσον η οικογένεια  $F(s)$  αποτελεί πολύτοπο τότε για την ευστάθειά της αρκεί η ευστάθεια των απεικονισμένων ακμών του κουτιού  $\mathbf{A}$ . Για να διαπιστώσουμε την ευστάθειά τους θα πρέπει να σχηματίσουμε τα πολώνυμα των διαφορών των ακραίων σημείων τους. Λαμβάνοντας υπόψη ότι μόνο οι συντελεστές των όρων με βαθμό μικρότερο ή ίσο του  $\frac{n}{2}$  μπορούν να μεταβάλλονται ενώ οι άλλοι παραμένουν σταθεροί τα πολώνυμα των διαφορών είναι

$$[a_0^+ - a_0^-](s-1)^n, [a_1^+ - a_1^-](s-1)^{n-1}(s+1), \dots, [a_{\frac{n}{2}}^+ - a_{\frac{n}{2}}^-](s-1)^{\frac{n}{2}}(s+1)^{\frac{n}{2}}.$$

Από το Λήμμα Κορυφής γνωρίζουμε ότι για πολυώνυμο διαφοράς της μορφής  $A(s)s^t(as+b)Q(s)$ , όπου  $A(s)$  ένα antiHurwitz πολυώνυμο,  $Q(s)$  ένα άρτιο ή περιττό πολυώνυμο και  $t$  μη αρνητικός ακέραιος η ευστάθεια του ευθυγράμμου τμήματος μπορεί να επαληθευτεί μέσα από την ευστάθεια των κορυφών του. Στην περίπτωση μας αν θέσουμε  $t = 0$ ,  $a = 0$  και  $b = 1$  τότε όλα τα πολυώνυμα διαφορών για το λόγο που εξηγήσαμε παραπάνω μπορούν να γραφούν στην εν λόγω μορφή. Άρα όταν οι συντελεστές ανώτερης τάξης είναι σταθεροί αρκεί η ευστάθεια των πολυωνύμων κορυφής για να εξασφαλίσει την ευστάθεια ολόκληρης της οικογένειας.  $\square$

Για τη συνέχεια απαραίτητο είναι να ορίσουμε το υποσύνολο  $E^*$  των ακμών της οικογένειας διαστήματος  $\mathcal{I}(z)$  που προκύπτει από τη μεταβολή καθενός από τους συντελεστές των ανώτερων όρων της εντός του εύρους των τιμών που μπορεί να πάρει ενώ όλοι οι υπόλοιποι συντελεστές τίθενται είτε στο άνω όριο τους  $a_i^+$  είτε στο κάτω όριο τους  $a_i^-$ . Οι ακμές που παράγονται κατά αυτόν τον τρόπο καλούνται ανώτερες ακμές και η οικογένεια των πολυωνύμων που περιλαμβάνει τα πολυώνυμα κατά μήκος των ακμών αυτών συμβολίζεται με  $\mathcal{I}_{E^*}(z)$ . Για  $n$  άρτιο οι ανώτερες ακμές ορίζονται σαν αυτές που προκύπτουν από τη διακύμανση των συντελεστών των όρων με βαθμούς  $\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$  ενώ για  $n$  περιττό από τη διακύμανση των συντελεστών των όρων με βαθμούς  $\frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n$ . Από το Λήμμα 5.4 γνωρίζουμε ότι η ευστάθεια της οικογένειας  $\mathcal{I}(z)$  προκύπτει από την ευστάθεια του πολυτόπου στο οποίο έχουμε θέσει τους κατώτερους συντελεστές στις κορυφές και έχουμε αφήσει τους ανώτερους συντελεστές να μεταβάλλονται στα επιτρεπτά τους διαστήματα. Την ευστάθεια των υποπολυτόπων που προκύπτουν αφού σταθεροποιήσουμε τους κατώτερους συντελεστές μπορούμε να τη διερευνήσουμε μέσω της ευστάθειας των εκτεθειμένων ακμών τους και αυτό είναι το αποτέλεσμα που παραθέτουμε στο επόμενο Θεώρημα [32].

**Θεώρημα 5.7.** *Η οικογένεια  $\mathcal{I}(z)$  είναι ευσταθής αν και μόνο αν η οικογένεια των πολυωνύμων των ακμών  $\mathcal{I}_{E^*}(z)$  είναι ευσταθής.*

Το Θεώρημα 5.7 που ισχύει για την περίπτωση Schur δεν είναι στη φύση του ανάλογο με το Θεώρημα Kharitonov αφού δεν εμπλέκει μόνο συγκεκριμένο αριθμό πολυωνύμων που πρέπει να ελεγχθούν αλλά απαιτεί τον έλεγχο ακμών που ο αριθμός τους αυξάνεται με το βαθμό του πολυωνύμου. Παρ' ολ' αυτά συντελεί σε μια σημαντική μείωση του αριθμού των ευθυγράμμων τμημάτων του πολυτόπου που πρέπει να ελεγχθούν για ευστάθεια αφού τον περιορίζει μόνο στις ανώτερες ακμές με τους κατώτερους συντελεστές να τίθενται σε μια από τις κορυφές του. Έτσι λοιπόν ενώ για μια οικογένεια διαστήματος βαθμού  $n$  έχουμε  $(n+1)2^n$  εκτεθειμένες ακμές με το Θεώρημα 5.7 απαιτείται για  $n$  άρτιο ο έλεγχος  $\frac{n}{2}2^n$  ακμών. Για παράδειγμα, με χρήση των τύπων για ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού οι εκτεθειμένες ακμές είναι 12 ενώ οι ανώτερες ακμές είναι 4.

## 5.8 Παραδείγματα

Στα παραδείγματα που θα παρουσιάσουμε θα επαληθεύσουμε την αλληλοδιαπλοκή των ριζών για τα πολυώνυμα Kharitonov μιας οικογένειας διαστήματος. Επιπλέον θα εξετάσουμε τη μεταβολή των εικόνων συνόλου της οικογένειας στο μιγαδικό επίπεδο. Με κατασκευή του γεωμετρικού τόπου Tsyarkin-Polyak θα προσδιορίσουμε την ακτίνα της σφαίρας ευστάθειας στο χώρο των συντελεστών επικεντρώνομενοι αποκλειστικά στα πολυώνυμα Kharitonov. Τέλος θα επανατοποθέτησουμε τους πόλους ενός συστήματος χρησιμοποιώντας ανάδραση κατάστασης με στόχο η οικογένεια διαστήματος να καταστεί ευσταθής για συντελεστές που παίρνουν τιμές από προκαθορισμένο διάστημα τιμών.

**Παράδειγμα 5.1.** Έστω η οικογένεια διαστήματος

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \delta_4 s^4 + \delta_5 s^5 + \delta_6 s^6 + s^7$$

με τους συντελεστές να παίρνουν τιμές στα διαστήματα

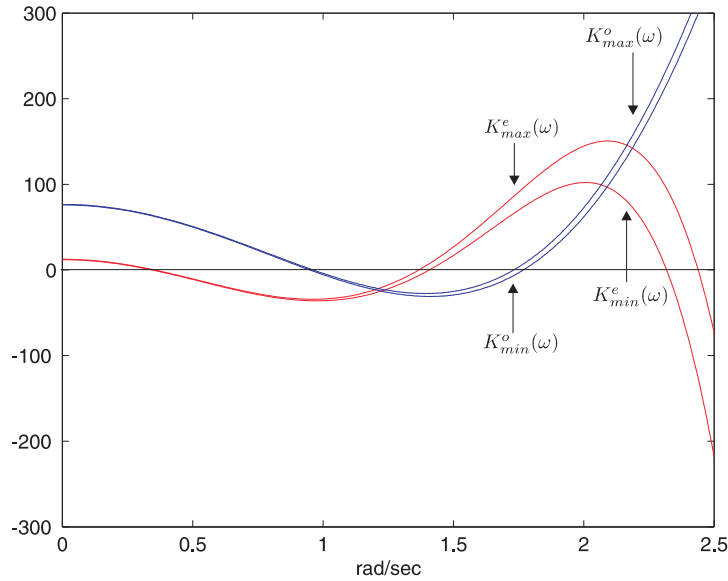
$$\begin{aligned} \delta_0 &\in [12, 12.5], & \delta_1 &\in [76, 76.5], & \delta_2 &\in [109, 109.5], & \delta_3 &\in [111, 111.5], \\ \delta_4 &\in [71, 71.5], & \delta_5 &\in [31, 31.5], & \delta_6 &\in [9, 9.5]. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι τα άρτια και τα περιττά μέρη των πολυωνύμων μιας οικογένειας διαστήματος περιλαμβάνονται μεταξύ των άρτιων  $K_{min}^e(\omega)$  και  $K_{max}^e(\omega)$  και των περιττών μερών  $K_{min}^o(\omega)$  και  $K_{max}^o(\omega)$  τα οποία συνθέτουν τα πολυώνυμα Kharitonov. Αν επιβεβαιωθεί ότι οι ρίζες για τα παραπάνω μέρη των πολυωνύμων Kharitonov αλληλοδιαπλέκονται ενώ επιπλέον οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων είναι του ιδίου προσήμου τότε επιβεβαιώνεται η Ιδιότητα της Συνδιαπλοκής και για τα άρτια και τα περιττά μέρη των πολυωνύμων της οικογένειας. Στο Σχήμα 5.3 απεικονίζονται τα πολυώνυμα

$$\begin{aligned} K_{min}^e(\omega) &= 12 - 109.5\omega^2 + 71\omega^4 - 9.5\omega^6 \\ K_{max}^e(\omega) &= 12.5 - 109\omega^2 + 71.5\omega^4 - 9\omega^6 \\ K_{min}^o(\omega) &= 76 - 111.5\omega^2 + 31\omega^4 - \omega^6 \\ K_{max}^o(\omega) &= 76.5 - 111\omega^2 + 31.5\omega^4 - \omega^6. \end{aligned}$$

Επειδή οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων στα παραπάνω πολυώνυμα έχουν αρνητικό πρόσημο είναι εμφανές από το Σχήμα 5.3 λόγω της αλληλοδιαπλοκής των ριζών ότι η οικογένεια διαστήματος είναι ευσταθής.

**Παράδειγμα 5.2.** Για την οικογένεια διαστήματος που προηγήθηκε θα απεικονίσουμε την εικόνα συνόλου της  $\mathcal{I}(j\omega)$  στο μιγαδικό επίπεδο για τιμές του διανύσματος συντελεστών  $\underline{\delta} =$



Σχήμα 5.3: Η Ιδιότητα της Συνδιαπλοκής για την οικογένεια διαστήματος.

$[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_6]$  που ανήκουν στο ορθογώνιο κουτί  $\Delta = [12, 12.5] \times [76, 76.5] \times [109, 109.5] \times [111, 111.5] \times [71, 71.5] \times [31, 31.5] \times [9, 9.5]$ . Στο Σχήμα 5.4 η  $\mathcal{I}(j\omega)$  απεικονίζεται για δεδομένη συχνότητα σαν ορθογώνιο που στις κορυφές του βρίσκονται τα πολώνυμα Kharitonov. Επειδή η οικογένεια είναι ευσταθής όπως διαπιστώσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα καθώς αυξάνεται η συχνότητα τα ορθογώνια αυτά μεταβάλλονται σε μέγεθος διατηρούν όμως τον προσανατολισμό τους και περιστρέφονται ανθρωπολογικά χωρίς να διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

**Παράδειγμα 5.3.** Θεωρούμε το προς έλεγχο σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{\delta_2 s^2 + \delta_1 s + \delta_0}{s^3(\delta_6 s^3 + \delta_5 s^2 + \delta_4 s + \delta_3)}.$$

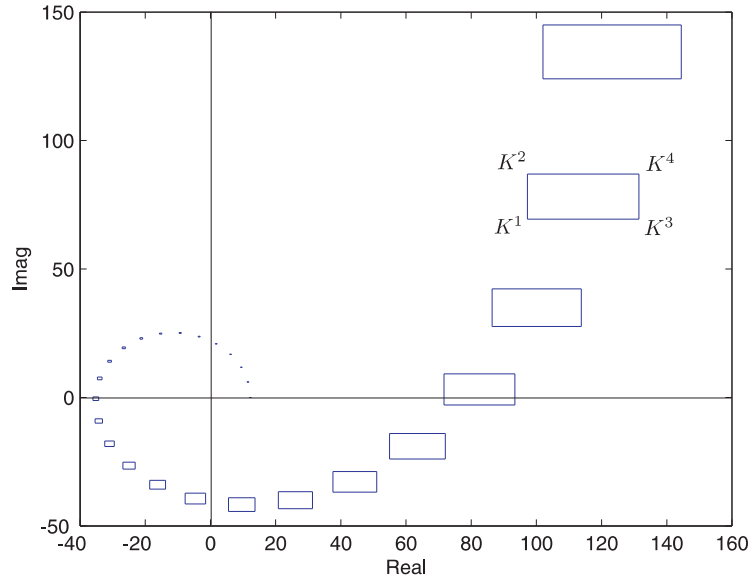
Το χαρακτηριστικό πολώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου είναι

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \delta_4 s^4 + \delta_5 s^5 + \delta_6 s^6$$

με τους συντελεστές να παίρνουν τιμές στα διαστήματα

$$\begin{aligned} \delta_0 &\in [300, 400], \quad \delta_1 \in [600, 700], \quad \delta_2 \in [450, 500], \quad \delta_3 \in [240, 300], \\ \delta_4 &\in [70, 80], \quad \delta_5 \in [12, 14], \quad \delta_6 \in [1, 1]. \end{aligned}$$

Επειδή τα 4 πολώνυμα Kharitonov που συνδέονται με την οικογένεια διαστήματος είναι ευσταθή θα προχωρήσουμε στην εύρεση του μέγιστου περιθωρίου ευστάθειας για την οικογένεια που εξε-



Σχήμα 5.4: Η εικόνα συνόλου της οικογένειας διαστήματος αποτελείται από ορθογώνια με κορυφές τα πολυώνυμα Kharitonov.

τάζουμε. Η συνάρτηση του μέγιστου περιθωρίου ευστάθειας αποκτά ελάχιστο σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3 σε ένα από τα πολυώνυμα Kharitonov. Εφαρμόζουμε τη γραφική τεχνική του γεωμετρικού τύπου Tsyurkin-Polyak για καθένα από τα πολυώνυμα Kharitonov για τον καθορισμό της ακτίνας της  $\ell_2$  σφαίρας ευστάθειας. Τα βάρη στάθμισης που επιλέγονται είναι  $[\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4, \bar{\alpha}_5, \bar{\alpha}_6] = [43, 33, 25, 15, 5, 1.5, 1]$ . Από το Σχήμα 5.5 προκύπτει ότι από τα πολυώνυμα Kharitonov το πολυώνυμο  $K^1(s)$  καθορίζει το μέγιστο περιθώριο ευστάθειας η τιμή του οποίου είναι  $\rho \simeq 1.1$ .

**Παράδειγμα 5.4.** Θεωρούμε το πολυώνυμο 6ου βαθμού

$$\delta(s) = 1 + s + 2s^2 - 3s^3 + 2s^4 - s^5 + s^6$$

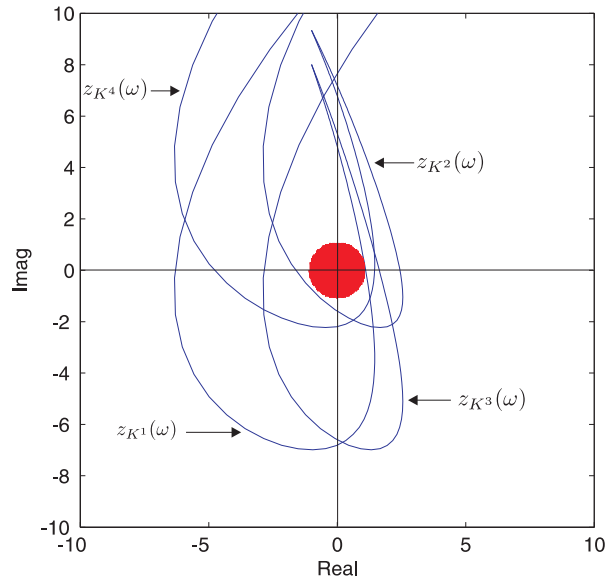
του οποίου οι συντελεστές  $[a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0]$  υφίστανται διακυμάνσεις στα διαστήματα

$$\Delta a_0 = 3, \Delta a_1 = 5, \Delta a_2 = 2, \Delta a_3 = 1, \Delta a_4 = 7, \Delta a_5 = 5.$$

Έστω το ευσταθές πολυώνυμο

$$R(s) = (s + 1)^5 = 1 + 5s + 10s^2 + 10s^3 + 5s^4 + s^5.$$

Υπολογίζοντας το περιθώριο ευστάθειας για το  $R(s)$  παίρνουμε  $\rho(R) = 1$ . Από την άλλη πλευρά θέλουμε από το αρχικό πολυώνυμο να κατασκευάσουμε ένα ευσταθές πολυώνυμο το οποίο μετά



Σχήμα 5.5: Γραφική απεικόνιση του γεωμετρικού τόπου Tsyarkin-Polyak των πολυώνυμων Kharitonov μιας οικογένειας διαστήματος.

την επανατοποθέτηση των πόλων θα έχει περιθώριο ευστάθειας

$$\sqrt{\frac{\Delta a_0^2}{4} + \frac{\Delta a_1^2}{4} + \dots + \frac{\Delta a_{n-1}^2}{4}} = 5.31.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε το  $R(s)$  με έναν παράγοντα  $\lambda = 6$  προκύπτει το πολυώνυμο

$$P(s) = 6R(s) = 6 + 30s + 60s^2 + 60s^3 + 30s^4 + 6s^5$$

του οποίου το περιθώριο ευστάθειας  $\rho(P) = 6$  ικανοποιεί το επιθυμητό όριο. Τα πολυώνυμα Kharitonov που συνδέονται με το κουτί των παραμέτρων

$$\begin{aligned} & [6 - 1.5, 6 + 1.5] \times [30 - 2.5, 30 + 2.5] \times [60 - 1, 60 + 1] \\ & \times [60 - 0.5, 60 + 0.5] \times [30 - 3.5, 30 + 3.5] \times [6 - 2.5, 6 + 2.5] \end{aligned}$$

είναι

$$\begin{aligned} P^1(s) &= 4.5 + 27.5s + 61s^2 + 60.5s^3 + 26.5s^4 + 3.5s^5 \\ P^2(s) &= 4.5 + 32.5s + 61s^2 + 59.5s^3 + 26.5s^4 + 8.5s^5 \\ P^3(s) &= 7.5 + 27.5s + 59s^2 + 60.5s^3 + 33.5s^4 + 3.5s^5 \\ P^4(s) &= 7.5 + 32.5s + 59s^2 + 59.5s^3 + 33.5s^4 + 8.5s^5. \end{aligned}$$

Αυξάνουμε κατά 1 το βαθμό κάθε πολυωνύμου  $P^i(s)$  εισάγοντας τον όρο  $\alpha_i s^6$ . Σύμφωνα με το Λήμμα 5.3 υπάρχουν τιμές των  $\alpha_i$  για κάθε νέο πολυώνυμο ώστε τα πολυώνυμα να είναι ευσταθή για συντελεστές του μεγιστοβάθμιου όρου μικρότερους του  $\alpha_i$ . Οι τιμές αυτές είναι  $\alpha_1 \simeq 1.36$ ,  $\alpha_2 \simeq 2.66$ ,  $\alpha_3 \simeq 1.78$  και  $\alpha_4 \simeq 3.82$ . Επειδή όλα τα  $\alpha_i$  είναι μεγαλύτερα της μονάδας επιλέγουμε το κοινό  $\alpha$  να έχει την τιμή  $\alpha = 1$ . Αν με  $p_i, i = 1, \dots, 5$  συμβολίσουμε τις ονομαστικές τιμές των συντελεστών του  $P(s)$  οι συνιστώσες  $k_i, i = 1, \dots, 5$  του διανύσματος ανάδρασης κατάστασης καθορίζονται από τις σχέσεις  $k_i + a_i^0 = \frac{1}{\alpha} p_i$  από τις οποίες τελικά προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} k_0 &= p_0 - \alpha_0^0 = 5, & k_1 &= p_1 - \alpha_1^0 = 29, & k_2 &= p_2 - \alpha_2^0 = 58, \\ k_3 &= p_3 - \alpha_3^0 = 63, & k_4 &= p_4 - \alpha_4^0 = 28, & k_5 &= p_5 - \alpha_5^0 = 7. \end{aligned}$$



# Κεφάλαιο 6

## Το Θεώρημα των Ακμών

Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσει η εύρωστη ευστάθεια μιας πολυτοπικής οικογένειας πολυωνύμων σε σχέση με μια αυθαίρετη περιοχή ευστάθειας. Θα θεωρήσουμε ότι οι παράμετροι αβεβαιότητας υπεισέρχονται γραμμικά ή αφινικά στους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και μεταβάλλονται εντός διαστημάτων. Το Θεώρημα των Ακμών που θα παραθέσουμε στην πορεία μας δείχνει ότι ο χώρος των ριζών μιας πολυτοπικής οικογένειας μπορεί να προσδιοριστεί από το σύνολο των ριζών των εκτεθειμένων ακμών της. Έτσι λοιπόν το πρόβλημα της εύρεσης του χώρου των ριζών σε καταστάσεις πολυπαραμετρικής αβεβαιότητας ανάγεται σε μονοπαραμετρικά προβλήματα εύρεσης του γεωμετρικού τόπου των ριζών.

### 6.1 Εισαγωγή

Το Θεώρημα των Ακμών έχει αποδειχθεί από τους Bartlett, Hollot και Lin [2] και αποτελεί μια προσπάθεια να επεκταθεί το Θεώρημα Kharitonov στην περίπτωση που υπάρχουν εξαρτήσεις μεταξύ των συντελεστών του πολυωνύμου. Ταυτόχρονα με το Θεώρημα των Ακμών γίνεται δυνατή η αντιμετώπιση μιας γενικότερης περιοχής ευστάθειας και όχι μόνο του ανοιχτού αριστερού μιγαδικού ημιεπιπέδου, όπως στην περίπτωση της ευστάθειας κατά Hurwitz. Το Θεώρημα Kharitonov αναδεικνύει κριτήρια ευστάθειας μόνο στην περίπτωση μιας οικογένειας διαστήματος η οποία αποτελεί ειδική περίπτωση της πολυτοπικής οικογένειας η ευστάθεια της οποίας θα μας απασχολήσει σε αυτό το κεφάλαιο. Μια πολυτοπική οικογένεια πολυωνύμων έχει πολλές μορφές έκφρασης. Θα μπορούσε να εκφραστεί σαν το κυρτό περίβλημα ενός συνόλου πολυωνύμων

$$P(s) = \lambda_1 P_1(s) + \lambda_2 P_2(s) + \dots + \lambda_n P_n(s),$$

όπου  $P_i(s)$  είναι δεδομένα πολυώνυμα και  $\lambda_i$  είναι πραγματικοί αριθμοί με  $\lambda_i \geq 0$  και  $\sum \lambda_i = 1$ . Εναλλακτικές εκφράσεις για την πολυτοπική οικογένεια έχουμε συναντήσει στο Κεφάλαιο 4

και είναι είτε της μορφής (4.1) είτε της (4.2). Το Θεώρημα των Ακμών που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια μας βοηθά να καθορίσουμε το χώρο των ριζών σε πολυτοπικά συστήματα και σαν συνέπεια να διαπιστώσουμε την εύρωστη ευστάθεια αυτών των συστημάτων.

## 6.2 Το Θεώρημα των Ακμών

Θεωρούμε την οικογένεια πραγματικών πολυωνύμων με βαθμό  $n$

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_{n-1} s^{n-1} + \delta_n s^n.$$

Συμβολίζουμε με  $\mathcal{P}_n$  το διανυσματικό χώρο όλων των πραγματικών πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο με  $n$  τα οποία δηλώνουμε με το διάνυσμα

$$\underline{\delta} = [\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1, \delta_0].$$

Ο χώρος αυτός ταυτίζεται με τον  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Έστω  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ένα πολύτοπο  $m$  διαστάσεων. Για τη συνέχεια είναι απαραίτητο να κάνουμε την υπόθεση ότι όλα τα πολυώνυμα στο  $\Omega$  έχουν τον ίδιο βαθμό. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το πρόσημο του συντελεστή  $\delta_n$  να παραμένει σταθερό είτε θετικό είτε αρνητικό. Τα εκτεθειμένα σύνολα του  $\Omega$  ορίζονται σαν η τομή  $\Omega \cap H \neq \emptyset$  του πολυτόπου  $\Omega$  με το υπερεπίπεδο στήριξης σε αυτό  $H$  και θεωρούνται κυρτά. Σαν υπερεπίπεδο στήριξης ορίζεται ένα αφινικό σύνολο σε  $n$  διαστάσεις τέτοιο ώστε κάθε σημείο του  $\Omega$  να βρίσκεται από την ίδια πλευρά του  $H$  και επιπλέον  $\Omega \cap H \neq \emptyset$ . Τα εκτεθειμένα σύνολα μιας διάστασης καλούνται εκτεθειμένες ακμές ενώ εκείνα των δύο διαστάσεων καλούνται εκτεθειμένες πλευρές. Ο χώρος των λύσεων  $R(W)$  ενός συνόλου πολυωνύμων  $W$  ορίζεται σαν

$$R(W) = \{s : \delta(s) = 0 \text{ για } \underline{\delta} \in W\}.$$

Το σύνορο ενός συνόλου  $\mathcal{S}$  θα το συμβολίσουμε για μια ακόμη φορά με  $\partial\mathcal{S}$ . Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το Θεώρημα των Ακμών.

**Θεώρημα 6.1.** *Έστω  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ένα πολύτοπο πολυωνύμων με σταθερό πρόσημο του συντελεστή  $\delta_n$ . Τότε το σύνορο του συνόλου  $R(\Omega)$  περιλαμβάνεται στο χώρο λύσεων των εκτεθειμένων ακμών του  $\Omega$ .*

Ισχύει ότι αν ένας πραγματικός αριθμός  $s_r$  ανήκει στο χώρο λύσεων  $R(\Omega)$  τότε υπάρχει εκτεθειμένη ακμή  $E$  του  $\Omega$  τέτοια ώστε  $s_r \in R(E)$ . Αυτό μπορούμε να το αντιληφθούμε μέσω της τομής ενός διανυσματικού χώρου πολυωνύμων με το σύνολο  $\Omega$ . Το σύνολο των πολυωνύμων που έχουν το  $s_r$  ρίζα είναι ένας διανυσματικός χώρος  $P_{s_r}$   $n$  διαστάσεων. Αν  $m$  είναι η διάσταση του αφινικού περιβλήματος του  $\Omega$  το σχετικό σύνορο του  $\Omega$  αποτελείται από πολύτοπα  $m - 1$  διαστάσεων που είναι τα εκτεθειμένα σύνολα του  $\Omega$ . Για πραγματικές ρίζες ο  $P_{s_r}$  διαπερνά ένα

τουλάχιστον από τα συνοριακά πολύτοπα και επομένως  $s_r \in R(\Omega_{m-1})$ . Το σύνορο κάθε τέτοιου πολυτόπου αποτελείται από πολύτοπα διάστασης μειωμένης κατά 1 και αν επεκτείνουμε αυτόν το συλλογισμό θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι ο  $P_{s_r}$  τέμνει τουλάχιστον μία από τις ακμές τους και επόμενως  $s_r \in R(\Omega_1)$ .

Αν εξετάζουμε την περίπτωση ενός μιγαδικού αριθμού  $s_c$  που ανήκει στο χώρο λύσεων  $R(\Omega)$  τότε υπάρχει εκτεθειμένη πλευρά  $F$  του  $\Omega$  τέτοια ώστε  $s_c \in R(F)$ . Πράγματι, ο χώρος των πολυωνύμων που περιλαμβάνουν την  $s_c$  μεταξύ των ριζών τους είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης  $n - 1$ . Με τρόπο ανάλογο με την περίπτωση των πραγματικών ριζών μπορούμε να αντιληφθούμε ότι αυτός ο χώρος θα διαπερνά μια εκτεθειμένη πλευρά του συνόλου  $\Omega$  και επομένως  $s_c \in R(\Omega_2)$ . Αν με  $p_F$  δηλώσουμε τον αριθμό των εκτεθειμένων πλευρών του  $\Omega$  τότε ο χώρος των λύσεων του συνόλου  $\Omega$  ισοδυναμεί με την ένωση του χώρου των λύσεων των εκτεθειμένων πλευρών του  $F_i$

$$R(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{p_F} R(F_i). \quad (6.1)$$

Για τη θεμελίωση του Θεωρήματος των Ακμών θα απαιτηθεί να κάνουμε χρήση της πρότασης ότι το σύνορο του χώρου των λύσεων των εκτεθειμένων πλευρών του  $\Omega$  περιλαμβάνεται στο χώρο των λύσεων του συνόρου των εκτεθειμένων πλευρών του, δηλαδή

$$\partial R(F) \subset R(\partial F). \quad (6.2)$$

Με  $s^*$  θα συμβολίσουμε ένα τυχαίο στοιχείο του  $\partial R(F)$ . Έστω  $s^*$  ένας πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει  $s^* \in \partial R(F)$ . Ήδη γνωρίζουμε ότι επειδή  $s^*$  είναι πραγματικός αυτός περιλαμβάνεται στο  $R(E)$ . Επειδή το σύνολο των ακμών  $E$  αποτελεί το σύνορο των εκτεθειμένων πλευρών του  $\Omega$  αποδεικνύεται εύκολα η αλήθεια της παραπάνω πρότασης.

Έστω τώρα ότι  $s^*$  είναι μιγαδικός για τον οποίο ισχύει  $s^* \in \partial R(F)$ . Με δεδομένο ότι  $R(F)$  είναι κλειστό σύνολο υπάρχει εκτεθειμένη πλευρά του  $\Omega$  έτσι ώστε  $s^* \in R(F)$ . Επομένως είναι δυνατόν να βρούμε ένα διάνυσμα  $\underline{\delta}^* \in F$  για το οποίο  $\delta^*(s^*) = 0$ . Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο  $P_{s^*}$  των πολυωνύμων με ρίζα στο  $s^*$ . Μπορούμε να διακρίνουμε 3 περιπτώσεις όσον αφορά την τομή αυτού του χώρου με το αφινικό περίβλημα  $aff(F)$ . Στην πρώτη περίπτωση η τομή είναι μια γραμμή που διαπερνά το  $\partial F$  σε ένα σημείο  $\underline{\delta}^*$ . Επειδή  $\underline{\delta}^* \in P_{s^*}$  αυτό υποδηλώνει ότι  $\delta^*(s^*) = 0$  γεγονός που σημαίνει ότι  $s^* \in R(\partial F)$ . Στη δεύτερη περίπτωση το  $aff(F)$  είναι υποσύνολο του  $P_{s^*}$  και έτσι για κάθε  $s^* \in \partial F$  έχουμε  $\delta^*(s^*) = 0$  οπότε  $s^* \in R(\partial F)$ . Στην τρίτη περίπτωση η τομή του  $P_{s^*}$  με το  $aff(F)$  είναι το σημείο  $\underline{\delta}^*$  για το οποίο πρέπει να αποδείξουμε ότι  $\underline{\delta}^* \in \partial F$  αν  $s^* \in \partial R(F)$ . Το γεγονός ότι  $s^* \in \partial R(F)$  συνεπάγεται την ύπαρξη μιας ακολουθίας μιγαδικών αριθμών  $s_n$  που δεν ανήκουν στο χώρο λύσεων  $R(F)$  τέτοιας ώστε  $s_n \rightarrow s^*$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Επιπλέον ο αντίστοιχος υπόχωρος  $P_{s_n}$  συγκλίνει στο  $P_{s^*}$  πλησιάζοντας από έξω το σύνολο  $F$ . Επομένως το  $P_{s_n}$  θα πρέπει να αγγίζει κάποια ακμή του  $F$  καθώς  $P_{s_n} \rightarrow P_{s^*}$ .

Κάνοντας χρήση των (6.1) και (6.2) προκύπτει ότι

$$\vartheta R(\Omega) = \vartheta \bigcup_{i=1}^{p_F} R(F_i) = \bigcup_{i=1}^{p_F} \vartheta R(F_i) \subset \bigcup_{i=1}^{p_F} R(\vartheta F_i)$$

που αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του Θεωρήματος των Ακμών. Από το Θεώρημα των Ακμών προκύπτει το επόμενο πόρισμα που μπορεί να εφαρμοσθεί για τον έλεγχο της ευστάθειας πολυτόπων.

**Πόρισμα 6.1.** *Αν  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  είναι μια απλά συνεκτική περιοχή τότε για κάθε πολυτοπική οικογένεια με τον ίδιο βαθμό πολωνύμων  $\eta R(\Omega)$  περιλαμβάνεται στη  $\Gamma$  αν και μόνο αν ο χώρος των λύσεων όλων των εκτεθειμένων ακμών του  $\Omega$  περιέχεται στη  $\Gamma$ .*

Γενικά είναι δύσκολο να προσδιοριστούν οι εκτεθειμένες ακμές του  $\Omega$ . Παρ' όλ' αυτά αν σχηματίσουμε όλους τους κυρτούς συνδυασμούς ανά δύο των κορυφών του οι εκτεθειμένες ακμές θα περιλαμβάνονται σε αυτούς. Όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 4 αν πρόκειται για πολύτοπο του οποίου οι παράμετροι αβεβαιότητας μεταβάλλονται με γραμμικό ή αφινικό τρόπο αρκεί να πάρουμε τη γραμμική απεικόνιση των εκτεθειμένων ακμών του κουτιού εντός του οποίου κυμαίνονται οι τιμές των παραμέτρων και οι εκτεθειμένες ακμές του πολυτόπου θα περιλαμβάνονται σε αυτές. Μπορούμε πολύ απλά να θέτουμε κάθε συντελεστή αβεβαιότητας εκτός από έναν σε καθεμία από τις κορυφές  $a_i^-$  ή  $a_i^+$  για  $i \neq k$  και στη θέση της ακμής που ορίζεται από τις κορυφές  $a_k^+$  και  $a_k^-$  να θέτουμε τον κυρτό συνδυασμό  $\lambda a_k^- + (1 - \lambda)a_k^+$ . Έτσι λοιπόν ο έλεγχος της ευστάθειας καταλήγει στον έλεγχο ευθυγράμμων τμημάτων πολωνύμων της μορφής

$$P_\lambda(s) = \lambda P_1(s) + (1 - \lambda)P_2(s), \quad \lambda \in [0, 1]$$

που μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε με τα κριτήρια του Λήμματος 2.1 είτε με τα κριτήρια του Λήμματος 2.3 αν πρόκειται για ευστάθεια κατά Hurwitz.

# Κεφάλαιο 7

## Το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov

Σε αυτό το κεφάλαιο μας ενδιαφέρει η ευστάθεια κατά Hurwitz μιας οικογένειας πολυωνύμων που αποτελείται από γραμμικούς συνδυασμούς, με σταθερούς πολυωνυμικούς συντελεστές, πολυωνύμων διαστήματος. Η γενίκευση του Θεώρηματος Kharitonov θα μας εφοδιάσει με τα κατάλληλα εργαλεία ώστε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό μέσα από την ευστάθεια κατά Hurwitz ευθυγράμμων τμημάτων. Ο αριθμός των ευθυγράμμων τμημάτων θα αποδειχθεί ανεξάρτητος από τη διάσταση του χώρου των παραμέτρων όπως άλλωστε και ο αριθμός των πολυωνύμων που έπρεπε να εξεταστούν με βάση το Θεώρημα Kharitonov για να διαπιστωθεί η ευστάθεια μιας οικογένειας διαστήματος.

### 7.1 Εισαγωγή

Γνωρίζουμε ότι στα συστήματα που θέλουμε να ελέγξουμε οι παράμετροι του προς έλεγχο συστήματος μπορούν να μεταβάλλονται εντός μιας περιοχής αβεβαιότητας ενώ ο ελεγκτής που στόχο έχει να επιδράσει σταθεροποιητικά στο σύστημα λειτουργεί με σταθερές παραμέτρους. Όταν εφαρμόζεται ανάδραση οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του συστήματος ενδέχεται να εμφανίσουν μεταξύ τους εξαρτήσεις. Γνωρίζουμε ότι για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Kharitonov θα πρέπει οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου να μεταβάλλονται ανεξάρτητα μεταξύ τους. Παρ' όλ' αυτά είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Kharitonov και όταν η παραπάνω απαίτηση δεν ικανοποιείται αν καθορίσουμε ένα κουτί σε κάθε διάσταση του οποίου θεωρούμε ότι μεταβάλλεται ανεξάρτητα καθένας από εκείνους του συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου που δεν παραμένουν σταθεροί. Βασική προϋπόθεση αποτελεί η περιοχή μεταβολής των συντελεστών που έχουν αλληλοεξάρτηση να βρίσκεται εντός του κουτιού. Έτσι δημιουργούνται και άλλες εικονικές κορυφές που καθορίζουν τα πολυώνυμα Kharitonov που πρέπει να ελεγχθούν. Η ευστάθεια των πολυωνύμων μπορεί να διαπιστωθεί κατασκευάζοντας την ορίζουσα Hurwitz και ελέγχοντας τις ελάχιστονες ορίζουσες οι οποίες πρέπει να αποδειχθούν θε-

τικές με δεδομένο ότι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του πολυωνύμου είναι θετικός. Υπάρχουν φορές που η προσέγγιση αυτή δε μας εγγυάται την ευστάθεια κατά Hurwitz αφού όλα τα πολυώνυμα Kharitonov δεν αποδεικνύονται ευσταθή. Παρ' ολ' αυτά αν ελέγξουμε την ευστάθεια περιοριζόμενοι μόνο στην πραγματική περιοχή διακύμανσης των συντελεστών και όχι στην περιοχή κουτιού που ορίσαμε εμείς για να περικλείσουμε την πραγματική διακύμανση είναι δυνατόν να υπάρχει εύρωστη ευστάθεια. Το συμπέρασμα λοιπόν που προκύπτει είναι ότι ο έλεγχος που βασίζεται στο Θεώρημα Kharitonov μπορεί να είναι πολύ συντηρητικός όταν υπάρχουν αλληλοεξαρτήσεις μεταξύ των συντελεστών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου καθώς μπορεί λανθασμένα να αποκλείσει την εύρωστη ευστάθεια.

Εναλλακτικά θα μπορούσε κανείς να εφαρμόσει το Θεώρημα των Ακμών αλλά και πάλι θα κατέληγε στην εκτέλεση πολλών περιττών ελέγχων. Αυτό λοιπόν που θα ήταν χρήσιμο στην περίπτωση που οι συντελεστές εμφανίζουν αλληλοεξαρτήσεις είναι μια γενίκευση του Θεωρήματος Kharitonov η οποία δε θα απαιτούσε περιττούς ελέγχους και δεν θα ήταν συντηρητική στα αποτελέσματα που δίνει.

## 7.2 Εύρωστη ευστάθεια οικογενειών πολυωνύμων γραμμικού διαστήματος

Τα πολυώνυμα που θα μας απασχολήσουν έχουν τη μορφή

$$\delta(s) = F_1(s)P_1(s) + F_2(s)P_2(s) + \cdots + F_m(s)P_m(s), \quad (7.1)$$

όπου τα  $F_i(s)$  είναι πραγματικά πολυώνυμα με σταθερούς συντελεστές ενώ τα  $P_i(s)$  είναι πολυώνυμα των οποίων οι συντελεστές μεταβάλλονται ανεξάρτητα σε προκαθορισμένα διαστήματα

$$P_i(s) = p_{i,0} + p_{i,1}s + \cdots + p_{i,d_i}s^{d_i}.$$

Με  $d_i$  δηλώνουμε το βαθμό του πολυωνύμου και με  $\mathbf{p}_i = [p_{i,0}, p_{i,1}, \cdots, p_{i,d_i}]$  το διάνυσμα των συντελεστών. Καθένα από τα  $P_i(s)$  ανήκει στην οικογένεια διαστήματος  $\mathbf{P}_i(s)$  που καθορίζεται από συντελεστές  $p_{i,j}$  που ανήκουν στα διαστήματα  $[a_{i,j}, \beta_{i,j}]$  με  $i = 1, \cdots, m$  και  $j = 0, \cdots, d_i$ . Ορίζουμε τα διανύσματα

$$\underline{F}(s) = (F_1(s), F_2(s), \cdots, F_m(s))$$

$$\underline{P}(s) = (P_1(s), P_2(s), \cdots, P_m(s))$$

και εισάγουμε το συμβολισμό

$$\langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle = F_1(s)P_1(s) + F_2(s)P_2(s) + \cdots + F_m(s)P_m(s).$$

Θεωρούμε ότι το  $\underline{F}(s)$  σταθεροποιεί το  $\underline{P}(s)$  αν  $\delta(s) = \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle$  είναι ευσταθές κατά Hurwitz. Το σύνολο των παραμέτρων αβεβαιότητας για κάθε οικογένεια  $\mathbf{P}_i(s)$  έχει τη μορφή κουτιού

$$\mathbf{\Pi}_i = \{ \mathbf{p}_i : a_{i,j} \leq p_{i,j} \leq \beta_{i,j}, j = 0, 1, \dots, d_i \}.$$

Επεκτείνοντας τον ορισμό σε όλες τις οικογένειες  $\mathbf{P}_i(s)$  μπορούμε να ορίσουμε το καθολικό διάστημα των παραμέτρων

$$\mathbf{p} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m]$$

και το καθολικό σύνολο των παραμέτρων αβεβαιότητας

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_1 \times \mathbf{\Pi}_2 \times \cdots \times \mathbf{\Pi}_m.$$

Από το σύνολο των οικογενειών  $\mathbf{P}_i(s)$  για  $i = 1, \dots, m$  μπορούμε να ορίσουμε την οικογένεια  $m$  στοιχείων

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}_1(s) \times \mathbf{P}_2(s) \times \cdots \times \mathbf{P}_m(s).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η αβεβαιότητα υπεισέρχεται στις οικογένειες διαστήματος  $\mathbf{P}_i(s)$  μέσω του διανύσματος των παραμέτρων  $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m]$  ορίζουμε την οικογένεια πολυωνύμων γραμμικού διαστήματος  $\mathbf{\Delta}(s)$  που περιλαμβάνει πολυώνυμα της μορφής (7.1)

$$\mathbf{\Delta}(s) = F_1(s)\mathbf{P}_1(s) + F_2(s)\mathbf{P}_2(s) + \cdots + F_m(s)\mathbf{P}_m(s).$$

Αυτό που χαρακτηρίζει την οικογένεια είναι ότι κάθε στοιχείο του  $\mathbf{p}$  μεταβάλλεται ανεξάρτητα από το άλλο και όλα τα πολυώνυμα της οικογένειας  $\mathbf{\Delta}(s)$  έχουν τον ίδιο βαθμό.

### 7.2.1 Κατασκευή του ακραίου υποσυνόλου

Για κάθε οικογένεια διαστήματος  $\mathbf{P}_i(s)$  μπορούμε να κατασκευάσουμε τα 4 πολυώνυμα Kharitonov  $K_i^1(s)$ ,  $K_i^2(s)$ ,  $K_i^3(s)$  και  $K_i^4(s)$ . Με  $\mathcal{K}_i(s)$  συμβολίζουμε το σύνολο των πολυωνύμων

$$\mathcal{K}_i(s) = \{ K_i^1(s), K_i^2(s), K_i^3(s), K_i^4(s) \}.$$

Για κάθε  $\mathbf{P}_i(s)$  ορίζουμε το σύνολο των 4 ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν τα πολυώνυμα Kharitonov ανά ζεύγη ως εξής

$$\mathcal{S}_i(s) = \{ [K_i^1(s), K_i^2(s)], [K_i^1(s), K_i^3(s)], [K_i^2(s), K_i^4(s)], [K_i^3(s), K_i^4(s)] \}$$

τα οποία καλούνται τμήματα Kharitonov. Ορίζουμε το ακραίο υποσύνολο  $\mathbf{P}_E^l(s)$  του  $\mathbf{P}(s)$  για κάθε  $l = 1, \dots, m$  το οποίο είναι μια διατεταγμένη λίστα  $m$  στοιχείων

$$\mathbf{P}_E^l(s) = \mathcal{K}_1(s) \times \dots \times \mathcal{K}_{l-1}(s) \times \mathcal{S}_l(s) \times \mathcal{K}_{l+1}(s) \times \dots \times \mathcal{K}_m(s).$$

Ένα τυπικό στοιχείο του  $\mathbf{P}_E^l(s)$  περιλαμβάνει σε κάθε θέση της λίστας κάποιο από τα πολυώνυμα Kharitonov εκτός από τη θέση  $l$  στην οποία βρίσκεται ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα του συνόλου  $\mathcal{S}_i$  και έχει τη μορφή

$$\left( K_1^{j_1}(s), K_2^{j_2}(s), \dots, K_{l-1}^{j_{l-1}}(s), (1 - \lambda)K_l^{1,4}(s) + \lambda K_l^{2,3}(s), K_{l+1}^{j_{l+1}}(s), \dots, K_m^{j_m}(s) \right)$$

με  $\lambda \in [0, 1]$ . Οι εκθέτες  $j_1, j_2, \dots, j_m$  μπορούν να παίρνουν τιμές από 1 έως 4 ώστε καθένα από τα  $K_1^{j_1}(s), \dots, K_m^{j_m}(s)$  να αντιπροσωπεύει ένα από τα πολυώνυμα Kharitonov. Με  $K_l^{1,4}(s)$  δηλώνουμε είτε το πρώτο είτε το τέταρτο πολυώνυμο Kharitonov ενώ αντίστοιχα ισχύουν για το  $K_l^{2,3}(s)$  επειδή πρέπει να προκύψει γραμμικός συνδυασμός που ανήκει σε ένα από τα τμήματα Kharitonov. Από το υποσύνολο  $\mathbf{P}_E^l(s)$  μπορεί να προκύψει το ακραίο υποσύνολο  $\Delta_E^l(s)$  της οικογένειας  $\Delta(s)$

$$\Delta_E^l(s) = \left\{ \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle : \underline{P}(s) \in \mathbf{P}_E^l(s) \right\}.$$

Ένα τυπικό στοιχείο του συνόλου  $\Delta_E^l(s)$  είναι

$$\begin{aligned} F_1(s)K_1^{j_1}(s) + F_2(s)K_2^{j_2}(s) + \dots + F_{l-1}K_{l-1}^{j_{l-1}}(s) + F_l \left[ (1 - \lambda)K_l^{1,4}(s) + \lambda K_l^{2,3}(s) \right] \\ + F_{l+1}K_{l+1}^{j_{l+1}}(s) + \dots + F_m K_m^{j_m}(s). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Το ακραίο υποσύνολο  $\mathbf{P}_E(s)$  του  $\mathbf{P}(s)$  ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{P}_E(s) = \bigcup_{l=1}^m \mathbf{P}_E^l(s)$$

και αποτελείται από μονοπαραμετρικές οικογένειες πολυωνύμων. Στο σύνολο  $\mathbf{P}_E(s)$  περιλαμβάνονται  $m4^m$  τμήματα. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι καθένα από τα  $m$  στοιχεία του  $\mathbf{P}_E^l(s)$  μπορεί να είναι ένα από τα 4 πολυώνυμα Kharitonov ή τα 4 τμήματα Kharitonov. Αυτό μας δίνει  $4^m$  συνδυασμούς. Επειδή υπάρχουν  $m$  σύνολα  $\mathbf{P}_E^l(s)$  από τις διαφορετικές μεταθέσεις του στοιχείου  $\mathcal{S}_i$  εντός της λίστας προκύπτουν συνολικά  $m4^m$  τμήματα. Το σύνολο των πολυωνύμων που συνδέονται με τα γενικευμένα τμήματα Kharitonov δίνεται από

$$\Delta_E(s) = \bigcup_{l=1}^m \Delta_E^l(s).$$



Συμβολίζουμε με  $\mathbf{P}_K(s)$  τη διατεταγμένη λίστα των πολωνύμων Kharitonov

$$\mathbf{P}_K(s) = \mathcal{K}_1(s) \times \mathcal{K}_2(s) \times \cdots \times \mathcal{K}_m(s) \subset \mathbf{P}_E(s)$$

η οποία περιλαμβάνει τις επονομάζομενες κορυφές Kharitonov του  $\mathbf{P}(s)$ . Το πλήθος των διακριτών στοιχείων του  $\mathbf{P}_K(s)$  είναι  $4^m$  αφού κάθε  $\mathbf{P}_i$  περιλαμβάνει 4 διακριτά στοιχεία που είναι τα πολώνυμα Kharitonov. Το αντίστοιχο σύνολο πολωνύμων κορυφής Kharitonov είναι

$$\Delta_K(s) = \{ \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle : \underline{P}(s) \in \mathbf{P}_K(s) \}.$$

Τα σύνολο  $\Delta_K(s)$  των πολωνύμων κορυφής και το σύνολο  $\Delta_E(s)$  των ευθυγράμμων τμημάτων πολωνύμων αποτελούν υποσύνολα της πολυτοπικής οικογένειας πολωνύμων  $\Delta(s)$

$$\Delta_K(s) \subset \Delta_E(s) \subset \Delta(s).$$

Στην επόμενη ενότητα θα προχωρήσουμε στη διατύπωση του Γενικευμένου Θεωρήματος Kharitonov [9].

### 7.3 Το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov

**Θεώρημα 7.1.** *Αν μας δοθεί ένα διάνυσμα  $\underline{F}(s)$  πραγματικών πολωνύμων*

1) *Το  $\underline{F}(s)$  σταθεροποιεί ολόκληρη την οικογένεια  $\mathbf{P}(s)$   $m$  στοιχείων αν και μόνο αν το  $\underline{F}$  σταθεροποιεί κάθε τμήμα του συνόλου  $\mathbf{P}_E(s)$ . Ισοδύναμα, η  $\Delta(s)$  είναι ευσταθής αν και μόνο αν η  $\Delta_E(s)$  είναι ευσταθής.*

2) *Επιπλέον αν τα πολώνυμα  $F_i(s)$  είναι της μορφής*

$$F_i(s) = s^{t_i}(a_i s + b_i)U_i(s)Q_i(s), \quad (7.3)$$

*όπου  $t_i \geq 0$  τυχαίος ακέραιος αριθμός,  $a_i$  και  $b_i$  τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί,  $U_i(s)$  ένα πολώνυμο anti-Hurwitz και  $Q_i(s)$  ένα άρτιο ή περιττό πολώνυμο, τότε αρκεί το  $\underline{F}$  να σταθεροποιεί την οικογένεια  $\mathbf{P}_K(s)$   $m$  στοιχείων ή ισοδύναμα το σύνολο πολωνύμων κορυφής  $\Delta_K(s)$  να είναι ευσταθές για να είναι η  $\Delta(s)$  ευσταθής. Η ευστάθεια της οικογένειας  $\mathbf{P}_K(s)$  ή ισοδύναμα της  $\Delta_K(s)$  δεν είναι ικανή για να εξασφαλίσει την ευστάθεια της  $\mathbf{P}(s)$  ή αντίστοιχα της  $\Delta(s)$  αν τα πολώνυμα  $F_i(s)$  δεν ικανοποιούν την (7.3).*

Στη διαδικασία απόδειξης του Γενικευμένου Θεωρήματος Kharitonov απαιτείται να κατασκευάσουμε μια πολυτοπική οικογένεια  $\Delta_I(s)$  για την οποία ισχύει

$$\Delta_E(s) \subset \Delta_I(s) \subset \Delta(s).$$

Γνωρίζοντας ότι κάθε πολυώνυμο Kharitonov αναλύεται σε ένα άρτιο και ένα περιττό τμήμα σύμφωνα με την (5.4) μπορούμε να ορίσουμε την πολυτοπική οικογένεια  $\Delta_I(s)$  από τη σχέση

$$\Delta_I(s) = \left\{ \sum_{i=1}^m F_i(s) \left( (1 - \lambda_i) K_i^{\text{even}, \text{min}}(s) + \lambda_i K_i^{\text{even}, \text{max}}(s) \right) + (1 - \mu_i) K_i^{\text{odd}, \text{min}}(s) + \mu_i K_i^{\text{odd}, \text{max}}(s) \right\}, \lambda_i \in [0, 1], \mu_i \in [0, 1].$$

Αυτό που ισχύει είναι ότι η ευστάθεια της οικογένειας  $\Delta_E(s)$  αρκεί για την ευστάθεια της  $\Delta_I(s)$  η ευστάθεια της οποίας αρκεί με τη σειρά της για να εξασφαλίσει την ευστάθεια της  $\Delta(s)$ .

Μπορούμε να πάρουμε τις εκτεθειμένες ακμές της  $\Delta_I(s)$  αν για το σύνολο

$$(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \dots, \lambda_i, \mu_i, \dots, \lambda_j, \mu_j, \dots, \lambda_m, \mu_m)$$

θέσουμε τα  $2m - 2$  στοιχεία του με  $i \neq j$ , όπου  $i = 1, 2, \dots, m$ , είτε στην τιμή 0 είτε στην τιμή 1 ενώ για το στοιχείο  $j$  μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είτε  $\lambda_j = \mu_j$  είτε  $\lambda_j = 1 - \mu_j$ . Με αυτή τη διαδικασία είναι δυνατόν να προκύψει η  $\Delta_E(s)$ . Επομένως με βάση το Θεώρημα των Ακμών η ευστάθεια της  $\Delta_E(s)$  συνεπάγεται την ευστάθεια της  $\Delta_I(s)$ .

Για να προκύψει τελικά ότι η ευστάθεια της  $\Delta_I(s)$  θα οδηγήσει στην ευστάθεια της  $\Delta(s)$  θα χρειαστεί να διατυπώσουμε το επόμενο Λήμμα.

**Λήμμα 7.1.** Έστω  $\mathcal{B}^e(s)$  μία οικογένεια άρτιων πραγματικών πολυωνύμων

$$B(s) = b_0 + b_2 s^2 + b_4 s^4 + \dots + b_{2p} s^{2p},$$

όπου  $b_0 \in [x_0, y_0]$ ,  $b_2 \in [x_2, y_2]$ ,  $\dots$ ,  $b_{2p} \in [x_{2p}, y_{2p}]$ . Επιπλέον ορίζουμε

$$K_1(s) = x_0 + y_2 s^2 + x_4 s^4 + \dots$$

$$K_2(s) = y_0 + x_2 s^2 + y_4 s^4 + \dots$$

Έστω  $A(s)$  και  $C(s)$  δύο τυχαία αλλά δεδομένα πραγματικά πολυώνυμα. Τότε

1) Το πολυώνυμο  $A(s) + C(s)B(s)$  είναι ευσταθές για κάθε  $B(s)$  που ανήκει στην  $\mathcal{B}^e(s)$  αν και μόνο αν το γραμμικό τμήμα  $[A(s) + C(s)K_1(s), A(s) + C(s)K_2(s)]$  είναι ευσταθές.

2) Επιπλέον αν το  $C(s)$  είναι της μορφής (7.3) τότε εφαρμόζοντας το Λήμμα Κορυφής για την περίπτωση Hurwitz ισχύει ότι το  $A(s) + C(s)B(s)$  είναι ευσταθές για κάθε  $B(s) \in \mathcal{B}^e(s)$  αν και μόνο αν τα  $A(s) + C(s)K_1(s)$  και  $A(s) + C(s)K_2(s)$  είναι ευσταθή κατά Hurwitz.

Αντίστοιχο Λήμμα μπορεί να διατυπωθεί για πολυώνυμα που ανήκουν σε μια οικογένεια περιττών πραγματικών πολυωνύμων  $\mathcal{B}^o(s)$ .

Έχοντας ήδη θεμελιώσει ότι η ευστάθεια της  $\Delta_E(s)$  συνεπάγεται την ευστάθεια της  $\Delta_I(s)$

κάνουμε την υπόθεση ότι η  $\Delta_I(s)$  είναι ευσταθής. Αν ορίσουμε το  $A(s)$  από τη σχέση

$$A(s) = \sum_{i=1}^{m-1} F_i(s) \left( (1 - \lambda_i) K_i^{even,min}(s) + \lambda_i K_i^{even,max}(s) + (1 - \mu_i) K_i^{odd,min}(s) + \mu_i K_i^{odd,max}(s) \right) + F_m(s) \left( (1 - \mu_m) K_m^{odd,min}(s) + \mu_m K_m^{odd,max}(s) \right)$$

κάθε πολυώνυμο της  $\Delta_I(s)$  μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$A(s) + F_m(s) \left( (1 - \lambda_m) K_m^{even,min}(s) + \lambda_m K_m^{even,max}(s) \right). \quad (7.4)$$

Η (7.4) ορίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα του τα  $A(s) + F_m(s) K_m^{even,min}(s)$  και  $A(s) + F_m(s) K_m^{even,max}(s)$ . Τα  $K_m^{even,min}(s)$  και  $K_m^{even,max}(s)$  έχουν τη μορφή των  $K_1(s)$  και  $K_2(s)$  του Λήμματος 7.1. Επειδή κάναμε την υπόθεση ότι η  $\Delta_I(s)$  είναι ευσταθής το ευθύγραμμο τμήμα της (7.4) είναι ευσταθές. Εφαρμόζοντας την πρώτη πρόταση του Λήμματος 7.1 καταλήγουμε ότι το πολυώνυμο  $A(s) + F_m(s) P_{m,even}(s)$  είναι ευσταθές, όπου  $P_{m,even}(s)$  είναι το άρτιο τμήμα του πολυωνύμου  $P_m$  που ανήκει στην οικογένεια  $\mathbf{P}_m(s)$ .

Αντίστοιχα αν ορίσουμε το  $D(s)$  από τη σχέση

$$D(s) = \sum_{i=1}^{m-1} F_i(s) \left( (1 - \lambda_i) K_i^{even,min}(s) + \lambda_i K_i^{even,max}(s) + (1 - \mu_i) K_i^{odd,min}(s) + \mu_i K_i^{odd,max}(s) \right) + F_m(s) P_{m,even}(s) \quad (7.5)$$

κάθε πολυώνυμο της  $\Delta_I(s)$  μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$D(s) + F_m(s) \left( (1 - \mu_m) K_m^{odd,min}(s) + \mu_m K_m^{odd,max}(s) \right). \quad (7.6)$$

Η (7.6) ορίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα του τα  $D(s) + F_m(s) K_m^{odd,min}(s)$  και  $D(s) + F_m(s) K_m^{odd,max}(s)$  που είναι ευσταθές για κάθε  $\mu_m \in [0, 1]$ . Με εφαρμογή του αντίστοιχου Λήμματος με το 7.1 για οικογένειες περιττών πραγματικών πολυωνύμων προκύπτει ότι κάθε πολυώνυμο  $D(s) + F_m(s) P_{m,odd}(s)$  είναι ευσταθές, όπου  $P_{m,odd}(s)$  είναι το περιττό τμήμα του πολυωνύμου  $P_m$ . Αντικαθιστώντας το  $D(s)$  από την (7.5) στο ευσταθές πολυώνυμο  $D(s) + F_m(s) P_{m,odd}(s)$  προκύπτει τελικά η ευστάθεια όλων των πολυωνύμων

$$\sum_{i=1}^{m-1} F_i(s) \left( (1 - \lambda_i) K_i^{even,min}(s) + \lambda_i K_i^{even,max}(s) + (1 - \mu_i) K_i^{odd,min}(s) + \mu_i K_i^{odd,max}(s) \right) + F_m(s) P_m(s).$$

Η συλλογιστική μας μπορεί να εφαρμοσθεί βήμα προς βήμα και στους υπόλοιπους όρους  $F_i(s) P_i(s)$

για  $i = 1, \dots, m - 1$  ώστε τελικά να καταλήξουμε στην ευστάθεια κάθε πολυωνύμου

$$F_1(s)P_1(s) + F_2(s)P_2(s) + \dots + F_m(s)P_m(s)$$

γεγονός που σηματοδοτεί την ευστάθεια ολόκληρης της οικογένειας  $\Delta(s)$ .

Ένα ευθύγραμμο τμήμα της οικογένειας  $\Delta_E^l(s)$  έχει τη μορφή της (7.2) με τελικά σημεία τα

$$\begin{aligned} \delta_1(s) &= F_1(s)K_1^{j_1}(s) + \dots + F_l K_l^{1,4}(s) + \dots + F_m K_m^{j_m}(s) \\ \delta_2(s) &= F_1(s)K_1^{j_1}(s) + \dots + F_l K_l^{2,3}(s) + \dots + F_m K_m^{j_m}(s). \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο της διαφοράς των τελικών σημείων είναι

$$\delta_0(s) = \delta_1(s) - \delta_2(s) = F_l(s) \left[ K_l^{1,4}(s) - K_l^{2,3}(s) \right].$$

Αν το  $F_l$  έχει τη μορφή της (7.3) το ίδιο ισχύει και για το  $\delta_0(s)$  αφού η διαφορά  $\left[ K_l^{1,4}(s) - K_l^{2,3}(s) \right]$  είναι είτε άρτια είτε περιττή καθώς τα πολυώνυμα Kharitonov που συμμετέχουν έχουν το ίδιο άρτιο ή περιττό τμήμα. Επομένως σύμφωνα με το Λήμμα Κορυφής η ευστάθεια του ευθυγράμμου τμήματος προκύπτει από την ευστάθεια των κορυφών του. Ο ίδιος συλλογισμός μπορεί να επαναληφθεί για κάθε υποσύνολο  $\Delta_E^l(s)$  της οικογένειας  $\Delta_E(s)$  καταλήγοντας έτσι στο συμπέρασμα ότι αρκεί η ευστάθεια της οικογένειας πολυωνύμων  $\Delta_K(s)$  για να εξασφαλισθεί η ευστάθεια της  $\Delta(s)$  όταν το  $F_l$  είναι της μορφής (7.3).

### Σύγκριση με το Θεώρημα των Ακμών

Από τη στιγμή που το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov (ΓΘΚ) ασχολείται με τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για να είναι μια πολυτοπική οικογένεια ευσταθής εναλλακτικά θα μπορούσε να εφαρμοσθεί και το Θεώρημα των Ακμών για να δώσει λύση στο πρόβλημα. Στην περίπτωση αυτή θα απαιτούνταν να ελέγξουμε τις εκτεθειμένες ακμές του πολυτόπου των πολυωνύμων  $\Delta(s)$  ενώ το ΓΘΚ από την πλευρά του απαιτεί έλεγχο της ευσταθείας των τμημάτων  $\Delta_E(s)$ . Θα επιχειρήσουμε τώρα να κάνουμε μια σύγκριση μεταξύ του αριθμού των εκτεθειμένων ακμών και των τμημάτων Kharitonov στην απλή περίπτωση ενός πολυωνύμου διαστήματος που περιλαμβάνει 3 παραμέτρους αβεβαιότητας. Επειδή οι 3 παράμετροι αβεβαιότητας μεταβάλλονται εντός 3 γραμμικών διαστημάτων μπορούμε να ορίσουμε 12 εκτεθειμένες ακμές που προκύπτουν αν θέσουμε όλες τις παραμέτρους εκτός από μία σε καθένα από τα άκρα των γραμμικών διαστημάτων και αφήσουμε την άλλη να παίρνει τιμές σε όλο το διάστημα. Από την άλλη επειδή η οικογένεια περιλαμβάνει μόνο ένα πολυώνυμο διαστήματος ανεξάρτητα από τον αριθμό των παραμέτρων αβεβαιότητας υπάρχουν 4 ακραία τμήματα. Ακόμα και αυτό το απλό παράδειγμα καταδεικνύει τη μείωση που επιτυγχάνεται στους ελέγχους των τμημάτων με την εφαρμογή του ΓΘΚ αφού ενώ ο αριθμός των

εκτεθειμένων ακμών αυξάνει εκθετικά με τον αριθμό των παραμέτρων αβεβαιότητας ο αριθμός των τμημάτων Kharitonov εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των πολυωνύμων διαστήματος.

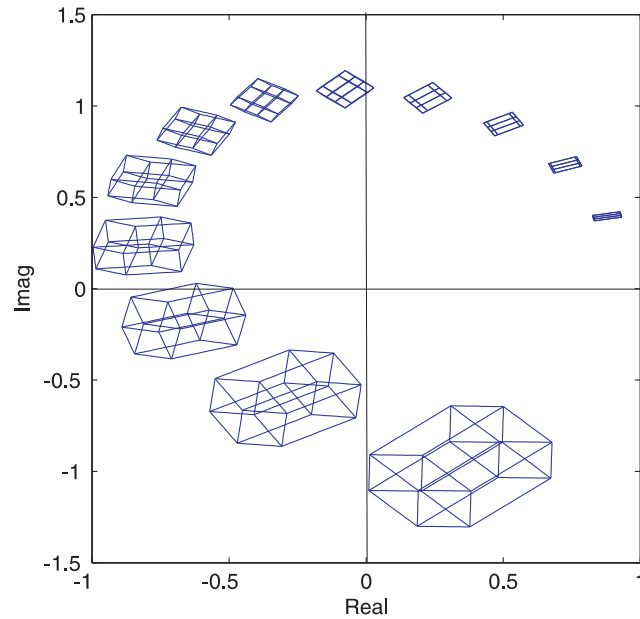
### 7.3.1 Ερμηνεία με βάση τη μιγαδική εικόνα συνόλου

Ήδη από την παράγραφο 5.3.3 είδαμε ότι μια οικογένεια διαστήματος έχει την ίδια μιγαδική εικόνα συνόλου με μια διπαραμετρική οικογένεια. Αυτή η ισοδυναμία των μιγαδικών εικόνων μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση μιας οικογένειας πολυωνύμων γραμμικού διαστήματος  $\Delta(s)$ . Στην προσπάθεια μας να θεμελιώσουμε το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov ορίσαμε το  $\Delta_I(s)$  που είναι υποσύνολο του  $\Delta(s)$  και η ευστάθεια των πολυωνύμων του οποίου συνεπάγεται την ευστάθεια της  $\Delta(s)$ . Αν η  $\Delta(s)$  αποτελείται από  $m$  πολυώνυμα διαστήματος ανεξαρτήτως του πλήθους των παραμέτρων αβεβαιότητας που περιλαμβάνουν μπορεί να αναχθεί όσον αφορά στη μιγαδική εικόνα συνόλου στο πολύτοπο  $\Delta_I(s)$  που χαρακτηρίζεται από  $2m$  παραμέτρους.

Στο μιγαδικό επίπεδο το  $\Delta(j\omega) = \sum_{i=1}^m F_i(j\omega)\mathbf{P}_i(j\omega)$  είναι ένα κυρτό πολύγωνο που περιγράφεται από τις κορυφές και τις ακμές του. Με  $\vartheta\Delta(j\omega)$  δηλώνουμε τις εκτεθειμένες ακμές του  $\Delta(j\omega)$  ενώ με  $\Delta_V(j\omega)$  τις κορυφές του. Γνωρίζουμε ότι κάθε πολύγωνο  $F_i(j\omega)\mathbf{P}_i(j\omega)$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι ένα ορθογώνιο που έχει σαν σύνολο κορυφών το  $F_i(j\omega)K_i(j\omega)$  και σαν σύνολο ακμών το  $F_i(j\omega)S_i(j\omega)$ . Επιπλέον αυτό που ισχύει είναι ότι το σύνολο του αθροίσματος δύο πολυγώνων στο μιγαδικό επίπεδο μπορεί να παραχθεί από την ένωση όλων των ζευγών κορυφής-ακμής με την κορυφή να ανήκει στο ένα πολύγωνο και την ακμή στο άλλο. Επεκτείνοντας το συλλογισμό αυτό για το  $\Delta(j\omega)$  που είναι ένα άθροισμα  $m$  πολυγώνων μπορούμε να παράγουμε το σύνορό του αν στα  $m - 1$  πολύγωνα τα  $\mathbf{P}_i(j\omega)$  με  $i \neq j$  τεθούν στις κορυφές του αντίστοιχου ορθογωνίου που προκύπτει από τη μεταβολή των παραμέτρων αβεβαιότητάς τους εκτός από ένα πολύγωνο όπου το  $\mathbf{P}_j(j\omega)$  παίρνει τιμές κατά μήκος μιας εκ των ακμών του ορθογωνίου. Τελικά το σύνολο  $\vartheta\Delta(j\omega)$  θα προκύψει από όλους τους δυνατούς συνδυασμούς κορυφών-ακμών με τον τρόπο που περιγράφηκε προηγουμένως. Τα δύο τελευταία συμπεράσματα που αφορούν στις κορυφές και το σύνολο του  $\Delta(j\omega)$  συνοψίζονται μαθηματικά ως εξής

$$1) \vartheta\Delta(j\omega) \subset \Delta_E(j\omega) \qquad 2) \Delta_V(j\omega) \subset \Delta_K(j\omega).$$

Η εύρωστη ευστάθεια της οικογένειας  $\Delta(s)$  μπορεί να ελεγχθεί με βάση το Θεώρημα Φραγμένης Φάσης για μια πολυτοπική οικογένεια που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 4. Με  $\phi^-(j\omega)$  συμβολίζουμε την ελάχιστη γωνία με τιμές στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$  που σχηματίζεται από ένα τυχαίο σημείο του μιγαδικού επιπέδου και των κορυφών του πολυγώνου ενώ με  $\phi^+(j\omega)$  συμβολίζουμε τη μέγιστη γωνία για τιμές του  $\omega$  στο ίδιο διάστημα. Τότε αν η  $\Delta(s)$  έχει ένα τουλάχιστον πολυώνυμο ευσταθές και ισχύει ότι  $\Phi_{\Delta_K}(j\omega) = \phi^+(j\omega) - \phi^-(j\omega) < \pi$  για κάθε  $\omega$  ολόκληρη η οικογένεια είναι ευσταθής.



Σχήμα 7.1: Η εικόνα συνόλου των τμημάτων του γενικευμένου Kharitonov.

## 7.4 Παραδείγματα

Στα παραδείγματα που θα παραθέσουμε θα ασχολήθουμε με τον έλεγχο της ευστάθειας στην περίπτωση πολυώνυμων που ανήκουν σε οικογένειες γραμμικού διαστήματος. Για το σκοπό αυτό θα εφαρμόσουμε το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov σύμφωνα με το οποίο αρκεί η ευστάθεια του συνόλου  $\mathbf{P}_E(s)$  για να εξασφαλίσει την ευστάθεια όλης της οικογένειας. Εναλλακτικά την ευστάθεια μιας τέτοιας οικογένειας θα τη διαπιστώσουμε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Φραγμένης Φάσης.

**Παράδειγμα 7.1.** Θεωρούμε το σύστημα προς έλεγχο και τον ελεγκτή που περιγράφονται από τις συναρτήσεις μεταφοράς

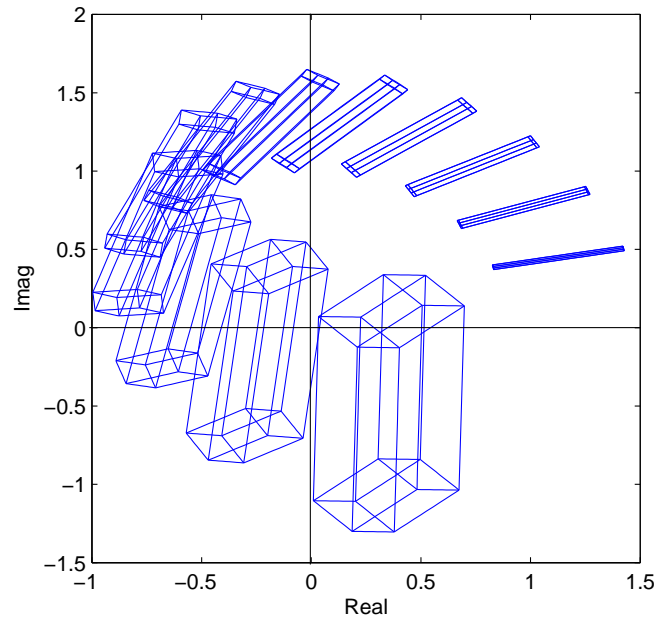
$$G(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)} = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \quad C(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s}.$$

Οι παράμετροι του προς έλεγχο συστήματος ανήκουν στα διαστήματα

$$a_0 \in [0.9, 1], \quad a_1 \in [0.1, 0.2], \quad b_0 \in [1.9, 2.1], \quad b_1 \in [1.8, 2.0], \quad b_2 \in [0.9, 1.0].$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου είναι

$$\delta(s) = F_1(s)P_1(s) + F_2(s)P_2(s).$$



Σχήμα 7.2: Η εικόνα συνόλου των τμημάτων του γενικευμένου Kharitonov.

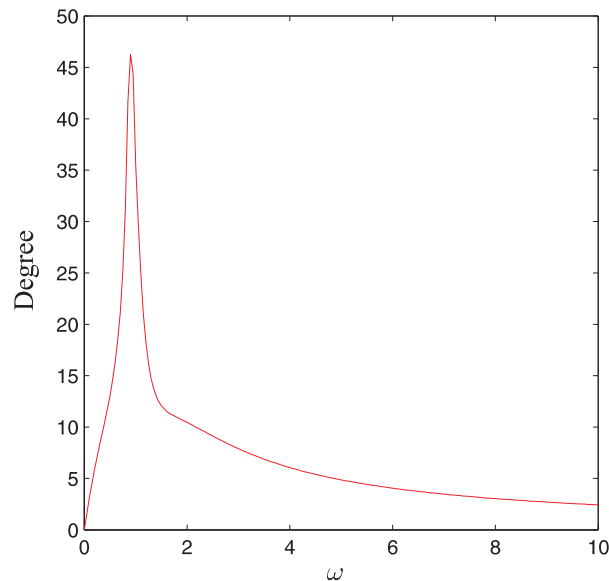
Επειδή η οικογένεια αποτελείται από 2 πολυώνυμα διαστήματος για να ελέγξουμε την ευστάθεια της θα πρέπει να κατασκευάσουμε τα  $2 \times 4^2 = 32$  τμήματα γενικευμένου Kharitonov. Τα τμήματα αυτά προκύπτουν λαμβάνοντας για καθένα από τα πολυώνυμα Kharitonov του  $P_1(s)$  τα τμήματα Kharitonov του  $P_2(s)$  και αντίθετα, δηλαδή

$$F_1(s)K_1^i(s) + F_2(s)(\lambda K_2^j(s) + (1 - \lambda)K_2^k(s))$$

$$F_1(s)(\lambda K_1^i(s) + (1 - \lambda)K_1^j(s)) + F_2(s)K_2^k(s),$$

όπου οι δείκτες  $i, j, k$  παίρνουν τιμές από 1 έως 4. Η ευστάθεια των 32 ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να ελεγχθεί με βάση το Λήμμα Ευθυγράμμου Τμήματος. Εμείς θα προτιμήσουμε να παράγουμε την εικόνα των τμημάτων γενικευμένου Kharitonov στο μιγαδικό επίπεδο καθώς η συχνότητα εξελίσσεται και θα παρατηρήσουμε αν η αρχή των αξόνων ανήκει στα τμήματα αυτά ή περιλαμβάνεται στο εσωτερικό του συνόλου που οριοθετούν. Στο Σχήμα 7.1 απεικονίζεται η εικόνα της οικογένειας με τη συχνότητα. Επειδή ένα τουλάχιστον πολυώνυμο της οικογένειας είναι ευσταθές κατά Hurwitz και το μηδέν εξαιρείται από την εικόνα της οικογένειας για κάθε  $\omega$  συμπεραίνουμε ότι η οικογένεια είναι ευσταθής.

**Παράδειγμα 7.2.** Στο παράδειγμα αυτό το προς έλεγχο σύστημα και ο ελεγκτής περιγράφονται από τις συναρτήσεις μεταφοράς του προηγούμενου παραδείγματος με τη διαφορά ότι η παράμετρος  $a_0 \in [0.9, 1.5]$ . Για να ελέγξουμε την ευστάθεια αυτής της οικογένειας πολυώνυμων διαστήματος ακολουθούμε τη διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως και απεικονίζουμε την εικόνα



Σχήμα 7.3: Η μέγιστη διαφορά φάσης μεταξύ των κορυφών Kharitonov είναι κάτω από  $180^\circ$ .

των τμημάτων του γενικευμένου Kharitonov στο μιγαδικό επίπεδο. Από το Σχήμα 7.2 παρατηρούμε ότι το μηδέν περιλαμβάνεται στην εικόνα συνόλου της οικογένειας οπότε συμπεραίνουμε ότι αυτή δεν είναι ευσταθής.

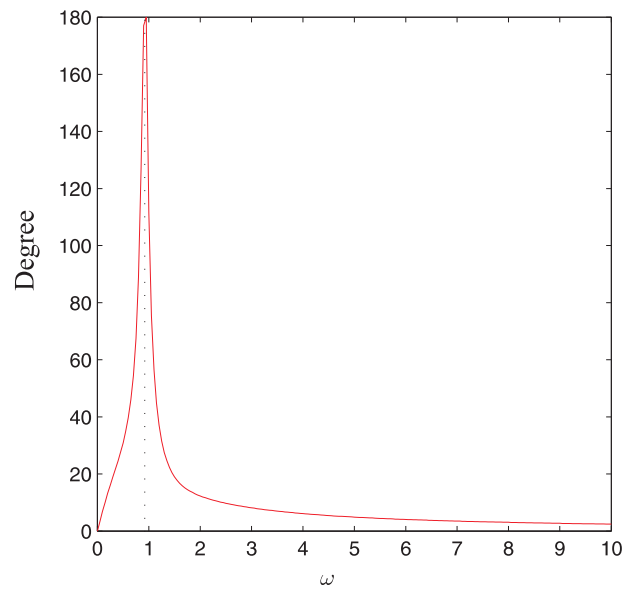
**Παράδειγμα 7.3.** Η ευστάθεια της οικογένειας πολυωνύμων του παραδείγματος 7.1 μπορεί να επιβεβαιωθεί εναλλακτικά αν η μέγιστη διαφορά των γωνιών που σχηματίζεται από τις κορυφές Kharitonov δεν αγγίζει τις  $180^\circ$ . Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να κατασκευάσουμε τις κορυφές αντικαθιστώντας κάθε φορά καθένα από τα  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  με τα αντίστοιχα πολυώνυμα Kharitonov ώστε να προκύψουν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί, δηλαδή

$$F_1(s)K_1^i(s) + F_2(s)K_2^j(s),$$

όπου τα  $i, j$  παίρνουν τιμές από 1 έως 4. Το σύνολο των κορυφών που προκύπτει είναι 16. Αφού επιβεβαιώσουμε την ευστάθεια ενός τυχαίου πολυωνύμου της οικογένειας για παράδειγμα μιας εκ των κορυφών Kharitonov η ευστάθεια θα διαπιστωθεί από τη γραφική απεικόνιση της μέγιστης διαφοράς των γωνιών μεταξύ των κορυφών καθώς η συχνότητα μεταβάλλεται. Από το Σχήμα 7.3 παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της διαφοράς δεν ξεπερνά τις  $50^\circ$  και σε συνάρτηση με την ευστάθεια μιας εκ των κορυφών Kharitonov η οικογένεια αποδεικνύεται ευσταθής.

**Παράδειγμα 7.4.** Στο παράδειγμα 7.2 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εναλλακτικά το Θεώρημα Φραγμένης Φάσης για να διαπιστώσουμε την ευστάθεια της οικογένειας. Από το Σχήμα 7.4 πα-





Σχήμα 7.4: Η μέγιστη διαφορά φάσης μεταξύ των κορυφών Kharitonov αγγίζει τις  $180^\circ$ .

ρατηρούμε ότι για  $\omega \simeq 1$  η μέγιστη διαφορά φάσης αγγίζει τις  $180^\circ$ , οπότε αποδεικνύεται ότι η οικογένεια πολυωνύμων είναι ασταθής.



## Κεφάλαιο 8

# Συμπεριφορά των Συστημάτων Γραμμικού Διαστήματος στο Πεδίο της Συχνότητας

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι όσον αφορά τη συμπεριφορά στο πεδίο της συχνότητας των πολωνύμων γραμμικού διαστήματος αυτή μπορεί να περιγραφεί πλήρως από ακραία μονοπαραμετρικά υποσύνολα της οικογένειας. Σε αντίστοιχα ακραία μονοπαραμετρικά υποσύνολα θα καταφύγουμε για να σχεδιάσουμε τους φακέλους των διαγραμμάτων Bode, Nyquist και Nichols συστημάτων στα οποία η αβεβαιότητα υπεισέρχεται γραμμικά μέσω των παραμέτρων.

### 8.1 Εισαγωγή

Στον κλασικό έλεγχο έχουν αναπτυχθεί τεχνικές που στηρίζονται στην απόκριση του συστήματος στο πεδίο της συχνότητας. Οι τεχνικές αυτές περιλαμβάνουν γραφικά εργαλεία όπως τα διαγράμματα Nyquist [31], Bode [6] και Nichols. Αυτό που θα μας απασχολήσει είναι αν οι τεχνικές που προαναφέραμε μπορούν να επεκταθούν από ένα δεδομένο σύστημα σε μια οικογένεια συστημάτων που περιγράφονται από παραμέτρους των οποίων οι τιμές μεταβάλλονται εντός περιοχών αβεβαιότητας. Από όλες τις κατηγορίες οικογενειών μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε εκείνη των συστημάτων γραμμικού διαστήματος στην οποία οι παράμετροι αβεβαιότητας παίρνουν τιμές εντός διαστημάτων και εμφανίζονται γραμμικά στους συντελεστές πολωνύμων του αριθμητή και του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς. Η συνάρτηση μεταφοράς της οικογένειας συστημάτων  $\mathbf{G}(s)$  παράγει μία περιοχή αβεβαιότητας στο μιγαδικό επίπεδο  $\mathbf{G}(j\omega)$  για κάθε συχνότητα  $\omega$  καθώς το διάνυσμα των παραμέτρων κινείται εντός του κουτιού. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να αντικαταστήσουμε το  $\mathbf{G}(s)$  με ένα υποσύνολο συστημάτων  $\mathbf{G}_E(s)$  που θα μας επιτρέψει να παράγουμε το σύνορο της περιοχής αβεβαιότητας με χρήση μονοπαραμετρικών οικογενειών. Η τεχνική αυτή θα εφαρμοσθεί για τον προσδιορισμό του συνόρου στα διαγράμματα Bode, Nyquist και Nichols μιας συνάρτησης μεταφοράς.

## 8.2 Συστήματα διαστήματος

Θεωρούμε ένα μοναδιαίο σύστημα ανάδρασης που περιλαμβάνει το προς έλεγχο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $G(s) = N(s)/D(s)$  και τον ελεγκτή που δρα σε αυτό με συνάρτηση μεταφοράς  $F(s) = F_1(s)/F_2(s)$ . Το  $F(s)$  είναι δεδομένο και σταθερό ενώ το  $G(s)$  περιλαμβάνει πραγματικές παραμέτρους αβεβαιότητας οι οποίες μεταβάλλονται εντός διαστήματος και αποτελούν τους συντελεστές  $a_k$  του  $N(s)$  και  $b_l$  του  $D(s)$  με  $k = 1, \dots, n$  και  $l = 1, \dots, m$ . Μπορούμε να ορίσουμε τις οικογένειες πολυωνύμων διαστήματος  $\mathbf{N}(s)$  και  $\mathbf{D}(s)$  αν αφήσουμε τους συντελεστές να μεταβάλλονται εντός του διαστήματος που έχει καθοριστεί για καθένα από αυτούς

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(s) &= \{N(s) : b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m, \quad b_l \in [b_l^-, b_l^+], \quad l = 0, \dots, m\} \\ \mathbf{D}(s) &= \{D(s) : a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n, \quad a_k \in [a_k^-, a_k^+], \quad k = 0, \dots, n\}.\end{aligned}$$

Συμβολίζουμε την οικογένεια συστημάτων διαστήματος με

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)}.$$

Όπως φαίνεται και από τον ορισμό των  $\mathbf{N}(s)$  και  $\mathbf{D}(s)$  οι συντελεστές του αριθμητή και του παρονομαστή της  $\mathbf{G}(s)$  μεταβάλλονται ανεξάρτητα. Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα της οικογένειας συστημάτων διαστήματος δίνονται από τη σχέση

$$\Delta(s) = F_1(s)\mathbf{N}(s) + F_2(s)\mathbf{D}(s).$$

Το σύστημα ελέγχου είναι ευσταθές αν κάθε πολυώνυμο της  $\Delta(s)$  είναι ευσταθές κατά Hurwitz. Συμβολίζουμε με  $\mathcal{K}_N(s)$  και  $\mathcal{K}_D(s)$ , αντίστοιχα τα πολυώνυμα Kharitonov που αντιστοιχούν στα  $\mathbf{N}(s)$  και  $\mathbf{D}(s)$  και με  $\mathcal{S}_N(s)$  και  $\mathcal{S}_D(s)$  τα αντίστοιχα σύνολα των τμημάτων Kharitonov. Από το ακραίο υποσύνολο ζευγών κορυφής-ακμής της μορφής

$$(\mathbf{N}(s) \times \mathbf{D}(s))_E = (\mathcal{K}_N(s) \times \mathcal{S}_D(s)) \cup (\mathcal{S}_N(s) \times \mathcal{K}_D(s))$$

προκύπτει το σύνολο  $\mathbf{G}_E(s)$  των ακραίων συστημάτων που συσχετίζεται με τις ακμές της οικογένειας

$$\mathbf{G}_E(s) = \left\{ \frac{N(s)}{D(s)} : (N(s), D(s)) \in (\mathbf{N}(s) \times \mathbf{D}(s))_E \right\} = \frac{\mathcal{K}_N(s)}{\mathcal{S}_D(s)} \cup \frac{\mathcal{S}_N(s)}{\mathcal{K}_D(s)}. \quad (8.1)$$

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε το ακραίο υποσύνολο  $\mathbf{G}_K(s)$  των συστημάτων Kharitonov που συσχετίζεται με τις κορυφές της οικογένειας

$$\mathbf{G}_K(s) = \frac{\mathcal{K}_N(s)}{\mathcal{K}_D(s)}.$$

### 8.3 Ιδιότητες του πεδίου της συχνότητας

Για να μπορέσουμε να αναλύσουμε ένα σύστημα στο πεδίο της συχνότητας και να ενσωματώσουμε τις αβεβαιότητες των παραμέτρων απαιτείται ο υπολογισμός των εικόνων της συνάρτησης μεταφοράς  $\mathbf{G}(s)$  και του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου  $\Delta(s)$  για  $s = j\omega$ , δηλαδή των  $\mathbf{G}(j\omega)$  και  $\Delta(j\omega)$ . Αφού τα  $\mathbf{N}(s)$  και  $\mathbf{D}(s)$  είναι οικογένειες διαστήματος, τα  $\mathbf{N}(j\omega)$  και  $\mathbf{D}(j\omega)$  είναι ορθογώνια με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες ενώ τα  $F_1(j\omega)\mathbf{N}(j\omega)$  και  $F_2(j\omega)\mathbf{D}(j\omega)$  είναι περιστραμμένα ορθογώνια στο μιγαδικό επίπεδο. Έτσι λοιπόν το  $\Delta(j\omega)$  προκύπτει σαν άθροισμα δύο ορθογωνίων στο μιγαδικό επίπεδο ενώ το  $\mathbf{G}(j\omega)$  αποτελεί πηλίκο δύο ορθογωνίων για το οποίο κάνουμε την υπόθεση ότι  $0 \notin \mathbf{D}(j\omega)$ . Οι κορυφές των  $\mathbf{N}(j\omega)$  και  $\mathbf{D}(j\omega)$  αντιστοιχούν στα πολυώνυμα Kharitonov  $\mathcal{K}_N(j\omega)$  και  $\mathcal{K}_D(j\omega)$  ενώ οι ακμές στα τμήματα Kharitonov  $\mathcal{S}_N(j\omega)$  και  $\mathcal{S}_D(j\omega)$ . Αντίστοιχα τα πολύγωνα  $F_1(j\omega)\mathbf{N}(j\omega)$  και  $F_2(j\omega)\mathbf{D}(j\omega)$  έχουν κορυφές τα πολυώνυμα  $F_1(j\omega)\mathcal{K}_N(j\omega)$  και  $F_2(j\omega)\mathcal{K}_D(j\omega)$  και ακμές τα τμήματα  $F_1(j\omega)\mathcal{S}_N(j\omega)$  και  $F_2(j\omega)\mathcal{S}_D(j\omega)$ . Το σύνολο των συναρτήσεων μεταφοράς των ακραίων συστημάτων περιγράφεται από την (8.1) ενώ το σύνολο των χαρακτηριστικών τους πολυωνύμων δίνεται από

$$\begin{aligned}\Delta_E(s) &= \{F_1(s)N(s) + F_2(s)D(s) : (N(s), D(s)) \in (\mathbf{N}(s) \times \mathbf{D}(s))_E\} \\ &= (F_1(s)\mathcal{K}_N(s) + F_2(s)\mathcal{S}_D(s)) \cup (F_1(s)\mathcal{S}_N(s) + F_2(s)\mathcal{K}_D(s)).\end{aligned}$$

Το Θεώρημα που ακολουθεί οφείλεται στους Tesi και Vicino [39] και διαπραγματεύεται τον προσδιορισμό του συνόρου  $\vartheta\Delta(j\omega)$  και  $\vartheta\mathbf{G}(j\omega)$  των εικόνων  $\Delta(j\omega)$  και  $\mathbf{G}(j\omega)$ .

**Θεώρημα 8.1.** (Ιδιότητα Παραγωγής του Συνόρου)

α)  $\vartheta\mathbf{G}(j\omega) \subset \mathbf{G}_E(j\omega)$ .

β)  $\vartheta\Delta(j\omega) \subset \Delta_E(j\omega)$ .

Για την πρώτη περίπτωση το Θεώρημα αναδεικνύει ότι όσον αφορά την οικογένεια συστημάτων διαστήματος το σύνολο της εικόνας της στο μιγαδικό επίπεδο περιλαμβάνεται στην εικόνα του συνόλου των ακμών του πηλίκου πολυγώνων ενώ για τη δεύτερη περίπτωση το σύνολο της εικόνας των χαρακτηριστικών της πολυωνύμων περιλαμβάνεται στην εικόνα του συνόλου των ακμών του αθροίσματος πολυγώνων.

#### Συναρτήσεις μεταφοράς του κλειστού συστήματος

Με δεδομένο ένα σύστημα κλειστού βρόχου με μοναδιαία ανάδραση για το οποίο ισχύει ότι

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) \quad \frac{u(s)}{e(s)} = F(s)$$

μπορούμε να ορίσουμε διάφορες συνάρτησεις μεταφοράς οι οποίες καθώς το  $G(s)$  παίρνει τιμές από το σύνολο  $\mathbf{G}(s)$  μας οδηγούν στα ακόλουθα σύνολα αβεβαιότητας

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}^o(s) &= \frac{y(s)}{e(s)} = F(s)G(s) \\
 \mathbf{T}^e(s) &= \frac{e(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + F(s)G(s)} \\
 \mathbf{T}^u(s) &= \frac{u(s)}{r(s)} = \frac{F(s)}{1 + F(s)G(s)} \\
 \mathbf{T}^y(s) &= \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}.
 \end{aligned}
 \quad , \quad G(s) \in \mathbf{G}(s) \quad (8.2)$$

Τα σήματα  $r(s)$ ,  $u(s)$ ,  $e(s)$  και  $y(s)$  είναι τα σήματα αναφοράς, εισόδου, σφάλματος παρακολούθησης και εξόδου, αντίστοιχα. Η Ιδιότητα της Παραγωγής του Συνόρου μπορεί να επεκταθεί σε όλες τις παραπάνω συναρτήσεις μεταφοράς για  $s = j\omega$  οπότε η  $\mathbf{G}(j\omega)$  μπορεί να αντικατασταθεί από την  $\mathbf{G}_E(j\omega)$  για να προκύψει το σύνορο της εικόνας των ανωτέρω συνόλων. Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώνεται στο επόμενο Θεώρημα [21], [25].

**Θεώρημα 8.2.** Για κάθε  $\omega \geq 0$ ,

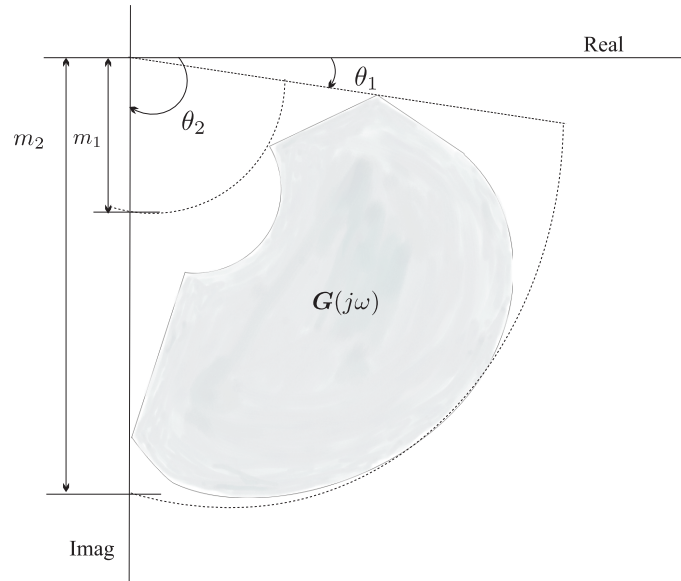
- a.  $\vartheta\mathbf{T}^o(j\omega) \subset \mathbf{T}_E^o(j\omega)$
- b.  $\vartheta\mathbf{T}^e(j\omega) \subset \mathbf{T}_E^e(j\omega)$
- c.  $\vartheta\mathbf{T}^u(j\omega) \subset \mathbf{T}_E^u(j\omega)$
- d.  $\vartheta\mathbf{T}^y(j\omega) \subset \mathbf{T}_E^y(j\omega)$ .

Με  $\mathbf{T}_E^o(j\omega)$ ,  $\mathbf{T}_E^e(j\omega)$ ,  $\mathbf{T}_E^u(j\omega)$  και  $\mathbf{T}_E^y(j\omega)$  συμβολίζουμε τις εικόνες των συνόλων αβεβαιότητας της (8.2) για  $s = j\omega$  αν το  $\mathbf{G}(j\omega)$  αντικατασταθεί από το ακραίο σύνολο  $\mathbf{G}_E(j\omega)$ . Και στην περίπτωση των παραπάνω συναρτήσεων μεταφοράς το σύνορο των μιγαδικών εικόνων τους περιλαμβάνεται στις εικόνες των ακραίων συνόλων  $\mathbf{T}_E^o(j\omega)$ ,  $\mathbf{T}_E^e(j\omega)$ ,  $\mathbf{T}_E^u(j\omega)$  και  $\mathbf{T}_E^y(j\omega)$ . Εδώ θα πρέπει να επισημάνουμε ότι καθώς στη συνάρτηση μεταφοράς  $\mathbf{T}^y(s)$  το  $G(s)$  εμφανίζεται στον αριθμητή αλλά και στον παρονομαστή παραβιάζεται σαν συνέπεια η ανεξαρτησία των συντελεστών του αριθμητή και του παρονομαστή. Παρ' ολ' αυτά όμως η Ιδιότητα Παραγωγής του Συνόρου μεταφέρεται και σε αυτήν την περίπτωση.

## 8.4 Φάκελοι διαγραμμάτων Nyquist, Bode και Nichols

Από τη συνάρτηση μεταφοράς της οικογένειας διαστήματος για δεδομένη συχνότητα  $\omega$  παράγεται το σύνολο εικόνας στο μιγαδικό επίπεδο αν αφήσουμε τις παραμέτρους αβεβαιότητας να πάρουν όλες τις τιμές μέσα στα προδιαγεγραμμένα διαστήματα. Θα συμβολίσουμε το διάγραμμα Nyquist της οικογένειας  $\mathbf{G}(s)$  με

$$\mathbf{G} = \bigcup_{0 \leq \omega < \infty} \mathbf{G}(j\omega).$$



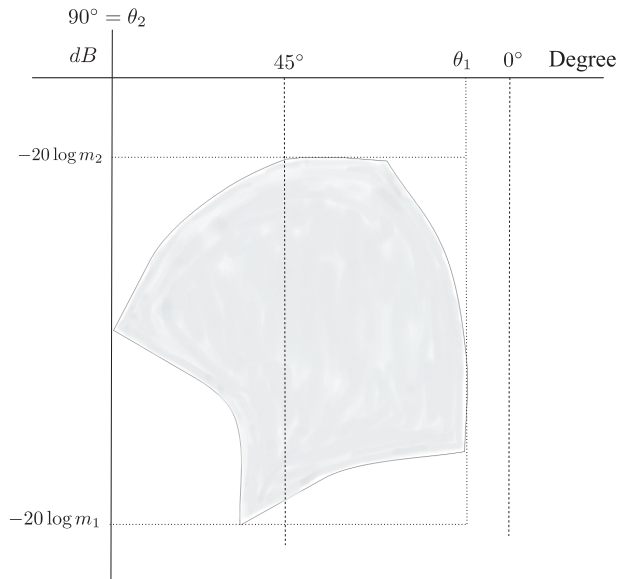
Σχήμα 8.1: Το διάγραμμα Nyquist ενός συστήματος.

Το σύνολο του  $\mathbf{G}$  είναι ο φάκελος Nyquist του  $\mathbf{G}$ . Ομοίως τα διαγράμματα Nyquist των  $\mathbf{T}_E^o(s)$ ,  $\mathbf{T}_E^e(s)$ ,  $\mathbf{T}_E^u(s)$  και  $\mathbf{T}_E^y(s)$  συμβολίζονται με  $\mathbf{T}^o$ ,  $\mathbf{T}^e$ ,  $\mathbf{T}^u$  και  $\mathbf{T}^y$ , αντίστοιχα. Από την Ιδιότητα Παραγωγής του Συνόρου του Θεωρήματος 8.1 προκύπτει ότι οι φάκελοι των διαγραμμάτων Nyquist παράγονται από τα ακραία συστήματα.

**Θεώρημα 8.3.** *Οι φάκελοι των διαγραμμάτων Nyquist για τις συναρτήσεις μεταφοράς  $\mathbf{G}(s)$ ,  $\mathbf{T}^o(s)$ ,  $\mathbf{T}^e(s)$ ,  $\mathbf{T}^u(s)$  και  $\mathbf{T}^y(s)$  περιορίζονται εντός των ακραίων υποσυνόλων*

- a.  $\mathbf{G} \subset \mathbf{G}_E$
- b.  $\mathbf{T}^o \subset \mathbf{T}_E^o$
- c.  $\mathbf{T}^e \subset \mathbf{T}_E^e$
- d.  $\mathbf{T}^u \subset \mathbf{T}_E^u$
- e.  $\mathbf{T}^y \subset \mathbf{T}_E^y$ .

Το διάγραμμα Bode αναπαριστά το πλάτος και τη φάση της συνάρτησης μεταφοράς ως συνάρτηση της συχνότητας. Οι φάκελοι των διαγραμμάτων Bode των συναρτήσεων μεταφοράς  $\mathbf{G}(s)$ ,  $\mathbf{T}^o(s)$ ,  $\mathbf{T}^e(s)$ ,  $\mathbf{T}^u(s)$  και  $\mathbf{T}^y(s)$  μπορούν να κατασκευαστούν αν καθορίσουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του πλάτους και της φάσης της οικογένειας των συστημάτων για κάθε συχνότητα. Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή κατά αντιστοιχία με το διάγραμμα Nyquist προκύπτουν για τιμές της συχνότητας  $\omega$  του ακραίου υποσυνόλου  $\mathbf{G}_E(j\omega)$ . Για δεδομένη συχνότητα  $\omega^*$  η εικόνα της συνάρτησης μεταφοράς είναι το πηλίκο των δύο πολυγώνων στο μιγαδικό επίπεδο που αντιστοιχούν στις εικόνες των οικογενειών των πολυωνύμων του αριθμητή και του παρονομαστή. Εφόσον



Σχήμα 8.2: Το διαγράμμα Nichols ενός συστήματος.

υπάρχει ανεξαρτησία των παραμέτρων αβεβαιότητας στον αριθμητή και τον παρονομαστή η μέγιστη τιμή του πλάτους προκύπτει από την εύρεση εκείνων των μελών που για δεδομένη συχνότητα το ένα μέλος μεγιστοποιεί την  $\mathbf{N}(j\omega^*)$  ενώ το άλλο ελαχιστοποιεί την  $\mathbf{D}(j\omega^*)$

$$\max \left| \frac{\mathbf{N}(j\omega^*)}{\mathbf{D}(j\omega^*)} \right| = \frac{\max |\mathbf{N}(j\omega^*)|}{\min |\mathbf{D}(j\omega^*)|}.$$

Η ελάχιστη τιμή του πλάτους προκύπτει από την ελαχιστοποίηση του  $\mathbf{N}(j\omega^*)$  και τη μεγιστοποίηση του  $\mathbf{D}(j\omega^*)$

$$\min \left| \frac{\mathbf{N}(j\omega^*)}{\mathbf{D}(j\omega^*)} \right| = \frac{\min |\mathbf{N}(j\omega^*)|}{\max |\mathbf{D}(j\omega^*)|}.$$

Εδώ θα πρέπει να επισημανθεί ότι το μέγιστο πλάτος συμβαίνει πάντοτε σε κάποια από τις κορυφές του πολυγώνου ενώ το ελάχιστο πλάτος μπορεί να συμβεί πάνω σε μια πλευρά, δηλαδή για την εύρεση των ακροτάτων στο πλάτος απαιτείται έλεγχος ζευγών κορυφής-ακμής των πολυγώνων που αντιστοιχούν στον αριθμητή και τον παρονομαστή. Τα ακραία σημεία στον φάκελο της φάσης του διαγράμματος Bode παράγονται πάντα από ζεύγη κορυφών των δύο πολυγώνων και δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} a) \quad \max \arg \frac{\mathbf{N}(j\omega^*)}{\mathbf{D}(j\omega^*)} &= \max \arg \mathbf{N}(j\omega^*) - \min \arg \mathbf{D}(j\omega^*) \\ b) \quad \min \arg \frac{\mathbf{N}(j\omega^*)}{\mathbf{D}(j\omega^*)} &= \min \arg \mathbf{N}(j\omega^*) - \max \arg \mathbf{D}(j\omega^*). \end{aligned}$$

Κατά αντιστοιχία με τους φακέλους των διαγραμμάτων Nyquist και Bode που προκύπτουν μόνο από διερεύνηση των ακραίων συνόλων μπορεί να παραχθεί και ο φάκελος του διάγραμματος



Nichols αφού το διάγραμμα Nichols αποτελεί γραφική παράσταση του πλάτους υπολογισμένου σε dB ( $20 \log |G(s)|$ ) ως συνάρτηση της φάσης καθώς η συχνότητα διατρέχει το φάσμα όλων των δυνατών τιμών. Ο φάκελος του διαγράμματος Nichols προκύπτει αν προχωρήσουμε σε γραφική απεικόνιση του διαγράμματος πλάτους-φάσης για όλα τα μέλη της οικογένειας  $\mathbf{G}(s)$ . Μπορεί να παραχθεί προσεγγιστικά αν για δεδομένη συχνότητα θεωρήσουμε στο διάγραμμα Nyquist τις δύο ακραίες γωνίες καθώς και τους δύο κύκλους με ακτίνες το ελάχιστο και το μέγιστο πλάτος της συνάρτησης μεταφοράς εντός των οποίων περικλείεται όλο το διάγραμμα Nyquist όπως φαίνεται και στο Σχήμα 8.1. Με αυτά τα δεδομένα μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ορθογώνια περιοχή στην απεικόνιση φάσης-πλάτους του Nichols εντός της οποίας περιλαμβάνεται όλο το διάγραμμα Nichols όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.2. Η ορθογώνια αυτή περιοχή αν προσδιοριστεί για όλες τις συχνότητες οδηγεί σε μια προσέγγιση του φακέλου Nichols που περιλαμβάνει στο εσωτερικό της τον πραγματικό φάκελο Nichols. Εναλλακτικά ο φάκελος του διαγράμματος Nichols μπορεί να κατασκευαστεί από τα διαγράμματα Bode πλάτους και φάσης.

Οι αποδείξεις του Θεωρήματος 8.3 καθώς και των αντίστοιχων αποτελεσμάτων που ισχύουν για τους φακέλους των διαγραμμάτων Bode και Nichols δίνονται στην εργασία [23].

### 8.4.1 Ακραία περιθώρια ευστάθειας

Επειδή τα περιθώρια ευστάθειας αποτελούν σημαντικά κριτήρια για τον καθορισμό της ευρωστίας ενός συστήματος θα μας απασχολήσει ο προσδιορισμός τους σε ένα σύστημα με παραμετρική αβεβαιότητα όταν συντρέχει η χειρότερη περίπτωση. Για άλλη μια φορά θα αναζητήσουμε τις λιγότερο ευνοϊκές τιμές των περιθωρίων ευστάθειας μεταξύ αυτών που μπορούν να προκύψουν μέσα από το σύνολο ακραίων συστημάτων  $\mathbf{G}_E(s)$ . Ας υποθέσουμε ότι ο ελεγκτής  $F(s)$  σταθεροποιεί την οικογένεια συστημάτων  $\mathbf{G}(s)$ . Το περιθώριο κέρδους δηλώνει πόσο μπορεί να αυξηθεί το κέρδος βρόχου πριν το σύστημα γίνει ασταθές. Για ένα δεδομένο μέλος  $G(s)$  της οικογένειας  $\mathbf{G}(s)$  το περιθώριο κέρδους ορίζεται ως η μεγαλύτερη τιμή  $K_G$  του  $K$  τέτοια ώστε

$$(1 + K)F_1(s)N(s) + F_2(s)D(s)$$

να παραμένει ευσταθές για όλα τα  $K \in [0, K_G)$ . Το περιθώριο φάσης δηλώνει πόσο μπορεί να μειωθεί η φάση πριν ο βρόχος γίνει ασταθής. Αντίστοιχα το περιθώριο φάσης ενός συστήματος για δεδομένο  $G(s) \in \mathbf{G}(s)$  ορίζεται ως η μεγαλύτερη τιμή  $\theta_G$  του  $\theta$  για την οποία

$$e^{j\theta}F_1(s)N(s) + F_2(s)D(s)$$

παραμένει ευσταθές για όλα τα  $\theta \in [0, \theta_G)$ . Τα περιθώρια κέρδους και φάσης για τη χειρότερη περίπτωση καθορίζονται τότε από τις σχέσεις

$$K^* = \inf_{G(s) \in \mathbf{G}(s)} K_G \quad \theta^* = \inf_{G(s) \in \mathbf{G}(s)} \theta_G.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα που ακολουθεί τα ελάχιστα περιθώρια κέρδους και φάσης μπορούν να ευρεθούν αν περιορίσουμε την αναζήτηση στο ακραίο υποσύνολο  $\mathbf{G}_E(s)$ .

**Θεώρημα 8.4.** (Ακραία περιθώρια κέρδους και φάσης)

$$1) \quad K^* = \inf_{G(s) \in \mathbf{G}_E(s)} K_G \quad \theta^* = \inf_{G(s) \in \mathbf{G}_E(s)} \theta_G.$$

2) Αν τα  $F_i(s)$  είναι πραγματικά πολυώνυμα και ικανοποιούν τις συνθήκες του Λήμματος Κορυφής, δηλαδή τα  $F_i(s)$  είναι της μορφής (7.3) τότε ισχύει ότι

$$K^* = \inf_{G(s) \in \mathbf{G}_K(s)} K_G.$$

## 8.4.2 Συντηρητισμός των φακέλων

Οι γραφικές παραστάσεις των Nyquist και Nichols για ένα δεδομένο σύστημα μπορούν να θεωρηθούν σαν μία χορδή στο επίπεδο Nyquist ή Nichols. Για μια παραμετροποιημένη οικογένεια συστημάτων οι γραφικές παραστάσεις Nyquist και Nichols αποτελούνται από μια οικογένεια χορδών. Παρ' ολ' αυτά το σύνορο του φακέλου της απεικόνισης δεν είναι εν γένει μια χορδή που ανήκει στην οικογένεια. Δεν υπάρχει σύστημα στην οικογένεια που να παράγει το σύνορο του φακέλου αλλά αντίθετα για κάθε σημείο του συνόρου υπάρχει μία χορδή που περνάει από αυτό.

Και για το διάγραμμα Bode ισχύει ότι κάθε σημείο στα σύνορα των φακέλων του πλάτους και της φάσης προέρχεται από ένα πραγματικό μέλος της οικογένειας των συστημάτων. Το περιθώριο κέρδους και το περιθώριο φάσης αποτελούν περιθώρια ευστάθειας καθώς καθορίζουν το εύρος στην μεταβολή των παραμέτρων που μπορεί να γίνει ανεκτό μέχρι ένα σύστημα να γίνει οριακά ευσταθές. Το κρίσιμο σημείο που σηματοδοτεί την οριακή ευστάθεια σε ένα διάγραμμα Bode οριοθετείται από τη γραμμή των 0 dB στο διάγραμμα πλάτους του ανοιχτού συστήματος και τη γραμμή των  $-180^\circ$  στο διάγραμμα φάσης του ανοιχτού συστήματος. Έστω ότι με  $\omega_c$  δηλώνουμε τη συχνότητα για την οποία η καμπύλη του πλάτους διέρχεται από τα 0 dB ενώ με  $\omega_{-180}$  δηλώνουμε τη συχνότητα για την οποία η καμπύλη της φάσης διέρχεται από τις  $-180^\circ$ . Το περιθώριο κέρδους μετράται από την απόσταση που έχει η καμπύλη του πλάτους από τον άξονα των 0 dB για  $\omega = \omega_{-180}$ . Το περιθώριο φάσης μετράται από την απόσταση που έχει η καμπύλη της φάσης από τον άξονα των  $-180^\circ$  για  $\omega = \omega_c$ . Στην περίπτωση που στα διαγράμματα Bode απεικονίζονται οι φάκελοι που αντιστοιχούν στην οικογένεια συστημάτων τα σημεία τομής στο σύνορο των φακέλων με τους άξονες των 0 dB και των  $-180^\circ$  δεν αντιστοιχούν αναγκαστικά στο ίδιο σύστημα. Εξαιτίας αυτού του φαινομένου το πραγματικό ελάχιστο περιθώριο κέρδους ή φά-

σης μπορεί να είναι μεγαλύτερο από αυτό που έχει υπολογιστεί. Έτσι λοιπόν αν κάποιος θεωρήσει τους δύο φακέλους Bode από κοινού για την εξαγωγή του περιθωρίου κέρδους ή φάσης θα διαπιστώσει ότι η πληροφορία που αντλείται από αυτούς είναι αντίστοιχη με αυτή που προέρχεται από τις τιμές των γωνιών και του πλάτους που οριοθετούν την ορθογώνια περιοχή εντός της οποίας μπορεί να εγκλειστεί η αρχική εικόνα του συνόλου  $\mathbf{G}(j\omega)$  στο μιγαδικό επίπεδο όπως συμβαίνει κατά τον προσεγγιστικό προσδιορισμό του φακέλου Nichols. Στην αντιστοιχία με το διάγραμμα Nyquist τα περιθώρια κέρδους και φάσης συνδέονται με τις οριακές τιμές της μικρότερης περιοχής δίσκου που περικλείει το  $\mathbf{G}(j\omega)$ . Σαν αποτέλεσμα λοιπόν της κοινής θεώρησης των φακέλων Bode οδηγούμαστε σε συντηρητικές εκτιμήσεις για τα περιθώρια κέρδους και φάσης. Η ακρίβεια της εκτίμησης εξαρτάται από το πόσο κοντά βρίσκεται η πραγματική εικόνα του  $\mathbf{G}(j\omega)$  στην περιοχή που την περικλείει.

### 8.4.3 Ελάχιστο παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας

Μας ενδιαφέρει να καθορίσουμε το περιθώριο ευστάθειας μιας οικογένειας συστημάτων  $\mathbf{G}(s)$  όπου στα πολυώνυμα του αριθμητή  $\mathbf{N}(s)$  και του παρονομαστή  $\mathbf{D}(s)$  υπεισέρχεται αβεβαιότητα μέσω των συντελεστών τους που μπορούν να μεταβάλλονται ανεξάρτητα σε ένα χώρο διαστάσεων  $t$  και να παίρνουν τιμές από ένα σύνολο με τη μορφή υπερορθογώνιου  $\mathbf{\Pi}$ . Έστω  $\mathbf{\Pi}_E$  το υποσύνολο παραμέτρων του  $\mathbf{\Pi}$  που αντιστοιχεί στο ακραίο υποσύνολο συστημάτων  $\mathbf{G}_E(s)$  ενώ με  $\mathbf{\Pi}_K$  δηλώνουμε εκείνο το υποσύνολο του  $\mathbf{\Pi}$  που αντιστοιχεί στο  $\mathbf{G}_K(s)$ .

Με  $\delta(s, \mathbf{p})$  αναφερόμαστε στα πολυώνυμα της οικογένειας πολυωνύμων  $\Delta$  που παραμετροποιείται από το διάνυσμα παραμέτρων  $\mathbf{p} \in \mathbf{\Pi}$ . Έστω  $\mathcal{P}_u$  το σύνολο των σημείων  $\mathbf{u}$  για τα οποία τα  $\delta(s, \mathbf{p})$  είναι ασταθή ή χάνουν βαθμό. Με

$$\rho(\mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{P}_u} \|\mathbf{p} - \mathbf{u}\|$$

συμβολίζουμε την ακτίνα της σφαίρας ευστάθειας γύρω από το σημείο  $\mathbf{p}$  η οποία υπολογίζεται με βάση μια οποιοδήποτε νόρμα  $\|\cdot\|$  του  $\mathbb{R}^t$ . Το ερώτημα που τίθεται για μια ακόμη φορά είναι ποια είναι η μικρότερη ακτίνα ευστάθειας και ποιο το σημείο στο οποίο συμβαίνει. Το επόμενο Θεώρημα περιορίζει την περιοχή όπου βρίσκεται η ελάχιστη τιμή.

**Θεώρημα 8.5.** (Ακραίο παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας)

- 1) Η ελάχιστη τιμή της  $\rho(\mathbf{p})$  για τιμές του  $\mathbf{p}$  που ανήκουν στο  $\mathbf{\Pi}$  συμβαίνει για σημείο του ακραίου συνόλου  $\mathbf{\Pi}_E$ .
- 2) Αν τα  $F_i(s)$  ικανοποιούν τις συνθήκες του Λήμματος Κορυφής, η ελάχιστη τιμή επιτυγχάνεται για σημείο του ακραίου συνόλου  $\mathbf{\Pi}_K$ .

## 8.5 Συστήματα ελέγχου γραμμικού διαστήματος

Μέχρι τώρα δεχθήκαμε ότι η  $\mathbf{G}(s)$  είναι μία οικογένεια πολυωνύμων που κατασκευάζεται από το πηλίκο πολυωνύμων διαστήματος. Προέκυψε ότι για μια τέτοια οικογένεια ο φάκελος των διαγραμμάτων Nyquist, Bode και Nichols, τα ελάχιστα περιθώρια κέρδους και φάσης καθώς και το ελάχιστο παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας μπορούν να ευρεθούν με υπολογισμούς που αφορούν τα μονοπαραμετρικά υποσύνολα  $\mathbf{G}_E(s)$ . Σε αντίστοιχα συμπεράσματα καταλήγουμε και στην περίπτωση που η  $\mathbf{G}(s)$  περιγράφει οικογένειες συστημάτων γραμμικού διαστήματος όπου τα πολυώνυμα του αριθμητή και του παρονομαστή παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} N(s) &= L_1(s)A_1(s) + L_2(s)A_2(s) + \cdots + L_m(s)A_m(s) \\ D(s) &= M_1(s)B_1(s) + M_2(s)B_2(s) + \cdots + M_m(s)B_m(s) \end{aligned}$$

με τα  $L_i(s)$  και  $M_j(s)$  σταθερά πολυώνυμα. Τα  $A_i(s)$  και τα  $B_j(s)$  σαν ανεξάρτητα πολυώνυμα διαστήματος περιγράφονται γενικά από

$$\begin{aligned} A_i(s) &= a_0^i + a_1^i s + a_2^i s^2 + \cdots + a_{n_i}^i s^{n_i} \\ B_j(s) &= b_0^j + b_1^j s + b_2^j s^2 + \cdots + b_{d_j}^j s^{d_j}, \end{aligned}$$

όπου  $a_k^i \in [a_k^{i-}, a_k^{i+}]$  για  $k = 0, \dots, n_i$  και  $b_k^j \in [b_k^{j-}, b_k^{j+}]$  για  $k = 0, \dots, d_j$ . Ορίζουμε με  $\mathbf{A}_i(s)$  και  $\mathbf{B}_j(s)$  τα σύνολα που περιλαμβάνουν πολυώνυμα της μορφής  $A_i(s)$  και  $B_j(s)$ . Με  $\mathbf{N}(s)$  και  $\mathbf{D}(s)$  συμβολίζουμε τις οικογένειες πολυωνύμων του αριθμητή και παρονομαστή της  $\mathbf{G}(s)$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(s) &= \left\{ \sum_{i=1}^m L_i(s)A_i(s) : (A_1(s), \dots, A_m(s)) \in \mathbf{A}_1(s) \times \cdots \times \mathbf{A}_m(s) \right\} \\ \mathbf{D}(s) &= \left\{ \sum_{i=1}^m M_i(s)B_i(s) : (B_1(s), \dots, B_m(s)) \in \mathbf{B}_1(s) \times \cdots \times \mathbf{B}_m(s) \right\}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Με το σύνολο  $\mathbf{A}_i(s)$  συσχετίζονται τα πολυώνυμα Kharitonov  $\mathcal{K}_{A_i}(s)$  και τα τμήματα Kharitonov  $\mathcal{S}_{A_i}(s)$  ενώ τα αντίστοιχα πολυώνυμα και τμήματα για το σύνολο  $\mathbf{B}_j(s)$  είναι τα  $\mathcal{K}_{B_j}(s)$  και  $\mathcal{S}_{B_j}(s)$ . Ορίζουμε τις διατεταγμένες λίστες  $m$  στοιχείων όπου σε κάθε θέση τους περιλαμβάνεται ένα πολυώνυμο Kharitonov

$$\mathbf{A}_K(s) = \mathcal{K}_{A_1}(s) \times \cdots \times \mathcal{K}_{A_m}(s), \quad \mathbf{B}_K(s) = \mathcal{K}_{B_1}(s) \times \cdots \times \mathcal{K}_{B_m}(s).$$

Ένα τυπικό στοιχείο των  $\mathbf{A}_K(s)$  και  $\mathbf{B}_K(s)$  περιλαμβάνει σε κάθε θέση της λίστας κάποιο από τα πολυώνυμα Kharitonov του αντίστοιχου πολυωνύμου διαστήματος. Επίσης ορίζουμε τα

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_E^k(s) &= \mathcal{K}_{A_1}(s) \times \cdots \times \mathcal{K}_{A_{k-1}}(s) \times \mathcal{S}_k(s) \times \mathcal{K}_{A_{k+1}}(s) \times \cdots \times \mathcal{K}_{A_m}(s) \\ \mathbf{B}_E^j(s) &= \mathcal{K}_{B_1}(s) \times \cdots \times \mathcal{K}_{B_{j-1}}(s) \times \mathcal{S}_j(s) \times \mathcal{K}_{B_{j+1}}(s) \times \cdots \times \mathcal{K}_{B_m}(s) \end{aligned}$$

για κάθε  $k = 1, \dots, m$  και  $j = 1, \dots, m$ . Η ένωση των παραπάνω συνόλων οδηγεί σε σύνολα των οποίων τα στοιχεία περιλαμβάνουν το καθένα στην αντίστοιχη θέση ένα από τμήματα Kharitonov

$$\mathbf{A}_E(s) = \cup_{i=1}^m \mathbf{A}_E^i(s), \quad \mathbf{B}_E(s) = \cup_{i=1}^m \mathbf{B}_E^i(s).$$

Μπορούμε στη συνέχεια να ορίσουμε τα ακραία υποσύνολα  $\mathbf{N}_K(s)$  και  $\mathbf{N}_E(s)$  της  $\mathbf{N}(s)$  που συνδέονται με τα πολυώνυμα και τα τμήματα Kharitonov, αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_K(s) &= \left\{ N(s) : N(s) = \sum_{i=1}^m L_i(s)A_i(s), (A_1(s), \dots, A_m(s)) \in \mathbf{A}_K(s) \right\} \\ \mathbf{N}_E(s) &= \left\{ N(s) : N(s) = \sum_{i=1}^m L_i(s)A_i(s), (A_1(s), \dots, A_m(s)) \in \mathbf{A}_E(s) \right\}. \end{aligned}$$

Ομοίως ορίζονται και τα ακραία υποσύνολα  $\mathbf{D}_K(s)$  και  $\mathbf{D}_E(s)$ . Με συνδυασμό των ακραίων υποσυνόλων  $\mathbf{N}_K(s)$ ,  $\mathbf{D}_E(s)$  και  $\mathbf{N}_E(s)$ ,  $\mathbf{D}_K(s)$  μπορεί τελικά να παραχθεί το ακραίο υποσύνολο  $\mathbf{G}_E(s)$  της οικογένειας  $\mathbf{G}(s)$

$$\mathbf{G}_E(s) = \left\{ \frac{N(s)}{D(s)} : (N(s), D(s)) \in (\mathbf{N}(s) \times \mathbf{D}(s))_E \right\} = \frac{\mathbf{N}_K(s)}{\mathbf{D}_E(s)} \cup \frac{\mathbf{N}_E(s)}{\mathbf{D}_K(s)}.$$

Αν η μεταβλητή  $s$  παίρνει τιμές πάνω στον φανταστικό άξονα τότε το  $N(j\omega)$  ( $D(j\omega)$ ) παριστάνει πολύγωνο στο μιγαδικό επίπεδο με τις κορυφές του να περιλαμβάνονται στο  $N_K(j\omega)$  ( $D_K(j\omega)$ ) και τις ακμές του στο  $N_E(j\omega)$  ( $D_E(j\omega)$ ). Κατά αντιστοιχία λοιπόν με τις οικογένειες συστημάτων που προκύπτουν από το πηλίκο πολυωνύμων διαστήματος οι φάκελοι των διαγραμμάτων Bode, Nyquist και Nichols καθώς και οι ακραίες τιμές του περιθωρίου ευστάθειας αλλά και των περιθωρίων κέρδους και φάσης καθορίζονται για την  $\mathbf{G}(s)$  από το ακραίο υποσύνολο  $\mathbf{G}_E(s)$ .

## 8.6 Πολυτοπικά συστήματα

Εξετάζοντας την ακραία απόκριση των συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας μελετήσαμε οικογένειες συστημάτων στις οποίες η αβεβαιότητα υπεισέρχεται στους συντελεστές των μονώνυμων που συνθέτουν τα μη σταθερά πολυώνυμα του αριθμητή και παρονομαστή. Ένας άλλος τρόπος έκφρασης της  $\mathbf{G}(s)$  που δε συγκεντρώνει χωριστά σε κάθε μονώνυμο την επίδραση κάθε παραμέτρου αβεβαιότητας είναι

$$\mathbf{G}(s) = \frac{a_1 L_1(s) + a_2 L_2(s) + \dots + a_m L_m(s)}{b_1 M_1(s) + b_2 M_2(s) + \dots + b_m M_m(s)}, \quad (8.4)$$

όπου  $a_i^- \leq a_i \leq a_i^+$  και  $b_j^- \leq b_j \leq b_j^+$  για κάθε  $i, j = \{1, \dots, m\}$ . Μια οικογένεια συστημάτων της μορφής (8.4) αναπαριστά ένα πολυτοπικό σύστημα. Συγκρίνοντας τις εκφράσεις (8.3) και (8.4)

διαπιστώνουμε ότι ένα πολυτοπικό σύστημα αποτελεί κατ' ουσίαν μια ειδική περίπτωση ενός συστήματος γραμμικού διαστήματος στο οποίο τα μη σταθερά πολυώνυμα είναι μηδενικού βαθμού. Και στα πολυτοπικά συστήματα όπως είναι αναμενόμενο το σύνολο της  $\mathbf{G}(s^*)$  είναι υποσύνολο του  $\mathbf{G}_E(s^*)$  για  $s^*$  που στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει η ευστάθεια κατά Hurwitz παίρνει τιμές πάνω στον φανταστικό άξονα ενώ για συστήματα διακριτού χρόνου παίρνει τιμές πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

## 8.7 Γραμμικοί κλασματικοί μετασχηματισμοί για συστήματα διαστήματος

Μέχρι τώρα η μελέτη της συχνοτικής απόκρισης των συστημάτων όσον αφορά τον προσδιορισμό των ακραίων μεγεθών περιελάμβανε συστήματα διαστήματος, γραμμικού διαστήματος και πολυτοπικά συστήματα. Σε όλες τις περιπτώσεις κάναμε γενικά την υπόθεση ότι οι παράμετροι του αριθμητή και του παρονομαστή μεταβάλλονται ανεξάρτητα. Παρ' ολ' αυτά διαπιστώσαμε ότι τα ακραία συστήματα περιέχουν την πληροφορία που απαιτείται για την εξαγωγή του συνόρου της οικογένειας και στην περίπτωση που οι συναρτήσεις μεταφοράς σε συστήματα με ανάδραση περιλαμβάνουν κοινές παραμέτρους αβεβαιότητας. Ενδιαφέρον παρουσιάζει εντούτοις η δημιουργία ενός γενικότερου μοντέλου που να μπορεί να ενσωματώνει εξαρτήσεις μεταξύ των παραμέτρων του αριθμητή και του παρονομαστή. Η κατηγορία αυτή των συστημάτων μπορεί να ενταχθεί στην κατηγορία των γραμμικών κλασματικών μετασχηματισμών ενός συστήματος γραμμικού διαστήματος.

Δεχόμαστε αρχικά ότι η  $\mathbf{G}(s)$  περιγράφει μια οικογένεια συστημάτων γραμμικού διαστήματος όπου τα πολυώνυμα αβεβαιότητας  $A_j(s)$  και  $B_j(s)$  είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Έστω  $P(s)$ ,  $Q(s)$ ,  $R(s)$  και  $S(s)$  4 αυθαίρετες σταθερές συναρτήσεις που μετέχουν στο μετασχηματισμό

$$H(s) = \frac{P(s)G(s) + Q(s)}{R(s)G(s) + S(s)},$$

όπου έχει γίνει η υπόθεση ότι  $R(s)G(s) + S(s) \neq 0$ . Ένας τέτοιος μετασχηματισμός αναφέρεται ως γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός. Εύκολα προκύπτει ότι η  $H(s)$  περιλαμβάνει κοινές παραμέτρους διαστήματος στον αριθμητή και τον παρονομαστή παρόλο που η  $G(s)$  έχει μόνο ανεξάρτητες παραμέτρους. Από την  $H(s)$  μπορεί να προκύψει η οικογένεια συστημάτων

$$\mathbf{H}(s) = \{H(s) : G(s) \in \mathbf{G}(s)\}$$

καθώς και το ακραίο υποσύνολο

$$\mathbf{H}_E(s) = \{H(s) : G(s) \in \mathbf{G}_E(s)\}.$$

Κάτω από ήπιες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα σύνολα  $P(s)$ ,  $Q(s)$ ,  $R(s)$  και  $S(s)$  το σύνορο του συνόλου  $\mathbf{H}(j\omega)$  παράγεται από το ακραίο σύνολο  $\mathbf{G}_E(j\omega)$  όπως αναφέρει το Θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 8.6.** *Αν*

$$P(j\omega)S(j\omega) - Q(j\omega)R(j\omega) \neq 0$$

*τότε ισχύει ότι*

$$\vartheta\mathbf{H}(j\omega) \subset \mathbf{H}_E(j\omega).$$

Γνωρίζουμε ότι το σύνορο της  $\mathbf{G}(j\omega)$  περιέχεται στην  $\mathbf{G}_E(j\omega)$ . Η απόδειξη του Θεωρήματος βασίζεται στο γεγονός ότι η  $\mathbf{H}(j\omega)$  παράγεται από την  $\mathbf{G}(j\omega)$  μέσα από μια ακολουθία πράξεων που διατηρούν την ιδιότητα ότι το σύνορο κάθε όρου που περιέχει τη  $\mathbf{G}(j\omega)$  ισοδυναμεί με τον ίδιο τον όρο όπου η  $\mathbf{G}(j\omega)$  έχει αντικατασταθεί από το σύνορό της που κατ' επέκταση είναι υποσύνολο της  $\mathbf{G}_E(j\omega)$ . Οι πρακτικές επιπτώσεις του συγκεκριμένου αποτελέσματος είναι ότι με κατάλληλες συναρτήσεις στη θέση των  $P(s)$ ,  $Q(s)$ ,  $R(s)$  και  $S(s)$  μπορούμε να καλύψουμε μια μεγάλη κατηγορία συστημάτων όπου εμφανίζονται αλληλοεξαρτήσεις μεταξύ των παραμέτρων αβεβαιότητας.

## 8.8 Παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή θα προχωρήσουμε σε απεικόνιση στο μιγαδικό επίπεδο για δεδομένη συχνότητα των ακραίων υποσυνόλων ενός ανοιχτού συστήματος διαστήματος και του αντίστοιχου συστήματος κλειστού βρόχου. Επίσης θα παράγουμε τους φακέλους των διαγραμμάτων Nyquist, Bode και Nichols ενός ανοιχτού συστήματος από τους οποίους μπορούν να εξαχθούν τα περιθώρια κέρδους και φάσης του συστήματος κλειστού βρόχου.

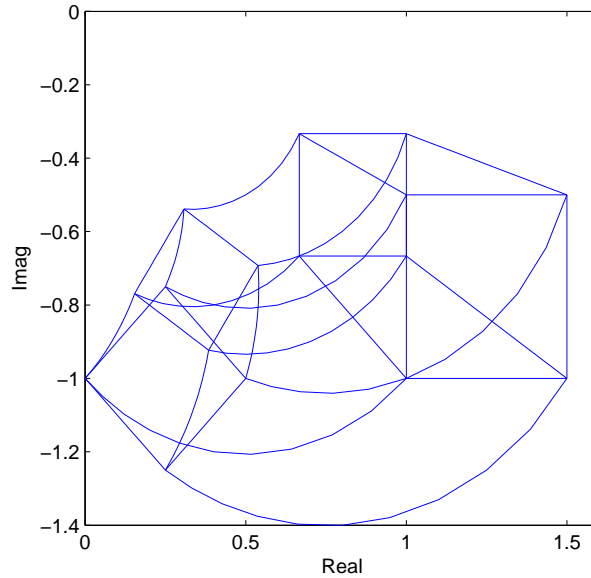
**Παράδειγμα 8.1.** Στο παράδειγμα αυτό μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε την εικόνα συνόλου για μία συχνότητα ενός συστήματος προς έλεγχο με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0},$$

όπου οι παράμετροι του μεταβάλλονται στα διαστήματα

$$a_0 \in [1, 2], \quad a_1 \in [2, 3], \quad a_2 \in [2, 3], \quad b_0 \in [1, 2], \quad b_1 \in [2, 3].$$

Με  $K_n^i(s)$  και  $K_d^i(s)$ , όπου  $i = 1, \dots, 4$  συμβολίζουμε τα πολυώνυμα Kharitonov του αριθμητή και του παρονομαστή, αντίστοιχα. Το σύνορο της εικόνας περιλαμβάνεται στην εικόνα των



Σχήμα 8.3: Το σύνολο της εικόνας του  $\mathbf{G}(j\omega)$  περιλαμβάνεται στην εικόνα των ακραίων υποσυστημάτων του.

ακραίων υποσυστημάτων  $\mathbf{G}_E$

$$\frac{K_n^i(s)}{\lambda K_d^j(s) + (1 - \lambda)K_d^k(s)}, \quad \frac{\lambda K_n^j(s) + (1 - \lambda)K_n^k(s)}{K_d^i(s)}.$$

Επειδή διακρίνουμε 4 τμήματα Kharitonov και 4 πολώνυμα Kharitonov για καθένα από τα πολώνυμα διαστήματος του αριθμητή και του παρονομαστή τα παραπάνω ακραία συστήματα είναι 32 στο σύνολο τους. Στο Σχήμα 8.3 απεικονίζουμε την εικόνα των ακραίων υποσυστημάτων που οριοθετούν την εικόνα του  $\mathbf{G}(j\omega)$  για  $\omega = 1$ .

Για το σύστημα διαστήματος κλειστού βροχου η συνάρτηση μεταφοράς γίνεται

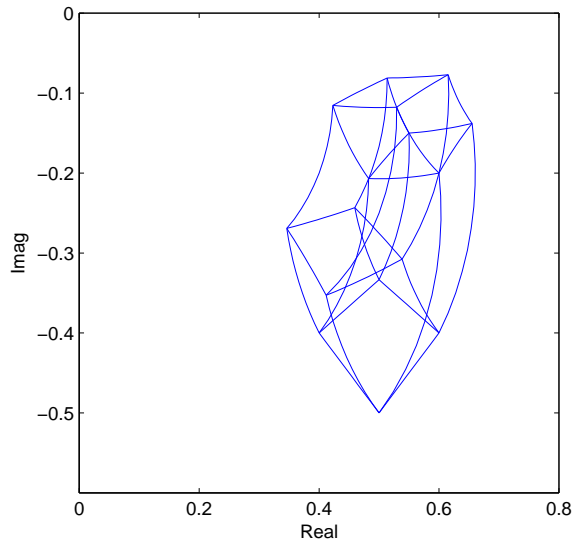
$$T^y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}.$$

Η εικόνα του συνόρου του  $\mathbf{T}^y(j\omega)$  περιλαμβάνεται στην εικόνα των ακραίων υποσυστημάτων  $\mathbf{T}_E^y(j\omega)$  που προκύπτουν αν στη θέση του  $G(j\omega)$  θέσουμε το  $G_E(j\omega)$ . Τα ακραία αυτά υποσυστήματα περιγράφονται από τις ακόλουθες συναρτήσεις μεταφοράς

$$\frac{K_n^i(j\omega)}{\lambda K_d^j(j\omega) + (1 - \lambda)K_d^k(j\omega) + K_n^i(j\omega)},$$

$$\frac{\lambda K_n^j(j\omega) + (1 - \lambda)K_n^k(j\omega)}{\lambda K_n^j(j\omega) + (1 - \lambda)K_n^k(j\omega) + K_d^i(j\omega)}.$$





Σχήμα 8.4: Το σύνολο της εικόνας του  $T^y(j\omega)$  περιλαμβάνεται στην εικόνα των ακραίων υποσυστημάτων του.

Στο Σχήμα 8.4 απεικονίζεται η εικόνα του  $T^y(j\omega)$  για  $\omega = 1$ .

**Παράδειγμα 8.2.** Θεωρούμε το προς έλεγχο σύστημα και τον ελεγκτή των οποίων οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι

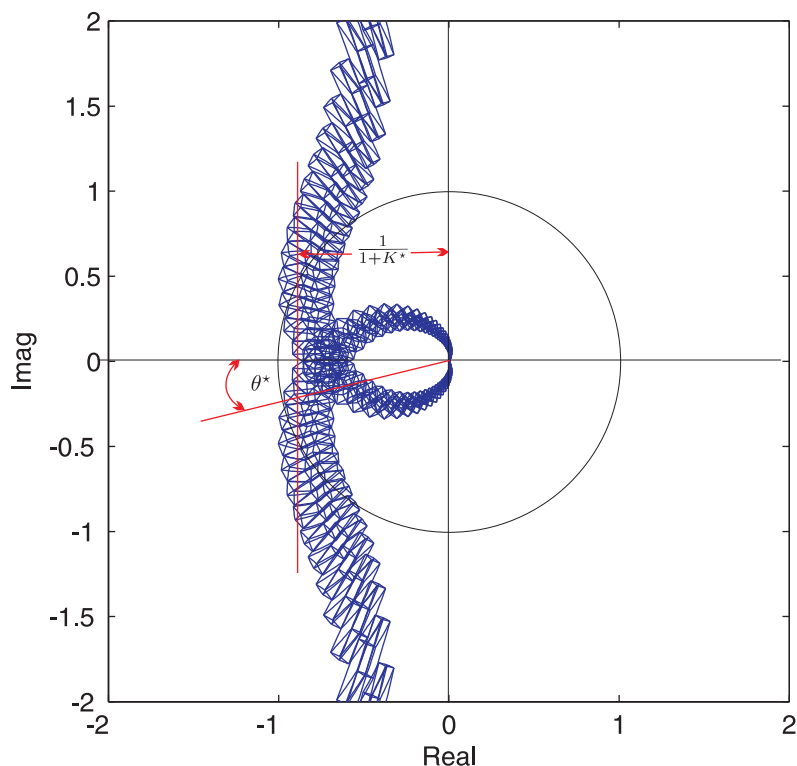
$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad C(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s}.$$

Οι παράμετροι αβεβαιότητας μεταβάλλονται στα διαστήματα

$$b_0 \in [0.9, 1.1], \quad b_1 \in [0.1, 0.2], \\ a_0 \in [1.9, 2.1], \quad a_1 \in [1.8, 2.0], \quad a_2 \in [0.9, 1.0].$$

Στο Σχήμα 8.5 απεικονίζουμε το διάγραμμα Nyquist του ανοιχτού συστήματος διαστήματος καθώς η συχνότητα μεταβάλλεται. Όπως παρατηρούμε το  $-1$  βρίσκεται αριστερά του διαγράμματος οπότε το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ευσταθές. Στο Σχήμα 8.5 σημειώνονται επίσης τα περιθώρια κέρδους και φάσης που καθορίζονται αντίστοιχα από τα σημεία που οι εικόνες του  $G(j\omega)C(j\omega)$  τέμνουν τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα και το μοναδιαίο κύκλο.

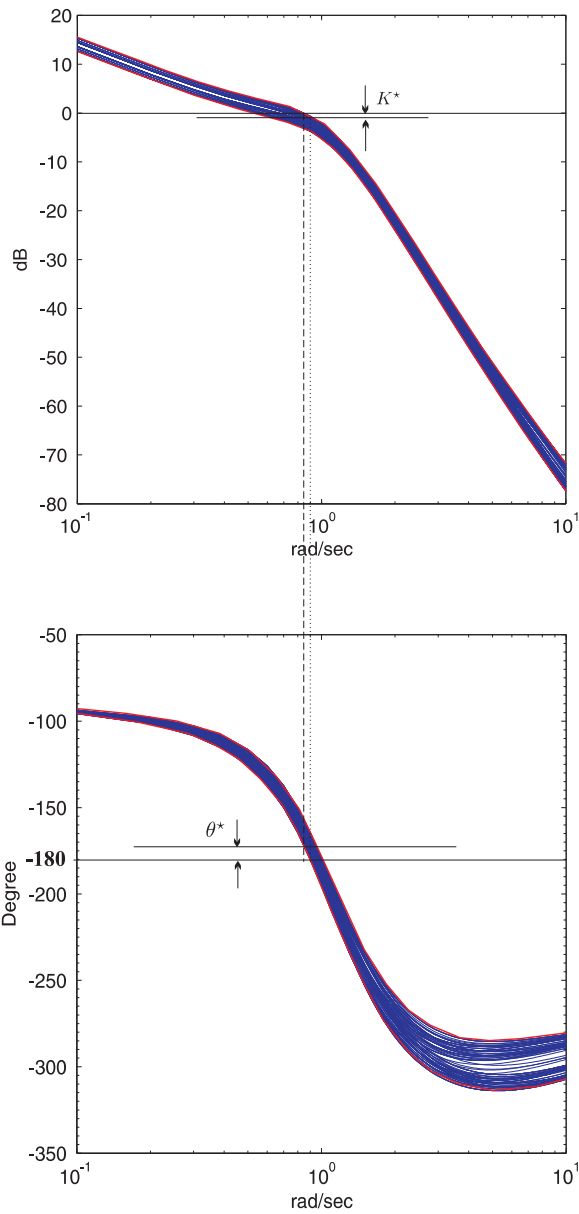
Στο Σχήμα 8.6 παρουσιάζονται τα διαγράμματα Bode πλάτους και φάσης του ανοιχτού συστήματος ενώ με τις κόκκινες γραμμές σημειώνεται ο φάκελος τους. Αν χρησιμοποιηθούν συνδυαστικά μπορούν να δώσουν μια συντηρητική εκτίμηση των περιθωρίων κέρδους και φάσης. Για να προκύψει το περιθώριο κέρδους σημειώνουμε που τέμνει η κάθετη διακεκομμένη γραμμή που διέρχεται από τη συχνότητα για την οποία έχουμε διασταύρωση του διαγράμματος φάσης με τις



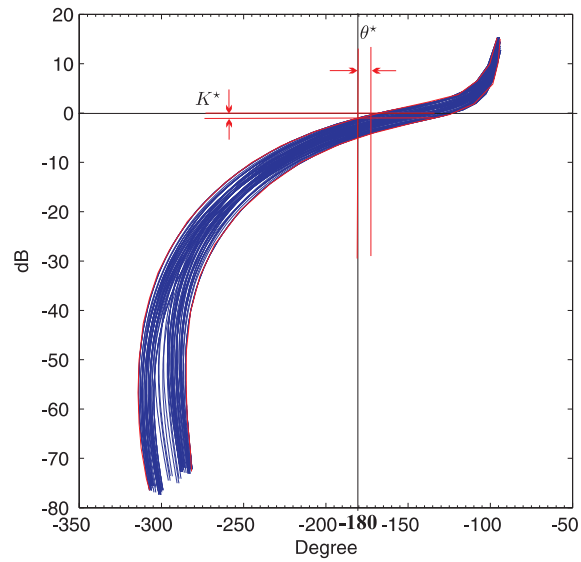
Σχήμα 8.5: Διάγραμμα Nyquist των ακραίων υποσυστημάτων του  $G(j\omega)C(j\omega)$  στο οποίο σημειώνονται τα περιθώρια κέρδους και φάσης.

$-180^\circ$  το διάγραμμα πλάτους. Η απόσταση της τιμής αυτής από τα 0 dB μας δίνει το περιθώριο κέρδους. Αντίστοιχα για να προκύψει το περιθώριο φάσης σημειώνουμε που τέμνει η κάθετη διακεκομμένη γραμμή που διέρχεται από τη συχνότητα για την οποία έχουμε διασταύρωση του διαγράμματος πλάτους με τα 0 dB το διάγραμμα φάσης. Η απόσταση της τιμής αυτής από τις  $-180^\circ$  καθορίζει το περιθώριο φάσης. Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι επειδή τα διαγράμματα Bode απεικονίζονται για οικογένειες διαστήματος υπάρχουν δύο υποψήφια σημεία πάνω στο φάκελο των διαγραμμάτων φάσης και κέρδους κατά τη διάβασή τους από τις  $-180^\circ$  και τα 0 dB που είναι υπεύθυνα για τον προσδιορισμό των περιθωρίων κέρδους και φάσης. Εμείς επιλέγουμε σε κάθε περίπτωση εκείνο που οδηγεί στα μικρότερα περιθώρια. Επειδή το συγκεκριμένο σύστημα στο οποίο αποδίδονται οι διαβάσεις δεν είναι απαραίτητα το ίδιο που καθορίζει τη χειρότερη τιμή για τα περιθώρια κέρδους και φάσης οδηγούμαστε σε εκτιμήσεις των περιθωρίων που ενδέχεται να είναι χειρότερες των πραγματικών.

Τέλος στο Σχήμα 8.7 παρουσιάζουμε το διάγραμμα Nichols για το ανοιχτό σύστημα διαστήματος το οποίο προκύπτει συνδυάζοντας σε ένα κοινό διάγραμμα την πληροφορία από τα διαγράμματα Bode πλάτους και φάσης. Και εδώ σημειώνουμε με κόκκινο χρώμα το φάκελο και τις εκτιμήσεις για τα περιθώρια κέρδους και φάσης.



Σχήμα 8.6: Διαγράμματα Bode πλάτους και φάσης των ακραίων υποσυστημάτων του  $G(j\omega)C(j\omega)$  από τα οποία προκύπτουν εκτιμήσεις για τα περιθώρια κέρδους και φάσης.



Σχήμα 8.7: Διαγράμμα Nichols των ακραίων υποσυστημάτων του  $G(j\omega)C(j\omega)$  μέσω του οποίου προκύπτουν εκτιμήσεις για τα περιθώρια κέρδους και φάσης.

# Κεφάλαιο 9

## Πολυγραμμικά Συστήματα Διαστήματος: Το Θεώρημα της Απεικόνισης

Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσει η εύρωστη ευστάθεια στα συστήματα όπου οι παράμετροι αβεβαιότητας που παίρνουν τιμές εντός διαστήματος τιμών εμφανίζονται πολυγραμμικά στους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Το πρόβλημα της ευστάθειας μπορεί να αντιμετωπιστεί με αντικατάσταση της πολυγραμμικής οικογένειας διαστήματος από ένα πολυτοπικό σύνολο. Αντίστοιχα τα μέτρα της ευστάθειας, όπως περιθώρια κέρδους και φάσης μπορούν να υπολογιστούν από το ίδιο πολυτοπικό σύνολο.

### 9.1 Εισαγωγή

Τα συστήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε εμφανίζουν τις παραμέτρους σε πολυγραμμική μορφή. Μια συνάρτηση  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  είναι πολυγραμμική αν για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$  η  $f$  είναι γραμμική συνάρτηση του  $x_i$  για  $x_j$  που παραμένουν σταθερά όταν  $j \neq i$ . Η πολυγραμμική εξάρτηση από τις παραμέτρους αβεβαιότητας απαντάται σε ένα εύρος από μοντέλα συστημάτων. Τα διαγράμματα ροής με πολλούς βρόχους αποτελούν παραδείγματα συστημάτων όπου τα κέρδη των βρόχων εμφανίζονται στη συνάρτηση μεταφοράς με πολυγραμμικό τρόπο. Αν οι συναρτήσεις των κερδών παραμετροποιούνται από ανεξάρτητα σύνολα παραμέτρων διαστήματος που εμφανίζονται σε αυτές με γραμμικό τρόπο καταλήγουμε σε μια συνάρτηση μεταφοράς συστήματος που είναι πολυγραμμική σε αυτές τις παραμέτρους. Ένας άλλος τρόπος για να δούμε πως μπορεί να προκύψει πολυγραμμική εξάρτηση είναι να θεωρήσουμε τις εξισώσεις του χώρου κατάστασης

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο στην περίπτωση αυτή είναι

$$\delta(s) = \det [sI - A].$$

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι πολυγραμμικές συναρτήσεις των στοιχείων  $a_{ij}$  του πίνακα  $A$ . Τα στοιχεία του  $A$  αντιπροσωπεύουν φυσικές παραμέτρους ενός συστήματος για κάποιες από τις οποίες ενδέχεται να υπάρχει αβεβαιότητα. Αν οι παράμετροι που παρουσιάζουν αβεβαιότητα εμφανίζονται σε πολλαπλά σημεία του  $A$  θα πρέπει να έχουν δομή τάξης ένα έτσι ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο να είναι πολυγραμμική συνάρτηση των παραμέτρων. Μία ακόμη περίπτωση στην οποία μπορούμε να διαπιστώσουμε την πολυγραμμική εξάρτηση των παραμέτρων γίνεται εμφανής αν θεωρήσουμε ότι οι συναρτήσεις μεταφοράς του συστήματος  $G(s)$  και του ελεγκτή  $C(s)$  γράφονται σε κλασματική μορφή

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s), \quad C(s) = D_c^{-1}(s)N_c(s).$$

Αν κάνουμε την υπόθεση ότι οι πίνακες που υπεισέρχονται στις συναρτήσεις μεταφοράς του προς έλεγχο συστήματος και του ελεγκτή είναι αντίστοιχα δεξιά και αριστερά πρώτοι μεταξύ τους τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος υπολογίζεται από τη σχέση

$$\delta(s) = \det[D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)].$$

Για ακόμη μια φορά κάνουμε την υπόθεση ότι η  $C(s)$  είναι σταθερή ενώ στην  $G(s)$  υπεισέρχεται η αβεβαιότητα μέσω των στοιχείων των  $N(s)$  και  $D(s)$  που είναι ανεξάρτητα πολυώνυμα διαστήματος. Και σε αυτή την περίπτωση η  $\delta(s)$  εμφανίζεται να είναι πολυγραμμική συνάρτηση των παραμέτρων διαστήματος.

## 9.2 Το Θεώρημα της Απεικόνισης

Το Θεώρημα της Απεικόνισης (Mapping Theorem) [43] εφαρμόζεται σε οικογένειες πολυωνύμων που έχουν πολυγραμμική εξάρτηση από ένα σύνολο παραμέτρων διαστήματος. Μία τέτοια οικογένεια την αποκαλούμε πολυγραμμικό πολυώνυμο διαστήματος (multilinear interval polynomial). Το Θεώρημα της Απεικόνισης αποδεικνύει ότι η εικόνα συνόλου μιας τέτοιας οικογένειας περιλαμβάνεται στο κυρτό περίβλημα της εικόνας των κορυφών.

Με  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_l]$  συμβολίζουμε το διάνυσμα των πραγματικών παραμέτρων. Έστω το πολυώνυμο

$$\delta(s, \mathbf{p}) = \delta_0(\mathbf{p}) + \delta_1(\mathbf{p})s + \delta_2(\mathbf{p})s^2 + \dots + \delta_n(\mathbf{p})s^n, \quad (9.1)$$

όπου οι συντελεστές  $\delta_i(\mathbf{p})$  με  $i = 1, \dots, n$  είναι πολυγραμμικές συναρτήσεις του  $\mathbf{p}$ . Το διάνυσμα

$\mathbf{p}$  ανήκει στο σύνολο αβεβαιότητας

$$\mathbf{\Pi} = \{ \mathbf{p} : p_i^- \leq p_i \leq p_i^+, i = 1, \dots, l \}.$$

Το σύνολο των πολωνύμων της μορφής (9.1) αποτελεί ένα πολυγραμμικό πολώνυμο διαστήματος το οποίο συμβολίζουμε με  $\Delta(s)$ . Με  $\mathbf{V}$  δηλώνουμε το σύνολο κορυφών του  $\mathbf{\Pi}$  ενώ με  $\Delta_V(s)$  το σύνολο των πολωνύμων κορυφής  $\{v_1(s), v_2(s), \dots, v_k(s)\}$  της  $\Delta(s)$  για τα οποία  $\mathbf{p} \in \mathbf{V}$ . Με  $\bar{\Delta}(s)$  συμβολίζουμε το κυρτό περίβλημα των πολωνύμων κορυφής  $co\Delta_V(s)$  το οποίο περιγράφεται από τη σχέση

$$\bar{\Delta}(s) = \left\{ \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i v_i(s) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Η τομή των συνόλων  $\Delta(s)$  και  $\bar{\Delta}(s)$  περιλαμβάνει το σύνολο των πολωνύμων κορυφής  $\Delta_V(s)$ .

Το Θεώρημα της Απεικόνισης ασχολείται με την εικόνα του συνόλου  $\Delta(s)$  στο  $s = s^* \in \mathbb{C}$  και μπορεί να εφαρμοσθεί για τον καθορισμό της εύρωστης ευστάθειας της οικογένειας.

**Θεώρημα 9.1.** (Θεώρημα Απεικόνισης)

Με την υπόθεση ότι  $\delta_i(\mathbf{p})$  είναι πολυγραμμικές συναρτήσεις του  $\mathbf{p}$  ισχύει ότι

$$\Delta(s^*) \subset co\Delta_V(s^*) = \bar{\Delta}(s^*)$$

για κάθε  $s^* \in \mathbb{C}$ .

Η απόδειξη του Θεωρήματος βασίζεται στην παρατήρηση ότι κάθε σημείο  $I$  του  $\mathbf{\Pi}$  είναι προσβάσιμο από οποιαδήποτε κορυφή του  $\mathbf{\Pi}$  αν κινηθούμε κατά μήκος ευθειών που είναι είτε ακμές του  $\mathbf{\Pi}$  είτε είναι παράλληλες σε αυτές. Με  $I'$  συμβολίζουμε τη μιγαδική εικόνα της απεικόνισης του  $I$  μέσω της πολυγραμμικής συνάρτησης  $\delta(s^*, \mathbf{p})$ . Λόγω της πολυγραμμικότητας οι ευθείες γραμμές που συνδέουν τις κορυφές του συνόλου  $\mathbf{\Pi}$  αντιστοιχούν σε ευθείες γραμμές που συνδέουν τις κορυφές της μιγαδικής εικόνας του συνόλου  $\mathbf{\Pi}$ . Οποιαδήποτε κίνησή μας κατά μήκος των ακμών του συνόλου  $\mathbf{\Pi}$  ή παράλληλα σε αυτές για να προσεγγίσουμε το σημείο  $I$  μεταφράζεται στο μιγαδικό επίπεδο σε κίνηση κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που συνδέουν τις κορυφές ή γραμμικούς συνδυασμούς τους για να προσεγγίσουμε το σημείο  $I'$ . Σε κάθε περίπτωση αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να παραμένουμε εντός του κυρτού συνόλου που ορίζουν οι κορυφές και το οποίο περιλαμβάνει τη μιγαδική εικόνα του  $\mathbf{\Pi}$ .

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το Θεώρημα της Απεικόνισης δεν ισχύει αν το  $\mathbf{\Pi}$  δεν είναι ένα πολύτοπο με τις πλευρές του παράλληλες προς τους άξονες γιατί τότε η εικόνα της ακμής ενός τυχαίου πολύτοπου μέσω πολυγραμμικής απεικόνισης δε θα είναι γενικά μια ευθεία γραμμή. Το Θεώρημα της Απεικόνισης δεν ισχύει ούτε στην περίπτωση που η εξάρτηση από τις παραμέτρους είναι πολυωνυμική αντί για πολυγραμμική.

Το Θεώρημα αυτό αποδεικνύει ότι η εικόνα συνόλου της πολυγραμμικής οικογένειας  $\Delta(s)$  φράζεται εντός της εικόνας που παράγει η πολυτοπική οικογένεια  $\bar{\Delta}(s)$  στο μιγαδικό επίπεδο. Έτσι ακόμα και αν η εικόνα της  $\Delta(s)$  δεν αποτελεί ένα κυρτό σύνολο μπορούμε να την περικλείσουμε εντός του κυρτού περιβλήματος που καθορίζεται από τις κορυφές της και όλοι οι υπολογισμοί που αφορούν την ευστάθεια να περιοριστούν στις ακμές του πολυτόπου.

### 9.3 Εύρωστη ευστάθεια μέσω του Θεωρήματος της Απεικόνισης

Η εύρωστη ευστάθεια μιας παραμετρικής οικογένειας πολυωνύμων επαληθεύεται αν οι εικόνες συνόλου για κάθε σημείο του συνόρου ευστάθειας αποκλείουν την αρχή των αξόνων. Επειδή σύμφωνα με το Θεώρημα της Απεικόνισης η εικόνα συνόλου περιέχεται στο κυρτό περίβλημα που παράγεται από το σύνολο  $\Delta_V(s)$  των πολυωνύμων κορυφής  $\{v_1(s), v_2(s), \dots, v_k(s)\}$  αρκεί το πολυτοπικό σύνολο  $\bar{\Delta}(s)$  να αποκλείει την αρχή των αξόνων για κάθε  $s$  που παίρνει τιμές πάνω στο σύνολο ευστάθειας  $\vartheta\mathcal{S}$ .

Με  $\mathbf{E}(s)$  θα συμβολίσουμε το σύνολο των ακμών του  $\bar{\Delta}(s)$

$$\mathbf{E}(s) = \{\lambda v_i(s) + (1 - \lambda)v_j(s) : v_i(s), v_j(s) \in \Delta_V(s), 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Κάνουμε στη συνέχεια τις υποθέσεις που απαιτούνται ώστε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα των Ακμών στο  $\bar{\Delta}(s)$ . Ειδικότερα δεχόμαστε ότι ο βαθμός είναι ίδιος για όλα τα πολυώνυμα των οικογενειών  $\Delta(s)$  και  $\bar{\Delta}(s)$ . Επιπλέον υπάρχει κυρτό περίβλημα που φράζει την εικόνα για δεδομένο  $s_0 \in \vartheta\mathcal{S}$  και δεν περιέχει το μηδέν, δηλαδή  $0 \notin \bar{\Delta}(s_0)$ , ενώ τουλάχιστον ένα πολυώνυμο της  $\Delta(s)$  είναι ευσταθές. Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το Θεώρημα που μεταθέτει τον έλεγχο της εύρωστης ευστάθειας ενός πολυγραμμικού πολυωνύμου διαστήματος σε αυτόν της ευστάθειας του κυρτού συνόλου που το περιέχει.

**Θεώρημα 9.2.** *Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω υποθέσεις, η  $\Delta(s)$  είναι ευσταθής σε σχέση με μια περιοχή ευστάθειας  $\mathcal{S}$  αν η οικογένεια  $\bar{\Delta}(s)$  ή ισοδύναμα το σύνολο  $\mathbf{E}(s)$  είναι ευσταθές σε σχέση με την ίδια περιοχή ευστάθειας.*

Η αλήθεια του Θεωρήματος βασίζεται στο Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου για την εφαρμογή του οποίου απαιτείται ο βαθμός των πολυωνύμων της οικογένειας να παραμένει αμετάβλητος. Σύμφωνα με αυτό η ευστάθεια καταστρέφεται αν το 0 βρεθεί να ανήκει στο σύνολο  $\Delta(s^*)$  για οποιοδήποτε  $s^* \in \vartheta\mathcal{S}$ . Αυτό δεν μπορεί να συμβεί αν το 0 δεν αποτελέσει προηγουμένως σημείο μιας τουλάχιστον ακμής που περιλαμβάνεται στο σύνολο  $\mathbf{E}(s)$  για κάποιο  $s = \bar{s} \in \vartheta\mathcal{S}$ . Το  $\bar{\Delta}(s)$  ή καλύτερα το  $\mathbf{E}(s)$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν σύνολο ελέγχου για να διαπιστωθεί η εύρωστη



ευστάθεια μιας πολυγραμμικής οικογένειας αφού αποτελείται από γραμμικά παραμετροποιημένες οικογένειες πολυωνύμων. Ενώ η  $\Delta(s^*)$  φράζεται εξωτερικά από την  $\bar{\Delta}(s^*)$  για κάθε  $s^* \in \vartheta\mathcal{S}$  αυτό δε συμβαίνει γενικά για το σύνολο  $\bar{\Delta}(s)$  που δεν περιλαμβάνει απαραίτητα το σύνολο  $\Delta(s)$ . Ακόμα και η αντίστροφη εικόνα του  $\mathbf{E}(s)$  στο χώρο των παραμέτρων ενδέχεται να περιλαμβάνει σημεία έξω από το σύνολο  $\Pi$ .

Εναλλακτικά σαν συνθήκη για εύρωστη ευστάθεια της  $\Delta(s)$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή της φραγμένης φάσης. Με  $\Phi_{\Delta_V}(s^*)$  συμβολίζουμε το σύνολο των γωνιών που σχηματίζουν ως προς την αρχή των αξόνων τα σημεία του  $\Delta_V(s^*)$  σε σχέση με μια τυχαία κορυφή. Η  $\bar{\Delta}(s)$  ή το  $\mathbf{E}(s)$  είναι ευσταθές αν ικανοποιείται η συνθήκη η διαφορά φάσης μεταξύ των κορυφών του συνόλου  $\Delta_V(s^*)$  που συμβάλλουν στη μέγιστη και την ελάχιστη γωνία να είναι μικρότερη από  $\pi$  ακτίνια όπως διατυπώνεται στο Θεώρημα που ακολουθεί. Στο Θεώρημα αυτό δεχόμαστε ότι όλα τα πολυώνυμα της  $\Delta(s)$  έχουν τον ίδιο βαθμό και ότι ένα τουλάχιστον πολυώνυμο της είναι ευσταθές.

**Θεώρημα 9.3.** *Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω υποθέσεις η  $\Delta(s)$  είναι ευσταθής σε σχέση με την περιοχή ευστάθειας  $\mathcal{S}$  αν*

$$\Phi_{\Delta_V}(s^*) < \pi, \quad \forall s^* \in \vartheta\mathcal{S}.$$

## 9.4 Βελτίωση των προσεγγίσεων μέσω κυρτών συνόλων

Από τη στιγμή που η συνθήκη για εύρωστη ευστάθεια των  $\bar{\Delta}(s)$  ή  $\mathbf{E}(s)$  αποτελεί μόνο ικανή συνθήκη για την ευστάθεια της  $\Delta(s)$  η ευστάθεια του  $\mathbf{E}(s)$  θα μπορούσε να παραβιάζεται αλλά η  $\Delta(s)$  να είναι ευσταθής. Αυτό είναι δυνατόν να συμβεί γιατί η εικόνα του κυρτού συνόλου στο μιγαδικό επίπεδο  $\bar{\Delta}(s^*)$  που καθορίζεται από τις κορυφές της εικόνας συνόλου  $\Delta(s^*)$  μπορεί να διαθέτει μεγάλες περιοχές οι οποίες δε συμπίπτουν με την  $\Delta(s^*)$  της οποίας μας ενδιαφέρει η εύρωστη ευστάθεια. Για να αντιμετωπίσουμε την κατάσταση αυτή μπορούμε να καταστήσουμε την ικανή συνθήκη του Θεωρήματος 9.2 πιο περιοριστική εισάγοντας επιπλέον κορυφές που θα επιτρέψουν στην  $\bar{\Delta}(s^*)$  να αποκτήσει ένα περίγραμμα πιο κοντά στην εικόνα συνόλου  $\Delta(s^*)$  που θέλουμε να προσεγγίσουμε.

Συγκεκριμένα περισσότερες κορυφές μπορούν να εισαχθούν στην ανάλυση χωρίζοντας το πολύτοπο των παραμέτρων σε μικρότερα πολύτοπα  $\Pi_i$

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^t \Pi_i.$$

Έστω  $\mathbf{V}_i$  οι κορυφές του πολύτοπου  $\Pi_i$ . Αν με  $\Delta_{\mathbf{V}_i}$  και  $\mathbf{E}_i$  συμβολίσουμε αντίστοιχα τις κορυφές και τις ακμές των εικόνων των συνόλων που παράγονται από την πολυγραμμική απεικόνιση των

πολυτόπων  $\Pi_i$  τότε για κάθε σημείο  $z^*$  της μιγαδικής εικόνας του  $\Delta$  ισχύει ότι

$$\Delta(z^*) \subset \bigcup_{i=1}^t \text{co}\Delta_{V_i}(z^*) = \bigcup_{i=1}^t \text{co}\mathbf{E}_i(z^*).$$

Ο έλεγχος της ευστάθειας της πολυγραμμικής οικογένειας μετατίθεται στον έλεγχο της ευστάθειας των ακμών  $\mathbf{E}_i$ . Αν με  $\bar{\Delta}_{V_i}(z)$  συμβολίσουμε τα κυρτά περιβλήματα που ορίζονται από τα σύνολα κορυφών  $V_i$  τότε το μη κυρτό σύνολο  $\bigcup_{i=1}^t \bar{\Delta}_{V_i}(z)$  μας βοηθάει να προσεγγίσουμε καλύτερα την  $\Delta(z)$  καθώς αυξάνει ο αριθμός  $t$  των πολυτόπων  $\Pi_i$  στα οποία διαμερίζουμε το  $\Pi$ . Άμεσα επομένως προκύπτει ότι μπορούμε να βελτιώσουμε την προσέγγιση σε όποιο επίπεδο ακρίβειας επιθυμούμε αυξάνοντας το βαθμό της διαμέρισης του πολυτόπου  $\Pi$  και κατ' επέκταση τον αριθμό των ακμών που πρέπει να ελέγξουμε.

## 9.5 Πολυγραμμικά συστήματα διαστήματος

Θεωρούμε συναρτήσεις μεταφοράς που δίνονται σαν το πηλίκο πολυγραμμικών πολυωνύμων διαστήματος. Συστήματα που περιγράφονται από τέτοιου είδους συναρτήσεις μεταφοράς ονομάζονται πολυγραμμικά συστήματα διαστήματος (multilinear interval systems). Στόχος μας είναι να αναλύσουμε συστήματα ανάδρασης που περιλαμβάνουν συστήματα προς έλεγχο των οποίων η συνάρτηση μεταφοράς ανήκει στην παραπάνω κατηγορία. Με  $M(s)$  συμβολίζουμε μια τέτοια συνάρτηση μεταφοράς

$$M(s) = \frac{N(s, \mathbf{q})}{D(s, \mathbf{r})},$$

όπου  $\mathbf{q}$  και  $\mathbf{r}$  είναι ανεξάρτητες παράμετροι διαστήματος των πολυγραμμικών πολυωνύμων διαστήματος  $N$  και  $D$ . Με  $\mathbf{N}(s)$  και  $\mathbf{D}(s)$  συμβολίζουμε τις οικογένειες πολυωνύμων που περιλαμβάνουν πολυώνυμα της μορφής  $N(s, \mathbf{q})$  και  $D(s, \mathbf{r})$  και προκύπτουν για  $\mathbf{q}$  και  $\mathbf{r}$  που ανήκουν στα παραλληλεπίπεδα  $\mathbf{Q}$  και  $\mathbf{R}$ , αντίστοιχα με ακμές παράλληλες προς τους άξονες. Η οικογένεια πολυγραμμικών συστημάτων διαστήματος  $\mathbf{M}(s)$  ορίζεται τότε από τη σχέση

$$\mathbf{M}(s) \equiv \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)}.$$

Έστω ότι  $V_Q$  είναι το σύνολο κορυφών του  $\mathbf{Q}$  ενώ  $\mathbf{N}_V(s)$  είναι το αντίστοιχο σύνολο πολυωνύμων κορυφής

$$\mathbf{N}_V(s) = \{N_1(s), N_2(s), \dots, N_k(s)\}.$$

Με  $\bar{\mathbf{N}}(s)$  συμβολίζουμε το κυρτό περίβλημα που καθορίζεται από το σύνολο κορυφών  $\mathbf{N}_V(s)$

$$\bar{\mathbf{N}}(s) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i N_i(s) : N_i(s) \in \mathbf{N}_V(s), \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Με αντίστοιχο τρόπο ορίζουμε τα σύνολα  $\mathbf{V}_R$ ,  $\mathbf{D}_V(s)$  και  $\bar{\mathbf{D}}(s)$ . Με τα παραπάνω σύνολα υπόψη γράφουμε τα ακόλουθα σύνολα συναρτήσεων μεταφοράς

$$\mathbf{M}_V(s) = \frac{\mathbf{N}_V(s)}{\mathbf{D}_V(s)}, \quad \bar{\mathbf{M}}(s) = \frac{\bar{\mathbf{N}}(s)}{\bar{\mathbf{D}}(s)}.$$

Από το Θεώρημα της Απεικόνισης γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο  $s^* \in \mathbb{C}$  οι εικόνες των συνόλων  $\mathbf{N}(s)$  και  $\mathbf{D}(s)$  περιλαμβάνουν την εικόνα των κορυφών τους και φράζονται εξωτερικά από τις εικόνες των πολυτοπικών οικογενειών  $\bar{\mathbf{N}}(s)$  και  $\bar{\mathbf{D}}(s)$ , δηλαδή ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_V(s^*) &\subset \mathbf{N}(s^*) \subset \bar{\mathbf{N}}(s^*) \\ \mathbf{D}_V(s^*) &\subset \mathbf{D}(s^*) \subset \bar{\mathbf{D}}(s^*). \end{aligned}$$

Επειδή το  $\mathbf{D}(s)$  εμφανίζεται στον παρονομαστή του  $\mathbf{M}(s)$  κάνοντας την υπόθεση ότι  $0 \notin \bar{\mathbf{D}}(s^*)$  εξασφαλίζουμε ότι το μηδέν δεν αποτελεί στοιχείο των  $\mathbf{D}(s)$  και  $\mathbf{D}_V(s)$  για κανένα  $s^* \in \mathbb{C}$ . Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εικόνα του συνόλου  $\mathbf{M}(s)$  περιέχει την εικόνα του συνόλου των κορυφών  $\mathbf{M}_V(s)$  και φράζεται εξωτερικά από την εικόνα του  $\bar{\mathbf{M}}(s)$ . Αυτό διατυπώνεται τυπικά στο Λήμμα που ακολουθεί.

**Λήμμα 9.1.**  $\mathbf{M}_V(s^*) \subset \mathbf{M}(s^*) \subset \bar{\mathbf{M}}(s^*)$ .

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Απεικόνισης μπορούμε να αντικαταστήσουμε την  $\mathbf{M}(s)$  με την  $\bar{\mathbf{M}}(s)$  από την οποία τελικά μπορεί να υπολογιστεί ένα κάτω φράγμα στο περιθώριο ευστάθειας ή σε άλλα κριτήρια επίδοσης ενός συστήματος ελέγχου γεγονός που περιγράφεται από το Θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 9.4.** *Με την υπόθεση ότι ο βαθμός των πολυωνύμων εντός των  $\mathbf{M}(s)$  και  $\bar{\mathbf{M}}(s)$  παραμένει αμετάβλητος το σύστημα ελέγχου που περιγράφεται από συναρτήσεις μεταφοράς  $M(s) \in \mathbf{M}(s)$  διαθέτει εύρωστη ευστάθεια αν εξακολουθεί να είναι ευσταθές για κάθε  $M(s) \in \bar{\mathbf{M}}(s)$ .*

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι το παραπάνω Θεώρημα ισχύει για οποιαδήποτε περιοχή ευστάθειας με την ευστάθεια Hurwitz και Schur να αποτελούν ειδικές περιπτώσεις.

Στα κριτήρια επίδοσης που εξετάσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια ανήκουν το περιθώριο κέρδους, το περιθώριο φάσης καθώς και η παραμετρική ακτίνα ευστάθειας όσον αφορά στο διάνυσμα παραμέτρων  $\mathbf{p}$ . Με  $\mu$  θα αναφερόμαστε από εδώ και στο εξής σε οποιοδήποτε από τα παραπάνω κριτήρια επίδοσης. Είναι φανερό ότι μεγαλύτερες τιμές του  $\mu$  συνιστούν καλύτερες επιδόσεις. Με  $\mu^*$  θα συμβολίσουμε τη χειρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το  $\mu$  για συναρτήσεις μεταφοράς  $M(s)$  που ανήκουν στο σύνολο  $\mathbf{M}(s)$ , με  $\underline{\mu}$  θα συμβολίσουμε τη χειρότερη τιμή του  $\mu$  για  $M(s) \in \bar{\mathbf{M}}(s)$  ενώ με  $\bar{\mu}$  θα αναφερόμαστε στη χειρότερη τιμή του  $\mu$  όσον αφορά  $M(s) \in \mathbf{M}_V(s)$ . Αυτό που προφανώς ισχύει είναι ότι

$$\underline{\mu} \leq \mu^* \leq \bar{\mu}.$$

Το  $\underline{\mu}$  μπορεί να υπολογιστεί επακριβώς αφού το  $\bar{\mathbf{M}}(s)$  είναι ένα πολυτοπικό σύνολο. Όπως είδαμε και προηγουμένως η εικόνα του συνόλου  $\bar{\mathbf{M}}(s)$  μπορεί να προσεγγίσει καλύτερα την εικόνα συνόλου του  $\mathbf{M}(s)$  για  $s$  που παίρνει τιμές πάνω στο σύνορο της περιοχής ευστάθειας αν διαμερίσουμε το κουτί  $\Pi$  του παραμετρικού συνόλου σε μικρότερα κουτιά  $\Pi_i$ . Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η τιμή του  $\underline{\mu}$  που θα συνδεθεί με μία τέτοια βελτιωμένη διαμέριση να είναι πιο κοντά στην πραγματική  $\mu^*$ , με άλλα λόγια δηλαδή θα οδηγηθούμε σε ένα πιο ακριβές κάτω φράγμα στην πραγματική τιμή του  $\mu^*$ . Από την άλλη το άνω φράγμα στο  $\mu^*$  μπορεί εύκολα να υπολογιστεί αφού είναι το ελάχιστο μεταξύ των  $\mu$  που προκύπτουν για τα σημεία των κορυφών. Με την ίδια λογική η διαίρεση του  $\Pi$  σε μικρότερα τμήματα θα εισάγει επιπλέον κορυφές και θα οδηγήσει τελικά σε μείωση του άνω φράγματος  $\bar{\mu}$  που θα πλησιάσει την πραγματική τιμή  $\mu^*$ . Έτσι λοιπόν τα κριτήρια επίδοσης για τη χειρότερη περίπτωση που αφορά στο παραμετρικό σύνολο  $\Pi$  μπορούν να γίνουν όσο επιθυμούμε ακριβή συμπερίζοντας την ακριβή τιμή μεταξύ ολοένα και καλύτερων κάτω και άνω φραγμάτων που προκύπτουν από τη διαδικασία διαίρεσης του  $\Pi$  σε μικρότερα τμήματα.

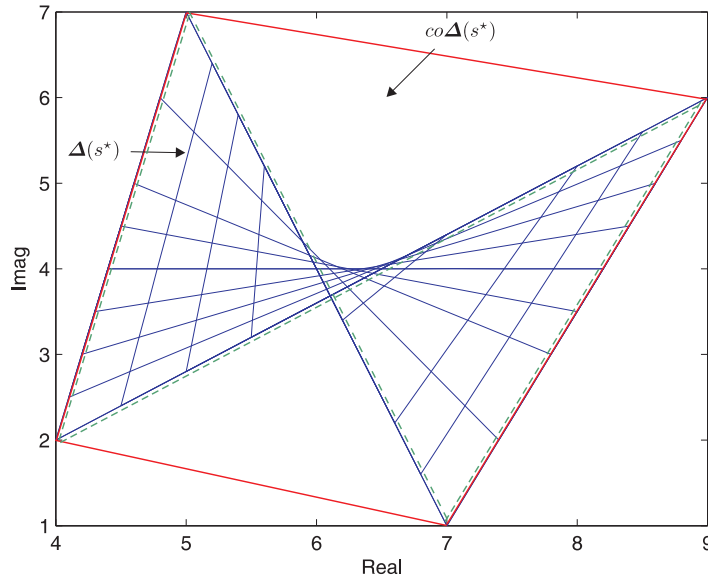
Στην ανάλυσή μας μέχρι τώρα κάναμε την υπόθεση ότι τα διανύσματα παραμέτρων  $\mathbf{q}$  και  $\mathbf{r}$  που εμφανίζονται στον αριθμητή και τον παρονομαστή μιας πολυγραμμικής οικογένειας συστημάτων διαστήματος  $\mathbf{M}(s)$  είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Δεν εξετάσαμε όμως πως τα συμπεράσματα μας μπορούν να επεκταθούν στην περίπτωση μιας πολυγραμμικής οικογένειας συστημάτων  $\mathbf{H}(s)$  με εξαρτήσεις μεταξύ των παραμέτρων αβεβαιότητας. Ο περιορισμός αυτός μπορεί να αρθεί στην περίπτωση που κάθε  $H(s) \in \mathbf{H}(s)$  μπορεί να προκύψει μέσω ενός γραμμικού κλασματικού μετασχηματισμού  $F(M(s))$  για  $M(s)$  που ανήκουν σε πολυγραμμική οικογένεια συστημάτων διαστήματος  $\mathbf{M}(s)$  με ανεξαρτησία των παραμέτρων αβεβαιότητας των πολυωνύμων του αριθμητή και του παρονομαστή. Στην περίπτωση αυτή η ιδιότητα της εικόνας του συνόλου της πολυτοπικής οικογένειας  $\bar{\mathbf{M}}(s)$  να περιλαμβάνει την εικόνα συνόλου της  $\mathbf{M}(s)$  διατηρείται από το γραμμικό κλασματικό μετασχηματισμό για κάθε  $s^* \in \mathbb{C}$

$$F(\mathbf{M}(s^*)) \subset F(\bar{\mathbf{M}}(s^*)).$$

Επομένως οι προϋποθέσεις για εύρωστη ευστάθεια και όλα τα κριτήρια επίδοσης μπορούν να εφαρμοστούν ακόμα και όταν παρουσιάζονται εξαρτήσεις μεταξύ των παραμέτρων αφού υπάρχουν γραμμικοί κλασματικοί μετασχηματισμοί που μπορούν να καλύψουν ένα μεγάλο εύρος τέτοιων εξαρτήσεων.

## 9.6 Παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή θα δούμε πως η εικόνα μιας πολυγραμμικής οικογένειας στο μιγαδικό επίπεδο φράζεται από το κυρτό περίβλημα που παράγεται από τα πολυώνυμα κορυφής της. Επίσης θα επιβεβαιώσουμε γραφικά τη διαδικασία με την οποία μπορούμε με ένωση κυρτών συνόλων να



Σχήμα 9.1: Η εικόνα συνόλου μιας πολυγραμμικής οικογένειας για  $s^* = j1$  καθώς και το κυρτό περίβλημα που την περικλείει.

αποκτήσουμε μια βελτιωμένη προσέγγιση του συνόλου που περικλείει την εικόνα της οικογένειας στο μιγαδικό επίπεδο.

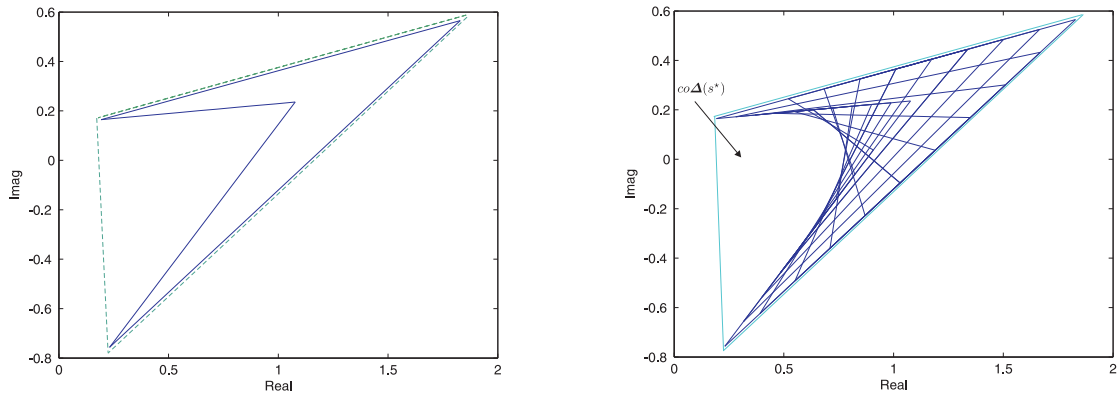
**Παράδειγμα 9.1.** Θεωρούμε το πολυγραμμικό πολυώνυμο διαστήματος που δίνεται από τη σχέση

$$\delta(s, \mathbf{p}) = p_1 Q_1(s) + p_2 Q_2(s) + p_1 p_2 Q_3(s) + Q_4(s),$$

με  $Q_1(s) = -6s + 2$ ,  $Q_2(s) = -5s - 1$ ,  $Q_3(s) = 10s + 3$ ,  $Q_4(s) = 7s + 5$ . Το διάνυσμα των παραμέτρων  $\mathbf{p} = [p_1, p_2]$  παίρνει τιμές εντός της τετραγωνικής περιοχής τιμών  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Η εικόνα συνόλου  $\Delta(s^*, \mathbf{p})$  της πολυγραμμικής οικογένειας για  $s^* = j1$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 9.1. Με τις μπλε γραμμές σημειώνουμε κάποια από τα διαστήματα τιμών που λαμβάνει η εικόνα της πολυγραμμικής οικογένειας στο μιγαδικό επίπεδο ενώ με την πράσινη διακεκομμένη γραμμή σημειώνουμε τις ακμές της οικογένειας. Παρατηρούμε ότι μια περιοχή της εικόνας βρίσκεται έξω από την περιοχή που οριοθετείται από τις ακμές. Γι' αυτό το λόγο καταφεύγουμε στο πολύτοπο  $co\Delta(s^*)$  που παράγεται από τα πολυώνυμα κορυφής και εντός των ακμών του οποίου περικλείεται όλη η μιγαδική εικόνα της οικογένειας. Στο Σχήμα 9.1 οι ακμές του πολύτοπου σημειώνονται με κόκκινο χρώμα.

**Παράδειγμα 9.2.** Έστω ένα πολυώνυμο μιας πολυγραμμικής οικογένειας το οποίο περιγράφεται από τη σχέση

$$\delta(s, \mathbf{p}) = Q_0(s) + p_1 Q_1(s) + p_2 Q_2(s) + p_1 p_2 Q_3(s)$$



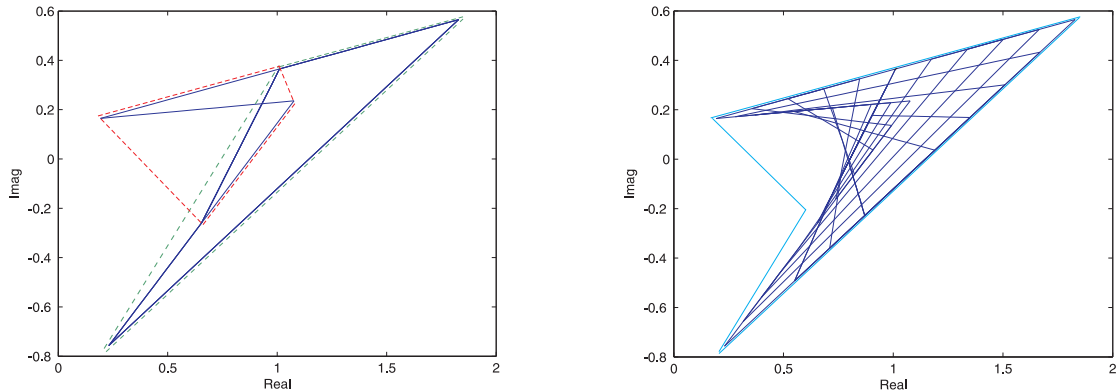
Σχήμα 9.2: Αριστερά απεικονίζονται οι ακμές της πολυγραμμικής οικογένειας για  $[p_1, p_2] \in \Pi$  και  $\omega = 0.85$  ενώ δεξιά απεικονίζεται το κυρτό περίβλημα που τις περιλαμβάνει.

με

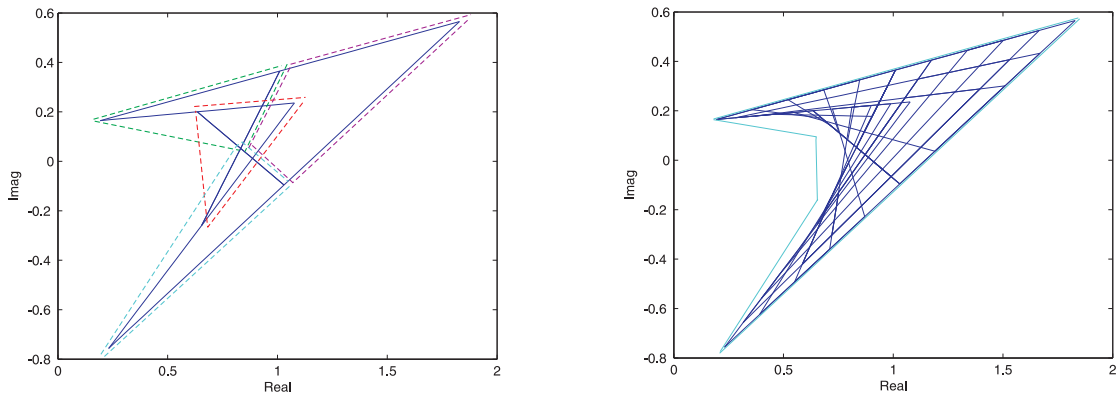
$$\begin{aligned}
 Q_0(s) &= s^4 + s^3 + 2s^2 + s + 2 \\
 Q_1(s) &= 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + s + 1 \\
 Q_2(s) &= 1.5s^4 + 1.5s^3 + 3s^2 + s + 0.5 \\
 Q_3(s) &= 3s^4 + 0.5s^3 + 1.5s^2 + 2s + 2.
 \end{aligned}$$

Το παραμετρικό διάνυσμα  $[p_1, p_2]$  παίρνει τιμές εντός της περιοχής  $\Pi = [0, 1] \times [0, 1]$ . Στην αριστερή απεικόνιση του Σχήματος 9.2 εμφανίζονται με συνεχόμενη μπλε γραμμή οι ακμές της εικόνας συνόλου της πολυγραμμικής οικογένειας για  $\omega = 0.85$  ενώ στη δεξιά απεικόνιση του Σχήματος 9.2 με γαλάζιο χρώμα σημειώνεται το κυρτό περίβλημα των ακμών που περικλείει τη μιγαδική εικόνα. Παρατηρούμε ότι στο εσωτερικό του κυρτού συνόλου υπάρχει μια μεγάλη περιοχή που δεν καλύπτεται από την εικόνα συνόλου της πολυγραμμικής οικογένειας γεγονός που αφήνει περιθώρια για σημαντική βελτίωση της προσέγγισης κάτι που θα επιδιώξουμε στα επόμενα βήματά μας.

Σε ένα πρώτο βήμα θεωρούμε μια διαμέριση 2 τμημάτων  $\Pi_1 = [0, 1] \times [0, 0.5]$  και  $\Pi_2 = [0, 1] \times [0.5, 1]$  του αρχικού παραμετρικού συνόλου. Στην αριστερή εικόνα του Σχήματος 9.3 απεικονίζονται με τις διακεκομμένες γραμμές διαφορετικού χρώματος τα κυρτά περιβλήματα που περιλαμβάνουν τις ακμές που σημειώνονται με συνεχή μπλε γραμμή για  $[p_1, p_2] \in \Pi_1$  και  $[p_1, p_2] \in \Pi_2$ , αντίστοιχα. Στη δεξιά εικόνα απεικονίζεται με τη συνεχή γαλάζια γραμμή το σύνολο της ένωσης των εν λόγω κυρτών περιβλημάτων. Η ένωση δεν αποτελεί κυρτό σύνολο αλλά είναι μια καλύτερη προσέγγιση της εικόνας της οικογένειας σε σχέση με εκείνη που παρουσιάστηκε στο Σχήμα 9.2.



Σχήμα 9.3: Αριστερά απεικονίζονται τα κυρτά περιβλήματα που αντιστοιχούν σε διαμέριση του  $\Pi$  σε δύο τμήματα ενώ δεξιά με τη γαλάζια γραμμή απεικονίζεται η ένωση τους.



Σχήμα 9.4: Αριστερά απεικονίζονται τα κυρτά περιβλήματα που αντιστοιχούν σε διαμέριση του  $\Pi$  σε 4 τμήματα ενώ δεξιά με τη γαλάζια γραμμή απεικονίζεται η ένωση τους.

Σε ένα περαιτέρω βήμα βελτίωσης της προσέγγισης θα προχωρήσουμε σε μια διαμέριση 4 τμημάτων  $\Pi_1 = [0, 0.5] \times [0, 0.5]$ ,  $\Pi_2 = [0.5, 1] \times [0, 0.5]$ ,  $\Pi_3 = [0, 0.5] \times [0.5, 1]$  και  $\Pi_4 = [0.5, 1] \times [0.5, 1]$  του αρχικού συνόλου  $\Pi$ . Στην αριστερή εικόνα του Σχήματος 9.4 απεικονίζονται με τις διακεκομμένες γραμμές διαφορετικού χρώματος τα κυρτά περιβλήματα που περιλαμβάνουν τις ακμές που σημειώνονται με συνεχή μπλε γραμμή για  $[p_1, p_2] \in \Pi_1$ ,  $[p_1, p_2] \in \Pi_2$ ,  $[p_1, p_2] \in \Pi_3$  και  $[p_1, p_2] \in \Pi_4$ , αντίστοιχα. Στη δεξιά εικόνα απεικονίζεται με τη συνεχή γαλάζια γραμμή η ένωση των εν λόγω κυρτών συνόλων που αποτελεί και την καλύτερη από τις προσεγγίσεις της εικόνας συνόλου της οικογένειας που έχουμε παρουσιάσει.





# Κεφάλαιο 10

## Ιδιότητες του Πεδίου Συχνότητας των Πολυγραμμικών Συστημάτων Διαστήματος

Στο κεφάλαιο αυτό αντικείμενο της μελέτης μας θα αποτελέσει η εύρωστη ευστάθεια κατά Hurwitz συστημάτων ελέγχου των οποίων οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι πηλικά πολυγραμμικών πολυωνύμων διαστήματος. Για την περίπτωση της ευστάθειας αυτής θα επεκτείνουμε το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov στα πολυγραμμικά πολυώνυμα διαστήματος [14], [13]. Η επέκταση στην καινούργια οικογένεια πολυωνύμων θα μας επιτρέψει να αποκτήσουμε ένα σύνολο από ακραίες πολλαπλότητες στο οποίο μπορούμε να περιοριστούμε για να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο για εύρωστη ευστάθεια. Οι πολλαπλότητες που προκύπτουν παίζουν αντίστοιχο ρόλο με τα ακραία τμήματα που προέκυψαν για τη γραμμική περίπτωση και φέρουν την Ιδιότητα Παραγωγής του Συνόρου που επιτρέπει μέσω μόνο της πληροφορίας που διαθέτουν οι πολλαπλότητες αυτές την παραγωγή των φακέλων Bode και Nyquist καθώς και τον υπολογισμό των περιθωρίων ευστάθειας.

### 10.1 Εισαγωγή

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με αρνητική ανάδραση που περιλαμβάνει ένα δεδομένο ελεγκτή  $F(s)$  και δύο ανεξάρτητα υποσυστήματα  $G_1(s)$  και  $G_2(s)$  σε σειρά με αβεβαιότητα στις παραμέτρους τους. Οι συναρτήσεις μεταφοράς του ελεγκτή και των υποσυστημάτων είναι

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}, \quad G_1(s) = \frac{P_{11}(s)}{P_{21}(s)}, \quad G_2(s) = \frac{P_{12}(s)}{P_{22}(s)}.$$

Θεωρούμε ότι τα υποσυστήματα  $G_1(s)$  και  $G_2(s)$  αποτελούν συγκεκριμένες υλοποιήσεις για δεδομένες τιμές των παραμέτρων των οικογενειών διαστήματος  $\mathbf{G}_1(s)$ ,  $\mathbf{G}_2(s)$ . Η συνάρτηση μετα-

φοράς κλειστού βρόχου δίνεται από τη σχέση

$$T^c(s) = \frac{F_1(s)P_{11}(s)P_{12}(s)}{F_1(s)P_{11}(s)P_{12}(s) + F_2(s)P_{21}(s)P_{22}(s)}$$

από την οποία προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος

$$\delta(s) = F_1(s)P_{11}(s)P_{12}(s) + F_2(s)P_{21}(s)P_{22}(s). \quad (10.1)$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς διαθέτει αριθμητή και παρονομαστή που είναι πολυγραμμικό πολυώνυμο διαστήματος. Επιπλέον όμως στην  $T^c(s)$  ο αριθμητής και ο παρονομαστής περιλαμβάνουν κοινά πολυώνυμα διαστήματος. Το Θεώρημα της Απεικόνισης όπως εφαρμόστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο μας επέτρεψε να διαπιστώσουμε την ευστάθεια σε αυθαίρετη περιοχή καθώς και να υπολογίσουμε τα κριτήρια επίδοσης για τη χειρότερη περίπτωση. Εδώ θα επικεντρωθούμε μόνο στην περίπτωση της ευστάθειας κατά Hurwitz ώστε να είναι δυνατή η επέκταση του Γενικευμένου Θεωρήματος Kharitonov στα πολυγραμμικά συστήματα. Στόχος μας είναι το κριτήριο που θα προκύψει από τη νέα εκδοχή του Γενικευμένου Θεωρήματος Kharitonov να μας δώσει ένα ακραίο σύνολο με αριθμό διαστάσεων ανεξάρτητο από τη διάσταση του παραμετρικού χώρου από το οποίο θα μπορέσουμε να αντλήσουμε όλες τις πληροφορίες που αφορούν στην εύρωστη ευστάθεια και στα κριτήρια επίδοσης.

## 10.2 Πολυγραμμικά πολυώνυμα διαστήματος

Θεωρούμε στη συνέχεια χαρακτηριστικά πολυώνυμα της μορφής (10.1). Έστω  $\mathbf{p}$  το διατεταγμένο σύνολο των συντελεστών των πολυωνύμων  $\{P_{11}(s), P_{12}(s), P_{21}(s), P_{22}(s)\}$ . Κάνουμε την υπόθεση ότι οι συντελεστές μεταβάλλονται εντός διαστημάτων που είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο  $\mathbf{\Pi}$  με ακμές παράλληλες προς τους άξονες. Η διάσταση αυτού του παραμετρικού χώρου είναι ίση με τον αριθμό των ανεξάρτητων παραμέτρων. Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια όταν χρησιμοποιούμε έντονο συμβολισμό θα είναι για να δηλώσουμε την οικογένεια του πολυωνύμου διαστήματος. Με  $K_{ij}$  και  $S_{ij}$  θα συμβολίζουμε τα πολυώνυμα Kharitonov και τα τμήματα Kharitonov που αντιστοιχούν στην οικογένεια  $\mathbf{P}_{ij}$ . Συμβολίζουμε με  $\Delta(s)$  την πολυγραμμική οικογένεια

$$\Delta(s) = F_1(s)\mathbf{P}_{11}(s)\mathbf{P}_{12}(s) + F_2(s)\mathbf{P}_{21}(s)\mathbf{P}_{22}(s). \quad (10.2)$$

Ορίζουμε τις ακραίες πολλαπλότητες που συνδέονται με την (10.2)

$$\begin{aligned} \Delta_E^1(s) &= F_1(s)S_{11}(s)S_{12}(s) + F_2(s)K_{21}(s)K_{22}(s) \\ \Delta_E^2(s) &= F_1(s)K_{11}(s)K_{12}(s) + F_2(s)S_{21}(s)S_{22}(s). \end{aligned}$$

Δηλώνουμε με  $\Delta_E(s)$  την ένωση των δύο παραπάνω συνόλων

$$\Delta_E(s) = \Delta_E^1(s) \cup \Delta_E^2(s).$$

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το επόμενο Λήμμα που παραπέμπει τον έλεγχο για την ευστάθεια κατά Hurwitz στον έλεγχο του ακραίου συνόλου  $\Delta_E(s)$ .

**Λήμμα 10.1.** *Με την υπόθεση ότι κάθε πολυώνυμο της  $\Delta(s)$  είναι του ιδίου βαθμού και οι παράμετροι των  $\mathbf{P}_{11}(s)$ ,  $\mathbf{P}_{12}(s)$ ,  $\mathbf{P}_{21}(s)$  και  $\mathbf{P}_{22}(s)$  μεταβάλλονται ανεξάρτητα, η  $\Delta(s)$  είναι ευσταθής κατά Hurwitz αν και μόνο αν η  $\Delta_E(s)$  είναι ευσταθής κατά Hurwitz.*

*Απόδειξη.* Για την απόδειξη του Λήμματος αρκεί να εφαρμόσουμε επαναληπτικά το Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov (ΓΘΚ). Συγκεκριμένα αν στην (10.2) στη θέση των  $\mathbf{P}_{12}(s)$  και  $\mathbf{P}_{22}(s)$  θέσουμε συγκεκριμένα πολυώνυμα  $P_{12}(s)$  και  $P_{22}(s)$  τότε καταλήγουμε σε ένα σύστημα διαστήματος για του οποίου την ευστάθεια απαιτείται η ευστάθεια των κάτωθι οικογενειών

$$F_1(s)S_{11}(s)P_{12}(s) + F_2(s)K_{21}(s)P_{22}(s) \quad (10.3)$$

$$F_1(s)K_{11}(s)P_{12}(s) + F_2(s)S_{21}(s)P_{22}(s) \quad (10.4)$$

για κάθε  $P_{12}(s) \in \mathbf{P}_{12}(s)$  και  $P_{22}(s) \in \mathbf{P}_{22}(s)$ . Αν επανεισάγουμε την αβεβαιότητα στις (10.3) και (10.4) μέσω των  $\mathbf{P}_{12}(s)$  και  $\mathbf{P}_{22}(s)$  μπορούμε να εφαρμόσουμε εκ νέου το ΓΘΚ στο σύστημα διαστήματος που προέκυψε. Για την ευστάθεια της (10.3) απαιτείται ισοδύναμα ο έλεγχος των

$$F_1(s)S_{11}(s)S_{12}(s) + F_2(s)K_{21}(s)K_{22}(s) \quad (10.5)$$

$$F_1(s)S_{11}(s)K_{12}(s) + F_2(s)K_{21}(s)S_{22}(s) \quad (10.6)$$

ενώ για την ευστάθεια της (10.4) ο έλεγχος των

$$F_1(s)K_{11}(s)K_{12}(s) + F_2(s)S_{21}(s)S_{22}(s). \quad (10.7)$$

$$F_1(s)K_{11}(s)S_{12}(s) + F_2(s)S_{21}(s)K_{22}(s). \quad (10.8)$$

Οι (10.6) και (10.8) αποτελούν πολυτοπικές οικογένειες πολυωνύμων στις οποίες μπορεί να εφαρμοσθεί το Θεώρημα των Ακμών το οποίο αντιμετωπίζει το πρόβλημα της εύρωστης ευστάθειας μιας πολυτοπικής οικογένειας σαν πρόβλημα ευστάθειας των ακμών της. Μετά την εφαρμογή του Θεωρήματος μπορεί να διαπιστωθεί ότι οι μονοπαραμετρικές οικογένειες που προκύπτουν περιέχονται στις (10.5) και (10.7) αφού τα τμήματα Kharitonov των (10.5) και (10.7) περιλαμβάνουν τα αντίστοιχα πολυώνυμα Kharitonov των (10.6) και (10.8) ως ακραία τους σημεία.  $\square$

Τα συμπεράσματα του Λήμματος μπορούν να επεκταθούν και στη γενικότερη περίπτωση που

μας απασχολεί η ευστάθεια πολυγραμμικών πολυωνύμων διαστήματος της μορφής

$$\Delta(s) = F_1(s)\mathbf{P}_{11}(s) \cdots \mathbf{P}_{1r_1}(s) + \cdots + F_m\mathbf{P}_{m1}(s) \cdots \mathbf{P}_{mr_m}(s). \quad (10.9)$$

Για την περίπτωση αυτή οι ακραίες πολλαπλότητες ορίζονται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \Delta_E^l(s) &= F_1(s)K_{11}(s) \cdots K_{1,r_1}(s) + \cdots + F_{l-1}K_{l-1,1}(s) \cdots K_{l-1,r_{l-1}}(s) \\ &+ F_l(s)S_{l,1}(s) \cdots S_{l,r_l}(s) + F_{l+1}K_{l+1,1}(s) \cdots K_{l+1,r_{l+1}}(s) \\ &+ \cdots + F_m(s)K_{m,1}(s) \cdots K_{m,r_m}(s) \end{aligned} \quad (10.10)$$

και η ένωσή τους είναι

$$\Delta_E(s) = \bigcup_{l=1}^m \Delta_E^l(s). \quad (10.11)$$

Στην οικογένεια  $\Delta_E(s)$  έγκειται ο προσδιορισμός της ευστάθειας κατά Hurwitz ενός πολυγραμμικού πολυωνύμου διαστήματος σύμφωνα με το Θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 10.1.** *Με την υπόθεση ότι κάθε πολυώνυμο της  $\Delta(s)$  είναι του ιδίου βαθμού και οι παράμετροι στα πολυώνυμα διαστήματος  $\mathbf{P}_{ij}(s)$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε η  $\Delta(s)$  είναι ευσταθής κατά Hurwitz αν και μόνο αν η  $\Delta_E(s)$  είναι ευσταθής κατά Hurwitz.*

Αυτό που μπορεί κάποιος να παρατηρήσει είναι ότι η διάσταση των πολλαπλοτήτων στην οικογένεια  $\Delta_E(s)$  είναι όση και ο αριθμός των πολυωνύμων διαστήματος που συμμετέχουν στους όρους του αθροίσματος της  $\Delta(s)$ . Ανεξάρτητα λοιπόν από τη διάσταση του παραμετρικού χώρου που μπορεί να αυξηθεί αυθαιρέτως η διάσταση των πολυωνυμικών οικογενειών που πρέπει να ελεγχθούν για ευστάθεια παραμένει ανεπηρέαστη.

## 10.2.1 Εξαρτήσεις μεταξύ των διαταραχών

Για να ισχύει το Θεώρημα 10.1 βασική προϋπόθεση είναι η ανεξαρτησία των παραμέτρων των πολυωνύμων  $P_{ij}(s)$ . Παρ' ολ' αυτά σε πολλά συστήματα με βρόχους η προϋπόθεση αυτή δεν ικανοποιείται αφού κάποια από τα πολυώνυμα  $P_{ij}$  ενδέχεται να είναι όμοια μεταξύ τους. Ακόμα και σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να χειριστούμε τις εξαρτήσεις εφαρμόζοντας διαδοχικά το ΓΘΚ. Αντί να διατυπώσουμε μια γενικευμένη θεωρία για το χειρισμό εξαρτήσεων μεταξύ των διαταραχών μπορούμε να παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα όπου τα πολυώνυμα διαστήματος εμφανίζουν μεταξύ τους εξαρτήσεις. Έστω η οικογένεια

$$\delta(s, \mathbf{p}) = F_1(s)P_{11}(s)P_{12}(s) + F_2(s)P_{21}(s)P_{22}(s) + F_3(s)P_{31}(s)P_{32}(s),$$

όπου  $P_{11}(s) = P_{21}(s)$  και  $P_{22}(s) = P_{32}(s)$ . Ενσωματώνοντας τις εξαρτήσεις η παραπάνω οικογένεια γίνεται

$$\delta(s, \mathbf{p}) = F_1(s)P_{11}(s)P_{12}(s) + F_2(s)P_{11}(s)P_{22}(s) + F_3(s)P_{31}(s)P_{22}(s).$$

Αρχικά θεωρούμε σταθερά τα  $P_{11}(s)$  και  $P_{31}(s)$  και εφαρμόζουμε το ΓΘΚ το οποίο ανάγει την ευστάθεια της  $\delta(s, \mathbf{p})$  σε ευστάθεια των συνόλων

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1(s) &= \{F_1(s)P_{11}(s)S_{12}(s) + (F_2(s)P_{11}(s) + F_3(s)P_{31}(s))K_{22}(s)\} \\ \mathbf{I}_2(s) &= \{F_1(s)P_{11}(s)K_{12}(s) + (F_2(s)P_{11}(s) + F_3(s)P_{31}(s))S_{22}(s)\} \end{aligned}$$

για κάθε  $(P_{11}, P_{31}(s)) \in \mathbf{P}_{11}(s) \times \mathbf{P}_{31}(s)$ . Βγάζοντας κοινό παράγοντα το  $P_{11}(s)$  οι οικογένειες ξαναγράφονται ως εξής

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1(s) &= \{(F_1(s)S_{12}(s) + F_2(s)K_{22}(s))P_{11}(s) + F_3(s)K_{22}(s)P_{31}(s)\} \\ \mathbf{I}_2(s) &= \{(F_1(s)K_{12}(s) + F_2(s)S_{22}(s))P_{11}(s) + F_3(s)S_{22}(s)P_{31}(s)\}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το ΓΘΚ επιτρέποντας στα  $P_{11}(s)$  και  $P_{31}(s)$  να μεταβάλλονται. Η ευστάθεια των  $\mathbf{I}_1(s)$  και  $\mathbf{I}_2(s)$  ανάγεται σε ευστάθεια των παρακάτω πολλαπλοτήτων

$$\begin{aligned} \Delta_1(s) &= \{(F_1(s)S_{12}(s) + F_2(s)K_{22}(s))K_{11}(s) + F_3(s)K_{22}(s)S_{31}(s)\} \\ \Delta_2(s) &= \{(F_1(s)S_{12}(s) + F_2(s)K_{22}(s))S_{11}(s) + F_3(s)K_{22}(s)K_{31}(s)\} \\ \Delta_3(s) &= \{(F_1(s)K_{12}(s) + F_2(s)S_{22}(s))K_{11}(s) + F_3(s)S_{22}(s)S_{31}(s)\} \\ \Delta_4(s) &= \{(F_1(s)K_{12}(s) + F_2(s)S_{22}(s))S_{11}(s) + F_3(s)S_{22}(s)K_{31}(s)\}. \end{aligned}$$

Επειδή η  $\Delta_1(s)$  είναι μία πολυτοπική οικογένεια μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα των Ακμών το οποίο απλοποιεί το πρόβλημα της ευστάθειάς της σε μονοπαραμετρικά προβλήματα ευστάθειας των εκτεθειμένων ακμών της οικογένειας που είναι

$$\{(F_1(s)S_{12}(s) + F_2(s)K_{22}(s))K_{11}(s) + F_3(s)K_{22}(s)K_{31}(s)\} \quad (10.12)$$

$$\{(F_1(s)K_{12}(s) + F_2(s)S_{22}(s))K_{11}(s) + F_3(s)K_{22}(s)S_{31}(s)\}. \quad (10.13)$$

Επειδή τα ευθύγραμμα τμήματα  $S_{11}(s)$  και  $S_{22}(s)$  περιλαμβάνουν στα ακραία τους σημεία τα πολώνυμα Kharitonov  $K_{11}(s)$  και  $K_{22}(s)$  εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι οι (10.12) και (10.13) συμπεριλαμβάνονται στις  $\Delta_2(s)$  και  $\Delta_3(s)$ . Επομένως τελικά απαιτείται να ελεγχθεί η ευστάθεια

του συνόλου

$$\Delta_E(s) = \Delta_2(s) \cup \Delta_3(s) \cup \Delta_4(s).$$

### Πίνακας πολυωνύμων διαστήματος

Μια ειδική περίπτωση εξαρτημένων διαταραχών είναι αυτή που εμφανίζεται στους πίνακες πολυωνύμων διαστήματος. Έστω  $M(s)$  ένας  $n \times n$  πολυωνυμικός πίνακας στη θέση  $i, j$  του οποίου βρίσκεται το πολυώνυμο  $P_{ij}(s)$ . Θεωρούμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που συνδέεται με το συγκεκριμένο πίνακα είναι  $\det[M(s)]$ . Υποθέτουμε ότι κάθε  $P_{ij}(s)$  ανήκει σε μια οικογένεια διαστήματος  $\mathbf{P}_{ij}(s)$  και ότι οι παράμετροι του κάθε  $P_{ij}(s)$  μεταβάλλονται ανεξάρτητα από τις παραμέτρους των υπολοίπων. Με  $\mathbf{M}(s)$  δηλώνουμε την αντίστοιχη οικογένεια πινάκων. Το σύστημα διαστήματος που περιγράφεται από τον πολυωνυμικό πίνακα είναι ευσταθές αν  $\det[M(s)]$  είναι ευσταθές κατά Hurwitz για κάθε  $M(s) \in \mathbf{M}(s)$ . Έστω  $\mathbf{T}$  το σύνολο των  $n \times n$  πινάκων μετάθεσης που προκύπτουν από το μοναδιαίο πίνακα. Σε κάθε στοιχείο  $T$  του συνόλου  $\mathbf{T}$  μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το σύνολο των πολυωνυμικών πινάκων  $M_T(s)$  που παράγεται αν κάθε στοιχείο  $P_{ij}$  παίρνει τιμές από το σύνολο των αντιστοιχών πολυωνύμων Kharitonov όταν ο  $T$  έχει στη θέση  $i, j$  την τιμή 0 ή μεταβάλλεται κατά μήκος των τμημάτων που ορίζονται από το  $S_{ij}(s)$  όταν στην αντίστοιχη θέση του  $T$  εμφανίζεται η τιμή 1. Με  $M^*$  δηλώνουμε το σύνολο των πινάκων  $M_T(s)$  που προκύπτουν με τον τρόπο που περιγράψαμε ως συνάρτηση όλων των διαφορετικών μεταθέσεων του μοναδιαίου πίνακα που περιλαμβάνονται στο σύνολο  $\mathbf{T}$ . Για την εύρωστη ευστάθεια μιας οικογένειας  $\mathbf{M}(s)$  απαιτείται ο έλεγχος της ευστάθειας των πινάκων που προκύπτουν από όλες τις δυνατές μεταθέσεις του μοναδιαίου πίνακα όπως διατυπώνεται στο Θεώρημα [28] που ακολουθεί.

**Θεώρημα 10.2.** *Η οικογένεια πινάκων  $M(s)$  είναι ευσταθής κατά Hurwitz αν και μόνο αν το σύνολο  $M^*(s)$  είναι ευσταθές κατά Hurwitz.*

## 10.3 Η ιδιότητα συνόρου των ακραίων πολλαπλοτήτων

Μέχρι τώρα διαπιστώσαμε ότι η ευστάθεια μιας οικογένειας  $\Delta(s)$  μπορεί να ελεγχθεί μέσω της ευστάθειας των ακραίων πολλαπλοτήτων  $\Delta_E(s)$ . Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν κατασκευάσουμε την εικόνα  $\Delta(j\omega)$  η οποία συσχετίζεται με την εικόνα  $\Delta_E(j\omega)$  σύμφωνα με το Θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 10.3.**

$$\vartheta \Delta(j\omega) \subset \Delta_E(j\omega).$$

Γνωρίζοντας το σύνολο της εικόνας μιας οικογένειας πολυωνύμων στο μιγαδικό επίπεδο μπορούμε να διαπιστώσουμε την ευστάθειά της αν από το σύνολο αποκλείσουμε για κάθε συχνότητα  $\omega$  την αρχή των αξόνων. Επειδή το σύνολο της εικόνας περιλαμβάνεται στην εικόνα των ακραίων

πολλαπλοτήτων η διαδικασία αποκλεισμού της αρχής των αξόνων μπορεί να εφαρμοσθεί στην  $\Delta_E(j\omega)$ . Το γεγονός ότι γίνεται χρήση της  $\Delta_E(j\omega)$  έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση των ελέγχων σε σχέση με το αρχικό σύνολο  $\Delta(j\omega)$ . Παρ' ολ' αυτά όμως το σύνολο παραμένει πολυπαραμετρικό στις παραμέτρους  $\lambda_{ij}$  που καθορίζουν τη μετακίνηση πάνω στα τμήματα Kharitonov. Εδώ μπορεί να μας βοηθήσει το Θεώρημα της Απεικόνισης σύμφωνα με το οποίο μπορεί να κατασκευαστεί ένα περιμετρικό φράγμα το οποίο να περιλαμβάνει την  $\Delta_E(j\omega)$ . Για να γίνει αυτό απαιτείται να καθορισθεί το σύνολο κορυφών  $\{v_i, \dots, v_k\}$  της  $\Delta(s)$  το οποίο προκύπτει αν θέσουμε κάθε πολυώνυμο  $P_{ij}$  στα αντίστοιχα πολυώνυμα Kharitonov. Το σύνολο κορυφών  $\Delta_K(s)$  ορίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} \Delta_K(s) &= \{\delta(s, \mathbf{p}) : \\ &P_{ij}(s) = K_{ij}^l(s), l \in \{1, 2, 3, 4\}, i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, r_m\}\}. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Ορίζουμε το πολυτοπικό σύνολο  $\bar{\Delta}(s)$  που αποτελεί το κυρτό περίβλημα των πολυωνύμων κορυφής  $v_j$  με  $j \in \{1, \dots, k\}$

$$\bar{\Delta}(s) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i(s) : \lambda_i(s) \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα της Απεικόνισης ισχύει

$$co \Delta_E(j\omega) = co \Delta_K(j\omega) = \bar{\Delta}(j\omega).$$

Επομένως για να εξακριβώσουμε την ευστάθεια της πολυγραμμικής οικογένειας αρκεί να ελέγξουμε αν η αρχή των αξόνων εξαιρείται από το πολυτοπικό σύνολο που ορίζει το  $\Delta_K(j\omega)$ . Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα για πολυώνυμα ίδιου βαθμού υπολογίζοντας τη μέγιστη δυνατή γωνία  $\Phi_{\Delta_K}(j\omega)$  που σχηματίζουν ανα δύο οι κορυφές μεταξύ τους για όλες τις συχνότητες  $\omega \in [0, \infty)$  και εφαρμόζοντας το επόμενο Θεώρημα.

**Θεώρημα 10.4.** Η οικογένεια  $\Delta(s)$  είναι ευσταθής κατά Hurwitz αν περιλαμβάνει ένα τουλάχιστον ευσταθές πολυώνυμο και ικανοποιεί την πρόταση

$$\Phi_{\Delta_K}(j\omega) < \pi \text{ για κάθε } \omega \in [0, \infty).$$

Εναλλακτικά η ευστάθεια της  $\Delta(s)$  μπορεί να διαπιστωθεί μέσω του ελέγχου της ευστάθειας του συνόλου  $E$  των ακμών της  $\Delta(s)$  με την επιπλέον προϋπόθεση

$$0 \notin \Delta(j\omega) \text{ για κάποιο } \omega.$$

Το παραπάνω Θεώρημα αποτελεί ένα σημαντικό αποτέλεσμα αφού περιορίζει τον αριθμό των ελέγχων που απαιτείται να πραγματοποιήσουμε. Ο αριθμός αυτός παραμένει σταθερός και εξαρτώμενος από τον αριθμό των πολυωνύμων Kharitonov ενώ είναι ανεπηρέαστος από τη διάσταση του παραμετρικού χώρου  $\Pi$ .

## 10.4 Παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας

Θεωρούμε μία οικογένεια της μορφής (10.9) όπου με  $\mathbf{p}_{ij}$  δηλώνουμε το διάνυσμα των συντελεστών κάθε πολυωνύμου  $P_{ij}$ . Κάθε συνιστώσα του διανύσματος παίρνει τιμές σε ένα διάστημα τιμών με αποτέλεσμα το διάνυσμα των συντελεστών να ανήκει σε ένα σύνολο με τη μορφή κουτιού που το δηλώνουμε με  $\Pi_{ij}$ . Το διάνυσμα

$$\mathbf{p} = [\mathbf{p}_{11}, \dots, \mathbf{p}_{1r_1}, \dots, \mathbf{p}_{m1}, \dots, \mathbf{p}_{mr_m}]$$

ανήκει στο σύνολο  $\Pi = \Pi_{11} \times \dots \times \Pi_{1r_1} \times \dots \times \Pi_{m1} \times \dots \times \Pi_{mr_m}$ . Οι ακραίες πολλαπλότητες  $\Delta_E^l(s)$  ορίζονται για μια ακόμη φορά από την (10.10) ενώ η ένωσή τους  $\Delta_E(s)$  από την (10.11). Τα υποσύνολα του χώρου των παραμέτρων που αντιστοιχούν στα  $\Delta_E^l(s)$  και  $\Delta_E(s)$  συμβολίζονται με  $\Pi_l$  και  $\Pi_E$  και συνδέονται με τη σχέση

$$\Pi_E = \bigcup_{l=1}^m \Pi_l.$$

Με  $\Pi_K$  δηλώνουμε το σύνολο των διανυσμάτων των παραμέτρων που οδηγούν στα πολυώνυμα Kharitonov τα οποία συνδέονται με τα  $P_{ij}(s)$ . Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $\|\cdot\|$  για να δηλώσουμε οποιαδήποτε νόρμα στον  $\mathbb{R}^n$  ενώ με  $\mathcal{P}_u$  δηλώνουμε το σύνολο των σημείων  $\mathbf{u}$  του  $\mathbb{R}^n$  για τα οποία ένα πολυώνυμο  $\delta(s, \mathbf{u})$  της οικογένειας  $\Delta(s)$  γίνεται ασταθές ή χάνει βαθμό. Με  $\rho(\mathbf{p})$  συμβολίζουμε τη μέγιστη ακτίνα της σφαίρας ως προς κάποια νόρμα  $\|\cdot\|$  με κέντρο το σημείο  $\mathbf{p}$  εντός της οποίας διατηρείται η ευστάθεια και κανένα από τα πολυώνυμα δε χάνει το βαθμό του και δίνεται από

$$\rho(\mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{P}_u} \|\mathbf{p} - \mathbf{u}\|.$$

Αν η οικογένεια πολυωνύμων με παραμέτρους αβεβαιότητας των οποίων οι τιμές μεταβάλλονται εντός του κουτιού  $\Pi$  είναι ευσταθής μπορούμε να συσχετίσουμε ένα περιθώριο ευστάθειας με κάθε σημείο του  $\Pi$ . Η χειρότερη περίπτωση όσον αφορά το περιθώριο ευστάθειας καθώς το  $\mathbf{p}$  παίρνει τιμές από το σύνολο  $\Pi$  δίνεται στο Θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 10.5.** (Ακραίο παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας)

$$\inf_{\mathbf{p} \in \Pi} \rho(\mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{p} \in \Pi_E} \rho(\mathbf{p}).$$



Από το παραπάνω Θεώρημα προκύπτει ότι το μικρότερο περιθώριο ευστάθειας ως προς όλα τα διανύσματα  $\mathbf{p}$  του  $\Pi$  εντοπίζεται σε εκείνα τα  $\mathbf{p}$  που ανήκουν στο ακραίο σύνολο  $\Pi_E$ . Για να προσδιορίσουμε το περιθώριο ευστάθειας θεωρούμε ένα δεδομένο σημείο  $\mathbf{p} \in \Pi$  και ορίζουμε διαστήματα τιμών εντός των οποίων μεταβάλλονται οι συντελεστές κάθε πολυωνύμου τα οποία παραμετροποιούνται με τη βοήθεια της μεταβλητής  $\epsilon$ . Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ότι το διάνυσμα συντελεστών  $\mathbf{p}_{11}$  το οποίο για μια δεδομένη τιμή του αναλύεται στις συνιστώσες  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Αφού εισαχθεί αβεβαιότητα με χρήση της  $\epsilon$  οι συνιστώσες  $[a'_1, a'_2, \dots, a'_n]$  του νέου διανύσματος  $\mathbf{p}'_{11}$  ανήκουν πλέον στα διαστήματα

$$a'_1 = [a_1 - \epsilon, a_1 + \epsilon], a'_2 = [a_2 - \epsilon, a_2 + \epsilon], \dots, a'_n = [a_n - \epsilon, a_n + \epsilon].$$

Αντίστοιχα ισχύουν και για τα υπόλοιπα διανύσματα της έκφρασης (10.9). Για δεδομένη τιμή του  $\epsilon$  θα προσδιορίσουμε το σύνολο των κορυφών σύμφωνα με την (10.14) και θα σχηματίσουμε όλα τα δυνατά ευθύγραμμα τμήματα που προκύπτουν από τη σύνδεση των κορυφών ανά δύο. Το πολύτοπο που θα παραχθεί από τις εκτεθειμένες ακμές περικλείει τις εικόνες της πολυγραμμικής οικογένειας στο μιγαδικό επίπεδο για όλες τις τιμές του  $\omega$ . Για να ελέγξουμε την ευστάθεια κατά Hurwitz της οικογένειας μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα Ευθυγράμμου Τμήματος στο μιγαδικό επίπεδο για όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που προέκυψαν. Η ευστάθεια των ευθυγράμμων τμημάτων εξασφαλίζει την ευστάθεια της οικογένειας υπό την προϋπόθεση ότι κανένα από τα πολυώνυμα δε χάνει βαθμό, η οικογένεια περιλαμβάνει ένα τουλάχιστον ευσταθές πολυώνυμο και ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του φανταστικού άξονα για το οποίο το 0 δεν περιλαμβάνεται στο πολύτοπο. Στα ίδια συμπεράσματα μπορούμε να καταλήξουμε με τη γραφική απεικόνιση στο μιγαδικό επίπεδο των πολυτόπων για όλες τις συχνότητες  $\omega$ . Τη διαδικασία θα πρέπει να την επαναλάβουμε αυξάνοντας σε βήματα την τιμή του  $\epsilon$  μέχρι να καταλήξουμε σε κάποιο  $\epsilon$  για το οποίο οι εικόνες των κυρτών συνόλων  $\bar{\Delta}(s)$  μόλις ακουμπούν την αρχή των αξόνων. Κατά αυτόν τον τρόπο υπολογίσαμε την τιμή του  $\epsilon$  για δεδομένο  $\mathbf{p} \in \Pi$ . Αν η διαδικασία επαναληφθεί για όλα τα  $\mathbf{p}$  η μικρότερη τιμή του  $\epsilon$  που θα προκύψει αντιστοιχεί στο παραμετρικό περιθώριο ευστάθειας.

## 10.5 Πολυγραμμικά συστήματα διαστήματος

Στην ενότητα αυτή θα μας απασχολήσει αν ένα σύστημα με ανάδραση διαθέτει εύρωστη ευστάθεια καθώς επίσης και να προσδιορίσουμε τα περιθώρια ευστάθειας και άλλα κριτήρια επίδοσης για τη χειρότερη περίπτωση. Αρχικά θα επικεντρώσουμε την ανάλυση μας σε πολυγραμμικά συστήματα διαστήματος, δηλαδή συστήματα των οποίων η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται σαν το λόγο δύο πολυγραμμικών πολυωνύμων διαστήματος με ανεξάρτητες παραμέτρους. Για ένα σύ-

στημα με μία είσοδο και έξοδο ορίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{\gamma(s)}{\delta(s)}.$$

Η  $\gamma(s)$  περιγράφεται από τη σχέση

$$\gamma(s) = H_1(s)L_{11}(s)L_{12}(s)\cdots L_{1r_1}(s) + \cdots + H_m(s)L_{m1}(s)L_{m2}(s)\cdots L_{mr_m}(s),$$

όπου τα πολυώνυμα  $H_i(s)$ ,  $i = 1, \dots, m$  είναι καθορισμένα, ενώ τα  $L_{ij}(s) \in \mathbf{L}_{ij}(s)$  είναι πραγματικά πολυώνυμα διαστήματος. Θεωρούμε ότι τα πολυώνυμα  $\gamma(s)$  ανήκουν στην οικογένεια  $\mathbf{\Gamma}(s)$  με το διατεταγμένο σύνολο των συντελεστών τους  $\mathbf{r}$  να παίρνει τιμές εντός του κουτιού  $\mathbf{\Lambda}$ . Αντίστοιχα υποθέτουμε ότι κάθε πολυώνυμο  $\delta(s)$  που εμφανίζεται στον παρονομαστή της  $G(s)$  περιγράφεται από την

$$\delta(s) = F_1(s)P_{11}(s)P_{12}(s)\cdots P_{1r_1}(s) + \cdots + F_m(s)P_{m1}(s)P_{m2}(s)\cdots P_{mr_m}(s),$$

όπου τα πολυώνυμα  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  είναι καθορισμένα, ενώ τα  $P_{ij}(s) \in \mathbf{P}_{ij}(s)$  είναι πραγματικά πολυώνυμα διαστήματος. Με  $\mathbf{p}$  δηλώνουμε το διάνυσμα των συντελεστών τους το οποίο μεταβάλλεται εντός του κουτιού  $\mathbf{\Pi}$  ενώ το σύνολο των πολυωνύμων που παράγεται συνθέτει την οικογένεια  $\mathbf{\Delta}(s)$ . Θα προχωρήσουμε στη συνέχεια στη διατύπωση ενός συνόλου υποθέσεων το οποίο διέπει τις συναρτήσεις μεταφοράς  $G(s)$ . Για να τονίσουμε την εξάρτηση των πολυωνύμων  $\gamma(s)$  και  $\delta(s)$  από τις παραμέτρους  $\mathbf{r}$  και  $\mathbf{p}$ , αντίστοιχα τα συμβολίζουμε εναλλακτικά ως  $\gamma(s, \mathbf{I})$  και  $\delta(s, \mathbf{p})$ .

### Υποθέσεις 10.1.

1. Οι παράμετροι των διανυσμάτων  $\mathbf{r}$  και  $\mathbf{p}$  και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
2. Τα πολυώνυμα  $\gamma(s, \mathbf{r})$  και  $\delta(s, \mathbf{p})$  είναι πρώτα μεταξύ τους σε όλο το διάστημα  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \in \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Pi}$ .
3.  $\delta(j\omega, \mathbf{p}) \neq 0$  για κάθε  $\mathbf{p} \in \mathbf{\Pi}$  και  $\omega > 0$ .

Για να εφαρμόσουμε τις τεχνικές του πεδίου της συχνότητας απαιτείται να κατασκευάσουμε την εικόνα συνόλου  $\mathbf{G}(j\omega)$  της οικογένειας συστημάτων  $\mathbf{G}(s)$ . Σε μια τέτοια εικόνα μας ενδιαφέρει να καθορίσουμε το σύνορό της. Το πρόβλημα θα το προσεγγίσουμε με αντίστοιχο τρόπο με αυτόν που περιγράψαμε για τη γραμμική περίπτωση ορίζοντας την ακραία οικογένεια πολυγραμμικών συστημάτων διαστήματος  $\mathbf{G}_E(s)$ . Για το λόγο αυτό κατασκευάζουμε τις ακραίες πολλαπλότητες  $\mathbf{\Gamma}_E(s)$ ,  $\mathbf{\Delta}_E(s)$  και τα σύνολα κορυφών  $\mathbf{\Gamma}_K(s)$ ,  $\mathbf{\Delta}_K(s)$  με τον τρόπο που περιγράφηκε στις παραγράφους 10.2 και 10.3. Τα υποσύνολα του χώρου των παραμέτρων που αντιστοιχούν στις παραπάνω πολλαπλότητες και σύνολα κορυφών είναι τα  $\mathbf{\Lambda}_E(s)$ ,  $\mathbf{\Pi}_E(s)$  και  $\mathbf{\Lambda}_K(s)$ ,  $\mathbf{\Pi}_K(s)$ , αντίστοιχα. Το ακραίο υπόσυνολο  $\mathbf{G}_E(s)$  της οικογένειας με συναρτήσεις μεταφοράς  $G(s)$  ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{G}_E(s) = \left\{ \frac{\gamma(s, \mathbf{r})}{\delta(s, \mathbf{p})} : (\mathbf{r} \in \mathbf{\Lambda}_K, \mathbf{p} \in \mathbf{\Pi}_E) \text{ ή } (\mathbf{r} \in \mathbf{\Lambda}_E, \mathbf{p} \in \mathbf{\Pi}_K) \right\}.$$

Εναλλακτικά η  $\mathbf{G}_E(s)$  γράφεται

$$\mathbf{G}_E(s) = \left( \frac{\mathbf{\Gamma}_K(s)}{\mathbf{\Delta}_E(s)} \cup \frac{\mathbf{\Gamma}_E(s)}{\mathbf{\Delta}_K(s)} \right).$$

Το Θεώρημα που ακολουθεί επεκτείνει την Ιδιότητα Παραγωγής του Συνόρου που ισχύει στα συστήματα διαστήματος και στα πολυγραμμικά συστήματα.

**Θεώρημα 10.6.** *Λαμβάνοντας υπόψη τις υποθέσεις 10.1 ισχύει ότι*

$$\vartheta \mathbf{G}(j\omega) \subset \mathbf{G}_E(j\omega)$$

για κάθε συχνότητα  $\omega \in [0, \infty)$ .

Για μια ακόμη φορά θεωρούμε τις συναρτήσεις μεταφοράς  $T^o(s)$ ,  $T^e(s)$ ,  $T^u(s)$  και  $T^y(s)$  που αφορούν ένα σύστημα κλειστού βρόχου με μοναδιαία ανάδραση που αποτελείται από τον ελεγκτή και ένα σύστημα προς έλεγχο σε σειρά. Με δεδομένη τη συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή  $F(s)$  εισάγουμε ασάφεια στη συνάρτηση μεταφοράς  $G(s)$  του προς έλεγχο συστήματος μέσω παραμέτρων που υπεισέρχονται πολυγραμμικά και παράγεται η οικογένεια  $\mathbf{G}(s)$  των συναρτήσεων. Για  $G(s) \in \mathbf{G}(s)$  παράγονται τα σύνολα αβεβαιότητας  $\mathbf{T}^o(s)$ ,  $\mathbf{T}^e(s)$ ,  $\mathbf{T}^u(s)$  και  $\mathbf{T}^y(s)$  κατά αντίστοιχο τρόπο με τα συστήματα διαστήματος που δόθηκε μέσω των (8.2). Τα ακραία υποσύνολα  $\mathbf{T}_E^o(s)$ ,  $\mathbf{T}_E^e(s)$ ,  $\mathbf{T}_E^u(s)$  και  $\mathbf{T}_E^y(s)$  είναι δυνατόν να παραχθούν αν η  $G(s)$  λαμβάνει τιμές από το ακραίο υποσύνολο  $\mathbf{G}_E(s)$ . Τότε το σύνολο των παραπάνω οικογενειών περιέχεται στα ακραία τους υποσύνολα όπως διατυπώνεται στο Θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 10.7.** *Για κάθε συχνότητα  $\omega \geq 0$*

$$\alpha) \vartheta \mathbf{T}^o(j\omega) \subset \mathbf{T}_E^o(j\omega)$$

$$\beta) \vartheta \mathbf{T}^e(j\omega) \subset \mathbf{T}_E^e(j\omega)$$

$$\gamma) \vartheta \mathbf{T}^u(j\omega) \subset \mathbf{T}_E^u(j\omega)$$

$$\delta) \vartheta \mathbf{T}^y(j\omega) \subset \mathbf{T}_E^y(j\omega).$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι παρ' όλο που για την  $\mathbf{T}^y(s)$  δεν υφίσταται ανεξαρτησία των παραμέτρων αριθμητή και παρονομαστή το παραπάνω Θεώρημα Παραγωγής του Συνόρου εφαρμόζεται και στην περίπτωση αυτή. Όλα τα αποτελέσματα παραγωγής του συνόρου που συναρτώνται με τους φακέλους Nyquist, Bode και Nichols που έχουν παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 8 για την περίπτωση συστημάτων διαστήματος μπορούν να επαναληφθούν και στην πολυγραμμική περίπτωση.

## 10.6 Επεκτάσεις των αποτελεσμάτων παραγωγής του συνόρου

Όταν δώσαμε τον ορισμό ενός πολυγραμμικού συστήματος κάναμε την υπόθεση ότι οι παράμετροι του αριθμητή και του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς  $G(s)$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Παρ' όλ' αυτά η υπόθεση της ανεξαρτησίας ενδέχεται να παραβιάζεται στα συστήματα κλειστού βρόχου. Όπως θα δούμε όμως η Ιδιότητα Παραγωγής του Συνόρου που διαθέτει το σύνολο  $\mathbf{G}_E(s)$  ισχύει και σε αυτές τις περιπτώσεις. Προς αυτήν την κατεύθυνση θα επιχειρήσουμε να γενικεύσουμε την παραπάνω ιδιότητα σε συναρτήσεις που εμφανίζουν εξαρτήσεις μεταξύ των παραμέτρων του αριθμητή και του παρονομαστή. Αυτές οι εξαρτήσεις παρουσιάζονται πάντοτε σε συστήματα με πολλούς βρόχους. Θεωρούμε μια συνάρτηση  $Q(s)$  που γράφεται σαν γινόμενο συναρτήσεων μεταφοράς  $G^i(s)$  με  $i = 1, 2, \dots, q$ . Επίσης κάνουμε την υπόθεση ότι κάθε  $G^i(s)$  αποτελεί μέλος μιας πολυγραμμικής οικογένειας συστημάτων  $\mathbf{G}^i(s)$  με ανεξάρτητες παραμέτρους διαστήματος στον αριθμητή και τον παρονομαστή. Επιπλέον δεχόμαστε ότι οι παράμετροι της  $G^i(s)$  είναι ανεξάρτητες από αυτές της  $G^j(s)$  για  $i \neq j$ . Αν επιτρέψουμε στις παραμέτρους των πολυγραμμικών συναρτήσεων  $G^i(s)$  να πάρουν όλες τις δυνατές τιμές εντός των καθορισμένων διαστημάτων παράγεται η οικογένεια  $\mathbf{Q}(s)$

$$\mathbf{Q}(s) = \{Q(s) : G^i(s) \in \mathbf{G}^i(s), i = 1, 2, \dots, q\}.$$

Το ακραίο υποσύνολο  $\mathbf{Q}_E(s)$  προκύπτει με αντικατάσταση της  $G^i(s)$  από μέλη του ακραίου υποσυνόλου  $\mathbf{G}_E^i(s)$ . Για την εικόνα συνόλου της  $\mathbf{Q}(s)$  που μας ενδιαφέρει ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα όσον αφορά στο σύνορό της.

### Θεώρημα 10.8.

$$\vartheta\mathbf{Q}(j\omega) \subset \mathbf{Q}_E(j\omega).$$

Γενικά αν η  $Q(s)$  μετέχει σε ρητές συναρτήσεις τα πολώνυμα του αριθμητή και του παρονομαστή των συναρτήσεων αυτών θα περιλαμβάνουν κοινές παραμέτρους. Πιο συγκεκριμένα θα μελετήσουμε γραμμικούς κλασματικούς μετασχηματισμούς (ΓΚΜ) της μορφής

$$T(Q(s)) \equiv Q_1(s) = \frac{A(s)Q(s) + B(s)}{C(s)Q(s) + D(s)},$$

όπου τα  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $C(s)$  και  $D(s)$  είναι αυθαίρετες συναρτήσεις. Ορίζουμε το σύνολο των παραπάνω κλασματικών μετασχηματισμών να είναι

$$T(\mathbf{Q}(s)) = \{T(Q(s)) : Q(s) \in \mathbf{Q}(s)\}.$$

Θέτουμε τον περιορισμό

$$A(j\omega)D(j\omega) - B(j\omega)C(j\omega) \neq 0 \quad (10.15)$$

ο οποίος είναι επιβεβλημένος για να έχουν ισχύ τα συμπεράσματα που ακολουθούν. Επειδή η  $Q_1(j\omega)$  είναι ένας ΓΚΜ της  $Q(j\omega)$  ισχύει ότι το σύνορό της  $Q_1(j\omega)$  παράγεται αντικαθιστώντας την  $Q(j\omega)$  με το σύνορό της που με τη σειρά του παράγεται από τα ακραία συστήματα  $G_E^i(s)$ . Αυτό λοιπόν που συμβαίνει για άλλη μια φορά είναι η δυνατότητα μεταφοράς του συνόρου από το ΓΚΜ στη συνάρτηση που μετασχηματίζει γεγονός που συνοψίζεται στο ακόλουθο Θεώρημα.

**Θεώρημα 10.9.** *Έστω η συνάρτηση μεταφοράς  $\mathbf{Q}(s)$  που ορίζεται όπως παραπάνω και  $T(Q(s))$  ένας ΓΚΜ. Τότε με την υπόθεση της (10.15) ισχύει ότι*

$$\vartheta T(\mathbf{Q}(j\omega)) \subset T(\mathbf{Q}_E(j\omega)).$$

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι εκτός από τον ΓΚΜ της  $Q(s)$  η Ιδιότητα Παραγωγής του Συνόρου μεταφέρεται στις συναρτήσεις που μετασχηματίζει και στις περιπτώσεις που υπάρχουν αθροίσματα και γινόμενα ΓΚΜ. Με αυτόν τον τρόπο εύκολα γίνεται κατανοητό ότι μπορούμε να καλύψουμε μια ευρεία περιοχή προβλημάτων όσον αφορά στις συναρτήσεις μεταφοράς που απαντώνται στα συστήματα κλειστού βρόχου.

Θα παραθέσουμε στη συνέχεια μια διαδικασία για την κατασκευή της απεικόνισης στο μιγαδικό επίπεδο ενός πολυγραμμικού συστήματος διαστήματος. Η μεθοδολογία αυτής της κατασκευής περιγράφεται στην εργασία [1].

Είδαμε ότι για τον έλεγχο της ευστάθειας κατά Hurwitz μιας οικογένειας  $\mathbf{G}(s)$  αρκεί να πραγματοποιηθεί στο πεδίο της συχνότητας ο προσδιορισμός του συνόρου του συνόλου  $\mathbf{G}(j\omega)$ . Το  $\vartheta\mathbf{G}(j\omega)$  μπορεί τελικά να προκύψει από τον υπολογισμό του ακραίου συνόλου

$$\mathbf{G}_E(j\omega) = \left( \frac{\mathbf{\Gamma}_K(j\omega)}{\mathbf{\Delta}_E(j\omega)} \right) \cup \left( \frac{\mathbf{\Gamma}_E(j\omega)}{\mathbf{\Delta}_K(j\omega)} \right)$$

και έτσι όλοι οι έλεγχοι που έπρεπε να γίνουν στην αρχική οικογένεια αρκεί να πραγματοποιηθούν σε ένα σύνολο με μικρότερη διάσταση. Η  $\mathbf{G}_E(j\omega)$  είναι όμως πολυγραμμική στις παραμέτρους αβεβαιότητας που σημαίνει ότι ένας ακριβής υπολογισμός της μπορεί να αποδειχθεί μια υπολογιστικά απαιτητική διαδικασία που μπορεί να είναι ακόμα και μη αντιμετωπίσιμη. Για το λόγο αυτό δε χρειάζεται να καταφύγουμε σε ακριβείς υπολογισμούς αλλά αρκεί να υπολογίσουμε ένα φράγμα της  $\mathbf{G}_E(j\omega)$ . Από το Θεώρημα της Απεικόνισης γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_E(j\omega) &\subset co \mathbf{\Gamma}_K(j\omega) \\ \mathbf{\Delta}_E(j\omega) &\subset co \mathbf{\Delta}_K(j\omega). \end{aligned}$$

Οδηγούμαστε κατά αυτόν τον τρόπο σε μια προσέγγιση της  $\mathbf{G}_E(j\omega)$  που είναι

$$\bar{\mathbf{G}}_E(j\omega) = \left( \frac{\mathbf{\Gamma}_K(j\omega)}{co\mathbf{\Delta}_K(j\omega)} \right) \cup \left( \frac{co\mathbf{\Gamma}_K(j\omega)}{\mathbf{\Delta}_K(j\omega)} \right).$$

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 9 όπου αναλύθηκαν τα πολυγραμμικά συστήματα η  $\bar{\mathbf{G}}_E(j\omega)$  περιλαμβάνει την  $\mathbf{G}_E(j\omega)$  και αυτό καταδεικνύεται με τη σχέση

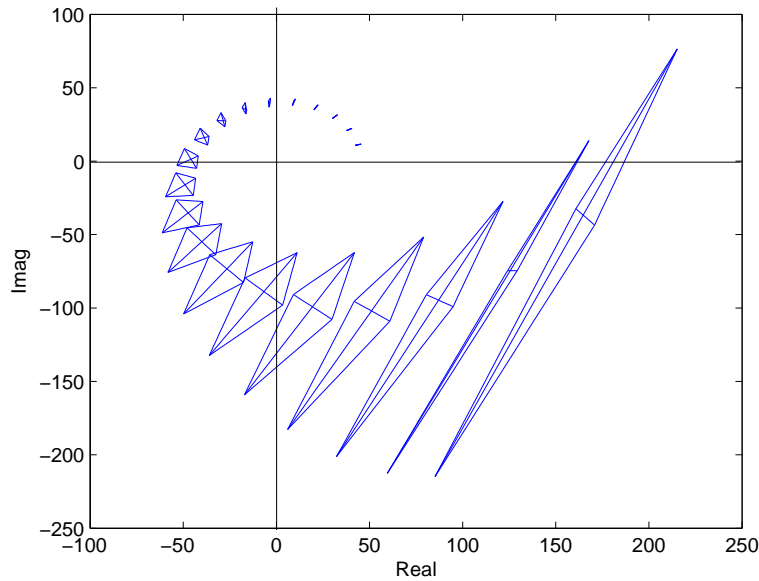
$$\mathbf{G}_E(j\omega) \subset \bar{\mathbf{G}}_E(j\omega).$$

Φυσικά για να προσεγγίσουμε όσο το δυνατόν καλύτερα το σύνολο  $\mathbf{G}_E(j\omega)$  απαιτείται πολύ υψηλή διαμέριση στο παραμετρικό σύνολο  $\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Pi}$ . Ο υπολογισμός της  $\bar{\mathbf{G}}_E(j\omega)$  είναι εύκολος καθώς αποτελείται από την ένωση μονοπαραμετρικών οικογενειών συναρτήσεων μεταφοράς που έχουν τη μορφή

$$\frac{\lambda u_1(j\omega) + (1 - \lambda)u_2(j\omega)}{v(j\omega)} \quad \text{ή} \quad \frac{u(j\omega)}{\lambda v_1(j\omega) + (1 - \lambda)v_2(j\omega)}.$$

Με  $u(j\omega)$ ,  $u_1(j\omega)$  και  $u_2(j\omega)$  αναφερόμαστε σε κορυφές της εικόνας του συνόλου  $\mathbf{\Gamma}(j\omega)$  στο μιγαδικό επίπεδο και αντίστοιχα με  $v(j\omega)$ ,  $v_1(j\omega)$  και  $v_2(j\omega)$  δηλώνουμε κάποιες κορυφές της εικόνας του συνόλου  $\mathbf{\Delta}(j\omega)$ . Ο αριθμητής της πρώτης οικογένειας και ο παρονομαστής της δεύτερης περιγράφουν μία από τις ακμές των συνόλων  $co\mathbf{\Gamma}_K(j\omega)$  και  $co\mathbf{\Delta}_K(j\omega)$ , αντίστοιχα καθώς η μεταβλητή  $\lambda$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $[0, 1]$ .

Το ακραίο σύνολο  $\mathbf{G}_E(j\omega)$  των συστημάτων της πολυγραμμικής οικογένειας ή το υπερσύνολο του  $\bar{\mathbf{G}}_E(j\omega)$  είναι καθοριστικά για τον προσδιορισμό των κριτηρίων επίδοσης. Ο φάκελος του διαγράμματος Nyquist είναι υποσύνολο του  $\mathbf{G}_E(j\omega)$  και κατ' επέκταση του  $\bar{\mathbf{G}}_E(j\omega)$  που είναι πιο εύκολα υπολογίσιμο. Ο Saeki [35] κατέληξε σε ικανές συνθήκες για την εύρωστη ευστάθεια τέτοιων συστημάτων εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Απεικόνισης στο κριτήριο ευστάθειας του Nyquist. Για τον υπολογισμό των κριτηρίων επίδοσης θα αξιοποιήσουμε το γεγονός ότι τα σύνολα που παράγονται στο μιγαδικό επίπεδο από τα πολυώνυμα αριθμητή και παρονομαστή καθώς η συχνότητα  $\omega$  διατρέχει το διάστημα  $[0, \infty)$  φράζονται από τα πολύγωνα που καθορίζουν οι κορυφές των συνόλων αυτών. Οι φάκελοι του διαγράμματος Bode που αφορούν το πλάτος και τη φάση για τα συστήματα ελέγχου που εξετάζουμε προκύπτουν αντίστοιχα από τα ζεύγη κορυφής-ακμής και κορυφής-κορυφής των πολυγώνων αριθμητή και παρονομαστή όπως έγινε άλλωστε και στα συστήματα διαστήματος. Από τους φακέλους Bode μπορούν να καθοριστούν στη συνέχεια τα περιθώρια κέρδους και φάσης ενώ από τη γραφική απεικόνιση πλάτους-φάσης προκύπτει ο φάκελος του διαγράμματος Nichols.



Σχήμα 10.1: Τα κυρτά περιβλήματα των εικόνων συνόλου μιας πολυγραμμικής οικογένειας.

## 10.7 Παραδείγματα

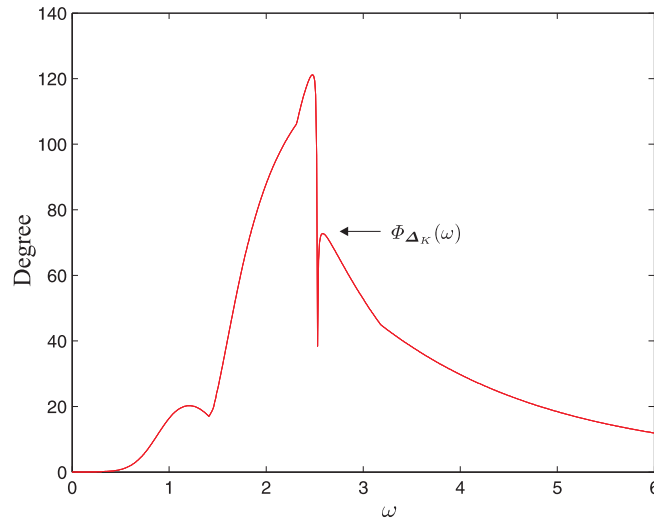
Στα παραδείγματα που θα παρουσιάσουμε μας ενδιαφέρει η απεικόνιση της εικόνας συνόλου πολυγραμμικών συστημάτων καθώς η συχνότητα διατρέχει τις τιμές από 0 έως  $\infty$  με στόχο τον καθορισμό της ευστάθειάς τους κατά Hurwitz. Επειδή η διαδικασία απεικόνισης είναι γενικά δύσκολη θα επιλέξουμε να περικλείσουμε την εικόνα συνόλου εντός του εξωτερικού περιγράμματος που οριοθετείται από τις ακμές που συνδέουν τα πολυώνυμα κορυφής Kharitonov που συναρτώνται με την πολυγραμμική οικογένεια. Επιπλέον κάνοντας χρήση του συνόλου των ακμών του κυρτού συνόλου που περιλαμβάνει το σύνορο της εικόνας της πολυγραμμικής οικογένειας στο μιγαδικό επίπεδο θα προχωρήσουμε στη σχεδίαση των φακέλων των διαγραμμάτων Nyquist και Bode από τους οποίους μπορεί κάποιος να προσδιορίσει γραφικά τα περιθώρια κέρδους και φάσης ενός τέτοιου συστήματος.

**Παράδειγμα 10.1.** Έστω ένα σύστημα κλειστού βρόχου αρνητικής ανάδρασης που περιλαμβάνει έναν ελεγκτή με συνάρτηση μεταφοράς

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{s + 2}{s + 1}$$

σε σειρά με 2 υποσυστήματα που υπόκεινται σε έλεγχο με συναρτήσεις μεταφοράς

$$P(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)} = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + a_2s^2 + 4s + a_0}, \quad Q(s) = \frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{6.6s^3 + 13.5s^2 + 15.5s + 20.4}{s^3 + b_2s^2 + 3.5s + 2.4}.$$



Σχήμα 10.2: Η μέγιστη διαφορά φάσης των πολωνύμων κορυφής Kharitonov.

Οι παράμετροι αβεβαιότητας  $[a_0, a_2, b_2]$  μεταβάλλονται στα διαστήματα

$$a_0 \in [1.375, 2.625],$$

$$a_2 \in [-3.625, -2.375],$$

$$b_2 \in [2.875, 4.125].$$

Το χαρακτηριστικό πολώνυμο  $\delta(s, \mathbf{p})$  του συστήματος προκύπτει από τη σχέση

$$\delta(s, \mathbf{p}) = F_1(s)P_1(s)Q_1(s) + F_2(s)P_2(s)Q_2(s).$$

Αβεβαιότητα υπεισέρχεται στο  $\delta(s, \mathbf{p})$  μόνο λόγω του όρου  $F_2(s)P_2(s)Q_2(s)$ . Το σύνολο  $\Delta_K(s)$  των πολωνύμων κορυφής Kharitonov για το  $\delta(s, \mathbf{p})$  προκύπτει αν θέσουμε στη θέση των  $P_2(s)$  και  $Q_2(s)$  τα αντίστοιχα πολώνυμα Kharitonov

$$\Delta_K(s) = \{ \delta_{K_{ij}}(s), i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4 \},$$

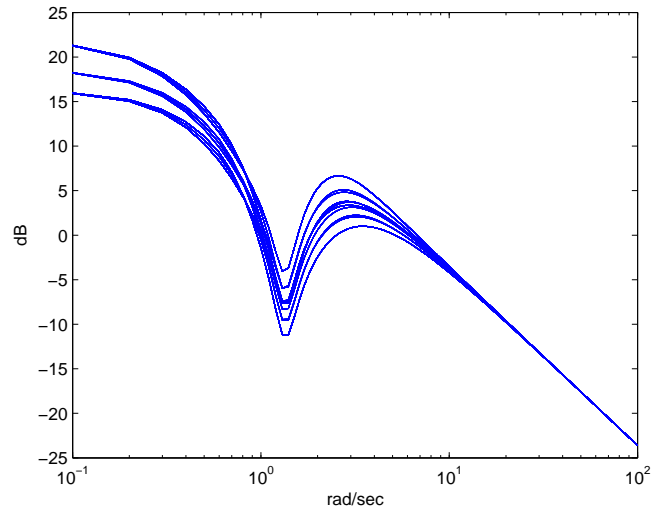
όπου  $\delta_{K_{ij}}(s) = F_1(s)P_1(s)Q_1(s) + F_2(s)K_P^i(s)K_Q^j(s)$ . Με  $K_P^i(s)$  και  $K_Q^j(s)$  συμβολίζουμε τα πολώνυμα Kharitonov των  $P_2(s)$  και  $Q_2(s)$ , αντίστοιχα. Αν εκτελέσουμε τις πράξεις τα διαφορετικά πολώνυμα κορυφής που προκύπτουν είναι 4. Για κάθε  $s = j\omega$  προκύπτουν συνολικά 6 ακμές που συνδέουν τα πολώνυμα κορυφής ανά δύο μεταξύ τους και ανήκουν στο κυρτό περιβλημα  $co\Delta_K(s)$ . Η πραγματική εικόνα συνόλου περικλείεται εντός των εξωτερικών ακμών και απεικονίζεται για διάφορες συχνότητες στο Σχήμα 10.1. Το χαρακτηριστικό πολώνυμο που προκύπτει θέτοντας τα  $P_2(s)$  και  $Q_2(s)$  σε ένα από τα πολώνυμα κορυφής Kharitonov είναι ευστα-



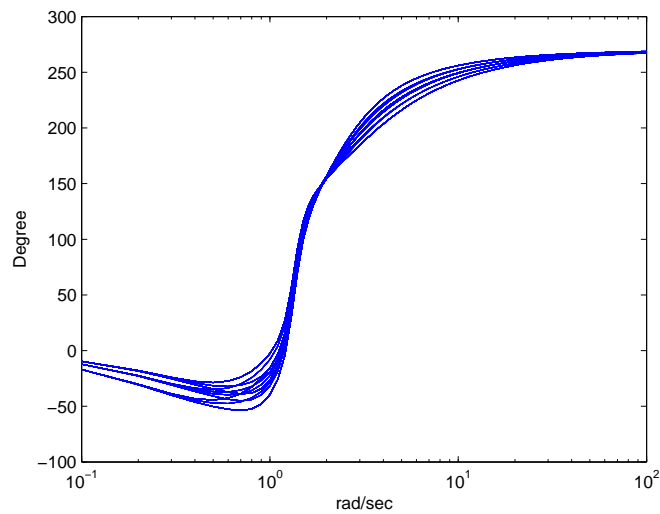
θές. Με αυτό σαν δεδομένο και αφού η αρχή των αξόνων εξαιρείται από τα  $co\Delta_K(j\omega)$  για κάθε  $\omega$  προκύπτει ότι η οικογένεια είναι ευσταθής .

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να διαπιστώσουμε την εύρωστη ευστάθεια της οικογένειας είναι να κάνουμε χρήση του Θεωρήματος 10.4. Αυτό προϋποθέτει την ύπαρξη ενός οποιουδήποτε ευσταθούς πολυωνύμου της οικογένειας που έχει ήδη επιβεβαιωθεί. Απομένει λοιπόν η απεικόνιση της μέγιστης διαφοράς φάσης των πολυωνύμων κορυφής συναρτήσει της συχνότητας για να διαπιστώσουμε την εύρωστη ευστάθεια της οικογένειας. Από το Σχήμα 10.2 όπου παρίσταται γραφικά η εξέλιξη της μέγιστης διαφοράς φάσης με τη συχνότητα παρατηρούμε ότι για καμία συχνότητα αυτή δεν πλησιάζει τις  $180^\circ$ . Κατά συνέπεια η οικογένεια είναι ευσταθής.

Τέλος όπως κάναμε για τα συστήματα διαστήματος μπορούμε να παράγουμε τους φακέλους των διαγραμμάτων Bode πλάτους και φάσης. Από τα Σχήματα 10.3 και 10.4 προκύπτουν εμφανώς οι φάκελοι των διαγραμμάτων Bode και οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν από κοινού για τον καθορισμό των περιθωρίων κέρδους και φάσης του κλειστού συστήματος.



Σχήμα 10.3: Bode διαγράμματα πλάτους των πολυωνύμων που ανήκουν στις ακμές του κυρτού περιβλήματος που περικλείει την εικόνα συνόλου της πολυγραμμικής οικογένειας.



Σχήμα 10.4: Bode διαγράμματα φάσης των πολυωνύμων που ανήκουν στις ακμές του κυρτού περιβλήματος που περικλείει την εικόνα συνόλου της πολυγραμμικής οικογένειας.

# Κεφάλαιο 11

## Διαταραχές των Παραμέτρων του Χώρου Κατάστασης

Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσει η εύρωστη ευστάθεια στα προβλήματα όπου εμφανίζονται πίνακες των οποίων τα στοιχεία μεταβάλλονται εντός διαστήματος τιμών. Οι πίνακες αυτοί καλούνται πίνακες διαστήματος (interval matrices). Όταν οι παράμετροι που εμφανίζονται στους πίνακες έχουν τη δομή διαταραχών μοναδιαίας τάξης το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι πολυγραμμική συνάρτηση των παραμέτρων του. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα της Απεικόνισης και ο έλεγχος για εύρωστη ευστάθεια να μετατοπιστεί στον έλεγχο της διαφοράς φάσης μεταξύ των κορυφών του συνόλου των παραμέτρων. Τεχνικές που βασίζονται στις μεθόδους Lyapunov θα μας βοηθήσουν στον προσδιορισμό μιας περιοχής ευστάθειας στο χώρο των παραμέτρων αλλά και θα αναδείξουν μία αριθμητική διαδικασία για τη διεύρυνση της περιοχής αυτής ρυθμίζοντας κατάλληλα τις παραμέτρους του ελεγκτή.

### 11.1 Διαταραχές στο χώρο των παραμέτρων

Αν  $u$  είναι το σήμα εισόδου σε ένα γραμμικό σύστημα,  $x$  το διάνυσμα καταστάσεων και  $y$  το σήμα εξόδου τότε η περιγραφή του συστήματος στο χώρο των καταστάσεων περιλαμβάνει τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx.\end{aligned}\tag{11.1}$$

Δεχόμαστε ότι στο σύστημα υπάρχει επιπλέον ανάδραση εξόδου που περιγράφεται από τη σχέση

$$u = Ky.$$

Αν αντικαταστήσουμε στην πρώτη εξίσωση του χώρου των καταστάσεων το  $u$  από την εξίσωση της ανάδρασης εξόδου και στη σχέση που θα προκύψει αντικαταστήσουμε το  $y$  από τη σχέση που το συνδέει με το  $x$  τότε παίρνουμε

$$\dot{x} = (A + BKC)x.$$

Για την ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου απαιτείται η ευστάθεια του πίνακα  $M = A + BKC$ . Όταν ένα σύστημα περιγράφεται στο χώρο των καταστάσεων οι παράμετροι μέσω των οποίων υπεισέρχεται η αβεβαιότητα εμφανίζονται στα στοιχεία του πίνακα. Έστω

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_l]$$

το διάνυσμα των παραμέτρων το οποίο αναλύεται σε

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p},$$

όπου με  $\mathbf{p}^0$  δηλώνουμε την ονομαστική τιμή του διανύσματος των παραμέτρων και

$$\Delta\mathbf{p} = [\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_l]$$

είναι το διάνυσμα των διαταραχών. Τα στοιχεία του πίνακα  $M$  εμφανίζουν γραμμική εξάρτηση στις συνιστώσες του διανύσματος  $\mathbf{p}$  οπότε τελικά ο  $M$  γράφεται ως

$$M(\mathbf{p}) = M(\mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p}) = M(\mathbf{p}^0) + \Delta M(\mathbf{p}^0, \Delta\mathbf{p}). \quad (11.2)$$

Επειδή τα στοιχεία του πίνακα διαταραχών  $\Delta M(\mathbf{p}^0, \Delta\mathbf{p})$  είναι γραμμικές συναρτήσεις των συνιστωσών του  $\Delta\mathbf{p}$  ο  $\Delta M$  γράφεται ως

$$\Delta M(\mathbf{p}^0, \Delta\mathbf{p}) = \Delta p_1 E_1 + \Delta p_2 E_2 + \dots + \Delta p_l E_l. \quad (11.3)$$

Ο πίνακας διαταραχών  $\Delta M$  χαρακτηρίζεται ως ένας πίνακας μοναδιαίας τάξης αν τα  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  στα οποία αναλύεται είναι μοναδιαίας τάξης. Πίνακες σαν το  $\Delta M$  παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού οι συντελεστές του χαρακτηριστικού τους πολωνύμου είναι πολυγραμμικές συναρτήσεις των συνιστωσών του  $\Delta\mathbf{p}$ . Η ιδιότητα αυτή επιτρέπει την ανάπτυξη μιας υπολογιστικής διαδικασίας για τον προσδιορισμό του περιθωρίου ευστάθειας στον παραμετρικό χώρο που θα στηρίζεται στο Θεώρημα της Απεικόνισης. Το περιθώριο ευστάθειας ορίζεται σαν το διάνυσμα  $\Delta\mathbf{p}$  με τη μεγαλύτερη επιτρεπτή νόρμα ώστε ο πίνακας  $M(\mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p})$  μόλις να γίνει ασταθής.

## 11.2 Διαταραχές μοναδιαίας τάξης

Συνδυάζοντας την (11.2) με την (11.3) ο πίνακας  $M(\mathbf{p})$  γράφεται ως

$$M(\mathbf{p}) = \underbrace{M(\mathbf{p}^0)}_{M_0} + \Delta p_1 E_1 + \Delta p_2 E_2 + \cdots + \Delta p_l E_l.$$

Η προϋπόθεση για να είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα πολυγραμμική συνάρτηση των παραμέτρων αβεβαιότητας διατυπώνεται στο Λήμμα που ακολουθεί.

**Λήμμα 11.1.** *Με την προϋπόθεση ότι  $\text{rank} E_i = 1$  για κάθε  $i$  οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του  $M(\mathbf{p})$  είναι πολυγραμμικές συναρτήσεις του  $\mathbf{p}$ .*

*Απόδειξη.* Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος υπολογίζεται από τη σχέση

$$\delta(s, \mathbf{p}) = \det[sI - M(\mathbf{p})]. \quad (11.4)$$

Θεωρούμε ότι στο πολυώνυμο  $\delta(s, \mathbf{p})$  όλες οι παράμετροι αβεβαιότητας  $p_j$ ,  $j \neq i$  είναι σταθερές εκτός από μία με αποτέλεσμα να εξετάζουμε πλέον το πολυώνυμο  $\delta(s, p_i)$ . Στη συνέχεια θα κάνουμε την υπόθεση ότι το  $E_i$  είναι μοναδιαίας τάξης και θα αποδείξουμε ότι για δεδομένη τιμή  $s = s^*$  το  $\delta(s, p_i)$  είναι γραμμική συνάρτηση του  $p_i$ . Σύμφωνα με το Θεώρημα της Ανάλυσης σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition) το οποίο καλούμε SVD ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  μπορεί να εκφραστεί γενικά σαν το άθροισμα γινομένων 3 όρων

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T,$$

όπου τα διανύσματα στήλης  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  που εμπλέκονται είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Το ίδιο ισχύει και για τα διανύσματα στήλης  $v_i$  ενώ τα  $\sigma_i$  είναι θετικοί αριθμοί που καλούνται ιδιάζουσες τιμές του  $A$ . Στην παραπάνω ανάλυση το  $r$  καταλήγει να είναι η τάξη του πίνακα. Θα περιορίσουμε στο εξής την ανάλυση μόνο σε τετραγωνικούς πίνακες διαστάσεων  $n \times n$ . Στην ακραία περίπτωση που η τάξη ενός πίνακα είναι ένα όπως συμβαίνει για τους  $E_i$  το SVD δίνει

$$E_i = b_i c_i^T,$$

όπου  $b_i \in \mathbb{R}^n$  και  $c_i \in \mathbb{R}^n$ . Το παραπάνω αποτέλεσμα έχει προκύψει από την ενσωμάτωση του  $\sigma_i$  στα διανύσματα της ανάλυσης. Μετά την αντικατάσταση στην (11.4) του πίνακα  $M(\mathbf{p})$  από τα

διανύσματα  $E_i$  στα οποία αναλύεται η (11.4) γίνεται

$$\begin{aligned}
 \delta(s^*, \mathbf{p}) &= \det \left\{ s^*I - M_0 - \underbrace{\sum_{j \neq i} \Delta p_j E_j}_{\bar{A}} - \Delta p_i b_i c_i^T \right\} \\
 &= \det \{ s^*I - \bar{A} - \Delta p_i b_i c_i^T \} \\
 &= \det \left\{ (s^*I - \bar{A}) \left[ I - \Delta p_i \underbrace{(s^*I - \bar{A})^{-1} b_i c_i^T}_{\hat{A}(s^*)} \right] \right\} \\
 &= \det(s^*I - \bar{A}) \det \left( I - \Delta p_i \hat{A}(s^*) b_i c_i^T \right) \\
 &= \det(s^*I - \bar{A}) \Delta p_i^n \det \left( \Delta p_i^{-1} I - \hat{A}(s^*) b_i c_i^T \right). \tag{11.5}
 \end{aligned}$$

Όταν ένας πίνακας προκύπτει από το γινόμενο δύο πινάκων η τάξη του δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την τάξη των πινάκων που συμμετέχουν στο γινόμενο. Επομένως  $\text{rank} \left[ \hat{A}(s^*) b_i c_i^T \right] = 1$ . Η ορίζουσα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα  $\hat{A}(s^*) b_i c_i^T$  στην τιμή  $s = \Delta p_i^{-1}$  αναλύεται σε ένα γινόμενο  $n$  όρων

$$\det \left( \Delta p_i^{-1} I - \hat{A}(s^*) b_i c_i^T \right) = (\Delta p_i^{-1} - \lambda_0) \Delta p_i^{-1} \dots \Delta p_i^{-1} = (\Delta p_i^{-1} - \lambda_0) \Delta p_i^{-n+1}$$

που περιλαμβάνει έναν μόνο όρο με μη μηδενική ιδιοτιμή  $\lambda_0$ . Αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή της ορίζουσας στην (11.5) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \delta(s^*, \mathbf{p}) &= \det(s^*I - \bar{A}) \Delta p_i^n (\Delta p_i^{-1} - \lambda_0) \Delta p_i^{-n+1} \\
 &= \det(s^*I - \bar{A}) (1 - \lambda_0 \Delta p_i).
 \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση είναι φανερό ότι το  $\delta(s, p_i)$  είναι γραμμική συνάρτηση του  $p_i$ . □

### 11.3 Ευστάθεια του πίνακα διαστήματος μέσω του Θεωρήματος της Απεικόνισης

Όσον αφορά το πρόβλημα ευστάθειας που συνδέεται με τον πίνακα διαστήματος  $M(\mathbf{p})$  ένα ερώτημα που άμεσα διατυπώνεται είναι αν ο πίνακας  $M(\mathbf{p})$  παραμένει ευσταθής καθώς οι συνιστώσες του διανύσματος παραμέτρων  $\mathbf{p}$  μεταβάλλονται εντός των ορίων των επιτρεπών διαταραχών  $p_i^- \leq p_i \leq p_i^+$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Το επόμενο ερώτημα που μπορεί να απαντηθεί είναι ο προσδιορισμός της τιμής του  $\epsilon$  έτσι ώστε ο  $M(\mathbf{p})$  να παραμείνει ευσταθής καθώς οι παράμετροι

μεταβάλλονται εντός των διαστημάτων  $p_i^0 - w_i\epsilon \leq p_i \leq p_i^0 + w_i\epsilon$  με τα βάρη  $w_i$  να παίρνουν προκαθορισμένες θετικές τιμές. Και τα δύο προβλήματα μπορούν να απαντηθούν χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι πολυγραμμική συνάρτηση των παραμέτρων.

Για την επίλυση του πρώτου προβλήματος απαιτείται ο προσδιορισμός των χαρακτηριστικών πολυωνύμων για παραμετρικό διάνυσμα  $\mathbf{p}$  που τίθεται στις κορυφές του συνόλου  $\Pi$ . Στη συνέχεια η εύρωστη ευστάθεια διερευνάται ελέγχοντας την ευστάθεια των ευθυγράμμων τμημάτων που προκύπτουν συνδέοντας τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των κορυφών και εφαρμόζοντας το Λήμμα Ευθυγράμμου Τμήματος.

Για τον προσδιορισμό της μέγιστης τιμής του  $\epsilon$  που αποτελεί ζητούμενο του δεύτερου προβλήματος επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία με αυξανόμενες τιμές του  $\epsilon$ . Ένα άνω φράγμα  $\bar{\epsilon}$  στη μέγιστη τιμή του  $\epsilon$  μπορεί να βρεθεί από την τιμή του  $\epsilon$  για την οποία κάποια από τις κορυφές γίνεται μόλις ασταθής. Ένα κάτω φράγμα  $\underline{\epsilon}$  μπορεί να υπολογιστεί από την τιμή του  $\epsilon$  για την οποία ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των κορυφών γίνεται ασταθές. Θα περιγράψουμε μια διαδικασία την οποία μπορούμε να ακολουθήσουμε για να προσεγγίσουμε τη μέγιστη επιτρεπτή τιμή του  $\epsilon$ . Η διαδικασία συνοψίζεται στα παρακάτω βήματα:

1. Θέτουμε  $\underline{\epsilon} = \bar{\epsilon}/2$ .
2. Ελέγχουμε τη μέγιστη διαφορά φάσης των πολυωνύμων κορυφής του παραμετρικού συνόλου για  $\epsilon$  που τίθεται όσο το κάτω φράγμα  $\underline{\epsilon}$ .
3. Αν η μέγιστη διαφορά φάσης είναι κάτω από  $\pi$  ακτίνια τότε αυξάνουμε το κάτω φράγμα στην τιμή  $\underline{\epsilon} + (\bar{\epsilon} - \underline{\epsilon})/2$  και επαναλαμβάνουμε το δεύτερο βήμα.
4. Αν η μέγιστη διαφορά φάσης είναι  $\pi$  ακτίνια ή μεγαλύτερη μειώνουμε το κάτω φράγμα στην τιμή  $\underline{\epsilon} - (\bar{\epsilon} - \underline{\epsilon})/2$  και επαναλαμβάνουμε το δεύτερο βήμα.
5. Σταματάμε τις επαναλήψεις όταν το βήμα κατά το οποίο αυξάνουμε ή μειώνουμε το κάτω φράγμα έχει γίνει αρκετά μικρό.

Αν τα  $\underline{\epsilon}$  και  $\bar{\epsilon}$  δεν είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία αφού προχωρήσουμε σε μια πιο λεπτή διαμέριση του παραμετρικού συνόλου η οποία θα μας οδηγήσει σε πιο αυστηρά κάτω και άνω φράγματα της μέγιστης επιτρεπτής τιμής του  $\epsilon$ .

## 11.4 Έλεγχος ευστάθειας χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Lyapunov

Υποθέτουμε ότι οι εξισώσεις του χώρου κατάστασης ενός συστήματος προς έλεγχο είναι της μορφής (11.1). Ο ελεγκτής που είναι μέρος του συστήματος περιγράφεται από τις παρακάτω εξι-

σώσεις

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c + D_c y.\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος κλειστού βρόχου είναι

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \\ &= \left( \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\bar{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \right) \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Για να σταθεροποιεί ο ελεγκτής το σύστημα θα πρέπει ο πίνακας  $\bar{A} + \bar{B}K\bar{C}$  να είναι ευσταθής. Το προς έλεγχο σύστημα εμφανίζεται να έχει μία παραμετρική εξάρτηση η οποία περιγράφεται από το διάνυσμα  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_l]$ . Κάνουμε την υπόθεση ότι το διάνυσμα  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p}$  της παραμετρικής αβεβαιότητας το οποίο αναλύεται όπως και πριν στην ονομαστική του τιμή  $\mathbf{p}^0$  και τις διαταραχές  $\Delta\mathbf{p}$  υπεισέρχεται με γραμμικό τρόπο στα στοιχεία του πίνακα. Αυτό που θα μας απασχολήσει είναι η εύρεση εκείνου του  $K$  που θα προσδώσει σε ένα τέτοιο σύστημα εύρωστη ευστάθεια. Δεχόμαστε ότι οι (11.1) περιγράφουν το προς έλεγχο σύστημα στις ονομαστικές τιμές λειτουργίας του και κάνουμε την υπόθεση ότι  $\mathbf{p}^0 = 0$  γεγονός που μας επιτρέπει να αντιμετωπίσουμε το  $\mathbf{p}$  σαν διάνυσμα καθαρών διαταραχών. Επομένως η εξίσωση κατάστασης του συστήματος το οποίο υπόκειται σε διαταραχές γίνεται

$$\dot{X}(t) = \left( \bar{A} + \bar{B}K\bar{C} + \sum_{i=1}^l p_i E_i \right) X(t),$$

όπου τα  $E_i$  καθορίζονται από τη δομή της διαταραχής ενώ το  $X(t)$  είναι ένα διάνυσμα κατάστασης  $n$  διαστάσεων. Αν ο πίνακας  $M$  περιγράφει τη λειτουργία του συστήματος στις ονομαστικές συνθήκες τότε η παραπάνω εξίσωση ξαναγράφεται ως

$$\dot{X}(t) = \left( M + \sum_{i=1}^l p_i E_i \right) X(t) \quad (11.6)$$

ενώ απουσία διαταραχών η εξίσωση ξαναγράφεται ως

$$\dot{X}(t) = MX(t). \quad (11.7)$$



Έστω  $Q > 0$  ένας θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας. Το ερώτημα που πρέπει να απαντήσουμε είναι αν υπάρχει μοναδικός θετικά ορισμένος πίνακας  $P$  που να αποτελεί λύση της εξίσωσης

$$M^T P + P M + Q = 0. \quad (11.8)$$

Όσον αφορά γραμμικά συστήματα της μορφής (11.7) προϋπόθεση για την ύπαρξη του  $P$  είναι η ευστάθεια του  $M$ . Με δεδομένο λοιπόν ότι ο  $M$  έχει αρνητικές ιδιοτιμές ο πίνακας  $P$  είναι μοναδικός και ορίζεται από

$$P \equiv \int_0^{+\infty} e^{M^T t} Q e^{M t} dt.$$

Αντίστοιχα ισχύουν για τα συστήματα (11.6) τα οποία υπόκεινται σε διαταραχές των παραμέτρων τους. Για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει να συντρέχει η προϋπόθεση του Θεωρήματος [24] που ακολουθεί.

**Θεώρημα 11.1.** Το σύστημα με εξισώσεις κατάστασης (11.6) είναι ευσταθές για όλα τα  $p_i$  που ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{i=1}^l |p_i|^2 < \frac{\lambda_{\min}^2(Q)}{\sum_{i=1}^l \mu_i^2},$$

όπου  $\mu_i \equiv \|E_i^T P + P E_i\|$  ενώ με  $\lambda_{\min}(Q)$  συμβολίζουμε την ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα  $Q$ .

*Απόδειξη.* Η τεχνική της απόδειξης βασίζεται στη συνάρτηση Lyapunov. Ξεκινάμε με την υπόθεση ότι ο πίνακας  $M$  που συνδέεται με την ονομαστική λειτουργία του συστήματος έχει γίνει ασυμπτωτικά ευσταθής κάτω από τη σταθεροποιητική δράση ενός ελεγκτή που περιγράφεται από τον πίνακα  $K$ . Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει θετικά ορισμένη λύση της εξίσωσης (11.8).

Καλούμε μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  θετικά ορισμένη αν  $V(0) = 0$  και υπάρχει ανοιχτή σφαίρα  $B = \mathcal{B}(0, \epsilon)$  τέτοια ώστε  $V(X) > 0$  για κάθε  $X \in B$ . Θετικά ημιορισμένη καλείται η συνάρτηση για την οποία ισχύει  $V(0) = 0$  και  $V(X) \geq 0$  για κάθε  $X \in B$ . Στις αρνητικά ορισμένες συναρτήσεις αντιστρέφεται η φορά της ανισότητας και καλούνται αυτές για τις οποίες  $V(0) = 0$  και  $V(X) < 0$  για κάθε  $X \in B$ . Αντίστοιχα ισχύουν για τις αρνητικά ημιορισμένες. Έστω  $x_e = 0$  ένα σημείο ισορροπίας ενός συστήματος της μορφής  $\dot{X}(t) = f(X(t))$ . Με  $\dot{V}$  συμβολίζουμε την παράγωγο ως προς το χρόνο της  $V$  και ορίζεται ως

$$\dot{V}(X) = \nabla V(X) \dot{X} = \nabla V(X) f(X),$$

όπου με  $\nabla V = \left[ \frac{\partial V(X)}{\partial X_1} \frac{\partial V(X)}{\partial X_2} \dots \frac{\partial V(X)}{\partial X_n} \right]$  συμβολίζουμε το gradient της  $V$  ως προς  $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ . Σύμφωνα με το Θεώρημα Lyapunov αν υπάρχει θετικά ορισμένη συνάρτηση  $V$  για την οποία η συνάρτηση  $\dot{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι αρνητικά ημιορισμένη τότε η  $X(t)$  είναι ευσταθής ως προς το σημείο  $x_e$ . Αν η  $\dot{V}$  είναι αρνητικά ορισμένη τότε το  $x_e$  αποτελεί σημείο ασυμπτωτικής ευστάθειας. Μια θετικά ορισμένη συνάρτηση η οποία χρησιμοποιείται για να διαπιστώσουμε την

ευστάθεια καλείται συνάρτηση Lyapunov.

Για να αποδείξουμε την πρόταση του Θεωρήματος επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov την

$$V(X) = X^T P X,$$

όπου  $P$  είναι η λύση της (11.8). Υπολογίζουμε στη συνέχεια την  $\dot{V}(X)$  και αντικαθιστούμε το  $\dot{X}$  από το δεξί μέλος της εξίσωσης (11.6)

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &= \dot{X}^T P X + X^T P \dot{X} \\ &= X^T (M^T P + P M) X + X^T \left( \sum_{i=1}^l p_i E_i^T P + \sum_{i=1}^l p_i P E_i \right) X. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Αντικαθιστώντας την (11.8) στην (11.9) παίρνουμε

$$\dot{V}(X) = -X^T Q X + X^T \left( \sum_{i=1}^l p_i E_i^T P + \sum_{i=1}^l p_i P E_i \right) X.$$

Η προϋπόθεση για ευστάθεια που τίθεται από το Θεώρημα Lyapunov ικανοποιείται για

$$X^T \left( \sum_{i=1}^l p_i E_i^T P + \sum_{i=1}^l p_i P E_i \right) X \leq X^T Q X. \quad (11.10)$$

Γνωρίζουμε ότι το πηλίκο Rayleigh που σχετίζεται με τον πίνακα  $Q$  φράζεται από τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του

$$\lambda_{\min}(Q) \leq \frac{X^T Q X}{X^T X} \leq \lambda_{\max}(Q), \quad \forall X.$$

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι

$$\lambda_{\min}(Q) X^T X \leq X^T Q X. \quad (11.11)$$

Λόγω της (11.11) η (11.10) ισχύει αν

$$X^T \left( \sum_{i=1}^l p_i E_i^T P + \sum_{i=1}^l p_i P E_i \right) X \leq \lambda_{\min}(Q) X^T X = \lambda_{\min}(Q) \|X\|^2. \quad (11.12)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Schwartz θέτουμε κατ' αρχάς ένα άνω φράγμα στην απόλυτη τιμή του αριστερού μέλους της (11.12) ενώ στη συνέχεια φράζουμε τη νόρμα του αθροίσματος με

το άθροισμα της νόρμας κάθε όρου

$$\begin{aligned} \left| X^T \left( \sum_{i=1}^l p_i E_i^T P + \sum_{i=1}^l p_i P E_i \right) X \right| &\leq \|X^T\| \left\| \left( \sum_{i=1}^l p_i E_i^T P + \sum_{i=1}^l p_i P E_i \right) \right\| \|X\| \\ &\leq \|X\|^2 \left( \sum_{i=1}^l |p_i| \|E_i^T P + P E_i\| \right). \end{aligned} \quad (11.13)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (11.13) η (11.12) ικανοποιείται σίγουρα αν

$$\sum_{i=1}^l |p_i| \|E_i^T P + P E_i\| \leq \lambda_{\min}(Q). \quad (11.14)$$

Ορίζοντας το  $\mu_i$

$$\mu_i \equiv \|E_i^T P + P E_i\|$$

η (11.14) ξαναγράφεται ως

$$\underline{\mathbf{p}} \underline{\boldsymbol{\mu}}^T \leq \lambda_{\min}(Q),$$

όπου  $\underline{\mathbf{p}} = (|p_1| \ |p_2| \ \dots \ |p_l|)$  και  $\underline{\boldsymbol{\mu}} = (\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_l)$ . Η τελευταία ανισότητα ικανοποιείται αν

$$\|\underline{\mathbf{p}}\|^2 \|\underline{\boldsymbol{\mu}}\|^2 \leq \lambda_{\min}^2(Q).$$

Επειδή  $\|\underline{\mathbf{p}}\|^2 = \sum_{i=1}^l |p_i|^2$  και  $\|\underline{\boldsymbol{\mu}}\|^2 = \sum_{i=1}^l \mu_i^2$  αποδεικνύεται τελικά η πρόταση.  $\square$

Η ποσότητα

$$\rho^2(K, Q) = \frac{\lambda_{\min}^2(Q)}{\sum_{i=1}^l \|E_i^T P + P E_i\|^2} \quad (11.15)$$

που αναδεικνύεται από το Θεώρημα είναι ουσιαστική για τον καθορισμό του εύρους των διαταραχών εντός των οποίων αν παραμείνουν οι παράμετροι του προς έλεγχο συστήματος εξασφαλίζεται η ευστάθεια για δεδομένο ελεγκτή  $K$  που δρα σταθεροποιητικά σε σχέση τις ονομαστικές τιμές λειτουργίας του συστήματος. Ουσιαστικά η ποσότητα  $\rho(K, Q)$  ταυτίζεται με την ακτίνα της σφαίρας ευστάθειας στον παραμετρικό χώρο.

## 11.5 Διαδικασία αύξησης της περιοχής ευστάθειας

Η (11.15) μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μια επαναληπτική διαδικασία για τη σχεδίαση του ιδανικού ελεγκτή  $K^*$  έτσι ώστε η ακτίνα της σφαίρας ευστάθειας να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη. Για δεδομένο ελεγκτή  $K$  η μεγαλύτερη σφαίρα ευστάθειας προκύπτει από τη μεγιστοποίηση ως

προς  $Q$  της ποσότητας  $\rho(K, Q)$

$$\max_Q \rho^2(K, Q) = \max_Q \frac{\lambda_{\min}^2(Q)}{\sum_{i=1}^l \|E_i^T P + P E_i\|^2}. \quad (11.16)$$

Η ίδια ποσότητα μπορεί να μεγιστοποιηθεί και ως προς τον πίνακα  $K$  που καθορίζεται από τα χαρακτηριστικά του ελεγκτή

$$\max_K \left\{ \max_Q \rho^2(K, Q) \right\} = \max_K \left\{ \max_Q \frac{\lambda_{\min}^2(Q)}{\sum_{i=1}^l \|E_i^T P + P E_i\|^2} \right\}$$

με την προϋπόθεση ότι όλες οι ιδιοτιμές του  $\bar{A} + \bar{B}K\bar{C}$  βρίσκονται στο ανοιχτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Μια ισοδύναμη έκφραση της (11.8) είναι η

$$(\bar{A} + \bar{B}K\bar{C})^T P + P (\bar{A} + \bar{B}K\bar{C}) = -L^T L,$$

όπου ο πίνακας  $Q$  έχει αντικατασταθεί από τον  $L^T L$ . Για κάθε τετράγωνο πίνακα  $L$  πλήρους τάξης ο  $L^T L$  είναι ένας συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που διατυπώσαμε προηγουμένως ξαναγράφεται τώρα ως

$$\min_{K, Q} J = \min_{K, Q} \frac{\sum_{i=1}^l \|E_i^T P + P E_i\|^2}{\lambda_{\min}^2(L^T L)}$$

υπό τον περιορισμό ότι

$$\max_{\lambda(\bar{A} + \bar{B}K\bar{C})} \operatorname{Re}[\lambda] < 0.$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε μια διαδικασία gradient descent [24] για να βελτιστοποιήσουμε την  $J$  ως προς τις παραμέτρους  $K$  και  $L$ . Από τη διαδικασία αυτή θα προκύψει ένας αλγόριθμος που βελτιώνει επαναληπτικά τη  $J$  με εναλλαγή δύο βημάτων. Κατά το ένα βήμα επιχειρεί την ελαχιστοποίηση της  $J$  ως προς  $L$  διατηρώντας σταθερό το  $K$  ενώ κατά το άλλο βήμα την ελαχιστοποίησή της ως προς  $K$  διατηρώντας σταθερό το  $L$ . Με τον τρόπο που περιγράψαμε αποπειράται μια διαδικασία μεγιστοποίησης της σφαίρας ευστάθειας η οποία όμως δεν έχει εγγυημένη σύγκλιση στο μέγιστο. Η ακτίνα της σφαίρας μπορεί να μεγιστοποιηθεί χρησιμοποιώντας την τεχνική που απορρέει από το Θεώρημα της Απεικόνισης. Η τεχνική αυτή βασίζεται όπως είδαμε στον καθορισμό κάτω και άνω φραγμάτων των διαταραχών που μπορεί να υποστεί το σύστημα χωρίς να χάσει την ευστάθεια του. Τα φράγματα αυτά μπορούν να βελτιωθούν διαμερίζοντας περαιτέρω τον παραμετρικό χώρο. Η εύρεση της ακτίνας ευστάθειας μέσω του Θεωρήματος Απεικόνισης οδηγεί σε πολύ καλύτερες προσεγγίσεις σε σχέση με το κριτήριο που προέκυψε από την ευστάθεια κατά Lyapunov.

## 11.6 Ειδικές περιπτώσεις πινάκων διαστήματος

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με δύο ειδικές κατηγορίες πινάκων διαστήματος για τις οποίες μπορούμε να διατυπώσουμε πιο ισχυρά αποτελέσματα όσον αφορά την ευστάθειά τους. Στην πρώτη κατηγορία βρίσκονται οι επονομαζόμενοι μη αρνητικοί πίνακες. Με τον όρο μη αρνητικός πίνακας εννοούμε κάθε πραγματικό πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι μη αρνητικά. Ένας πίνακας διαστήματος  $\mathbf{A}$  είναι ένα σύνολο πινάκων των οποίων τα στοιχεία λαμβάνουν τιμές από ένα διάστημα τιμών. Κάθε πίνακας διαστήματος  $A \in \mathbf{A}$  είναι μη αρνητικός αν όλοι οι πίνακες  $A \in \mathbf{A}$  είναι μη αρνητικοί, δηλαδή τα στοιχεία τους σε όλο το διάστημα του εύρους τιμών τους είναι μη αρνητικά

$$\mathbf{A} = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : 0 \leq a_{ij}^- \leq a_{ij} \leq a_{ij}^+, \quad \forall i, j \right\}.$$

Χρησιμοποιώντας το κάτω και άνω όριο αντίστοιχα στη θέση κάθε στοιχείου του πίνακα  $A \in \mathbf{A}$  ορίζουμε τους πίνακες

$$A^- \equiv \begin{bmatrix} a_{11}^- & \cdots & a_{1n}^- \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^- & \cdots & a_{nn}^- \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A^+ \equiv \begin{bmatrix} a_{11}^+ & \cdots & a_{1n}^+ \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^+ & \cdots & a_{nn}^+ \end{bmatrix}.$$

Για κάθε πίνακα  $A$  ισχύει

$$0 \leq A^- \leq A \leq A^+.$$

Με  $\rho(A)$  θα συμβολίσουμε την ακτίνα φάσματος ενός πίνακα  $A$ . Αν  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  είναι οι ιδιοτιμές του  $A$  τότε

$$\rho(A) \equiv \max_i (|\lambda_i|).$$

Με  $A(\alpha)$  δηλώνουμε τον  $\alpha$  διαστάσεων κύριο πρωτεύοντα υποπίνακα του  $A$  που αποτελείται από τις πρώτες  $\alpha$  γραμμές και στήλες του  $A$ . Είμαστε σε θέση τώρα να διατυπώσουμε το επόμενο Θεώρημα [37] που θέτει τις προϋποθέσεις για να είναι ένας πίνακας ευσταθής κατά Schur.

**Θεώρημα 11.2.** Ένας μη αρνητικός πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι ευσταθής κατά Schur για κάθε  $A \in [A^-, A^+]$  αν και μόνο αν  $\rho(A^+) < 1$ . Ισοδύναμα, όλες οι κύριες πρωτεύουσες ελάσσονες ορίζουσες των  $I - A^+$ ,  $\det[I - A^+(\alpha)]$ , θα πρέπει να είναι θετικές για  $\alpha = 1, \dots, n$ .

Η δεύτερη κατηγορία πινάκων για την οποία μπορούμε να διατυπώσουμε ειδικές συνθήκες κάτω από τις οποίες υπάρχει ευστάθεια είναι οι Metzlerian πίνακες. Ένας πίνακας  $A$  καλείται Metzlerian αν  $a_{ii} < 0$  για κάθε  $i$  και  $a_{ij} \geq 0$  για κάθε  $i \neq j$ . Ομοίως ένας πίνακας διαστήματος καλείται Metzlerian αν κάθε πίνακας  $A \in \mathbf{A}$  είναι Metzlerian. Σε αντιστοιχία με τη ευστάθεια κατά Schur που ισχύει για τους μη αρνητικούς πίνακες υπό προϋποθέσεις σε ένα Metzlerian πίνακα μπορούμε να θέσουμε τις συνθήκες για την ευστάθεια κατά Hurwitz όπως γίνεται φανερό στο Θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 11.3.** Ένας Metzlerian πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι ευσταθής κατά Hurwitz για κάθε  $A \in [A^-, A^+]$  αν και μόνο αν ο  $A^+$  είναι ευσταθής κατά Hurwitz. Μια ισοδύναμη συνθήκη επιβάλλει όλες οι κύριες πρωτεύουσες ελάσσονες ορίζουσες του  $-A^+$  να είναι θετικές, δηλαδή  $\det[-A^+(a)] > 0$  για κάθε  $a = 1, \dots, n$ .

## 11.7 Παραδείγματα

Στο παράδειγμα που θα παρουσιάσουμε μας ενδιαφέρει να καθορίσουμε το εύρος των διαταραχών ώστε ένα σύστημα που περιγράφεται από έναν πίνακα διαστήματος να παραμένει ευσταθές.

**Παράδειγμα 11.1.** Έστω ο πίνακας διαστήματος

$$A(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & 0 \end{bmatrix}$$

με το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών των παραμέτρων να είναι

$$\mathbf{p}^0 = [p_1^0, p_2^0, p_3^0] = [-3, -2, 1].$$

Κάθε μία από τις παραμέτρους κινείται εντός των διαστημάτων

$$p_1 \in [p_1^-, p_1^+] = [-3 - \epsilon, -3 + \epsilon], \quad p_2 \in [p_2^-, p_2^+] = [-2 - \epsilon, -2 + \epsilon], \\ p_3 \in [p_3^-, p_3^+] = [1 - \epsilon, 1 + \epsilon].$$

Θα αναζητήσουμε τη μέγιστη τιμή  $\epsilon^*$  ώστε ο πίνακας να είναι ευσταθής για όλα τα  $\epsilon \in [0, \epsilon^*]$ . Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα υπολογίζεται από τη σχέση

$$\delta(s, \mathbf{p}) = \det[sI - A] = s(s - p_1) - p_2 p_3. \quad (11.17)$$

Ένα άνω φράγμα στο  $\epsilon^*$  μπορεί να προκύψει από την ελάχιστη τιμή του  $\epsilon$  για την οποία καταστρέφεται η ευστάθεια των συστημάτων που περιγράφονται από τους πίνακες κορυφής. Οι πίνακες κορυφής κατασκευάζονται αν οι παράμετροι αβεβαιότητας τεθούν στις ακραίες τιμές τους οπότε προκύπτει το σύνολο

$$\mathbf{V} = \{(p_1^-, p_2^+, p_3^+), (p_1^-, p_2^-, p_3^+), (p_1^-, p_2^+, p_3^-), (p_1^-, p_2^-, p_3^-), (p_1^+, p_2^+, p_3^+), \\ (p_1^+, p_2^-, p_3^+), (p_1^+, p_2^+, p_3^-), (p_1^+, p_2^-, p_3^-)\}$$

που περιλαμβάνει 8 στοιχεία. Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα προκύπτουν παίρνοντας τις ορίζουσες των πινάκων κορυφής. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που αντιστοιχεί στο 3 στοιχείο του  $\mathbf{V}$

αποκτά μια ρίζα για  $\epsilon = 1$ . Αυτό θέτει ένα άνω φράγμα στην επιτρεπτή διακύμανση των παραμέτρων που είναι  $\bar{\epsilon} = 1$ . Η (11.17) είναι της μορφής

$$\delta(s, \mathbf{p}) = F_1(s)P_{11}(s) + F_2(s)P_{21}(s)P_{22}(s),$$

όπου  $F_1(s) = s$ ,  $F_2(s) = 1$  είναι τα σταθερά πολυώνυμα ενώ τα  $P_{11}(s) = s - p_1$ ,  $P_{21}(s) = p_2$  και  $P_{22}(s) = p_3$  περιλαμβάνουν τις παραμέτρους αβεβαιότητας. Εφαρμόζοντας την πολυγραμμική εκδοχή του Γενικευμένου Θεωρήματος Kharitonov (ΓΘΚ) θα προκύψουν οι παρακάτω οικογένειες που πρέπει να ελεγχθούν για ευστάθεια

$$\begin{aligned} F_1(s)S_{11}(s) + F_2(s)K_{21}^i(s)K_{22}^j(s) &= \\ s [\lambda(s - p_1^-) + (1 - \lambda)(s - p_1^+)] + K_{21}^i(s)K_{22}^j(s) & \\ F_1(s)K_{11}^k(s) + F_2(s)S_{21}(s)S_{22}(s) &= \\ F_1(s)K_{11}^k(s) + [\lambda_1 p_2^- + (1 - \lambda_1)p_2^+] [\lambda_2 p_3^- + (1 - \lambda_2)p_3^+] &, \end{aligned} \tag{11.18}$$

όπου τα  $K_{11}^k(s)$ ,  $K_{21}^i(s)$  και  $K_{22}^j(s)$  είναι τα πολυώνυμα Kharitonov των  $P_{11}(s)$ ,  $P_{21}(s)$  και  $P_{22}(s)$ , αντίστοιχα. Οι δείκτες  $k, i, j$  παίρνουν γενικά τιμές από 1 έως 4 αλλά στην προκειμένη περίπτωση επειδή υπάρχει μία παράμετρος αβεβαιότητας σε καθένα από τα πολυώνυμα  $P_{11}(s)$ ,  $P_{21}(s)$  και  $P_{22}(s)$  παίρνουν τις τιμές 1 και 2. Η πρώτη οικογένεια περιλαμβάνει μόνο ευθύγραμμα τμήματα των οποίων η ευστάθεια μπορεί να ελεγχθεί εφαρμόζοντας το Λήμμα Ευθυγράμμου Τμήματος πολυωνύμων. Η δεύτερη οικογένεια περιλαμβάνει πολλαπλότητες 2 διαστάσεων τις οποίες μπορούμε να περικλείσουμε εντός κυρτών περιβλημάτων. Για να κατασκευάσουμε τα κυρτά περιβλήματα θα παράγουμε τις κορυφές που προκύπτουν αν επιβάλλουμε στα  $\lambda_1, \lambda_2$  να ανήκουν στο σύνολο  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ . Συνδέοντας τις κορυφές με τα ευθύγραμμα τμήματα προκύπτει το σύνορο που φράζει τις πολλαπλότητες. Επειδή οι κορυφές είναι 4 τα ακραία τμήματα που συνθέτουν το κυρτό περίβλημα είναι 6. Για την πρώτη μονοπαραμετρική οικογένεια της (11.18) απαιτείται ο έλεγχος 4 ευθυγράμμων τμημάτων ενώ για τη δεύτερη οικογένεια από τον έλεγχο 12 ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να διαπιστωθεί η ευστάθεια της. Το συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι με την εφαρμογή του ΓΘΚ απαιτείται ο έλεγχος 16 ευθυγράμμων τμημάτων συνολικά. Επειδή οι παράμετροι αβεβαιότητας είναι 3 και καθεμιά μπορεί να λαμβάνει 2 ακραίες τιμές σύμφωνα με το Θεώρημα της Απεικόνισης έχουμε 8 κορυφές από τις οποίες οδηγούμαστε στον έλεγχο 28 ευθυγράμμων τμημάτων για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη εύρωστης ευστάθειας. Αυτό που επιτύχαμε με το ΓΘΚ είναι μια σημαντική μείωση των ελέγχων που απαιτούνται να πραγματοποιηθούν. Αυξάνοντας σταδιακά το  $\epsilon$  διαπιστώνουμε ότι τα 16 ευθύγραμμα τμήματα είναι ευσταθή για όλα τα  $\epsilon < 1$ . Επειδή για  $\epsilon = 1$  καταστρέφεται η ευστάθεια ενός πολυωνύμου κορυφής το περιθώριο ευστάθειας προκύπτει για  $\epsilon^* = 1$ .

**Παράδειγμα 11.2.** Μας δίνεται η περιγραφή ενός συστήματος στο χώρο των καταστάσεων

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (A + BKC)x \\ &= \left( \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 + k_1 & 0 \\ 0 & -1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

όπου  $k_1 \in [k_1^-, k_1^+] = [-\epsilon, \epsilon]$ ,  $k_2 \in [k_2^-, k_2^+] = [-\epsilon, \epsilon]$ . Μας ενδιαφέρει να διαπιστώσουμε ποια είναι η μέγιστη τιμή του  $\epsilon$  για την οποία το σύστημα με ανάδραση εξόδου παραμένει ευσταθές. Αρχικά βρίσκουμε όλα τα πολυώνυμα κορυφής που προκύπτουν αν πάρουμε την ορίζουσα του πίνακα  $A + BKC$  και θέσουμε τα  $k_1, k_2$  σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των ακραίων τιμών τους. Ένα από τα πολυώνυμα κορυφής μόλις γίνεται ασταθές για  $\epsilon = 1.75$ . Άρα ένα άνω φράγμα στη μέγιστη δυνατή τιμή του  $\epsilon$  είναι  $\bar{\epsilon} = 1.75$ . Στη συνέχεια μπορούμε να βρούμε τη μέγιστη επιτρεπτή τιμή του  $\epsilon$  είτε ελέγχοντας αν η μέγιστη διαφορά φάσης των πολυωνύμων κορυφής για κάποια συχνότητα  $\omega$  αγγίζει τις  $180^\circ$  είτε αν τα 6 ευθύγραμμο τμήματα που συνδέουν τα 4 πολυώνυμα κορυφής είναι ευσταθή με βάση το Λήμμα Ευθυγράμμου Τμήματος. Από τους παραπάνω υπολογισμούς προκύπτει ότι η τιμή του  $\epsilon$  για την οποία ένα ευθύγραμμο τμήμα γίνεται ασταθές είναι 1.75. Επομένως μία συντηρητική εκτίμηση για τη μέγιστη τιμή είναι  $\underline{\epsilon} = 1.75$  η οποία συνδυαζόμενη με το άνω φράγμα δίνει τελικά ότι το περιθώριο ευστάθειας είναι 1.75.



# Βιβλιογραφία

- [1] S. S. Ahmad, L. H. Keel, Mansour, and S. P. Bhattacharyya. Frequency domain templates for design of multilinear interval control systems. Technical Report ISE Report No. ACS-94-1, Tennessee State University.
- [2] A. C. Bartlett, C. V. Hollot, and H. Lin. Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 1:61–71, 1988.
- [3] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, and L. H. Keel. Robust Control-The Parametric Approach. available at <http://www.ece.tamu.edu/~bhatt/books/robustcontrol/>.
- [4] M. Biehler. Sur une classe d' équations algébriques dont toutes les racines sont réelles. *J. Reine Angew. Math*, vol. 87:350–352, 1879.
- [5] R. M. Biernacki, H. Hwang, and S. P. Bhattacharyya. Robust stabilization of plants subject to structured real parameter perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-32, no. 6:495–506, 1987.
- [6] H. W. Bode. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. D. Van Nostrand Publishing Co., New York, NY, 1945.
- [7] H. Chapellat and S. P. Bhattacharyya. Robust stability and stabilization of interval plants. In *Robustness in Identification and Control*, pages 207–229. M. Milanese, R. Tempo, A. Vicino (Eds.), Plenum Press, New York, 1989.
- [8] H. Chapellat and S. P. Bhattacharyya. Calculation of maximal stability domains using an optimal property of Kharitonov polynomials. In *Analysis and Optimization of Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, volume vol. 62, pages 22–31. Springer-Verlag, 1988.
- [9] H. Chapellat and S. P. Bhattacharyya. A generalization of Kharitonov's theorem: robust stability of interval plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-34, no. 3:306–311, 1989.

- [10] H. Chapellat and S. P. Bhattacharyya. An alternative proof of Kharitonov's theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-34, no. 4:448–450, 1998.
- [11] H. Chapellat, S. P. Bhattacharyya, and M. Dahleh. Robust stability of a family of disc polynomials. *International Journal of Control*, vol. 51:1353–1362, 1990.
- [12] H. Chapellat, S. P. Bhattacharyya, and L. H. Keel. Stability margin for Hurwitz polynomials. In *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1392–1398, Austin, Texas, USA, December 1988.
- [13] H. Chapellat, M. Dahleh, and S. P. Bhattacharyya. Robust stability manifolds for multilinear interval systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 2:314–318, 1993.
- [14] H. Chapellat, H. L. Keel, , and S. P. Bhattacharyya. Stability margins for multilinear interval control systems. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 894–899, Brighton, UK, December 1991.
- [15] H. Chapellat, M. Mansour, and S. P. Bhattacharyya. Elementary proofs of some classical stability criteria. *IEEE Transactions on Education*, 33, no. 3:232–239, 1990.
- [16] S. Dasgupta. Kharitonov's theorem revisited. *Systems & Control Letters*, vol. 11:381–384, 1988.
- [17] R. Frazer and W. Duncan. On the criteria for the stability of small motions. *Proc. Royal Society A*, 124:642–654, 1929.
- [18] C. Hermite. Sur le nombre des racines d' une équation algébrique comprise entre des limites données. *J. Reine Angew. Math*, vol. 52:39–51, 1856.
- [19] A. Hurwitz. Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. *Math. Ann.*, vol. 46:273–284, 1895.
- [20] E. I. Jury. *Sampled-data Control Systems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1958.
- [21] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya. Frequency domain design of interval controllers. In *Control of Uncertain Dynamic Systems*, pages 423–438. S. P. Bhattacharyya and L. H. Keel (Eds.), CRC Press, Littleton, MA, 1991.
- [22] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya. Phase properties of Hurwitz polynomials and segments. Technical Report ISE Report No. ACS-94-2, Tennessee State University, 1994.
- [23] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya. Robust parametric classical control design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 7:1524–1530, 1994.

- [24] L. H. Keel, S. P. Bhattacharyya, and J. W. Howze. Robust control with structured perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, no. 1:68–78, 1988.
- [25] L. H. Keel, J. Shaw, and S. P. Bhattacharyya. Robust control of interval systems. In *Robust Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, volume vol. 183, Tokyo, Japan. Springer-Verlag.
- [26] V. L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differential Uraunen*, vol. 14:2086–2088, 1978. Translation in *Differential Equations*, vol. 14:1483–1485, 1979.
- [27] V. L. Kharitonov. The Routh-Hurwitz problem for families of polynomials and quasipolynomials. *Izvetiy Akademii Nauk Kazakhskoi SSR, Seria fizikomatematicheskai*, vol. 26:69–79, 1979.
- [28] H. Kokame and T. Mori. A Kharitonov-like theorem for interval polynomial matrices. *Systems & Control Letters*, vol. 16:107–116, 1991.
- [29] M. Mansour and F. J. Kraus. Argument conditions for Hurwitz and Schur stable polynomials and the robust stability problem. Technical report, ETH.
- [30] R. J. Minninchelli, J. J. Anagnost, and C. A. Desoer. An elementary proof of kharitonov’s stability theorem with extensions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-34, no. 9:995–998, 1989.
- [31] H. Nyquist. Regeneration theory. *Bell System Technical Journal*, vol. 11:126–147, 1932.
- [32] F. Pérez, C. Abdallah, and D. Docampo. Extreme point stability tests for discrete-time polynomials. In *Proceedings of the 31th IEEE Conference on Decision and Control*, Tucson, AZ, December 1992.
- [33] A. Rantzer. Stability conditions for polytopes of polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-37, no. 1:79–89, 1992.
- [34] E. J. A. Routh. *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion*. Macmillan Publishing Co., London, 1877.
- [35] M. Saeki. A method of robust stability analysis with highly structured uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-31, no. 10:925–940, 1986.
- [36] I. Schur. Ueber Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschaenkt sind. *J. Reine Angew. Math.*, vol. 147:205–232, 1917. Eng. Transl. *Operator Theory: Adv. Appl.*, vol. 18:31–59, Birkhauser Verlag, 1986.

- [37] B. Shafai, K. Perev, D. Cowley, and Y. Chehab. A necessary and sufficient condition for the stability of nonnegative interval discrete systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 6:742–746, 1991.
- [38] C. B. Soh, C. S. Berger, and K. P. Dabke. On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-30, no. 10:1033–1036, 1985.
- [39] A. Tesi and A. Vicino. Kharitonov segments suffice for frequency response analysis of interval plant-controller families. In *Control of Uncertain Dynamic Systems*, pages 403–415. S. P. Bhattacharyya and L. H. Keel (Eds.), CRC Press, Littleton, MA, 1991.
- [40] M. A. Tin. Discrete time robust control systems under structured perturbations: Stability manifolds and extremal properties. Master’s thesis, Department of Electrical Engineering, Texas A & M University, College Station, Texas, U.S.A, 1992.
- [41] Y. Z. Tsypkin and B. T. Polyak. Frequency domain criterion for robust stability of polytope of polynomials. In *Control of Uncertain Dynamic Systems*, pages 491–499. S. P. Bhattacharyya and L. H. Keel (Eds.), CRC Press, Littleton, MA, 1991.
- [42] Y. Z. Tsypkin and B. T. Polyak. Frequency domain criteria for  $\ell_p$ -robust stability of continuous linear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. AC-36, no. 12:1464–1469, 1991.
- [43] L. A. Zadeh and C. A. Desoer. *Linear Systems Theory*. McGraw-Hill Book Co., New York, NY, 1963.
- [44] E. Zeheb. Necessary and sufficient condition for the robust stability of a continuous system: the continuous dependency case illustrated via multilinear dependency. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 37, no. 1:47–53, 1990.