



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

**ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΠΟΣΥΖΕΥΣΗΣ ΕΙΣΟΔΩΝ-ΕΞΟΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ.
(DECOUPLING CONTROL)**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΖΙΩΓΚΑ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ

Επιβλέπων: Βαρδουλάκης Ι. Αντώνιος
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2005



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

**ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΠΟΣΥΖΕΥΞΗΣ ΕΙΣΟΔΩΝ-ΕΞΟΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ.
(DECOUPLING CONTROL)**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τζιώγκα Αναστασία

Επιβλέπων: Βαρδουλάκης Ι.Αντώνιος
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την.....

.....
Α.Ι.Βαρδουλάκη
Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....
Ν.Καραμπετάκης
Επ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....
Μ.Γουσίδου-Κουτίτα
Επ. Καθηγήτρια Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2005

.....
Τζιώγκα Αναστασία
Πτυχιούχος Πληροφορικής Α.Π.Θ.

Copyright © Τζιώγκα Αναστασία , 2005
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τη συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τη συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

Στους γονείς μου..

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με αφορμή το γεγονός η θεωρία συστημάτων ελέγχου έχει ασχοληθεί εκτενώς με τα συστήματα μιας εισόδου-μιας εξόδου, θεωρήθηκε αναγκαίος ο διαχωρισμός των συστημάτων πολλών εισόδων-πολλών εξόδων σε υποσυστήματα ανεξάρτητα μεταξύ τους, ούτως ώστε κάθε μία από τις εισόδους του συστήματος να επηρεάζει μόνο μία από τις εξόδους του συστήματος. Η ανάγκη αυτή προέκυψε λόγω του ότι τα περισσότερα συστήματα που υπάρχουν στην βιομηχανία είναι τέτοιας μορφής. Επομένως η επιθυμία για αύξηση της αποδοτικότητας αυτών των συστημάτων οδήγησε στην αναγωγή των συστημάτων αυτών σε συστήματα μίας εισόδου-μίας εξόδου, με την χρήση κατάλληλων ελεγκτών, οι οποίοι να μετακινούν όλες τις διασυνδέσεις μεταξύ των εισόδων-εξόδων ώστε κάθε είσοδος να ελέγχει μόνο μία έξοδο.

Για τον σκοπό αυτό αναπτύχθηκαν τις τελευταίες δεκαετίες πολλές μέθοδοι οι οποίες αναφέρονται στο 1^ο Κεφάλαιο. Η προσέγγιση που θα γίνει στην παρούσα εργασία είναι μέσω των συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων. Για την καλύτερη κατανόηση όλης της διαδικασίας αναφέρονται στο 2^ο κεφάλαιο βασικές έννοιες της θεωρίας των γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων. Η προσέγγιση στο πρόβλημα της αποσύζευξης μέσω της περιγραφής του συστήματος στον χώρο των καταστάσεων είναι αντικείμενο του 3^ο Κεφαλαίου. Αναφέρονται οι μέθοδοι της στατικής αποσύζευξης και της δυναμικής αποσύζευξης, καθώς και ο αλγόριθμος της επανατοποθέτησης πόλων με ανάδραση. Στο 4^ο Κεφάλαιο γίνεται αναφορά στο σύνολο (κλάση) των ελεγκτών που μπορούν να αποσυζεύξουν ένα σύστημα στον χώρο των καταστάσεων.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

σύστημα μιας εισόδου-μιας εξόδου, σύστημα πολλών εισόδων-πολλών εξόδων, σύστημα στο χώρο των καταστάσεων, συνάρτηση μεταφοράς, πόλοι, ελεγκτής, δυναμική αποσύζευξη, στατική αποσύζευξη, επανατοποθέτηση πόλων.

ABSTRACT

Given the fact that the control system theory has extensively dealt with the single input- single output system, the division of the multi input- multi output system into independent subsystems was considered essential, so that each system input affects only one system output. This need was created because the majority of the systems used in industry are of that kind. Therefore, the desire to increase the efficiency levels of those systems led to that modification. This was achieved by using the appropriate controllers, which placed the connections in such a way that every input controls the suitable output.

KEY WORDS

single input-output system, multiple input-output system, state-space system, stabilizable, transfer matrix, poles, controller, dynamic decoupling, static decoupling, pole placement.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α.....	10
1 ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΦΟΡΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟΣΥΖΕΥΞΗΣ	12
1.1 Πρακτική σημασία.....	14
1.2 Ιστορική αναδρομή - μέθοδοι προσέγγισης.....	15
2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ	16
(STATE-SPACE SYSTEMS).....	16
3 ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΠΟΣΥΖΕΥΞΗΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ	
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ.....	20
(STATE SPACE APPROACH)	20
3.1 Διατύπωση του προβλήματος αποσύζευξης.....	20
3.2 Το πρόβλημα της στατικής αποσύζευξης.....	22
3.2.1 Σχεδιασμός του ελεγκτή που οδηγεί στην στατική αποσύζευξη.....	24
3.2.2 Κώδικας σε Matlab.....	26
3.2.3 Δημιουργία του (GUI) γραφικού περιβάλλοντος.....	27
3.3 Το πρόβλημα της δυναμικής αποσύζευξης (dynamic decoupling problem).....	33
3.3.1 Σχεδιασμός του ελεγκτή της δυναμικής αποσύζευξης.....	33
3.3.2 Παραδείγματα της δυναμικής αποσύζευξης.....	38
3.3.3 Κωδικας Σε Matlab.....	43
3.4 Πόλοι και μηδενικά των αποσυζευγμένων συστημάτων.....	47
3.4.1 Παραδείγματα.....	49
4 ΚΛΑΣΗ ΤΩΝ ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΠΟΥ ΟΔΗΓΟΥΝ ΣΕ ΑΠΟΣΥΖΕΥΞΗ.....	57
4.1 Δημιουργία της κλάσης των ελεγκτών που οδηγούν σε στατική ή δυναμική αποσύζευξη.....	57
4.2 Παραδείγματα.....	60
4.3 Διαδικασία σύνθεσης.....	63
4.3.1 Παράδειγμα.....	64
4.3.2 Παράδειγμα_1.....	67
4.3.3 Παράδειγμα_2.....	68
4.4 Αποσύζευξη συστημάτων με ανάδραση εξόδου.....	70
(decoupling by output feedback).....	70
4.5 Μελέτη προβλήματος (Case Study).....	73
5 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ / ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ / ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	77

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 2-1	18
Παράδειγμα 3-1	25
Παράδειγμα 3-2	38
Παράδειγμα 3-3	39
Παράδειγμα 3-4	40
Παράδειγμα 3-5	49
Παράδειγμα 4-1:	60
Παράδειγμα 4-2	70
Παράδειγμα 4-3	72
Παράδειγμα 4-4:	72

ΕΙΚΟΝΕΣ

Εικόνα 1-1: Σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ στο οποίο έχει εφαρμοστεί ελεγκτής $K(s)$	16
Εικόνα 3-1 αεροσκάφος με κατακόρυφη απογείωση	21
Εικόνα 3-2 Μενού επιλογών για το πρόβλημα αποσύζευξης στο περιβάλλον matlab.	26
Εικόνα 4-1: αεροπλάνο τύπου V/STOL.	76
Εικόνα 4-2: αερόπλano τύπου V/STOL με 4 προωθητήρες	76



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΠΟΣΥΖΕΥΞΗΣ ΕΙΣΟΔΩΝ-ΕΞΟΔΩΝ (DECOUPLING CONTROL) ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ.

1 ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΦΟΡΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟΣΥΖΕΥΞΗΣ

Η αποσύζευξη (decoupling) είναι μια διαδικασία χωρισμού ενός σύνθετου συστήματος πολλών εισόδων-πολλών εξόδων σε υποσυστήματα ανεξάρτητα μεταξύ τους. Σε πολλά προβλήματα ελέγχου είναι αναγκαίο να εφαρμόσουμε διαφορετικούς νόμους ελέγχου σε διαφορετικά τμήματα του συστήματος. Ακόμη όμως και όταν αυτό δεν απαιτείται, η απουσία αλληλεπίδρασης στα υποσυστήματα απλοποιεί σημαντικά τη σχεδίαση κατάλληλων νόμων ελέγχου. Όταν τα υποσυστήματα που προκύπτουν είναι πολλών εισόδων – πολλών εξόδων, τότε έχουμε **ομαδική αποσύζευξη** (block decoupling), ενώ όταν είναι μιας εισόδου-μιας εξόδου, έχουμε αποσύζευξη εισόδων-εξόδων(input-output decoupling).

Παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} G_{11} & G_{12} & & \\ G_{21} & G_{22} & & 0 \\ \hline & & 0 & \\ & & G_{33} & G_{34} \\ & & G_{43} & G_{44} \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & & & 0 \\ & G_{22} & & \\ & & G_{33} & \\ 0 & & & G_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

➤ block decoupling

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

➤ input-output decoupling

$$u_1 \rightarrow y_1$$

1.1 Πρακτική σημασία

Ένα πολυμεταβλητό σύστημα απλοποιείται σε έναν αριθμό από συστήματα μιας εισόδου-μιας εξόδου εφόσον δεν υπάρχουν πάνω από μια διασταυρούμενες συνδέσεις μεταξύ εισόδου-εξόδου. Σε αυτή την περίπτωση χαρακτηρίζεται το σύστημα ως (decoupled) αποσυζευγμένο .

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ένα δεδομένο πολυμεταβλητό σύστημα συνήθως διαθέτει διασυνδέσεις μεταξύ εισόδων-εξόδων. Επομένως μια μέθοδος σχεδιασμού είναι να σχεδιαστεί ένας πολυμεταβλητός ελεγκτής (controller) ο οποίος να παρέχει την αποσυζευγμένη (decouple) μορφή στο σύστημα. Δηλαδή, μετά την εφαρμογή του κατάλληλου ελεγκτή (controller) να προκύπτει σύστημα που να διαθέτει πλέον συνδέσεις μεταξύ των επιθυμητών μεταβλητών εισόδου και εξόδου. Πρέπει να τονιστεί ότι ο έλεγχος με σκοπό την διαδικασία αποσύζευξης (decoupling) είναι διαδεδομένος ΟΧΙ τόσο γιατί απλοποιεί τον σχεδιασμό των πολυμεταβλητών συστημάτων ελέγχου, ΑΛΛΑ κυρίως γιατί συνιστά ένα απαραίτητο χαρακτηριστικό σε διάφορες πρακτικές εφαρμογές.

Η διαδικασία της αποσύζευξης (decoupling) είναι αναγκαία για να διευκολύνει τις λειτουργίες του συστήματος, τουλάχιστον όσον αφορά την παραγωγική διαδικασία και την χημική βιομηχανία, καθώς χωρίς την μέθοδο αυτή οι τεχνικοί που θέτουν σε λειτουργία ένα πολυμεταβλητό σύστημα ελέγχου, σπάνια μπορούν να επιλέγουν την αξία των πολλαπλών σημείων ενεργοποίησης η οποία συνάδει με τους στόχους τους. Επίσης, το χαμηλό επίπεδο αποσύζευξης (decoupling) συνιστά το σύννηθες πρόβλημα στην βιομηχανία (βλ. έρευνα Kong 1995) την οποία διεξήγαγαν οι σημαντικότεροι κατασκευαστές «ελεγκτών» / «controller» όπως οι Fish – Rosemond, Yokogawa and Foxboro.

Βάσει της βιομηχανικής εμπειρίας η χαμηλή αποσύζευξη σε κλειστό κύκλωμα (loop) θα συντελούσε σε πολλές περιπτώσεις σε χαμηλή απόδοση του κυκλώματος. Αντιστρόφως, υψηλή αποσύζευξη συντελεί στην υψηλή απόδοση του κυκλώματος. Απόδειξη αποτελεί το γεγονός ότι ο βέλτιστος δυνατός έλεγχος χωρίς καμία απαίτηση για αποσύζευξη θα μπορούσε τελικά να επιφέρει αποσυζευγμένο κλειστό κύκλωμα (Dickman and Sivan 1985, Linneman and Wang 1993). Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι ακόμα και αν οποιαδήποτε απαίτηση για αποσύζευξη έχει μετριαστεί λόγω περιορισμένης σύζευξης (coupling), ωστόσο θα οδηγήσει σε αποσύζευξη (decoupling) εάν ο αριθμός εισόδων/εξόδων είναι μεγάλος.

Η πιο ακραία περίπτωση είναι να μην μπορεί να εφαρμοστεί καθόλου η αποσύζευξη διότι μπορεί να επηρεάζεται η σταθερότητα του συστήματος. Εν συντομία η διαδικασία την αποσύζευξης κλειστού κυκλώματος αποτελεί κοινή πρακτική στην βιομηχανία αλλά πρέπει να εφαρμοσθεί και να τεκμηριωθεί μέσω πραγματικών καταστάσεων και απαιτήσεων.

1.2 Ιστορική αναδρομή - μέθοδοι προσέγγισης

Η μελέτη της αποσύζευξης των γραμμικών χρονικά ανεξάρτητων πολυμεταβλητών συστημάτων αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης τόσο από την θεωρία ελέγχου όσο και από την βιομηχανική πρακτική για πολλές δεκαετίες, τουλάχιστον ήδη από την εποχή του Vaznesenskii 1938.

-Εκείνη την πρώιμη περίοδο το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε με τις συναρτήσεις μεταφοράς (transfer matrices) – βλέπε Kavanagh 1966 και Tsien 1954 για αναθεωρήσεις.

- Την προσέγγιση της αποσύζευξης στον χώρο των καταστάσεων εισηγήθηκε ο Morgan το 1964.

- Μια αξιολογική εργασία των Falb and Wolovich 1967 παρουσίασε την ικανή και αναγκαία συνθήκη για την λύση των συστημάτων που περιγράφονται μέσω του μοντέλου στον χώρο των καταστάσεων.

-Μια ισοδύναμη συνθήκη για συστήματα που περιγράφονται μέσω συναρτήσεων μεταφοράς δόθηκε αργότερα από τον Gilbert 1969. Στις συγκεκριμένες έρευνες το πρόβλημα ανάγεται στην περίπτωση των βαθμωτών block (block ομάδων) εισόδου και εξόδου και άρα στον ίσο αριθμό εισόδων και εξόδων.

-Το πιο γενικό πρόβλημα ομαδικής αποσύζευξης του προσδιορίστηκε και λύθηκε για πρώτη φορά από τους Wonham and Morse 1970 με γεωμετρική προσέγγιση (βλέπε επίσης την μονογραφία του Wonham 1986). Για αυτού του είδους τα γενικά προβλήματα της ομαδικής αποσύζευξης, οι Silverman and Payne 1971 ανέπτυξαν μία εναλλακτική προσέγγιση βασισμένη σε μορφή αλγορίθμου που πρότεινε ο Silverman 1969.

- Άλλες προσεγγίσεις του θέματος στην πιο γενική του μορφή μπορούν να βρεθούν από τους Commault 1991, Desoer and Gundes 1986, Hautus and Heymann 1983, Koussiouris 1979 και 1980, Penedo 1981, Williams and Antsaklis 1986.

Κάτω από την προϋπόθεση ότι το σύστημα δεν έχει ασταθείς πόλους που συμπίπτουν με τα μηδενικά το πρόβλημα αποσύζευξης διαγώνιας μορφής είναι επιλύσιμο και μπορούν να παρατηρηθούν παραμετρικής μορφής ελεγκτές που μπορούν να επιλύσουν αυτό το πρόβλημα, Vardulakis 1987, Safonov and Chen 1982, Peng 1990, Desoer 1990.

Η προϋπόθεση αυτή δεν είναι αναγκαία και στην πορεία χαλάρωσε από τους Linnemann and Maier(1990) για τους 2×2 πίνακες ενώ ο Wang (1992) ασχολήθηκε με συστήματα ίσων εισόδων-εξόδων χρησιμοποιώντας έναν παραμετρικό ελεγκτή

- Εναλλακτικά, ικανές και αναγκαίες συνθήκες για το πρόβλημα, οι οποίες βασίζονται στις συναρτήσεις μεταφοράς (transfer matrices) αναφέρθηκαν από τον Lin(1997) και από τους Wang and Yang (2002).

- Τα αποτελέσματα του Wang(1992) γενικεύτηκαν στο πρόβλημα της ομαδικής αποσύζευξης για συστήματα με διαφορετικό αριθμό εισόδων-εξόδων.

2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ (STATE-SPACE SYSTEMS)

Έστω ένα σύστημα του οποίου η περιγραφή στον χώρο των καταστάσεων (state space system) δίνεται από τις δύο ακόλουθες εξισώσεις:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2-1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2-1)$$

όπου

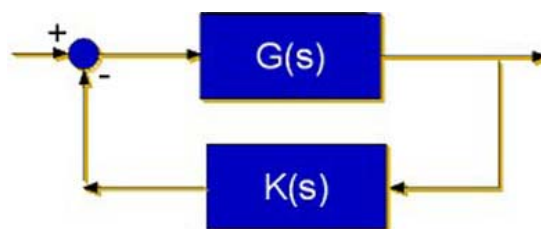
$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

Η πρώτη σχέση ονομάζεται εξίσωση κατάστασης, ενώ η δεύτερη ονομάζεται εξίσωση εξόδου. Η μεταβλητή $t \geq 0$ είναι ο χρόνος και η συνάρτηση $u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι η είσοδος του συστήματος, η $x(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι η κατάσταση του συστήματος και η $y(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ είναι η έξοδος του συστήματος.

Η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ του συστήματος θα δίνεται από την σχέση

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (2-2)$$

Ελεγκτής/ Controller: Το βασικό εξάρτημα κάθε αυτόματου συστήματος ελέγχου είναι ο επονομαζόμενος “controller” (ελεγκτής) ο οποίος μπορεί να αποτελεί τμήμα του κώδικα του υλικού ή του λογισμικού του Η/Υ. Σκοπός του είναι να λαμβάνει πληροφορίες σχετικές με το σύστημα από διάφορους αισθητήρες να τις επεξεργάζεται και αυτόματα να δημιουργεί εντολές διορθωτικών ενεργειών, προκειμένου να φέρει το σύστημα στην επιθυμητή τιμή ή τροχιά.



Εικόνα 1-1: Σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ στο οποίο έχει εφαρμοστεί ελεγκτής $K(s)$.

Ορισμός 2.1: Το σύστημα (2-1) ονομάζεται *εσωτερικά ευσταθές* εάν η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2-3)$$

με αρχικές συνθήκες $x(0)$, μειώνεται εκθετικά στο \mathbb{R}_+

π.χ. $\exists a > 0$ τέτοιο ώστε $e^{at}x(t)$ είναι φραγμένο στο \mathbb{R}_+ \square (2-4)

Με βάση την θεωρία της λύσης διαφορικών εξισώσεων και την λύση από της (2.5) με αρχικές συνθήκες $x(0-)$, έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Θεώρημα 2.1: Το παραπάνω δυναμικό σύστημα ονομάζεται ασυμπτωτικά ευσταθές (stable) εάν οι ιδιοτιμές $\lambda(A)$ του A βρίσκονται στο ανοικτό αριστερό ημιεπίπεδο ,δηλ. $\text{Re}(\lambda(A)) < 0$.

Ορισμός 2.2: Ελεγχιμότητα (Reachability):

Έστω $t \geq 0$ και $R_t := \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \text{όπου υπάρχει } u(t) \text{ τέτοιο ώστε } x(t) = \xi \}$ το σύνολο των καταστάσεων που είναι εφικτές (reachable) για είσοδο $u(t)$, για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $\forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

όπου $x(t_0) = 0$, και R_t είναι υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Το σύστημα στον χώρο των καταστάσεων ονομάζεται *ελέγξιμο (controllable)* εάν μπορούμε να μετατοπίσουμε κάθε αρχική κατάσταση $x(0) = x_0$ σε κάθε επιθυμητή τελική κατάσταση $x(t_1) = x_1$ εφαρμόζοντας στο σύστημα μια είσοδο $u(t)$, $0 \leq t \leq t_1$,

Θεώρημα 2.2 Το σύστημα (2-1)-(2-2) είναι ελέγξιμο (controllable) εάν και μόνο εάν ισχύει μία από τις ακόλουθες ισοδύναμες συνθήκες.

- Ο πίνακας ελεγχιμότητας $Q_c := [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$, έχει πλήρη τάξη γραμμών.
- Ο πίνακας $[sI - A \ B]$ έχει πλήρη τάξη γραμμών για κάθε $s \in \mathbb{C}$, ή ισοδύναμα για κάθε ιδιοτιμή του πίνακα A .
- Οι ιδιοτιμές του $A - BK$ μπορούν ελεύθερα να επανατοποθετηθούν με κατάλληλη επιλογή του K
- οι γραμμές του $e^{At}B$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Ορισμός 2.3: Το ζευγάρι (A, B) ονομάζεται *σταθεροποιήσιμο* μέσω ανάδρασης κατάστασης (state-feedback stabilizable) εάν υπάρχει ανάδραση κατάστασης της μορφής $u = -Kx$ τέτοια ώστε το σύστημα ανάδρασης που προκύπτει

$$\dot{x} = (A - BK)x + F_r$$

να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θεώρημα 2.3: Το σύστημα (2-1)-(2-2) ονομάζεται *σταθεροποιήσιμο (stabilizable)* εάν και μόνο εάν

$$\text{rank}_{\mathbb{C}}[s_0 I - A, B] = r \quad \forall s_0 \in \mathbb{C}^+ \quad \square \quad (2-6)$$

Θεώρημα 2.4: Το σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο με ανάδραση κατάστασης εάν και μόνο εάν ο πίνακας $[sI-A, B]$ έχει πλήρη τάξη γραμμών για κάθε $s \in \mathbb{R}^+$. \square

Παράδειγμα 2-1

Εστω το σύστημα που περιγράφεται ως ακολούθως στον χώρο των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

Να γίνει έλεγχος:

- i. εάν το σύστημα είναι εσωτερικά ευσταθές
- ii. εάν το σύστημα είναι ελέγξιμο
- iii. εάν είναι σταθεροποιήσιμο
- iv. ποιο K κάνει το σύστημα ευσταθές

Λύση:

- i. Για να είναι το σύστημα εσωτερικά ευσταθές θα πρέπει βάση του θεωρήματος 3.1 να βρίσκονται όλες οι ιδιοτιμές του A στο αριστερό ημιπίεδο. Οι ιδιοτιμές του A υπολογίζονται με την βοήθεια της $\text{eig}(\cdot)$ συνάρτησης του matlab. Έχουμε $\text{eig}(A) = [1, -2]$. Υπάρχει θετική ιδιοτιμή επομένως το σύστημα **δεν είναι εσωτερικά ευσταθές**.

- ii. Ελέγχουμε εάν το σύστημα είναι ελέγξιμο βάση του θεωρήματος 2-2. Βρίσκουμε τον πίνακα $Q = [B \ AB]$ και εξετάζουμε αν χάνει τάξη

$$Q = [B \ AB] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει τάξη 1.

Επομένως το σύστημα του παραδείγματος **δεν είναι ελέγξιμο**.

- iii. Για να είναι το σύστημα σταθεροποιήσιμο βάση του θεωρήματος 2.4 πρέπει ο πίνακας $[sI-A, B]$ να έχει πλήρη τάξη γραμμών για κάθε $s \in \mathbb{R}^+$. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $[1, -2]$ (matlab : $\text{eig}(A) = [1, -2]$) Υπολογίζω την τάξη του $[sI-A, B]$ για τις θετικές ιδιοτιμές του A .

$$(sI - A, B) = (1 * I - A, B) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

δεν χάνει τάξη ο πίνακας ,

άρα το σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο.

- iv. Ψάχνω $K = [k_1 \ k_2]$ τ.ω. το σύστημα να γίνει ευσταθές.
 Δηλαδή $\det(A-BK)=0$ να έχει αρνητικές ρίζες.

$$\begin{aligned} (sI - (A - BK)) &= \begin{pmatrix} s - (4 - k_1) & -(-3 - k_2) \\ -(6 - k_1) & s - (-5 - k_2) \end{pmatrix} = \\ &= (s - (4 - k_1))(s - (-5 - k_2)) - (6 - k_1)(-3 - k_2) = \\ &= s^2 - (-1 - k_1 - k_2)s + (-2 + 2k_2 + 2k_1) = 0 \end{aligned}$$

Πρέπει

$$\left. \begin{array}{l} \bullet -(-1 - k_1 - k_2) > 0 \\ \bullet 2(-1 + k_1 + k_2) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{και} \quad \begin{array}{l} k_1 + k_2 > -1 \\ k_1 + k_2 > 1 \end{array}$$

Άρα

$$k_1 + k_2 > 1$$

Επιλέγω $k_1=0$ και $k_2=2$

Όντως τότε θα έχουμε :

$$A - BK = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

και οι ιδιοτιμές του πίνακα βρίσκονται από την συνάρτηση $\text{eig}(A-BK)$ του matlab και είναι $[-1, -2]$

Άρα μετά την ανάδραση κατάστασης το σύστημα θα είναι ευσταθές.

3 ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΠΟΣΥΖΕΥΞΗΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ (STATE SPACE APPROACH)

Έστω ένα σύστημα του οποίου η περιγραφή στον χώρο των καταστάσεων είναι η παρακάτω:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \quad \text{με } x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (3-1)$$

ώς $x(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ορίζω την κατάσταση του συστήματος, $u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ την είσοδο του συστήματος και $y(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ την έξοδο του συστήματος και $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Εάν $x(0) = 0$ και τα ανύσματα εισόδου και εξόδου έχουν τις ίδιες διαστάσεις m , τότε η είσοδος και η έξοδος συνδέεται με την συνάρτηση μεταφοράς:

$$y(s) = G(s)u(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s) \quad (3-2)$$

η οποία αναπτύσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned} y_1(s) &= g_{11}(s)u_1(s) + g_{12}(s)u_2(s) + \dots + g_{1m}(s)u_m(s), \\ y_2(s) &= g_{21}(s)u_1(s) + g_{22}(s)u_2(s) + \dots + g_{2m}(s)u_m(s), \\ &\vdots \\ y_m(s) &= g_{m1}(s)u_1(s) + g_{m2}(s)u_2(s) + \dots + g_{mm}(s)u_m(s), \end{aligned} \quad (3-3)$$

3.1 Διατύπωση του προβλήματος αποσύζευξης

Τις παραπάνω ιδιότητες τις ονομάζουμε *συζεύξιμες* (coupled) εάν κάθε μια είσοδος ξεχωριστά, επηρεάζει όλες τις εξόδους.

Σε περίπτωση που κριθεί αναγκαίο να προσαρμόσουμε μια από τις εξόδους χωρίς να επηρεαστεί καμία από τις άλλες εξόδους, οι οποίες καθορίζονται από τις εισόδους u_1, u_2, \dots, u_m , τότε αναγόμενα σε μια αρκετά πολύ δύσκολη διαδικασία.

Ενδιαφέρουσα μελέτη αποτελεί ο σχεδιασμός ενός ελεγκτή (controller) τέτοιου ώστε μετά την εφαρμογή του στο σύστημα να μετακινούνται όλες οι συνδέσεις έτσι ώστε

κάθε είσοδος να ελέγχει μόνο μια έξοδο (διαδικασία αποσύζευξης, decoupling problem).

Ορισμός 3.1: Ένα σύστημα της μορφής ονομάζεται *δυναμικά αποσυζεύξιμο* (dynamically decoupled) εάν ο πίνακας της συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ είναι διαγώνιος και αντιστρέψιμος, έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} y_1(s) &= g_{11}(s)u_1(s) \\ y_2(s) &= g_{22}(s)u_2(s) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y_m(s) &= g_{mm}(s)u_m(s). \end{aligned} \quad (3-4)$$

και όπου κανένα από τα $g_{ii}(s)$ δεν είναι απόλυτα μηδέν.

Ένα παράδειγμα από ένα σύστημα που απαιτεί αποσύζευξη (decoupling) είναι το μαθηματικό μοντέλο αεροσκάφους με κατακόρυφη απογείωση. Οι έξοδοι που μας ενδιαφέρουν στο σύστημα αυτό, είναι η γωνία ανύψωσης, η οριζόντια θέση και το ύψος και οι μεταβλητές του ελεγκτή εξαρτώνται από 3 διαφορετικές εισόδους. Όταν όλα τα παραπάνω είναι αποσυζεύξιμα, ο πιλότος μπορεί να αποκτήσει σημαντικές δεξιότητες για τον ταυτόχρονο έλεγχο των τριών εισόδων και να ελέγχει με επιτυχία το αεροσκάφος.



Εικόνα 3-1 αεροσκάφος με κατακόρυφη απογείωση

Πρέπει να τονιστεί ότι το η δυναμική αποσύζευξη “dynamic decoupling” είναι ένα πολύ απαιτητικό πρόβλημα. **Ένα σήμα που εφαρμόζεται στην είσοδο u_i πρέπει να ελέγξει την έξοδο y_i και να μην έχει καμία επίδραση στις υπόλοιπες εξόδους.** Σε πολλές περιπτώσεις αυτό, απαιτεί έναν ελεγκτή σύνθετο και υψηλής ευαισθησίας, και σε άλλες περιπτώσεις δεν μπορεί να επιτευχθεί καθόλου. Είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε έναν λιγότερο αυστηρό προορισμό ο οποίος περιέχει μόνο την μόνιμη (συνεχή) απόκριση πορεία του συστήματος (steady-state behavior).

Ορισμός 3.2: Ένα σύστημα της μορφής (3-2) ονομάζεται *στατικά αποσυζεύξιμο* εάν:

- α) το σύστημα ευσταθές και
- β) ο πίνακας $G(0)$ είναι διαγώνιος και αντιστρέψιμος.

Αυτό σημαίνει πως για την βηματική συνάρτηση εισόδου $u(t) = a \times 1(t)$, όπου $a = [a_1, a_2, \dots, a_m] \in \mathbb{R}^m$ η έξοδος ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) &= g_{11}(0)\alpha_1 \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) &= g_{22}(0)\alpha_2 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} y_m(t) &= g_{mm}(0)\alpha_m
 \end{aligned}
 \tag{3-5}$$

όπου $g_{ii}(0) \neq 0, i=1,2,\dots,m$

Από το **Θεώρημα τελικής τιμής** έχουμε ότι το όριο της συνάρτησης $g(t)$ όταν το t τείνει στο άπειρο είναι ίσο με το γινόμενο του s επί του μετασχηματισμού Laplace $G(s)$ της g όταν το s τείνει στο μηδέν.

$$\left. \begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \\
 \text{Αν } G(s) &= \frac{L[y(t)]}{L[u(t)]} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \text{τότε } Y(s) = G(s)U(s) \\
 \text{αν } u(t) &= \alpha \times 1(t) \Rightarrow u(s) = \frac{\alpha}{s}
 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} sH(s) \frac{\alpha}{s} \tag{3-6}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(t) = a * G(0) \tag{3-7}$$

Όπου $G(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $g(t)$.

3.2 Το πρόβλημα της στατικής αποσύζευξης

Έστω το σύστημα στον χώρο των καταστάσεων που προαναφέραμε στην με ίδιο αριθμό εισόδων και εξόδων $p=m$.

Αν εφαρμόσουμε ανάδραση κατάστασης της μορφής

$$u(t) = -Kx(t) + Fr(t) \tag{3-8}$$

θα πάρουμε το σύστημα :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B[-Kx(t) + Fr(t)] \\ y(t) &= Cx(t) + D[-Kx(t) + Fr(t)]\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + Fr(t) \\ y(t) &= (C - DK)x(t) + DFr(t)\end{aligned}$$

του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι η παρακάτω:

$$H(s) = (C - DK)[sI - (A - BK)]^{-1}BF + DF$$

ισοδύναμα

$$H(s) = [(C - DK)(sI - A + BK)^{-1} + D]F \quad (3-9)$$

Το σύστημα (3-1) είναι στατικά αποσύζευξιμο αν υπάρχουν $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ τέτοιοι ώστε :

- α) ο πίνακας $H(0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ να είναι διαγώνιος και αντιστρέψιμος.
β) το κλειστό σύστημα να είναι ευσταθές.

Θεώρημα 3-1: Το πρόβλημα στατικής αποσύζευξης με εφαρμογή ανάδρασης καταστάσεως είναι επιλύσιμο εάν και μόνο εάν

- 1) (A, B) είναι σταθεροποιήσιμο (stabilizable)
- 2) $\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = n + m$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν το σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο μπορούμε να βρούμε K τέτοιο ώστε ο $(A - BK)$ να είναι ευσταθής (stable). Ας υποθέσουμε ότι ένα τέτοιο K υπάρχει. Έχουμε επίσης ότι:

$$\begin{aligned}\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \text{rank} \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -K & I_m \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rank} \begin{pmatrix} A - BK & B \\ C - DK & D \end{pmatrix} \\ &= \text{rank} \left(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ (C - DK)(-A + BK)^{-1} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BK & B \\ C - DK & D \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rank} \begin{pmatrix} A - BK & B \\ 0 & (C - DK)(-A + BK)^{-1}B + D \end{pmatrix}. \quad (3-10)\end{aligned}$$

10)

Σημειώνουμε ότι ο $(A - BK)$ είναι αντιστρέψιμος εφόσον είναι ευσταθής και συνεπώς

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = n + m$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\text{rank}[(C-DK)(-A+BK)^{-1}B+D]=m$. Επιλέγοντας F τέτοιο ώστε $F=[(C-DK)(-A+BK)^{-1}B+D]^{-1}$, εύκολα παίρνουμε $H(0)=I$. Άρα είναι δυνατή η στατική αποσύζευξη (static decoupling).

Αντίθετα, εάν η στατική αποσύζευξη είναι δυνατή, το ζεύγος (A,B) θα πρέπει να είναι σταθεροποιήσιμο. Επίσης έχουμε ότι:

$$\text{rank}[H(0)]=\text{rank}[(C-DK)(-A+BK)^{-1}BF+DF]=m.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι και F και $[(C-DK)(-A+BK)^{-1}B+D]$ είναι αντιστρέψιμοι. Έτσι θα έχουμε πάλι από την σχέση (3-8) ότι:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A-BK & B \\ 0 & (C-DK)(-A+BK)^{-1}B+D \end{pmatrix} = n+m.$$

από το οποίο αποδεικνύεται η αναγκαία συνθήκη.

□

3.2.1 Σχεδιασμός του ελεγκτή που οδηγεί στην στατική αποσύζευξη

Ας θεωρήσουμε ότι οι συνθήκες του Θεώρημα 3-1 ισχύουν, επομένως το πρόβλημα είναι επιλύσιμο. Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1^ο: Ελέγχουμε αν i) $\text{rank}[s_0I-A,B]=r \quad \forall s_0 \in \mathbb{C}^+$.

$$\text{ii) } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ full rank.}$$

Βήμα 2^ο :Υπολογίζουμε έναν πίνακα K , τέτοιον ώστε ο $A-BK$ να είναι ευσταθής, δηλαδή $\det(sI-A+BK)$ να έχει όλες τις ρίζες της στο αριστερό ημιεπίπεδο.

Βήμα 3^ο :Ορίζω F , ως $F=[(C-DK)(-A+BK)^{-1}B+D]^{-1}$

Βήμα 4^ο :Και $u=-Kx+Fr$.

Παράδειγμα 3-1

Έστω το σύστημα:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το rank του είναι:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 5$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι [-1,-2,-3]. Το σύστημα είναι ήδη ευσταθές (stabilizable) επειδή οι πόλοι του (-1,-2,-3) ανήκουν στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο επίσης $\text{rank}_{\mathbb{R}}[sI - A, B] = 3 \quad \forall s(A) \in \mathbb{R}^+$

Επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε τον ελεγκτή που οδηγεί το σύστημα στην στατική αποσύζευξη. Εφόσον το σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο, επιλέγω K τέτοιο ώστε A-BK να είναι ευσταθές και συνεπώς μπορώ να επιλέξω το K=0.

Επομένως: $F = [-CA^{-1}B]^{-1}$

$$= (1/36) \begin{pmatrix} -6 & -17 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} \text{ όταν } \beta=1$$

Τότε η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι:

$$H(s) = \begin{pmatrix} 6(s+6) & -s(6s+25) \\ 6s(s+6) & (11s^2+66s+36) \end{pmatrix} * 1/[(s+1)(s+2)(s+3)6]$$

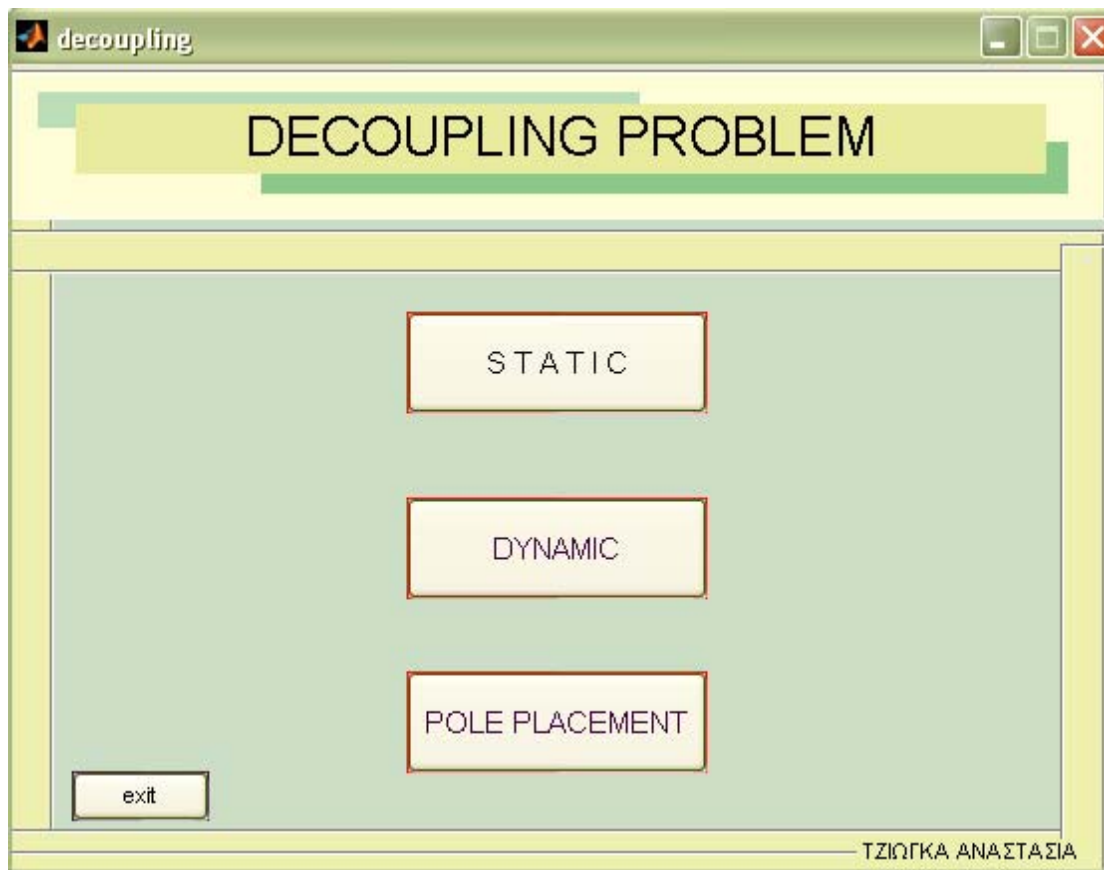
Παρατηρώ ότι $\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ όπως εξάλλου και θα έπρεπε.

3.2.2 Κώδικας σε Matlab

Για τον σκοπό αυτό έχει δημιουργηθεί μια εφαρμογή στο matlab η οποία ξεκινάει γράφοντας «*decoupling*» στην γραμμή εντολών του περιβάλλοντος του matlab. Έτσι τίθεται σε λειτουργία ένα γραφικό περιβάλλον σε μορφή παραθύρου, το οποίο και εμφανίζεται άμεσα στην οθόνη του υπολογιστή.

Ο κώδικας που έχει γραφεί στο matlab είναι η προσομοίωση των αλγορίθμων που έχουν αναφερθεί. Παράλληλα γίνεται έλεγχος ορθότητας κάθε δεδομένου που ζητείται από τον χρήστη, μέχρι να δωθεί το επιθυμητό δεδομένο το οποίο θα επεξεργαστεί στην συνέχεια η εφαρμογή που παραθέτουμε.

Έχει δημιουργηθεί στο GUI του matlab και έχει την ακόλουθη μορφή:



Εικόνα 3-2 Μενού επιλογών για το πρόβλημα αποσύζευξης στο περιβάλλον matlab

Αποτελείται από 4 ενεργά κουμπιά

- Static
- Dynamic
- Pole Placement
- Exit (έξοδος από το πρόγραμμα).

Επιλέγοντας το κουμπί Static τίθεται σε λειτουργία η μέθοδος του static decoupling

Ακολουθεί διαδραστική διαδικασία ζητώντας από τον χρήστη τους πίνακες A,B,C,D του συστήματος. Ακολουθείται πιστά ο αλγόριθμος του σχεδιασμού ελεγκτή για την στατική αποσύζευξη όπως προαναφέρθηκε και γίνονται οι απαραίτητοι έλεγχοι.

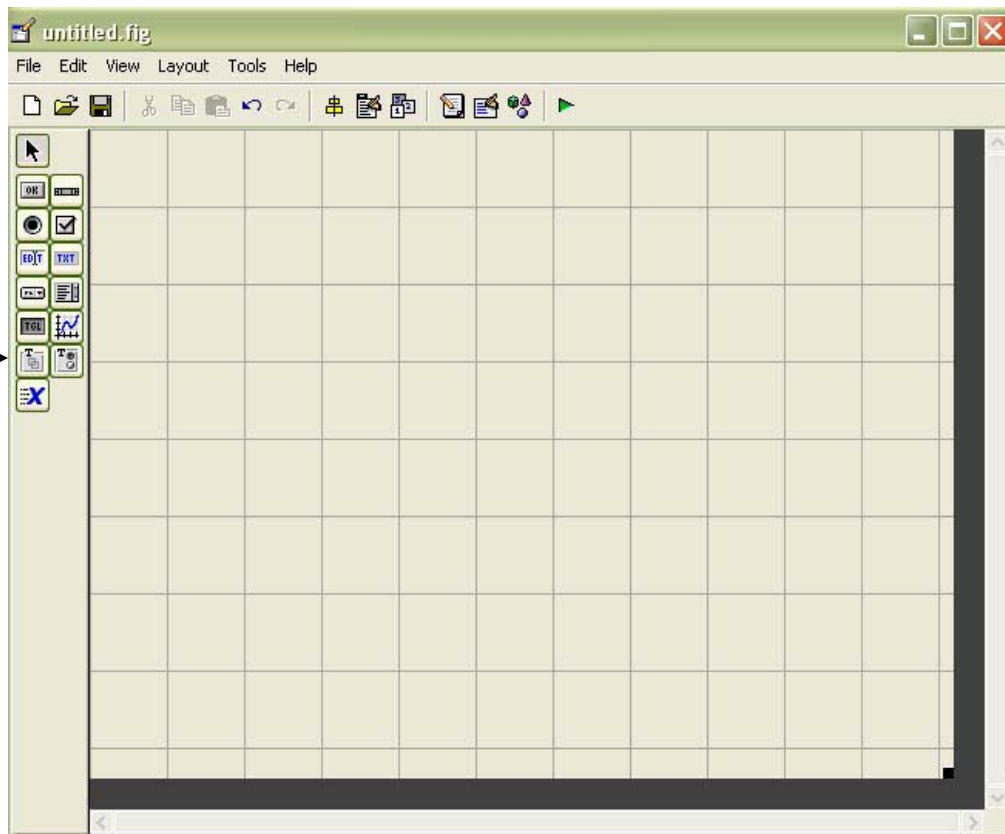
3.2.3 Δημιουργία του (GUI) γραφικού περιβάλλοντος

Στο περιβάλλον του matlab επιλέγουμε:

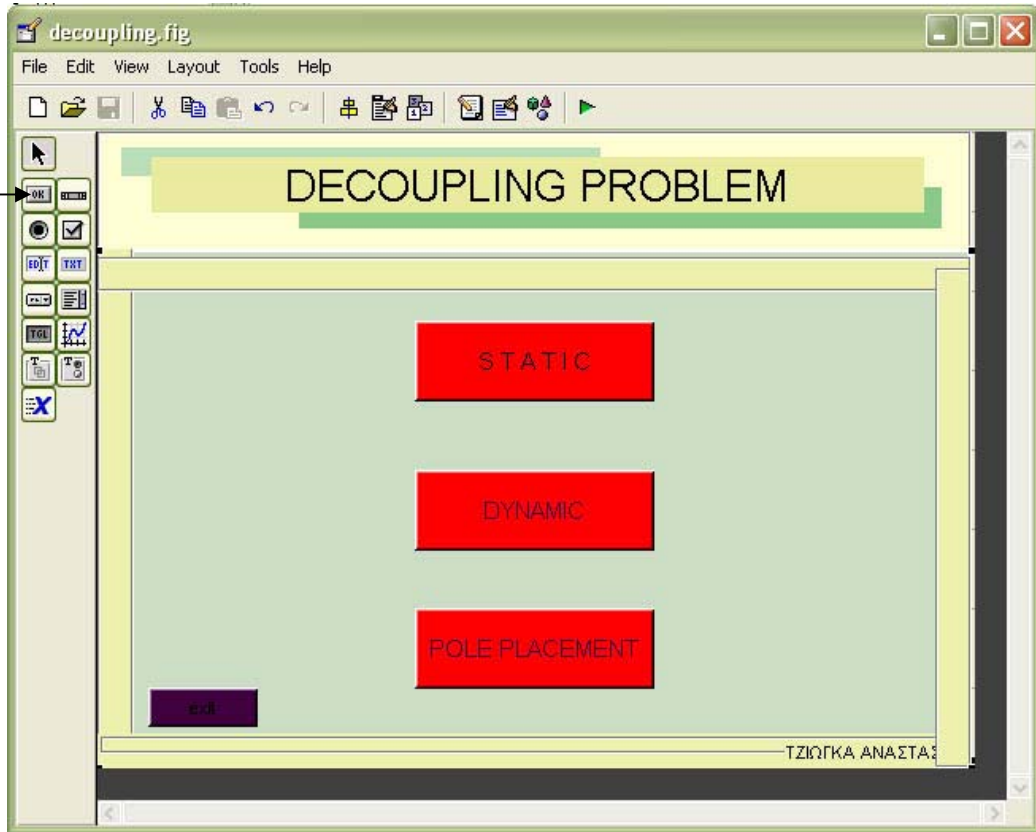
File → **New** → **GUI**

- Στην συνέχεια απο το παράθυρο διαλόγου **GUIDE Quick Start** που εμφανίζεται επιλέγουμε την καρτέλα **Create New GUI** και στην συνέχεια **Blank GUI(Default)** και **OK**.
- Εμφανίζεται το ακόλουθο παράθυρο:

Δημιουργώ
το πάνελ
του
παραθύρου
μου, με την
διαδικασία
drag&drop.



Με την διαδικασία drag and drop δημιουργούμε τα κουμπιά στο πάνελ με το ανικείμενο OK



Κάνοντας διπλο κλικ πάνω στο πάνελ μου, εμφανίζεται το διπλανό παράθυρο. Καθορίζω τις ιδιότητες του πάνελ και το κείμενο που θα γράφει πάνω του

The image shows the MATLAB Property Inspector for a `uicontrol (pushbutton4 "S T A T I C")`. The following table summarizes the properties and their values shown in the interface:

Property	Value
BackgroundColor	Red
BeingDeleted	off
BusyAction	queue
ButtonDownFcn	staticol
CData	[1x0 double array]
Callback	decoupling('pushbutton4_Callback',gcbo,[],guidata(gcbo))
Clipping	on
CreateFcn	
DeleteFcn	
Enable	on
Extent	[0 0 15 1,769]
FontAngle	normal
FontName	MS Sans Serif
FontSize	11.0
FontUnits	points
FontWeight	normal
ForegroundColor	Black
HandleVisibility	on
HitTest	on
HorizontalAlignment	center
Interruptible	on
KeyPressFcn	
ListboxTop	1.0
Max	1.0
Min	0.0
Position	[39,8 17,692 30,2 3,923]
SelectionHighlight	on
SliderStep	[0,01 0,1]
String	STATIC
Style	pushbutton
Tag	pushbutton4
TooltipString	
UIContextMenu	<None>
Units	characters
UserData	[1x0 double array]
Value	[0.0]
Visible	on

Κάνοντας διπλό κλικ πάνω στο κάθε κουμπί ξεχωριστά εμφανίζεται το παραπάνω παράθυρο διαλόγου μέσω του οποίου ορίζουμε τις ιδιότητες του κουμπιού.

Η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω είναι για την δημιουργία του κουμπιού που οδηγεί στην στατική αποσύζευξη. Παρόμοια διαδικασία απαιτείται και για τα άλλα κουμπιά με μόνη διαφορά στο αρχείο M-File που θα ορίζουμε σαν προορισμό με το πάτημα του κάθε κουμπιού. Στο κουμπί exit στην θέση του αρχείου προορισμού γράφουμε exit .

```

or - C:\MATLAB7\work\staticol.m
it Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons] Stack: Base

clc
dima=[2,2;0,0]
dimb=[0,0,0;0,0,0]
dimc=[0;0]
dimd=[0,0;0,0]
clc

disp('*****')
disp('          ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΠΟΣΥΖΕΥΞΗ          ')
disp('*****')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%          ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΜΒΑΤΟΤΗΤΑΣ ΠΙΝΑΚΩΝ          %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

while (dima(1)~=dima(2) | dima(1)~=dimb(1) | dima(1)~=dimc(2) | dimc(1)~=dimd(1) | dimb(2)~=dimd(2))
a = input('ΔΩΣΕ ΠΙΝΑΚΑ Α (nxn)...:');
b = input('ΔΩΣΕ ΠΙΝΑΚΑ Β (nxm)...:');
c = input('ΔΩΣΕ ΠΙΝΑΚΑ C (mxn)...:');
d = input('ΔΩΣΕ ΠΙΝΑΚΑ D (mxm)...:');

dima=size(a)
dimb=size(b)
dimc=size(c)
dimd=size(d)

if (dima(1)~=dima(2) | dima(1)~=dimb(1) | dima(1)~=dimc(2) | dimc(1)~=dimd(1) | dimb(2)~=dimd(2))
    clc
    disp('ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΒΑΤΟΙ ΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΟΥ ΔΩΣΑΤΕ')
    disp('*****          ΠΡΟΣΠΑΘΗΣΕ ΞΑΝΑ          *****')
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%          Έλεγχος αν το σύστημα είναι ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΙΜΟ βάση του @ΕΦΡΗΜΑΤΟΣ 3.1          %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

seig=eig(a)
d1=dima(1)
for i=1:d1
    if seig(i)>0
        st=[seig(i)*eye(d1)-a,b]          %***** [sI-A,B] %*****
        r_st=rank(st)

        if r_st == dima(1)
        else
            clc
            disp('*****')
            disp('***          Το σύστημα δεν είναι σταθεροποιήσιμο          ***')
            disp('*****')
            return
        end
    end
end
end
clc
disp('Το σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο')

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
***   Έλεγχος αν ο πίνακας (a,b;c,d) έχει πλήρη τάξη   **
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

pin=[a,b;c,d]
r_pin=rank(pin)

if r_pin==dima(1)+dimb(2)
else
    clc
    disp('%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%')
    disp('*** Δεν ικανοποιείται η συνθήκη rank(a,b;c,d)=n+m   **')
    disp('%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%')
    return
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   2ο βήμα σχεδιασμός K τ.ω. det(sI-A+BK)<0   %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for i=1:d1
sprintf('H %dη ιδιοτιμή του συστήματος είναι:%f',i,seig(i))
end
p_s=-1

while p_s~=d1
    sprintf('Οι επιθυμητές ιδιοτιμές του συστήματος είναι %d ',d1)
    p=input('δωσε τις επιθυμητές ιδιοτιμές σε μορφή [eig1 eig2 ..]:')
    p_s=length(p)

    if length(p)~=d1
        clc
        disp('!!!!Π Ρ Ο Σ Ο Χ Η !!!! λαθος πλήθος επιθυμητών ιδιοτιμών')
    end
end

K = place(a,b,p)

```

```

*****
%          3ο βήμα υπολογισμος του F          %
*****

F=inv((c-d*K)*(inv(-a+b*K)*b)+d)

*****
%          4ο βήμα Υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς          %
%          του νέου κλειστού συστήματος          %
*****

syms s

%ΛΥΣΗ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΠΟΥ ΔΩΣΑΜΕ
disp('*****')
disp('Η συνάρτηση μεταφοράς του νέου συστήματος είναι:')
disp('*****')

H=((c-d*K)*inv(s*eye(dima)-a+b*K)*b+d)*F
H(1)
disp('Η συνάρτηση μεταφοράς για s=0 είναι I:')
Ho=((c-d*K)*inv(-a+b*K)*b+d)*F

% Τ Ε Λ Ο Σ %

```


3.3 Το πρόβλημα της δυναμικής αποσύζευξης (dynamic decoupling problem)

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της δυναμικής αποσύζευξης (dynamic decoupling problem) του συστήματος

Έστω ότι έχουμε το σύστημα που περιγράφεται στον χώρο των καταστάσεων:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \quad \text{με } x(0)=x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3-11)$$

ώς $x(t):\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ορίζω την κατάσταση του συστήματος, $u(t):\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ την είσοδο του συστήματος και $y(t):\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ την έξοδο του συστήματος και $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$

Αν εφαρμόσουμε ανάδραση κατάστασης της μορφής :

$$u(t) = -Kx(t) + Fr(t) \quad (3-12)$$

τότε το κλειστό σύστημα που θα πάρουμε θα έχει την μορφή

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BFr(t) \quad (3-13)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3-14)$$

και συνάρτηση μεταφοράς :

$$H(s) = C(sI - A + BK)^{-1}BF. \quad (3-15)$$

Το πρόβλημα της δυναμικής αποσύζευξης απαιτεί την εύρεση των πινάκων $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ τέτοιων ώστε η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ να είναι διαγώνια και αντιστρέψιμη.

3.3.1 Σχεδιασμός του ελεγκτή της δυναμικής αποσύζευξης

Πριν ασχοληθούμε με το πρόβλημα της δυναμικής αποσύζευξης (dynamic decoupling), πρέπει πρώτα να εξετάσουμε την σχέση ανάμεσα στην συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και του $G(s)$ του συστήματος (3-11).

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3-16)$$

Πρόταση 3.1: Ο πίνακας της συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού συστήματος $H(s) = C(sI - A + BK)^{-1}BF$ συνδέεται με την συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού συστήματος $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, βάση της παρακάτω σχέσης:

$$\begin{aligned} H(s) &= G(s)[I - K(sI - A + BK)^{-1}B]F \\ &= G(s)[I + K(sI - A)^{-1}B]^{-1}F \end{aligned} \quad (3-17)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= C(sI-A+BK)^{-1}BF = \\
 &= C(sI-A)^{-1}[(sI-A+BK)-BK](sI-A+BK)^{-1}BF \\
 &= C(sI-A)^{-1}[I-BK(sI-A+BK)^{-1}]BF \\
 &= C(sI-A)^{-1}[B-BK(sI-A+BK)^{-1}B]F \\
 &= C(sI-A)^{-1}B[I-K(sI-A+BK)^{-1}B]F \\
 &= G(s)[I-K(sI-A+BK)^{-1}B]F.
 \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπό όψη την σχέση:

$$\begin{aligned}
 [I-K(sI-A+BK)^{-1}B][I+K(sI-A)^{-1}B] &= \\
 = I-K(sI-A+BK)^{-1}(sI-A+BK-BK)(sI-A)^{-1}B &+ \\
 +K(sI-A)^{-1}B-K(sI-A+BK)^{-1}BK(sI-A)^{-1}B &= \\
 = I, &
 \end{aligned}$$

έχουμε

$$[I-K(sI-A+BK)^{-1}B] = [I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1} \quad (3-18)$$

□

Η Πρόταση 3.1 δείχνει ότι για να μπορέσουμε να ελέγξουμε το σύστημα δημιουργούμε τον ελεκτή $u = -Kx + Fr$ ο οποίος προκύπτει από το σύστημα (3.1) εφαρμόζοντας σειριακά σε αυτό την συνάρτηση μεταφοράς

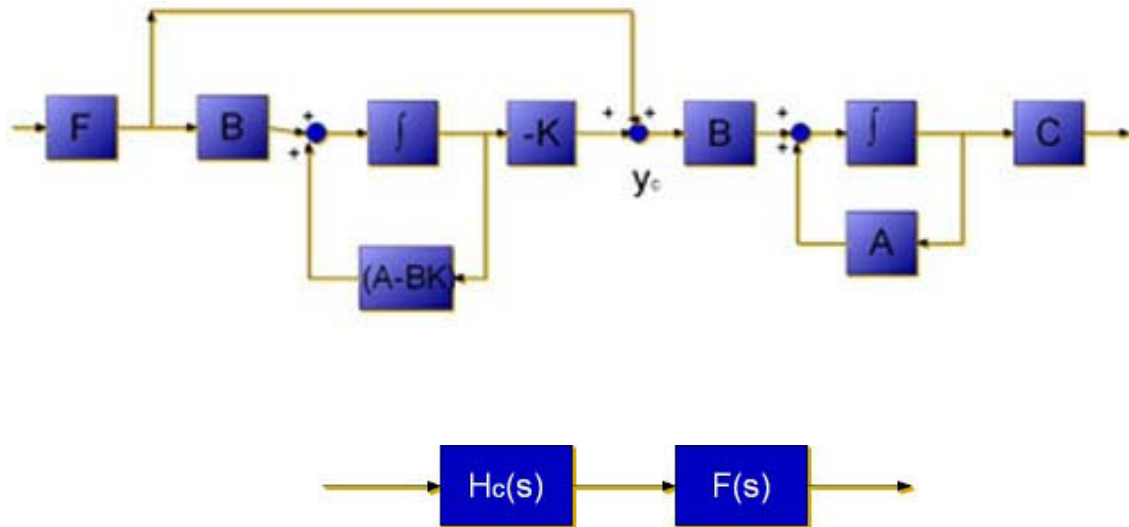
$$H_c(s) = [I-K(sI-A+BK)^{-1}B]F \quad (3-19)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1, αυτός ο αντισταθμιστής αναπαρίσταται με το state space σύστημα :

$$\dot{x}_c = (A-BK)x_c + BF r \quad (3-20)$$

$$y_c = -Kx_c + Fr, \quad (3-21)$$

όπου r είναι η είσοδος στον αντισταθμιστή και y_c είναι η έξοδος.



Σχήμα 3.1

Έστω

$$C = \begin{pmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_m^T \end{pmatrix}$$

όπου $\sigma_i, i=1,2,\dots,m$ με

$$\sigma_i = \begin{cases} \min(j | c_i^T A^{j-1} B \neq 0^T, j=1,2,\dots,n-1) \\ n-1, \text{αν } c_i^T A^{j-1} B = 0^T, j=1,2,\dots,n. \end{cases} \quad (3-22)$$

Για να υπολογίσουμε τα σ_i ξεκινάμε με $i=1, c_i^T = c_1^T$. Έστω $j=1$, τότε $c_1^T A^{j-1} B = c_1^T A^0 B = c_1^T B$. Αν $c_1^T B = 0$ τότε $\sigma_1=1$, διαφορετικά, αυξάνουμε το j σε 2, αν $c_1^T A^{j-1} B = c_1^T A B = 0$ τότε $\sigma_1=2$, διαφορετικά αυξάνουμε το j ξανά μέχρι $j=n$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για i από 2 έως m .

Εφόσον υπολογίσαμε τα $\sigma_i, i=1,2,\dots,m$ μπορούμε να ορίσουμε τους πίνακες :

$$B^* = \begin{pmatrix} c_1^T A^{\sigma_1-1} B \\ c_2^T A^{\sigma_2-1} B \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m^T A^{\sigma_m-1} B \end{pmatrix} \quad (3-23)$$

και

$$C^* = \begin{pmatrix} c_1^T A^{\sigma_1} \\ c_2^T A^{\sigma_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m^T A^{\sigma_m} \end{pmatrix} \quad (3-24)$$

Θεώρημα 3-2 : Το σύστημα (3-11) είναι δυναμικά αποσυζεύξιμο μετά την εφαρμογή ανάδρασης κατάστασης της μορφής (3-12) εάν και μόνο εάν ο πίνακας B^* είναι αντιστρέψιμος.

Αν συνθήκη αυτή ισχύει τότε επιλέγοντας

$$F = (B^*)^{-1}$$

$$K = (B^*)^{-1} C^*$$

το κλειστό σύστημα που θα πάρουμε θα έχει την παρακάτω συνάρτηση μεταφοράς :

$$H(s) = \text{diag} \{ s^{-\sigma_1}, s^{-\sigma_2}, \dots, s^{-\sigma_m} \}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Πρώτα αποδεικνύουμε την αναγκαιότητα.

Λόγω της παρακάτω σχέσης :

$$(sI - A)^{-1} = s^{-1}I + As^{-2} + A^2s^{-3} + \dots, \quad \|A/s\| < 1$$

η $i^{\text{η}}$ στήλη της συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ της (3.12) μπορεί να αναπτυχθεί σε δυνάμεις του s^{-1} ως ακολούθως :

$$\begin{aligned}
 g_i(s)^T &= c_i^T (sI-A)^{-1} B = c_i^T B s^{-1} + c_i^T A B s^{-2} + \dots = \\
 &= c_i^T A^{\sigma_i-1} B s^{-\sigma_i} + c_i^T A^{\sigma_i} B s^{-(\sigma_i+1)} + \dots = \\
 &= s^{-\sigma_i} (c_i^T A^{\sigma_i-1} B + c_i^T A^{\sigma_i} B s^{-1} + c_i^T A^{\sigma_i+1} s^{-2} + \dots) = \\
 &= s^{-\sigma_i} \{c_i^T A^{\sigma_i-1} B + c_i^T A^{\sigma_i} (sI-A)^{-1} B\}
 \end{aligned} \tag{3-25}$$

Χρησιμοποιώντας τον B^* της (3-23) ο $G(s)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$G(s) = \begin{pmatrix} s^{-\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^{-\sigma_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^{-\sigma_m} \end{pmatrix} [B^* + C^* (sI - A)^{-1} B] \tag{3-26}$$

Από την Πρόταση 3.1 ο πίνακας της συνάρτησης μεταφοράς μετά την ανάδραση κατάστασης θα δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= G(s) [I - K(sI - A + BK)^{-1} B] F \\
 &= \text{diag}(s^{-\sigma_1}, s^{-\sigma_2}, \dots, s^{-\sigma_m}) [B^* + C^* (sI - A)^{-1} B] \\
 &\quad \times [I - K(sI - A + BK)^{-1} B] F.
 \end{aligned} \tag{3-27}$$

Για την αποσύζευξη, ο $H(s)$ θα πρέπει να είναι αντιστρέψιμος, επομένως και ο $[B^* + C^* (sI - A)^{-1} B] [I - K(sI - A + BK)^{-1} B] F$ είναι αντιστρέψιμος καθώς και ο συντελεστής της δύναμης του s , δηλαδή ο πίνακας $B^* F$. Επομένως αποτελεί αναγκαία συνθήκη για αποσύζευξη ο πίνακας B^* να είναι αντιστρέψιμος. Το αντίστροφο του Θεωρήματος (ικανή συνθήκη) θα αποδειχθεί σχηματίζοντας τον ελεγκτή για την αποσύζευξη του συστήματος ως ακολούθως:

Εάν B^* είναι αντιστρέψιμος, έστω K, F τέτοια ώστε

$$K = B^{*-1} C^* \tag{3-28}$$

$$F = B^{*-1} \tag{3-29}$$

Από την Πρόταση 3.1 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \text{diag}(s^{-\sigma_1}, s^{-\sigma_2}, \dots, s^{-\sigma_m}) [B^* + C^* (sI - A)^{-1} B] \\
 &\quad \times [F^{-1} + F^{-1} K (sI - A)^{-1} B]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3-30}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3-21), (3-22) στην (3-23) παίρνουμε

$$H(s) = \text{diag}(s^{-\sigma_1}, s^{-\sigma_2}, \dots, s^{-\sigma_m})$$

και συνεπώς το σύστημα είναι αποσυζευγμένο.

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \text{diag}(s^{-\sigma_1}, s^{-\sigma_2}, \dots, s^{-\sigma_m}) [B^* + C^* (sI - A)^{-1} B] [(B^{*-1})^{-1} + (B^{*-1})^{-1} B^{*-1} C^* (sI - A)^{-1} B] = \\
 &= \text{diag}(s^{-\sigma_1}, s^{-\sigma_2}, \dots, s^{-\sigma_m}) \quad (3-31)
 \end{aligned}$$

3.3.2 Παραδείγματα της δυναμικής αποσύζευξης

Παράδειγμα 3-2

Έστω το σύστημα,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t), \\
 y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -k \end{pmatrix} x(t)
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$c_1^T A^0 B = c_1^T B = [1 \ 0] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [1 \ 1] \neq [0 \ 0]$$

και συνεπώς $\sigma_1 = 1$ επίσης

$$c_2^T A^0 B = c_2^T B = [1 \ -k] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [1 \ 1-k] \neq [0 \ 0] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και συνεπώς $\sigma_2 = 1$ επίσης

$$B^* = \begin{pmatrix} c_1^T A^{\sigma_1-1} B & \\ c_2^T A^{\sigma_2-1} B & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^T B & \\ c_2^T B & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix},$$

Για να μπορεί να αποσυζευκτεί δυναμικά το σύστημα πρέπει ο B^* να είναι ανιστρέψιμος βάση του θεωρήματος 3-2. Ο B^* είναι ανιστρέψιμος εάν η ορίζουσά του είναι διαφορετική του μηδενός

Έχουμε:

$$\det(B^*) = 1 - k - 1 = -k$$

- Εάν $k=0$ τότε ο B^* δεν είναι αντιστρέψιμος επομένως το σύστημα δεν μπορεί να αποσυζευκτεί δυναμικά με την εφαρμογή ανάδρασης κατάστασης.
- Εάν $k \neq 0$ τότε ο B^* είναι αντιστρέψιμος και το σύστημα μπορεί να αποσυζευκτεί δυναμικά με την εφαρμογή ανάδρασης της μορφής $u=-Kx+F$ όπου

$$F=(B^*)^{-1}$$

$$K=(B^*)^{-1}C^*$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{-1+k}{k} & \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} & \frac{-1}{k} \end{pmatrix}, C^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} -1 & -1+k/k & +1/k \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}$$

το κλειστό σύστημα που θα πάρουμε θα έχει την παρακάτω συνάρτηση μεταφοράς :

$$H(s) = \text{diag}\{s^{-\sigma_1}, s^{-\sigma_2}, \dots, s^{-\sigma_m}\}$$

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 3-3

Έστω το 2x2 σύστημα το οποίο περιγράφεται από

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Ελέγχουμε :
 $c_1^T A^0 B = c_1^T B = [1 \ 0] \neq [0 \ 0]$, ή $\sigma_1=1$,

$$c_1^T A^0 B = c_1^T B = [3 \ 1], \quad \text{ή} \quad \sigma_2 = 1$$

και άρα

$$B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Εφόσον ο B^* είναι αντιστρέψιμος το σύστημα μπορεί να αποσύζευκτεί δυναμικά χρησιμοποιώντας ανάδραση κατάστασης της μορφής $u = -Kx + Fr$. Υπολογίζουμε τον πίνακα

$$C^* = \begin{pmatrix} c_1^T A^{\sigma_1} \\ c_2^T A^{\sigma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^T A \\ c_2^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

από το θεωρήμα 3-1 έχουμε ότι:

$$F = B^{*-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$K = B^{*-1} C^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι:

$$H(s) = \begin{pmatrix} 1/s & 0 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} \quad \diamond$$

Παράδειγμα 3-4

Η κίνηση ενός δορυφόρου σε κυκλική τροχιά γύρω από τον Ισημερινό περιγράφεται από τις παρακάτω γραμμικοποιημένες εξισώσεις.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = Cx(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

όπου οι έξοδοι και οι είσοδοι είναι αντίστοιχα οι παρακάτω:

$$y = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix}$$

Οι έξοδοι και οι είσοδοι του παραπάνω συστήματος είναι συζευγμένες (coupled) όπως φαίνεται από την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2 + \omega^2} & \frac{2\omega}{s(s^2 + \omega^2)} \\ \frac{-2\omega}{s(s^2 + \omega^2)} & \frac{s^2 - 3\omega^2}{s^2(s^2 + \omega^2)} \end{pmatrix}$$

Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε εάν το σύστημα μπορεί να αποσυζευκτεί υπολογίζουμε τα παρακάτω:

$$c_1^T B = [0 \ 0], \quad c_1^T A B = [1 \ 0], \quad \sigma_1 = 2;$$

$$c_2^T B = [0 \ 0], \quad c_2^T A B = [0 \ 1], \quad \sigma_2 = 2.$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας :

$$B^* = \begin{pmatrix} c_1^T A B \\ c_2^T A B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

είναι αντιστρέψιμος. Έτσι για να αποσυζεύξουμε το σύστημα ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

$$u(t) = -B^{*-1}C^*x(t) + B^{*-1}u(t) = -\begin{pmatrix} 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + u(t)$$

η οποία καταλήγει στο ακόλουθο κλειστό σύστημα :

$$\dot{x} = (A - BB^{*-1}C^*)x + Bu = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) x + \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) u$$

$$y = Cx = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) x$$

Παρατηρούμε ότι το αποσυζευγμένο αυτό σύστημα βρίσκεται σε κανονική ελέγξιμη μορφή συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε ανάδραση καταστάσεως της μορφής :

$$u = Kx + \bar{u} = \left(\begin{array}{cccc} k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & k_4 \end{array} \right) x + \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_0 \end{pmatrix}$$

Τότε θα έχουμε μετά την ανάδραση καταστάσεως το ακόλουθο σύστημα

$$\dot{x} = (A - BB^{*-1}C^* + BK)x + \bar{u} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_3 & k_4 \end{array} \right) x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{u}$$

$$y = Cx = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) x$$

Αν επιλέξουμε τους συντελεστές ανάδρασης (feedback gains) $k_1 = k_3 = -1$ και $k_2 = k_4 = -2$ καθένα από τα δύο ανεξάρτητα υποσυστήματα θα είναι ευσταθές με διπλό πόλο στο $s = -1$. Η συνάρτηση μεταφοράς παριστάνεται πολύ εύκολα με τον ακόλουθο πίνακα :

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \end{pmatrix}$$

Αυτό το κλειστό σύστημα δεν είναι μόνο ευσταθές, αλλά και η ρύθμιση του γ και του θ μπορούν να γίνουν ανεξάρτητα.



Γενικά, το αποσυζευγμένο σύστημα δεν είναι πάντοτε σε κανονική μορφή. Πως μπορεί όμως η επανατοποθέτηση των πόλων να γίνει ταυτοχρόνα με την διαδικασία της αποσύζευξης;

3.3.3 Κωδικας Σε Matlab

Το πρόγραμμα τρέχει στο περιβάλλον του matlab γράφοντας decoupling. Εμφανίζεται το μενού όπως φαίνεται στην εικόνα 3.1 και ανάλογα με την διαδικασία που επιθυμούμε διαλέγουμε το αντίστοιχο κουμπί.

Αν για παράδειγμα επιλεγεί το πρώτο κουμπί DYNAMIC αρχίζει να εκτελείται η διαδικασία της δυναμικής αποσύζευξης. Ακολουθεί διαδραστική διαδικασία ζητώντας από τον χρήστη τους πίνακες A,B,C του συστήματος. Ακολουθείται πιστά ο αλγόριθμος του dynamic decoupling όπως προαναφέρθηκε και γίνονται οι απαραίτητοι έλεγχοι.

```

r - C:\MATLAB7\work\dynamic.m
: Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base

clc
dima=[2,2;0,0]
dimb=[0,0,0;0,0,0]
dimc=[0;0]

clc
disp('*****')
disp('          ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΠΟΣΥΖΕΥΞΗ')
disp('*****')

*****
**  ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΜΒΑΤΟΤΗΤΑΣ ΠΙΝΑΚΩΝ  **
*****

while (dima(1)~=dima(2) | dima(1)~=dimb(1) | dima(1)~=dimc(2))
a = input('ΔΩΣΕ ΠΙΝΑΚΑ Α (nxn) ...:');
b = input('ΔΩΣΕ ΠΙΝΑΚΑ Β (nxm) ...:');
c = input('ΔΩΣΕ ΠΙΝΑΚΑ C (mxn) ...:');

dima=size(a)
dimb=size(b)
dimc=size(c)

if (dima(1)~=dima(2) | dima(1)~=dimb(1) | dima(1)~=dimc(2))
    clc
    disp('ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΒΑΤΟΙ ΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΟΥ ΔΩΣΑΤΕ')
    disp('*****          ΠΡΟΣΠΑΘΗΣΕ ΞΑΝΑ          *****')
end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$    %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ss ΚΡΑΤΑΕΙ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ 

n=dim(a(1))
m=dim(b(2))
for i=1:m

    for j=1:n
        M=c(i,:) * (a^(j-1)) * b

        if (M==0)
            p=0
        else
            p=j
            ss(i)=p
        end

        if (p~=0)
            sprintf('...Το  $\sigma_{%d}$  είναι  $%d$ ', i, p)
            break
        end
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ B*   %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
i=1
for i=1:m
    BB=c(i,:) * a^(ss(i)-1) * b
    B(i,:)=BB
end
%ελεγχεται αν ο B* είναι non-singular (θεωρημα 4.2.1)
if rank(B)<size(B,1)
    disp('Ο B* είναι singular, βάση θεωρήματος 4.2.1 δεν επιτυγχάνεται η αποσύζευξη ')
    disp('Τ Ε Α Ο Σ')
    return
else disp('Ο B* είναι non-singular, βάση θεωρήματος 4.2.1 επιτυγχάνεται η αποσύζευξη ')

end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ C*                                     εφόσον ο B* είναι non-singular
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
i=1
for i=1:m
    CC=c(i,:)*a^ss(i)
    C(i,:)=CC
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ F                                     %
% ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ K                                     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

B_1=inv(B)
F=B_1
K=B_1*C

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ H(s) %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
syms s

for i=1:m
    couple=s^(-ss(i))
    couples(i,1)=couple
end
disp('H συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος :')
disp('Βάση του τύπου H(s)=diag(1/s(σ1),1/s(σ2),...)' )
Hs=diag(couples)
disp(' Με βάση τον γενικό ορισμό της συνάρτησης μεταφοράς H(s)=C[(sI-A+BK)-1]*B*F ')
H_s=c*inv(s*eye(dima)-a+b*K)*b*F

if H_s==Hs
    disp('Βρίσκουμε την ΙΔΙΑ συνάρτηση μεταφοράς και με τους δύο τρόπους')
else
    disp('Υπάρχει απόκλιση της συνάρτησης μεταφοράς με τους δύο διαφορετικούς τύπους')
end

disp('.....Τ Ε Λ Ο Σ.....')

```

3.4 Πόλοι και μηδενικά των αποσυζευγμένων συστημάτων

Σε αυτή την παράγραφο οι πίνακες ελέγχου K και F είναι τέτοιοι ώστε το αποσυζευγμένο σύστημα να έχει προ-σχεδιασμένους πόλους .

Έστω
$$\bar{n} = \sum_{i=1}^m \sigma_i$$

το πλήθος των επιθυμητών πόλων του συστήματος ανάδρασης τους οποίους θέλουμε να επανατοποθετήσουμε. Τους χωρίζουμε σε m υποδιαίρεσεις, λ_{ij} , για κάθε $j=1,2,\dots,m$ και σχηματίζουμε τα πολυώνυμα.

$$\phi_i(s) = \prod_{j=1}^{\sigma_i} (s - \lambda_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Για κάθε i εκφράζουμε το $\phi_i(s)$ ως :

$$\phi_i(s) = s^{\sigma_i} + \gamma_{i1}s^{\sigma_i-1} + \gamma_{i2}s^{\sigma_i-2} + \dots + \gamma_{i\sigma_i}$$

και ακολούθως ορίζουμε τον πίνακα του πίνακα:

$$\phi_i(A) = A^{\sigma_i} + \gamma_{i1}A^{\sigma_i-1} + \gamma_{i2}A^{\sigma_i-2} + \dots + \gamma_{i\sigma_i}I$$

και

$$C^{**} = \begin{pmatrix} c_1^{**T} \\ c_2^{**T} \\ \vdots \\ c_m^{**T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^T \phi_1(A) \\ c_2^T \phi_2(A) \\ \vdots \\ c_m^T \phi_m(A) \end{pmatrix}$$

Σημειώνουμε ότι $C^{**} \equiv C^*$ εάν $\gamma_{ij} = 0$ για κάθε i και j ή ισοδύναμα $\lambda_{ij} = 0$ για κάθε i και j.

Θεώρημα 3.2: Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα (3-1) μπορεί να αποσυζευκτεί με την χρήση ανάδρασης καταστάσεως, δηλαδή ο πίνακας B^* είναι αντιστρέψιμος. Εάν οι πίνακες K και F επιλεγούν έτσι ώστε

$$\begin{aligned} F &= (B^*)^{-1}, \\ K &= (B^*)^{-1} C^{**}, \end{aligned} \quad (3-32)$$

τότε η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος που προκύπτει λόγω της ανάδρασης καταστάσεως δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$H(s) = \text{diag} \{1/\phi_1(s), 1/\phi_2(s), \dots, 1/\phi_m(s)\} \quad (3-33)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω το i^o διάνυσμα γραμμής του πίνακα της συνάρτησης μεταφοράς (3-25) που συμβολίζεται με $\mathbf{g}_i^T(s)$. Πολλάπλασιάζοντας με $(s^{\sigma_i} + \dots + \gamma_{i\sigma_i})$

$$\begin{aligned}
 & (s^{\sigma_i} + \gamma_{i1} s^{\sigma_i-1} + \dots + \gamma_{i\sigma_i}) \mathbf{g}_i^T(s) \\
 = & (1 + \gamma_{i1} s^{-1} + \gamma_{i2} s^{-2} + \dots + \gamma_{i\sigma_i} s^{-\sigma_i}) \\
 & (\mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{\sigma_i-1} \mathbf{B} + \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{\sigma_i} \mathbf{B} s^{-1} + \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{\sigma_i+1} \mathbf{B} s^{-2} + \dots) \\
 = & \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{\sigma_i-1} \mathbf{B} + (\mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{\sigma_i} \mathbf{B} + \gamma_{i1} \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{\sigma_i-1} \mathbf{B} + \gamma_{i2} \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{\sigma_i-2} \mathbf{B} + \dots) s^{-1} \\
 & + \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{\sigma_i+1} \mathbf{B} + \gamma_{i1} \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{\sigma_i} \mathbf{B} + \gamma_{i2} \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{\sigma_i-1} \mathbf{B} + \dots) s^{-2} + \dots \\
 = & \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{\sigma_i-1} \mathbf{B} + \mathbf{c}_i^{**T} \mathbf{B} s^{-1} + \mathbf{c}_i^{**T} \mathbf{A} \mathbf{B} s^{-2} + \dots \\
 = & \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{\sigma_i-1} \mathbf{B} + \mathbf{c}_i^{**T} (\mathbf{I} s^{-1} + \mathbf{A} s^{-2} + \mathbf{A}^2 s^{-3} + \dots) \mathbf{B} \\
 = & \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{\sigma_i-1} \mathbf{B} + \mathbf{c}_i^{**T} (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \tag{3-34}
 \end{aligned}$$

Διαιρώντας και τις δύο πλευρές της (3-34) με το $(s^{\sigma_i} + \gamma_{i1} s^{\sigma_i-1} + \gamma_{i2} s^{\sigma_i-2} + \dots + \gamma_{i\sigma_i})$, το $G(s)$ θα δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned}
 G(s) = & \text{diag}[(s^{\sigma_1} + \gamma_{11} s^{\sigma_1-1} + \gamma_{12} s^{\sigma_1-2} + \dots + \gamma_{1\sigma_1})^{-1}, (s^{\sigma_2} + \gamma_{21} \gamma_{m\sigma_m} + \gamma_{22} s^{\sigma_2-2} + \dots + \\
 & \gamma_{2\sigma_2})^{-1}, \dots, (s^{\sigma_m} + \gamma_{m1} s^{\sigma_m-1} + \gamma_{m2} s^{\sigma_m-2} + \dots + \gamma_{m\sigma_m})^{-1}] [\mathbf{B}^* + \mathbf{C}^{**} (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}] \tag{3-35}
 \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (3-17) και (3-35) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 H(s) = & \text{diag} [(s^{\sigma_1} + \gamma_{11} s^{\sigma_1-1} + \gamma_{12} s^{\sigma_1-2} + \dots + \gamma_{1\sigma_1})^{-1}, \dots, (s^{\sigma_m} + \gamma_{m1} s^{\sigma_m-1} + \gamma_{m2} s^{\sigma_m-2} + \dots + \\
 & \gamma_{1\sigma_m})^{-1}] [\mathbf{B}^* + \mathbf{C}^{**} (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}] [\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}]^{-1}. \tag{3-36}
 \end{aligned}$$

Επιλέγοντας K και F σύμφωνα με την (3-32) ο πίνακας της συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα δίνεται από την σχέση (3-33).

□

3.4.1 Παραδειγματα

Παράδειγμα 3-5

Έστω το σύστημα:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Έχουμε $c_1^T B = [1 \ 0]$, για $\sigma_1 = 1$ και $c_1^T A = [0 \ 0 \ 1]$ και $c_2^T B = [0 \ 1]$ και για $\sigma_2 = 1$ και $c_2^T A = [-1 \ -2 \ -3]$. Επομένως, B^* και C^* θα είναι :

$$B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Εφόσον ο B^* είναι αντιστρέψιμος το σύστημα μπορεί να αποσυζευκτεί δυναμικά. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4-1, θα έχουμε τον ακόλουθο ελεγκτή:

$$F = B^{*-1} = I$$

$$K = B^{*-1}C^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

ο οποίος θα οδηγήσει στο ακόλουθο ολοκληρωμένο αποσυζευγμένο κλειστό σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς που θα δίνεται από τον πίνακα:

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

Ωστόσο εάν θα θέλαμε να αποσυζεύξουμε το σύστημα ώστε να έχουμε

$$H(s) = \text{diag}[(s+1)^{-1}, (s+2)^{-1}],$$

Τότε για $\gamma_{11}=1, \gamma_{21}=2$ από την (3-32) θα έχουμε :

$$\phi_1(s) = s + 1$$

$$\phi_2(s) = s + 2$$

$$\phi_1(A) = A + I$$

$$\phi_2(A) = A + 2I$$

$$C^{**} = \begin{pmatrix} c_1^T A \\ c_2^T A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} c_1^T \\ \gamma_{21} c_2^T \end{pmatrix}$$

$$= C^* + \begin{pmatrix} 1c_1^T \\ 2c_2^T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{**} = \begin{pmatrix} c_1^T \phi_1(A) \\ c_2^T \phi_2(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^T A + c_1^T \\ c_2^T A + 2c_2^T \end{pmatrix}$$

Συνεπώς από το Θεώρημα 3.3 θα έχουμε:

$$F = (B^*)^{-1} = I$$

$$K = (B^*)^{-1} C^{**} = C^{**}$$

◇

Στο παραπάνω παράδειγμα ένα σύστημα τρίτης τάξης αποσυζεύχθηκε δυναμικά, δίνοντας ένα σύστημα δεύτερης τάξης, έτσι πραγματοποιήθηκε μια απλοποίηση μεταξύ πόλων και μηδενικών του συστήματος. Στο επόμενο θεώρημα η τοποθέτηση των μηδενικών έχει συνυπολογιστεί κατά την διαδικασία αποσύζευξης.

Θεώρημα 3-3: Το γραμμικό σύστημα (3-11) μπορεί να αποσυζυκτεί χρησιμοποιώντας ελεγκτή ανάδρασης της μορφής (3-12) με τα i στοιχεία της διαγώνιου του πίνακα της συνάρτησης μεταφοράς του αποσυζευγμένου συστήματος να έχουν αριθμητή $n_i(s)$ εάν και μόνο εάν η i γραμμή του $G(s)$, η οποία συμβολίζεται με $g_i^T(s)$ έχει τη μορφή

$$g_i^T(s) = c_i^T (sI-A)^{-1} B = n_i(s) \bar{c}_i^T (sI-A)^{-1} B, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3-37)$$

και

$$\bar{B}^* = \begin{pmatrix} \bar{c}_1^T A^{(\bar{\sigma}_1-1)} B \\ \bar{c}_2^T A^{(\bar{\sigma}_2-1)} B \\ \vdots \\ \bar{c}_m^T A^{(\bar{\sigma}_m-1)} B \end{pmatrix} \quad (3-38)$$

είναι αντιστρέψιμος, όπου σ_i είναι τέτοια ώστε

$$\bar{\sigma}_i = \begin{cases} \min(j | c_i^T A^{j-1} B \neq 0^T, j=1, 2, \dots, n-1) \\ n-1, \text{αν } c_i^T A^{j-1} B = 0^T, j=1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(\Leftarrow *Ικανή συνθήκη*)

Έστω

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} \bar{c}_1^T \\ \vdots \\ \bar{c}_m^T \end{pmatrix},$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Από την (3-37) ο πίνακας $G(s)$ της συνάρτησης μεταφοράς θα είναι

$$G(s) = \text{diag}[n_1(s), n_2(s), \dots, n_m(s)] \bar{C} (sI-A)^{-1} B. \quad (3-39)$$

Βάση του θεωρήματος 3.2 και της (3-38) το σύστημα (A, B, \bar{C}) μπορεί να αποσυζευκτεί και να δώσει την συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \text{diag}[n_1(s), n_2(s), \dots, n_m(s)] \text{diag}[d_1^{-1}(s), d_2^{-1}(s), \dots, d_m^{-1}(s)] \quad (3-40)$$

Συνεπώς το $i^{\text{στο}}$ στοιχείο της συνάρτησης μεταφοράς του αποσυζευγμένου συστήματος παριστάνεται ως $n_i(s)/d_i(s)$ και $d_i(s)$ υπολογίζεται έτσι ώστε να μην έχει κοινό παράγοντα με το $n_i(s)$.

(\Rightarrow Αναγκαία συνθήκη)

Όταν τα διαγώνια στοιχεία του αποσυζευγμένου συστήματος δίνονται από την σχέση (3-32), τότε το $i^{\text{στο}}$ ο διάνυσμα γραμμής $h_i^T(s)$ της συνάρτησης μεταφοράς του αποσυζευγμένου συστήματος θα είναι:

$$\begin{aligned} h_i^T(s) &= c_i^T (sI-A+BK)^{-1} BF \\ &= n_i(s) / d_i(s) e_i^T, \end{aligned} \quad (3-41)$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$h_i^T(s) = n_i(s) \bar{c}_i^T (sI-A+BK)^{-1} BF. \quad (3-42)$$

Από την άλλη πλευρά από τις (3-17), (3-41) και (3-42) ότι

$$\bar{c}_i^T (sI-A)^{-1} B [I + K(sI-A)^{-1} B]^{-1} F = n_i(s) \bar{c}_i^T (sI-A)^{-1} B (I + K(sI-A)^{-1} B) F$$

Θα πάρουμε την (3-34) αν πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές της παραπάνω σχέσης με τον αντίστροφο του πίνακα $[I + K(sI-A)^{-1} B]^{-1} F$ από τα δεξιά. \square

Το παραπάνω θεώρημα δείχνει ότι οι όροι του αριθμητή στο αποσυζευγμένο σύστημα δίνονται από τις ιδιότητες του αρχικού συστήματος και δεν μπορούν να αλλάξουν.

ΚΩΔΙΚΑΣ ΣΤΟ MATLAB

```

r - C:\MATLAB7\work\pole_zero.m
Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base

clc
dima=[2,2;0,0]
dimb=[0,0,0;0,0,0]
dimc=[0;0]

clc
disp(' *****')
disp('  ΑΠΟΣΥΖΕΥΞΗ ΜΕ ΠΡΟ-ΣΧΕΔΙΑΣΜΕΝΟΥΣ ΠΟΛΟΥΣ  ')
disp(' *****')

*****
**  ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΜΒΑΤΟΤΗΤΑΣ ΠΙΝΑΚΩΝ  **
*****

while (dima(1)~=dima(2) | dima(1)~=dimb(1) | dima(1)~=dimc(2))
a = input(' ΔΩΣΕ ΠΙΝΑΚΑ Α (nxn)...:');
b = input(' ΔΩΣΕ ΠΙΝΑΚΑ Β (nxm)...:');
c = input(' ΔΩΣΕ ΠΙΝΑΚΑ C (mxn)...:');

dima=size(a)
dimb=size(b)
dimc=size(c)

if (dima(1)~=dima(2) | dima(1)~=dimb(1) | dima(1)~=dimc(2))
    clc
    disp(' ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΒΑΤΟΙ ΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΟΥ ΔΩΣΑΤΕ')
    disp(' *****          ΠΡΟΣΗΛΑΘΗΣΕ ΞΑΝΑ          *****')
end
end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$            %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%  Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ss ΚΡΑΤΑΕΙ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ 
n=dim(a(1))
m=dim(b(2))
for i=1:m

    for j=1:n
        M=c(i,:)*(a^(j-1))*b

        if (M==0)
            p=0
        else
            p=j
            ss(i)=p
        end

        if (p~=0)
            sprintf('...Το  $\sigma$ %d είναι %d',i,p)

            break
        end
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  ΠΡΟΣΧΕΔΙΑΣΜΕΝΟΙ ΠΟΛΟΙ pi i=1...m %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for i=1:m
    for j=1:ss(i)
        l= input('ΔΩΣΕ ΕΠΙΘΥΜΗΤΟ ΠΟΛΟ ...:')
        g(i,j)=-l
        sprintf('g%d%d είναι:%d',i,j,g(i,j))
    end
end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ  $\varphi(s)$  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
syms s
for i=1:m
    f=1
    for j=1:ss(i)
        f=f*(s+g(i,j)) % απο τον ορισμο του  $\varphi(s)$  με το ΓΙΝΟΜΕΝΟ
    end
fi(i)=f % στον fi αποθηκεύονται οι τιμες των  $\varphi_1(s), \varphi_2(s)$ 
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ  $B^*$  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
i=1
for i=1:m
    BB=c(i,:) * a^(ss(i)-1) * b
    B(i,:)=BB
end
%ελεγχεται αν ο  $B^*$  είναι non-singular (θεωρημα 3.2)
if rank(B)<size(B,1)
    disp('O  $B^*$  είναι singular, βάση θεωρήματος 3.2 δεν επιτυγχάνεται η αποσύζευξη ')
    disp('Τ Ε Λ Ο Σ')
    return
else disp('O  $B^*$  είναι non-singular, βάση θεωρήματος 3.2 επιτυγχάνεται η αποσύζευξη ')

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ  $\varphi(A), C^{**}$  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for i=1:m
    f=1
    for j=1:ss(i)
        f=f*(a+g(i,j) * eye(n)) % απο τον ορισμο του  $\varphi(s)$  με το ΓΙΝΟΜΕΝΟ
    end
CCC=c(i,:) * f
Ce(i,:)=CCC
end

```

```

*****
% ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ F          %
% ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ K          %
*****
B_1=inv(B)
F=B_1
K=B_1*Ce

*****
% ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ H(s) %
*****

syms s
for i=1:m
couple=fi(i)^(-1)
couples(i,1)=couple
end

disp('*****')
disp('H συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι:')
disp('*****')

disp('---> Βάση του τύπου H(s)=diag(1/s(σ1),1/s(σ2),...)\')
Hs=diag(couples)

disp('---> Με βάση τον ΓΕΝΙΚΟ ΟΡΙΣΜΟ της συνάρτησης μεταφοράς H(s)=C[(sI-A+BK)-1]*B*F \')
H_s=simple(c*inv(s*eye(dima)-a+b*K)*b*F)

if H_s==Hs
disp('Βρίσκουμε την ΙΔΙΑ συνάρτηση μεταφοράς και με τους δύο τρόπους')
else
disp('Υπάρχει απόκλιση της συνάρτησης μεταφοράς με τους δύο διαφορετικούς τύπους')
end

disp('---> ΤΟ Κ ΕΙΝΑΙ:')
K=K

disp('---> ΤΟ F ΕΙΝΑΙ:')
F
disp('.....Τ Ε Α Ο Σ.....\')
% Τ Ε Α Ο Σ

```


4 ΚΛΑΣΗ ΤΩΝ ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΠΟΥ ΟΔΗΓΟΥΝ ΣΕ ΑΠΟΣΥΖΕΥΞΗ

4.1 Δημιουργία της κλάσης των ελεγκτών που οδηγούν σε στατική ή δυναμική αποσύζευξη.

Έστω $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ένας πίνακας και $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ με $\det[F] \neq 0$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Κάτω από την υπόθεση ότι το σύστημα (3-1) μπορεί να αποσυζευκτεί, στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα ζεύγη (K, F) ώστε να είναι δυνατή η αποσύζευξη του συστήματος. Αυτές οι συνθήκες αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητες του F και συνεπώς μας οδηγεί στο να μιλάμε για την κλάση Φ από πίνακες K οι οποίοι μπορούν να αποσυζεύξουν το σύστημα (3-1).

Ορισμός 4.1

Έστω $Q^i(K)$ είναι ένας $n \times m$ πίνακας ο οποίος δίνεται από την σχέση :

$$Q^i(K) = \begin{pmatrix} C_i(A+BK)^{n-1}B \\ C_i(A+BK)^{n-2}B \\ \vdots \\ C_i(A+BK)^{\sigma_i-1}B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i=1, \dots, m \quad (4-1)$$

όπου 0 είναι ένας μηδενικός πίνακας σύμφωνος με την τάξη του $Q^i(K)$. Έστω $P^i(K)$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας που δίνεται από :

$$P^i(K) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -p_{n-1}(K) & \cdots & -p_{\sigma_i}(K) & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -p_{\sigma_i+1}(K) & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \\ \hline & 0 & & & I \end{array} \right), \quad (4-2)$$

$i=1, \dots, m$

όπου $p_k(K)$ είναι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του $A+BK$, π.χ.

$$(A+BK)^n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(K)(A+BK)^k \quad (4-3)$$

και I είναι ο μοναδιαίος πίνακας συμβατός σε διαστάσεις με τον $P^i(K)$. Αφού ο $P^i(K)$ είναι αντιστρέψιμος, έχουμε ως επακόλουθο ότι η τάξη του $P^i(K) Q^i(K)$ είναι ίση με την τάξη του $Q^i(K)$. Σημειώνουμε επίσης ότι

$$L^i \{K, F\} = P^i(K)Q^i(K)F \quad (4-4)$$

όπου

$$L^i \{K, F\} = \begin{pmatrix} C_i[(A+BK)^{n-1} - p_{n-1}(K)(A+BK)^{n-2} - \dots - p_{\sigma_i}(K)(A+BK)^{\sigma_i-1}]BF \\ C_i[(A+BK)^{n-2} - p_{n-1}(K)(A+BK)^{n-3} - \dots - p_{\sigma_i+1}(K)(A+BK)^{\sigma_i-1}]BF \\ \vdots \\ C_i[(A+BK)^{\sigma_i-1}BF \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

$$\text{Έτσι} \quad \text{rank}(L^i \{K, F\}) = \text{rank}(Q^i(F)), i = 1, \dots, m \quad (4-6)$$

εφόσον ο F είναι αντιστρέψιμος. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4-1: Εάν το ζεύγος K, F μπορεί να αποσυζεύξει το σύστημα (3-1), τότε το rank του $Q^i(K)$ είναι «ένα» για όλα τα i . Αντιστρόφα, εάν η τάξη του πίνακα $Q^i(K)$ είναι ένα για όλα τα i και εάν B^* είναι αντιστρέψιμος, τότε το ζεύγος K, B^{*-1} μπορεί να αποσυζεύξει το σύστημα (3-1).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Αναγκαία συνθήκη: Έστω ότι οι πίνακες K, F μπορούν να αποσυζεύξουν το σύστημα (3-1). Τότε :

$$\text{tr}(L^i \{K, F\}\Omega) \equiv \text{tr}(L^i \{K, F\}\Omega^i) \neq 0 \quad (4-7)$$

για κάθε i , όπου $\text{tr}(\cdot)$ είναι το ίχνος πίνακα και Ω είναι $m \times n$ πίνακας της μορφής

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \omega & & & \\ \omega & \omega^2 & & \\ \dots & & \dots & \\ \omega & & & \omega^{(n-1)} \end{array} \right) \quad (4-8)$$

Εφόσον ο πίνακας Ω είναι αυθαίρετος, η $i^{\text{η}}$ στήλη του $L^i\{K, F\}$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα, εφόσον κάθε άλλη στήλη του $L^i\{K, F\}$ είναι μηδενικό διάνυσμα. Επομένως ο $L^i\{K, F\}$ έχει τάξη ένα, και συνεπώς από την (4-6) $\text{rank}[Q^i(K)] = 1$

Ικανή συνθήκη: Έστω ότι το $\text{rank}_{\mathbb{R}}[Q^i(K)] = 1$ για κάθε i και ότι B^* είναι αντιστρέψιμος.

Εφόσον

$$C_i(A + BK)^{\sigma_i - 1} B = C_i A^{\sigma_i - 1} B = B_i^* \neq 0 \quad (4-9)$$

από τον ορισμό του σ_i , όπου B_i^* είναι η $i^{\text{η}}$ γραμμή του B^* θα έχουμε :

$$Q^i(K) = \begin{pmatrix} a_1^i B_i^* \\ \vdots \\ B_i^* \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4-10)$$

άρα θα έχουμε

$$Q^i(K)B^{*-1}F = \begin{pmatrix} | & & | & a_1^i & | & & | \\ | & & | & a_2^i & | & & | \\ 0 & | & \dots & \vdots & | & \dots & | & 0 \\ | & & | & 1 & | & & | \\ | & & | & 0 & | & & | \end{pmatrix}. \quad (4-11)$$

που έχει μόνο μια μη-μηδενική $i^{\text{η}}$ στήλη. Επομένως:

$$\begin{aligned} \text{tr}(L^i\{K, B^{*-1}\}\Omega) &= \text{tr}(P^i(K)Q^i(K)B^{*-1}\Omega) \\ &= \text{tr}(P^i(K)Q^i(K)B^{*-1}\Omega^i) \neq 0 \end{aligned} \quad (4-12)$$

και έτσι το ζευγάρι των K, F , μπορεί να αποσυζεύξει το σύστημα (3-1).

Πόρισμα 4-1:

Εάν το ζευγάρι των K, F , μπορεί να αποσυζεύξει το σύστημα (4-1), τότε υπάρχει ένας διαγώνιος πίνακας Λ τέτοιος ώστε $F = \Lambda B^{*-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Εάν το ζευγάρι των K, F , μπορεί να αποσυζεύξει το σύστημα (3-1), τότε ο $Q^i(K)$ δίνεται από την (4.10) και

$$Q^i(K)F = \begin{pmatrix} 0 & | & \dots & | & \lambda^i a_1^i & | & \dots & | & 0 \\ & | & & | & \lambda^i a_2^i & | & & | & \\ & | & & | & \vdots & | & & | & \\ & | & & | & \lambda^i & | & & | & \\ & | & & | & 0 & | & & | & \end{pmatrix}, \lambda^i \neq 0. \quad (4-13)$$

Συνεπώς $B^*F = \text{diag}[\lambda^i, \dots, \lambda^n]$ το οποίο αποδεικνύει το πόρισμα.

Πόρισμα 4-2: Εάν το ζευγάρι των K, F , μπορεί να αποσυζεύξει το σύστημα (4-1), τότε υπάρχει ένας διαγώνιος πίνακας n τέτοιος ώστε :

$$KB = B^{*-1} \{nA^{**} - A^*\} B \quad (4-14)$$

όπου A^{**} , και A^* δίνονται από τις σχέσεις

$$A^{**} = \begin{pmatrix} C_1 A^{\sigma_1-1} \\ \vdots \\ C_m A^{\sigma_m-1} \end{pmatrix}, \quad A^* = A^{**} A \quad (4-15)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Το πόρισμα αυτό είναι άμεση συνέπεια από την σχέση :

$$\begin{aligned} C_i (A + BK)^{\sigma_i} &= C_i A^{\sigma_i-1} B + C_i A^{\sigma_i} BKB \\ C_i (A + BK)^{\sigma_i} &= \gamma_i C_i (A + BK)^{\sigma_i-1} B \end{aligned} \quad (4-16)$$

Συμπερασματικά ,καταλήγουμε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη του ζεύγους K, F για την αποσύζευξη του συστήματος (4-1) είναι ο πίνακας B^* να είναι αντιστρέψιμος.Επιπλέον, το σύνολο όλων των ζευγαριών K, F , που μπορούν να αποσυζεύξουν το σύστημα (4-1) αποτελούνται από πίνακες K τέτοιους ώστε το $\text{rank} [Q^i(K)]=1$ για όλα τα i , και F τέτοιο ώστε $F=\Lambda B^{*-1}$, όπου Λ είναι διαγώνιος και αντιστρέψιμος.

4.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 4-1:

Έστω ότι έχουμε το σύστημα με τους ακόλουθους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε θα έχουμε:

$$c_1^T A^0 B = [1 \ 1] \neq 0$$

$$\sigma_1 = 1$$

$$c_2^T A^0 B = [0 \ 0] = 0$$

$$c_2^T AB = [0 \ 1] \neq 0$$

$$\sigma_2 = 2$$

και

$$B^* = \begin{pmatrix} c_1^T A^{\sigma_1-1} B \\ c_2^T A^{\sigma_2-1} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 B \\ C_2 AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως ο B^* είναι αντιστρέψιμος άρα το σύστημα μπορεί να αποσυζευκτεί.
/?

Το σύνολο Φ όλων των πινάκων K που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αποσύζευξη του παραπάνω συστήματος, μπορούμε να τα παρατηρήσουμε προσδιορίζοντας όλους τους 2×3 πίνακες K που είναι τέτοιοι ώστε να ισχύει $\text{rank}[Q^i(K)] = 1$.

Υπολογίζουμε το $Q^i(K)$ όπου $i=1,2$

$$Q^1(K) = \begin{pmatrix} C_1(A+BK)B \\ C_1 B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^2(K) = \begin{pmatrix} C_2(A+BK)B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{όπου } K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix}$$

$$Q^1(K) = \begin{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^1(K) = \begin{pmatrix} k_{11}+k_{21}-k_{12}-k_{22} & 2+k_{11}+k_{21}+k_{12}+k_{22} \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πρέπει $\text{rank} [Q^1(K)] = 1$.

άρα

$$(k_{11}+k_{21}-k_{12}-k_{22}) \cdot 1 = (2+k_{11}+k_{21}+k_{12}+k_{22}) \cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$k_{11}+k_{21}-k_{12}-k_{22} = 2+k_{11}+k_{21}+k_{12}+k_{22} \Leftrightarrow$$

$$2 + 2k_{12} + 2k_{22} = 0 \Leftrightarrow$$

$$k_{12} + k_{22} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$k_{12} + k_{22} = -1$$

$$Q^2(K) = \begin{pmatrix} C_2(A+BK)B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} [Q^2(K)] = 1.$$

Σε αυτό το παράδειγμα, αυτό υποδηλώνει ότι τα στοιχεία του Φ πρέπει να βρίσκονται στην ακόλουθη μορφή:

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{11} & -k_{12}-1 & -k_{13} \end{pmatrix} \quad (4-17)$$

4.3 Διαδικασία σύνθεσης

Το θεώρημα 4.1 παρέχει μια διαδικασία για τον καθορισμό της κλάσης Φ όλων των πινάκων ανάδρασης K οι οποίοι χρησιμοποιούνται για την αποσύζευξη του συστήματος (3-1). Ωστόσο η άμεση εφαρμογή της συνθήκης $\text{rank} [Q^i(K)] = 1$ για όλα τα i , έχει ως μόνο αποτέλεσμα τους περιορισμούς που τίθενται στις συγκεκριμένες παραμέτρους του πίνακα K .

Αυτό που επίσης απαιτείται είναι μια διαδικασία για τον προσδιορισμό των πόλων του κλειστού συστήματος, ενώ ταυτόχρονα γίνεται η αποσύζευξη του συστήματος (3-1), χρησιμοποιώντας το κατάλληλο $K \in \Phi$. Μια διαδικασία σύνθεσης θα παρουσιαστεί τώρα, με σκοπό να παρατηρήσουμε άμεσα τον πίνακα ανάδρασης $K \in \Phi$.

Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι $M_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $k=0,1,\dots,\delta$. Τότε η παρακάτω επιλογή επιλογή των K, F :

$$\begin{aligned} K &= B^{*-1} \left(\sum_{k=0}^{\delta} M_k C A^k - C^* \right) \\ F &= B^{*-1} \end{aligned} \quad (4-18)$$

Θα οδηγήσει βάση της σχέσης:

$$y^* = (C^* + B^* K)x + B^* F r \quad (4-19)$$

όπου

$$y^* = \begin{pmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(\sigma_i)} \end{pmatrix}$$

στην:

$$y^* = \sum_{k=0}^{\delta} M_k C A^k x + r \quad (4-20)$$

ή

$$\begin{aligned} y_i^{(\sigma_i)} &= m_0^i y_i + m_1^i y_i^{(1)} + \dots + m_{\sigma_i-1}^i y_i^{(\sigma_i-1)} + r_i \\ i &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4-21)$$

όπου φαίνεται ότι K, F , μπορούν να αποσυζευξουν την (3-1) και ότι οι $m + \sum_{i=1}^m (\sigma_i - 1)$ πόλοι του κλειστού συστήματος μπορούν να ποικίλουν, διαφοροποιώντας το M_k .

4.3.1 Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα στον χώρο των καταστάσεων σύμφωνα με τους ακόλουθους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τώρα

Για $i=1$ έχουμε

$$c_1^T A^0 B = c_1^T B = [1 \ 1] \neq 0$$

επομένως $\sigma_1=1$

Για $i=2$ έχουμε

$$c_2^T A^0 B = c_2^T B = [0 \ 0]$$

$$c_2^T AB = c_2^T AB = [0 \ 0]$$

$$c_2^T A^2 B = [1 \ 0] \neq [0 \ 0]$$

$$\sigma_2 = 3$$

$$B^* = \begin{pmatrix} c_1^T B \\ c_2^T A^2 B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Εφόσον ο B^* είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα μπορεί να αποσυζευκτεί.

$$A^{**} = \begin{pmatrix} c_1 A^{\sigma_1-1} \\ \vdots \\ c_2 A^{\sigma_3-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 A^0 \\ c_2 A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = A^{**} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Θέτοντας για παράδειγμα,

$$M_0 = M_1 = M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

χρησιμοποιώντας την σχέση (4-1), το αποσυζευγμένο σύστημα θα είναι:

$$y_1^{(6)} = y_1^{(2)} + 2y_1^{(3)} + 2y_1^{(4)} - \omega_1^{(1)} - 2\omega_1^{(2)} - 2\omega_1^{(3)} + \omega_1^{(5)} \quad (4-22)$$

$$y_2^{(6)} = y_2^{(2)} + 2y_2^{(3)} + 2y_2^{(4)} + \omega_2^{(2)} + \omega_2^{(2)} \quad (4-23)$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση:

$$\det(sI - A - BK) = s^2(s+1)(s^3 - s^2 - s - 1)$$

όπου οι πόλοι αναπαρίστανται από την σχέση $s^2(s+1)(s^3 - s^2 - s - 1)$ και έχουν καθοριστεί με βάση την επιλογή του M_k . Άλλες επιλογές του M_k θα οδηγήσουν σε σχεδιασμό άλλων πόλων του κλειστού συστήματος. Επομένως, εάν B^* είναι

αντιστρέψιμος, οι $m + \sum_{i=1}^m (\sigma_i - 1)$ πόλοι του κλειστού συστήματος μπορούν αυθαίρετα

να οριστούν (σ_i κάθε φορά) ενώ ταυτόχρονα γίνεται η αποσύζευξη του συστήματος χρησιμοποιώντας τη διαδικασία σύνθεσης. Παρόλα αυτά, φαίνεται ότι ο αριθμός

$m + \sum_{i=1}^m (\sigma_i - 1)$ δεν μπορεί να υπερβεί την τιμή n , τον αριθμό των πόλων του

συστήματος, και μερικές φορές είναι πιθανό να προσδιορίσουμε περισσότερους από $m + \sum_{i=1}^m (\sigma_i - 1)$ πόλους, ενώ ταυτόχρονα γίνεται η αποσύζευξη του συστήματος.

Λήμμα:

Έστω C^* είναι ένας $(m + \sum_{i=1}^m (\sigma_i - 1)) \times n$ πίνακας :

$$C^* = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_1 A^{\sigma_1-1} \\ C_2 \\ \vdots \\ C_2 A^{\sigma_2-1} \\ \vdots \\ C_m A^{\sigma_m-1} \end{pmatrix} \quad (4-24)$$

Τότε θα έχουμε $rank[C^*] = m + \sum_{i=1}^m (\sigma_i - 1)$, και συνεπώς $m + \sum_{i=1}^m (\sigma_i - 1) \leq n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω k_i^* η i^{η} γραμμή του πίνακα C^* και r_i αυθαίρετες σταθερές τέτοιες ώστε

$$\sum_i^v r_i k_i = 0 \quad (4-25)$$

όπου

$$v = m + \sum_1^m (\sigma_i - 1) \quad (4-26)$$

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης του λήμματος χρειάζεται να δείξουμε ότι η (4-25) συνεπάγεται ότι κάθε $r_i=0$. Ωστόσο, αυτό συνεπάγεται άμεσα από την (4-25) με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με $B, AB, \dots, A^{\delta} B$, και το γεγονός ότι ο B^* είναι αντιστρέψιμος.

Έστω ότι p δηλώνει τον αριθμό των πόλων του κλειστού συστήματος, οι οποίοι μπορούν να καθοριστούν κατά την διάρκεια της διαδικασίας αποσύζευξης, και έστω k των ελεύθερων παραμέτρων (εισόδων) σε έναν πίνακα αποσύζευξης K (για παράδειγμα, $k=3$ στην (4-17)). Τότε από το παραπάνω λήμμα θα έχουμε :

$$m + \sum_1^m (\sigma_i - 1) \leq p \leq n \quad (4-27)$$

$$m + \sum_1^m (\sigma_i - 1) \leq k$$

Επιπλέον, εάν $m + \sum_1^m (\sigma_i - 1) = n$, τότε όλοι οι n πόλοι του κλειστού συστήματος μπορούν ελεύθερα να επανατοποθετηθούν ενώ ταυτόχρονα γίνεται και η αποσύζευξη του συστήματος. Επίσης εάν $K = m + \sum_1^m (\sigma_i - 1) = n$ τότε από την (4-21) θα έχουμε

άμεσο τρόπο υπολογισμού τις ελεύθερες παραμέτρους του K . Εάν $m + \sum_{i=1}^m (\sigma_i - 1)$ (ή n), τότε θα είναι πιθανό να προσδιορίσουμε πάνω από $m + \sum_{i=1}^m (\sigma_i - 1)$ πόλους του κλειστού συστήματος. Σε αυτή την περίπτωση, είναι συχνά προτιμότερο να υπολογίζουμε το $K = C(sI - A - BF)^{-1} BB^{*-1}$ με k ελεύθερες παραμέτρους στον πίνακα K .

4.3.2 Παράδειγμα_1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4-28)$$

Τότε :
 $\sigma_1=3$
 $\sigma_2=1$

$$B^* = \begin{pmatrix} C_1 A^2 B \\ C_2 B \end{pmatrix} = I \quad (4-29)$$

και $m + \sum_{i=1}^n (\sigma_i - 1) = 2 + (3 - 1) + (1 - 1) = 4$. Έτσι, όλοι οι πόλοι του κλειστού συστήματος μπορούν να καθοριστούν χρησιμοποιώντας την διαδικασία σύνθεσης. Πρέπει $Q_1(K)=1$ και $Q_2(K)=1$

$$Q^1(K) = \begin{pmatrix} C_1(A+BK)B \\ C_1(A+BK)^2 B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^1(K) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και

$$Q^2(K) = \begin{pmatrix} C_2(A+BK)B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^2(K) = \begin{pmatrix} k_{23} & 1+k_{24} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Πρέπει } Q^2(K) = 1$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{24} \end{pmatrix} \quad (4-30)$$

Επιπλέον, η εφαρμογή του Θεώρημα 4-1 δείχνει ότι η (4-30) αναπαριστά την πιο γενικευμένη μορφή πίνακα K, k=4=n. Και η γενικευμένη μορφή του αποσυζευγμένου πίνακα μεταφοράς είναι:

$$\begin{pmatrix} \frac{(s-k_{24})}{(s-k_{24})(s^3-k_{13}s^2-k_{12}s-k_{11})} & 0 \\ 0 & \frac{(s^3-k_{13}s^2-k_{12}s-k_{11})}{(s-k_{24})(s^3-k_{13}s^2-k_{12}s-k_{11})} \end{pmatrix} \quad (4-31)$$

Παράδειγμα_2

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4-32)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε ο

$$\sigma_1 = C1 * B = [1 \ 0]$$

άρα $\sigma_1 = 1$

$$\sigma_2 = C2 * B = [0 \ 1]$$

άρα $\sigma_2 = 1$

$$B^* = \begin{pmatrix} C_1 B \\ C_2 B \end{pmatrix} = I. \quad (4-33)$$

είναι αντιστρέψιμος, άρα το σύστημα (4-32) μπορεί να αποσυζευχθεί. Τα στοιχεία της Φ θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε

Υπολογίζω τα $Q_1(K), Q_2(K)$.

$$Q^1(K) = \begin{pmatrix} C_1(A+BK)^2 B \\ C_1(A+BK)B \\ C_1 B \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$Q^1(K) = \begin{pmatrix} 2+k_{11}+(4+k_{12})*(3+k_{12})+k_{13}*(1+k_{22}) & (4+k_{12})*k_{13}+k_{13}*(1+k_{23}) \\ 4+k_{12} & k_{13} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^2(K) = \begin{pmatrix} C_2(A+BK)^2 B \\ C_2(A+BK)B \\ C_2 B \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$Q^2(K) = \begin{pmatrix} 1+k_{21}+(1+k_{22})*(3+k_{12})+(1+k_{23})*(1+k_{22}) & k_{13}*(1+k_{22})+(1+k_{23})^2 \\ 1+k_{22} & 1+k_{23} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

πρέπει $\text{rank}[Q_1(K)]=\text{rank}[Q_2(K)]=1$

⋮
⋮
⋮

Επομένως

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ -1 & -1 & k_{23} \end{pmatrix} \quad (4-34)$$

έτσι ώστε $k=n=3>2=2+(1-1)+(1-1)=m+\sum_1^m(\sigma_i-1)$. Επιπλέον, η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι:

$$C(sI - A - BK)^{-1}BB^{*-1} = \tag{4-35}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} (s+1)(s-k_{23}-1) & 0 \\ 0 & s^3 - (k_{12}+3)s - (k_{11}+2) \end{pmatrix}}{(s-k_{23}-1)[s^2 - (k_{12}+3)s - (k_{11}+2)]}$$

Συνεπώς, όλοι οι πόλοι του κλειστού συστήματος μπορούν να προσδιοριστούν βάση του Θεώρημα 4-1. Ωστόσο, σημειώνουμε ότι η εφαρμογή της διαδικασίας σύνθεσης σε αυτή την περίπτωση μας επιτρέπει τον προσδιορισμό μόνο των δύο από τους τρεις πόλους του κλειστού συστήματος.

4.4 Αποσύζευξη συστημάτων με ανάδραση εξόδου (*decoupling by output feedback*)

Εφόσον η ανάδραση εξόδου είναι μια ειδική περίπτωση της ανάδρασης καταστάσεως, π.χ.

$$u = Hy + Fr \equiv HCx + Fr \tag{4-36}$$

με HC να αντικαθιστά τον K, άμεσο επακόλουθο είναι ότι η (4-1) μπορεί να αποσυζευκτεί χρησιμοποιώντας ανάδραση εξόδου εάν και μόνο εάν ισχύουν τα ακόλουθα:

- 1) B* είναι αντιστρέψιμος (αντιστρέψιμος).
 - 2) υπάρχει ένας $m \times m$ πίνακας H τέτοιος ώστε $rank[Q^i(HC)] = 1$ για $i=1, \dots, m$.
- Αυτές οι συνθήκες ελέγχουν εάν ένα σύστημα μπορεί να αποσυζευκτεί χρησιμοποιώντας ανάδραση εξόδου.

Παράδειγμα 4-2

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Τότε ο

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4-37)$$

$$B^* = CB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος, έτσι το σύστημα που δίνεται από την (4-37) μπορεί να αποσυζευκτεί. Ωστόσο δεν είναι δυνατόν να αποσυζευκτεί αυτό το σύστημα χρησιμοποιώντας ανάδραση εξόδου. Για να το διαπιστώσουμε αυτό παρατηρούμε ότι από το Θεώρημα 4-1 και την σχέση (4-12) θα έχουμε ότι η μορφή του πίνακα K που χρησιμοποιείται για την αποσύζευξη του συστήματος θα είναι:

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & -k_{12} - 1 & -k_{13} \end{pmatrix} \quad (4-38)$$

και ο HC πρέπει να έχει την μορφή:

$$HC = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & h_{12} \\ h_{21} & 0 & h_{22} \end{pmatrix} \quad (4-39)$$

Οι σχέσεις (4-38) και (4-39) οδηγούν στην αντιφατική συνθήκη: $k_{12} = 0$ και $k_{12} = -1$. Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι η αποσύζευξη με ανάδραση κατάστασης δεν σημαίνει και αποσύζευξη με ανάδραση εξόδου.

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι παρόλο που η αποσύζευξη ενός συστήματος μπορεί να γίνει με ανάδραση εξόδου (output feedback), δεν θα υπάρχει τόση ευκολία στην διαδικασία καθορισμού των πόλων του κλειστού συστήματος, όπως συμβαίνει στην ανάδραση καταστάσεως. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το σύστημα που περιγράφεται από την (4-28) όπου η πιο γενική μορφή του H θα είναι:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix} \quad (4-40)$$

Εφόσον $\det(sI - A - BHC) = (s - 1 - h_{22})(s^2 - h_{11})$, η ανάδραση εξόδου δεν είναι ικανή να σταθεροποιήσει το σύστημα, παρόλο που η ανάδραση κατάστασης μας δίνει μεγαλύτερη ευχέρεια κινήσεων (4-31).

Παράδειγμα 4-3

Ας θεωρήσουμε το σύστημα που περιγράφεται από τους πίνακες της σχέσης (4-32) όπου έχει αποδειχθεί ότι με ανάδραση κατάστασης μπορούμε να πετύχουμε την αποσύζευξη του συστήματος με ταυτόχρονο προσδιορισμό και των τριών πόλων. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4-1 και την σχέση (4-12) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε 2×2 πίνακας H της μορφής

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ -1 & h_{22} \end{pmatrix} \quad (4-41)$$

προσδιορίζει μια ανάδραση εξόδου η οποία είναι ικανή να αποσυζεύξει το σύστημα. Από την (4-41) θα έχουμε :

$$\det(sI - A - BHC) = (s - 1 - h_{22})(s^2 - (h_{11} + 3)s - (h_{11} + 2))$$

και συνεπώς το σύστημα θα μπορεί να γίνει ευσταθές χρησιμοποιώντας ανάδραση εξόδου (π.χ. $h_{22} = -1, h_{11} = -5$) παρόλο που οι πόλοι δεν είναι απόλυτα ελεύθεροι.

Παράδειγμα 4-4:

Έστω το σύστημα στον χώρο των καταστάσεων που περιγράφεται από τους ακόλουθους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4-42)$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$B^* = CB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-43)$$

$$m + \sum_{i=1}^m (\sigma_i - 1) = 2 < 3 = n$$

Από το Θεώρημα 4-1 έχουμε ότι κάθε πίνακας K που χρησιμοποιείται για την αποσύζευξη έχει την μορφή:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & -1 - k_{22} \end{pmatrix} \quad (4-44)$$

έτσι ώστε $k = 4$. Ωστόσο, η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι:

$$\frac{\begin{pmatrix} (s-1)(s-k_{12}-k_{13}-1) & 0 \\ 0 & (s-1)(s-k_{21}-1) \end{pmatrix}}{(s-1)(s-k_{21}-1)(s-k_{12}-k_{13}-1)} \quad (4-45)$$

έτσι ώστε $p=2$ π.χ. μόνο δύο από τους πόλους του κλειστού συστήματος μπορούν να προσδιοριστούν. Από το παράδειγμα αυτό διαπιστώνουμε ότι η ανάδραση εξόδου οδηγεί στην ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$\frac{\begin{pmatrix} (s-1)(s-k_{12}-1) & 0 \\ 0 & (s-1)(s-k_{21}-1) \end{pmatrix}}{(s-1)(s-k_{12}-1)(s-k_{21}-1)} \quad (4-46)$$

δηλαδή, η ανάδραση εξόδου και κατάσταση είναι ισοδύναμες. Αυτό όμως αποδεικνύει πως το προηγούμενο παράδειγμα δεν είναι αληθές πάντα.

4.5 Μελέτη προβλήματος (Case Study)

Ένας τομέας στον οποίο οι τεχνικές αποσύζευξης έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και εφαρμογή είναι η σχεδίαση συστήματος του ελέγχου πτήσεως ευσταθών ανυψωτικών μηχανημάτων. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα που αναπαριστά την κίνηση ενός οχήματος ανύψωσης τύπου V/STOL

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{w} \\ \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u & X_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ M_u & 0 & M_\theta & M_\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_\theta & Z_\omega & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ w \\ \Delta x \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{cv} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ M_{cv} & M_{\theta nf} & 0 \\ 0 & Z_\theta & Z_{cs} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_v \\ \delta_{nf} \\ \delta_s \end{pmatrix} \quad (4-47)$$

όπου:

u = η μεταβολή της γραμμικής γωνιακής ταχύτητας.

θ = η στιγμιαία γωνία μεταξύ του διαμήκου άξονα του αεροπλάνου και της θέσης του ίδιου άξονα όταν το αεροπλάνο είναι ακίνητο στο έδαφος «γωνία πρόνευσης».

$\dot{\theta}$ = βαθμός πρόνευσης.

w = μεταβολή της στιγμιαίας κάθετης ταχύτητας.

Δx = μεταβολή του σφάλματος θέσης.

Δz = μεταβολή του σφάλματος ύψους.

δ_u = μεταβολή του μέγιστου αριθμού εισόδων.

δ_{nf} = μεταβολή της απότομης κλίσης.

δ_s = μεταβολή της πορείας των πτερυγίων.

Οι εξόδοι με αυξημένη σημασία σε αυτό το παράδειγμα είναι οι θ , Δx και Δz .
Συνεπώς ο πίνακας εξόδου C είναι:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4-48)$$

Σε αυτό το παράδειγμα

$$B^* = \begin{pmatrix} C_1 AB \\ C_2 AB \\ C_3 AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{cv} & M_{\theta nf} & 0 \\ X & 0 & 0 \\ 0 & Z_\theta & Z_{cs} \end{pmatrix} \quad (4-49)$$

και είναι επειδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Z_{cs} M_{\theta ns} X_{cv} \neq 0$. Κατά συνέπεια:

$$m + \sum_{i=1}^3 (\sigma_i - 1) = 6$$

άρα και οι έξι πόλοι του κλειστού συστήματος μπορούν να καθοριστούν αυθαίρετα ενώ ταυτόχρονα γίνεται η αποσύζευξη του συστήματος. Από το Θεώρημα 4-1, έχουμε ότι ο αποσυζευκτής K έχει 6 (π.χ. $k=6$) ελεύθερες παραμέτρους. Έτσι, η διαδικασία σύνθεσης μπορεί να εφαρμοστεί, αξιοποιώντας τις ελεύθερες παραμέτρους. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε πως επιθυμούμε τον ανεξάρτητο έλεγχο $\theta, \Delta x, \Delta z$ π.χ.

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= m_1^0 \theta + m_1^1 \dot{\theta} + \omega_1 \\ \Delta \ddot{x} &= m_2^0 \Delta x + m_2^1 \Delta \dot{x} + \omega_2 \\ \Delta \ddot{z} &= m_3^0 \Delta z + m_3^1 \Delta \dot{z} + \omega_3 \end{aligned} \quad (4-50)$$

Σύμφωνα με την διαδικασία σύνθεσης, το K μπορεί να είναι ίσο με :

$$B^{*-1} \left[\sum_{k=0}^1 M_k C A^k - C^* \right]$$

Για το K αυτό θα έχουμε:

$$A + BK = \begin{pmatrix} m_2^1 & 0 & 0 & 0 & m_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1^0 & m_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3^1 & 0 & m_3^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-51)$$

Εάν F είναι ίσο με B^{*-1} , η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι:

$$C(sI - A - BK)^{-1}BB^{*-1} = \left(\begin{array}{ccc} (s^2 - m_2^1s - m_2^0)(s^2 - m_3^1s - m_3^0) & 0 & 0 \\ 0 & (s^2 - m_1^1s - m_1^0)(s^2 - m_3^1s - m_3^0) & 0 \\ 0 & 0 & (s^2 - m_1^1s - m_1^0)(s^2 - m_2^1s - m_2^0) \end{array} \right)^*$$

$$[(s^2 - m_1^1s - m_1^0)(s^2 - m_2^1s - m_2^0)(s^2 - m_3^1s - m_3^0)]^{-1}.$$

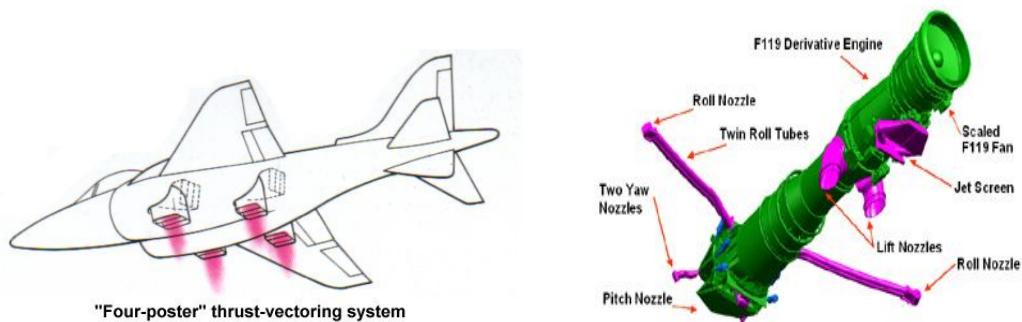
(4-52)

Εάν έχει γίνει σωστή επιλογή του m_j^i , τότε ο χειριστής θα έχει ως έργο τον έλεγχο τριών υψηλής ευστάθειας δευτέρου βαθμού συστημάτων. Το παράδειγμα αυτό σκοπό έχει να παρουσιάσει ένα πιθανό πρακτικό τομέα εφαρμογής όσον αναφέρθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο.

Το παραπάνω παράδειγμα επεξηγεί τις τεχνικές που αναπτύχθηκαν για τον σχεδιασμό ελεγκτών για την αποσύζευξη πολυμεταβλητών συστημάτων.



Εικόνα 4-1: αεροπλάνο τύπου V/STOL.



Εικόνα 4-2: αεροπλάνο τύπου V/STOL με 4 προωθητήρες.

5 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ / ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ / ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Το πρόβλημα της αποσύζευξης γραμμικών χρονοαμετάβλητων πολυμεταβλητών συστημάτων, έχει αξιωθεί εξαιρετικής προσοχής και μελέτης στην βιβλιογραφία της «Θεωρίας Συστημάτων» εδώ και αρκετές δεκαετίες.

Αρκετή από αυτή την προσοχή προσανατολίστηκε στην αποσύζευξη με ανάδραση (decoupling by state feedback) από τους Morgan 1964, Falb and Wolovich 1967, Hautus και Heymann 1983, Descusse 1991, Descusse 1988, Wonham 1986.

Πιο γενικά το block-decoupling ερευνήθηκε από τον Koussiouris 1979, Koussiouris 1980, Commault 1991, Descusse 1991, Williams και Antsaklis 1986. Η αλγεβρική προσέγγιση του προβλήματος που έγινε, πραγματοποιήθηκε με αποκλειστική πηγή ο Falb και Wolovich 1967 και Falb και Wolovich 1969

- Βαρδουλάκης Αντώνιος-Ιωάννης/(1991)/*Linear Multivariable Control*
- Καραμπετάκης Νικόλαος/(2003)/*Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου /Σημειώσεις Α.Π.Θ./*
- Χαλκιαδιάκης (διπλ. Αεροναυπηγός μηχανικός) /*Aerospatiale/ Aerospace Dict.Paris* 1984
- Ailon A.(1991)/ *Decoupling of Square Singular Systems Via Proportional State Feedback/ /IEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL.36,NO.1*
- Commault,C.,J.M.Dion and Torres (1991).Minimal structure in the block decoupling problem with stability.*Automatica* 27,331-338
- Desoer, A.N. (1990). Parameterization of all decoupling compensators and all achievable diagonal maps for unity-feedback systems.*Proc. 29th IEEE CDC* pp.2492-2493
- Desoer, C.A. and A.N. Gundes (1986).Decouplind linear multiinput multioutput plants by dynamic output feedback:An algebraic theory.*IEEE Trans.AC-31*,744-750
- Dickman, A. and R.Sivan (1985).On the robustness of multivariable linear feedback systems. *IEEETrans.Aut.Control AC-30*,401-404
- Falb, P.L. and W.A. Wolovich (1967)/*Decoupling in the Design ang Synthesis of Multivariable Control Systems/ /IEE Trans. Aut. Control, AC-12*,651-669.
- Geir E.Dullerrud Fernando Panganini./2000/*A Course in Robust control Theory:a convex approach/Springer*
- Gilbert, E.G. (1969) /*The decoupling of Multivariable systems by state feedback/*SIAM J.Control 2(1),50-63.
- Hautus, M.L.J. and M.Heymann (1983)/*Linear feedback decoupling-transfer function analysis. IEEE Trans. Aut. Control* 28, 823-832
- Hinrichen Diederit Antony J.Pritchard(2005)/*Mathematical System Theory I /Springer*
- Howze J.W. (1973)/*Necessary and Sufficient Conditions for Decoupling using Output Feedback/ IEE Trans Aut. Control*
- Kavanagh, R.J. (1966)/*The multivariable problem/Progress in Control Engineering* 3. pp.94-129.
- Kong, K.Y. et al(1995)/*Feasibility report on a frequency –domain adaptive controller./Department of Electrical Engineering/National University of Singapore.*
- Koussiouris, T.G.(1979).A frequency domain approach to the block decoupling problem:I- the solvability of block decoupling problem by state feedback and a constant non-singular input transformation.*Int. J.Control* 29(6),911-1010.
- Koussiouris, T.G.(1980).A frequency domain approach to the block decoupling problem:I- pole placement while block-decoupling problem by state-feedback .*Int. J.Control* 32(3),443-464

- Lin, C.A. (1997)/Necessary and sufficient conditions for existence of decoupling controllers/IEEE Trans Automatic Control 42(8),1157-1161.
- Linnemann, A. and Q.G. Wang (1993). Block decoupling with stability by unity output feedback-solution and performance limitations/Automatica (UK) 29(3),735-744
- Linnemann, A. and R. Maier (1990). Decoupling by precompensation while maintaining stabilizability. Proc. 29th IEEE CDC pp. 2921-2922.
- Morgan B.S.(1964)/The Synthesis of Linear Multivariable Systems by State-Variable Feedback/ IEEE Trans Aut. Control
- Paraskeuopoulos P.N., Koumboulis F.N./Output feedback decoupling of generalized state-space systems/ Elsevier
- Peng, Y. (1990)/A general decoupling precompensator for linear multivariable systems with application to adaptive control. IEEE Trans.Aut.Control **AC-35**, 344-348
- Pernebo, L. (1981)/An algebraic theory for the design of controllers for linear multivariable systems/IEEE Trans. Aut. Control AC-26, 171-193
- Safonov, M.G. and B.S. Chen (1982).Multivariable stability-margin optimization with decoupling and output regulation/IEEE PROC.Part D 129, 276-282.
- Tsien, H.S. (1954)/Engineering Cybernetics/McGraw-Hill/New York
- Vardulakis, A.I.G. (1987)/Internal stabilization and decoupling in linear multivariable systems by unity output feedback compensation/IEEE Trans. Aut.Control AC-32,735-739.
- Vafiadis D. and Karchanias N.(1997)/Decoupling and Pole Assignment of Singular Systems:A frequency Domain Approach/ Elsevier
- Wang, Q.-G. (1992)/Decoupling with internal stability for unity output feedback systems/Automatica 28(2), 411-415.
- Wang, Q.-G. and Y.S. Yang (2002)/ Transfer function matrix approach to decoupling problem with stability/System&Control Letters
- Wang, Q.G., C.C Hang and Y.S. Yang (2002)/Robust stability analysis and pid controller design/IEEE Part D, Control Theory and Applications.
- Wang Q.G.(2003)/*Decoupling Control*/ Springer
- William, T.W.C. and P.J. Antsaklis (1986)/A unifying approach to the decoupling of linear multivariable systems.Int.J.Control 44,181-201.
- Wonham, W.A. and A.S. Morse (1970)/Decoupling and pole assignment in the linear multivariable systems:a geometric approach/SIAM J.Control 8,1-18.
- Wolovich W.A. 1973 /Static Decoupling/ IEEE Trans Aut. Control .
- Wonham, W.A. (1986)/Linear multivariable control: A geometric approach, 3rd ed. Springer
- Technical dictionary-Terms used in Surveying and Mapping in Germany/ Frankfurt,1971,Vol.6,Topography

www.aric.or.kr

www.aerospaceweb.org

<http://www.math.kth.se/optsys/studinfo/5B1822/ch3.ps>.

<http://www.ioc.upc.es/usuarios/xavierpuerta/pdf/DDP.pdf>.

<http://www.math.kth.se>

<http://ideas.repec.org/>

<http://www.europa.eu.int>

Για την συγγραφή της διπλωματικής εργασίας πέρα από τον κειμενογράφο word χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω πακέτα λογισμικού:

- Mathtype 5
- Matlab 7
- Photoshop 7
- SmartDraw 7
- Acrobat PDF Maker 6

Ακολουθεί ένα cd το οποίο περιέχει την διπλωματική εργασία σε μορφή pdf καθώς και τα αρχεία του matlab. Η ενεργοποίηση της εφαρμογής που δημιουργήθηκε στο matlab γίνεται με την εντολή ***decoupling*** στην γραμμή εντολών (command line) του περιβάλλοντος του matlab.

