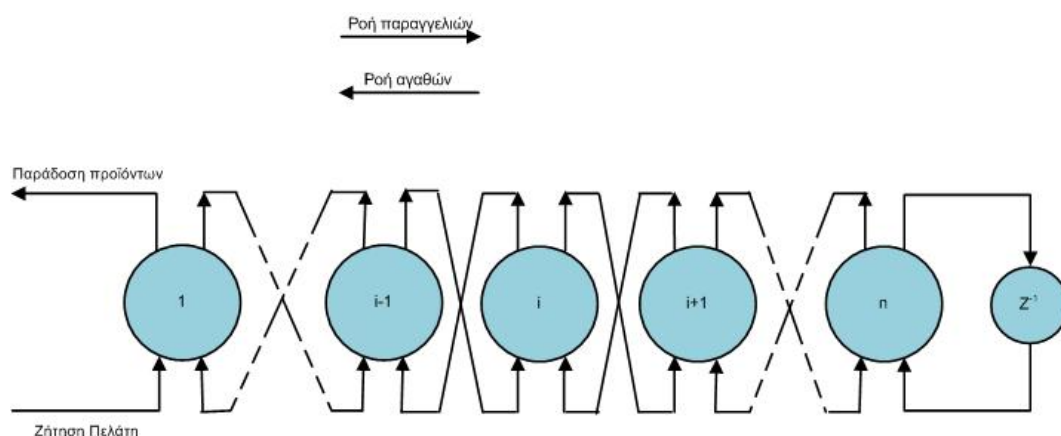


ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



«ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕΙΡΙΑΚΩΝ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΩΝ – ΑΛΥΣΙΔΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΚΛΑΣΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ»



ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΒΑΒΟΥΡΑΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΤΖΙΩΝΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
«ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ & ΕΛΕΓΧΟΥ»
ΤΟΥ Π.Μ.Σ. ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ
Α.Π.Θ.

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010

Στην οικογένειά μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	8
ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	9
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	11
ABSTRACT	13
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	15
2. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ.....	21
3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	25
4. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ BULLWHIP EFFECT.....	31
5. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ, ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ, ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ BULLWHIP EFFECT (ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΕΝΙΣΧΥΣΗΣ ΤΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ)	34
5.1. ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΕΝΑΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΣ ΚΟΜΒΟΣ ΚΑΙ ΕΝΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΣ ΕΛΕΓΚΤΗΣ (P-CONTROLLER)	34
5.2. ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΕΝΑΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΣ ΚΟΜΒΟΣ ΚΑΙ ΕΝΑΣ ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ (PI-CONTROLLER).....	40
5.3. ΤΡΙΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΚΑΙ ΔΥΟ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΙ ΕΛΕΓΚΤΕΣ (P-P- CONTROLLER)	46
5.4. ΤΕΤΑΡΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΚΑΙ ΔΥΟ ΕΛΕΓΚΤΕΣ, ΕΝΑΣ ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΚΑΙ ΕΝΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΣ ΕΛΕΓΚΤΗΣ (PI-P-CONTROLLER)	53

5.5. ΠΕΜΠΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΚΑΙ ΔΥΟ ΕΛΕΓΚΤΕΣ, ΕΝΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΣ ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΚΑΙ ΕΝΑΣ ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ (P-PI-CONTROLLER)	59
6. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ.....	65
6.1. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ	65
6.2. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ	69
6.3. ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΤΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΜΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ	73
6.3.1. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΕΝΑΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟ ΚΟΜΒΟ ΚΑΙ ΕΝΑΝ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΕΛΕΓΚΤΗ (P-CONTROLLER).....	73
6.3.1.1. Ελεγχιμότητα (p-controller)	74
6.3.1.2. Παρατηρησιμότητα (p-controller)	75
6.3.2. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΕΝΑΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟ ΚΟΜΒΟ ΚΑΙ ΕΝΑΝ ΕΛΕΓΚΤΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ (PI-CONTROLLER)	77
6.3.2.1. Ελεγχιμότητα (pi-controller).....	78
6.3.2.2. Παρατηρησιμότητα (pi-controller)	79
6.3.3. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ ΚΑΙ ΔΥΟ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥΣ ΕΛΕΓΚΤΕΣ (P-P- CONTROLLER)	81
6.3.3.1. Ελεγχιμότητα (p-p-controller)	82
6.3.3.2. Παρατηρησιμότητα (p-p-controller)	84
6.3.4. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ ΚΑΙ ΔΥΟ ΕΛΕΓΚΤΕΣ, ΕΝΑΝ ΕΛΕΓΚΤΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΚΑΙ ΕΝΑΝ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΕΛΕΓΚΤΗ (PI-P-CONTROLLER).....	86
6.3.4.1. Ελεγχιμότητα (pi-p-controller).....	87
6.3.4.2. Παρατηρησιμότητα (pi-p-controller)	89
6.3.5. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ ΚΑΙ ΔΥΟ ΕΛΕΓΚΤΕΣ, ΕΝΑΝ	

ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΕΛΕΓΚΤΗ ΚΑΙ ΕΝΑΝ ΕΛΕΓΚΤΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ- ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ (P-PI-CONTROLLER).....	91
6.3.5.1. Ελεγχιμότητα (p-pi-controller).....	92
6.3.5.2. Παρατηρησιμότητα (p-pi-controller)	94
7. ΑΝΑΛΥΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΓΕΙΤΟΝΙΚΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΣΕΙΡΙΑΚΗ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗ ΑΛΥΣΙΔΑ.....	97
7.1. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ-ΑΛΥΣΙΔΑΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥΣ ΕΛΕΓΚΤΕΣ (P-P-CONTROLLER), ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΔΙΑΜΟΙΡΑΣΗΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ.....	98
7.2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	114
7.2.1. Παράδειγμα 1	114
7.2.2. Παράδειγμα 2	116
7.2.3. Παράδειγμα 3	119
7.2.4. Παράδειγμα 4	122
7.2.5. Παράδειγμα 5	124
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	127
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	130

Λίστα πινάκων:

- Πίνακας 7.1** Συνοπτικά αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής σελ 115
- Πίνακας 7.2** Συνοπτικά αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής, σελ 117
μετά από διπλασιασμό του μ και του σ , $\mu = 20$
και $\sigma = 2$
- Πίνακας 7.3** Συνοπτικά αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής, σελ 119
ύστερα από αύξηση του μ κατά 5 μονάδες,
 $\mu = 15$ και $\sigma = 1$
- Πίνακας 7.4** Συνοπτικά αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής, σελ 122
ύστερα από αύξηση του σ κατά 5 μονάδες,
 $\mu = 10$ και $\sigma = 6$
- Πίνακας 7.5** Συνοπτικά αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής, σελ 125
ύστερα από αύξηση του δ , $\delta = 0.10$

Λίστα σχημάτων:

Σχήμα 1.1	Σειριακή εφοδιαστική αλυσίδα με n ενδιάμεσους κόμβους	σελ 17
Σχήμα 4.1	Φαινόμενο ενίσχυσης ζήτησης εφοδιαστικής αλυσίδας P-P Controller και περιοχές μείωσης και ενίσχυσης της ζήτησης	σελ 32
Σχήμα 4.2	Όριο μεταξύ των περιοχών μείωσης και ενίσχυσης της ζήτησης ως συνάρτηση της παραμέτρου α	σελ 33
Σχήμα 5.1	Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν ενδιάμεσο κόμβο και έναν αναλογικό ελεγκτή (p-controller)	σελ 35
Σχήμα 5.2	Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν ενδιάμεσο κόμβο και έναν ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (pi-controller)	σελ 40
Σχήμα 5.3	Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο αναλογικούς ελεγκτές (p-p-controller)	σελ 46
Σχήμα 5.4	Φαινόμενο ενίσχυσης ζήτησης εφοδιαστικής αλυσίδας P-P Controller	σελ 52
Σχήμα 5.5	Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους, έναν ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης και έναν αναλογικό ελεγκτή (pi-p-controller)	σελ 53
Σχήμα 5.6	Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους, έναν αναλογικό ελεγκτή και έναν ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (p-pi-controller)	σελ 59
Σχήμα 7.1	Μιγαδικός αριθμός στο επίπεδο	σελ 107
Σχήμα 7.2	Όριο μεταξύ περιοχών μείωσης και ενίσχυσης	σελ 111
Σχήμα 7.3	Βέλτιστη συνάρτηση $k_2^* = f^*(k_1)$	σελ 112
Σχήμα 7.4	Βέλτιστη συνάρτηση $k_2^* = f^*(k_1)$ και όριο μεταξύ περιοχών μείωσης και ενίσχυσης	σελ 113
Σχήμα 7.5	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του IP_2	σελ 115
Σχήμα 7.6	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $IP_2 - O_{1,2}$	σελ 116

- Σχήμα 7.7** Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του IP_2 , μετά από διπλασιασμό του μ και του σ , $\mu=20$ και $\sigma=2$ σελ 117
- Σχήμα 7.8** Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $IP_2 - O_{1,2}$, μετά από διπλασιασμό του μ και του σ , $\mu=20$ και $\sigma=2$ σελ 118
- Σχήμα 7.9** Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του IP_2 , μετά από αύξηση του μ κατά 5, $\mu=15$ και $\sigma=1$ σελ 120
- Σχήμα 7.10** Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $IP_2 - O_{1,2}$, μετά από αύξηση του μ κατά 5, $\mu=15$ και $\sigma=1$ σελ 121
- Σχήμα 7.11** Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του IP_2 , μετά από αύξηση του σ κατά 5, $\mu=10$ και $\sigma=6$ σελ 123
- Σχήμα 7.12** Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $IP_2 - O_{1,2}$, μετά από αύξηση του σ κατά 5, $\mu=10$ και $\sigma=6$ σελ 124
- Σχήμα 7.13** Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του IP_2 , μετά από αύξηση του δ , $\delta=0.10$ σελ 125
- Σχήμα 7.14** Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $IP_2 - O_{1,2}$, μετά από αύξηση του δ , $\delta=0.10$ σελ 126

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η σειριακή εφοδιαστική-αλυσίδα που παρουσιάζεται σε αυτήν την διατριβή περιλαμβάνει δύο ή τρεις κόμβους (συμπεριλαμβανομένου του κατασκευαστή). Αρχικά, σχεδιάζουμε ένα κατάλληλο σύστημα ελέγχου για το μοντέλο της εφοδιαστικής-αλυσίδας, χρησιμοποιώντας αναλογικούς και ολοκληρωτικούς ελεγκτές. Κατόπιν, μεταφέρουμε το μοντέλο στον αντίστοιχο χώρο κατάστασης (πίνακες A, B, C και D) και αυτό μας επιτρέπει να παράγουμε τον πίνακα συνδιακύμανσης, ο οποίος προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης Lyapunov $P - APA' - BB' = 0$. Ο πίνακας συνδιακύμανσης μας βοηθά να ανακαλύψουμε την εξίσωση και τους περιορισμούς για το bullwhip effect («φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης»).

Σε αυτήν την διατριβή ερευνάμε επίσης την ελεγκσιμότητα και την παρατηρησιμότητα του μοντέλου της εφοδιαστικής αλυσίδας. Η ελεγκσιμότητα και η παρατηρησιμότητα μας βοηθούν να ερευνήσουμε καλύτερα τη δυναμική συμπεριφορά των συστημάτων ελέγχου και μας παρέχουν ένα πρόσθετο εργαλείο ώστε να μελετήσουμε τη γενική συμπεριφορά του συστήματος.

Επιπλέον, βρίσκουμε μέτρα θέσης και μέτρα διασποράς - πιο συγκεκριμένα το μέσο όρο και τη διασπορά - για τις μεταβλητές του μοντέλου του χώρου των καταστάσεων. Τέλος, μελετώνται κατάλληλες συνθήκες συνεργασίας μεταξύ γειτονικών κόμβων - δημοσιοποίηση του αναλογικού συντελεστή k_1 (του λιανέμπορα) στο διανομέα - επιδιώκοντας τη βέλτιστη επιλογή του αναλογικού συντελεστή k_2 του διανομέα $k_2 = f(k_1)$, η οποία ελαχιστοποιεί τα κόστη του αποθέματός του (τη διασπορά και το μέσο όρο του διανομέα) και αποδεικνύουμε ότι αυτή η "εγωιστική" πολιτική από το διανομέα δεν μπορεί να προκαλέσει bullwhip effect. Γενικά, αυτή η μέθοδος, ασχολείται με τη λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης για ένα μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας τριών κόμβων (με έναν αναλογικό ελεγκτή σε κάθε ενδιάμεσο κόμβο) εξετάζοντας την ελαχιστοποίηση του αποθέματος υποκείμενη σε έναν πιθανολογικό περιορισμό ως προς την ζήτηση από τα κατώτερα στρώματα.

Λέξεις κλειδιά: εφοδιαστική-αλυσίδα, bullwhip effect («φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης»), μοντέλο στο χώρο των καταστάσεων, πίνακας συνδιακύμανσης, ελεγκσιμότητα, παρατηρησιμότητα, βελτιστοποίηση, διαμοίραση – πληροφορίας

ABSTRACT

The series supply chain presented in this dissertation includes two or three nodes (including the manufacturer). Initially, we design an appropriate control system for the supply-chain model, using proportional and integral controllers. Then, we derive the corresponding state space (A, B, C and D matrices) and this allows us to derive the covariance matrix, which is given by the solution of the discrete Lyapunov equation $P - APA' - BB' = 0$. The covariance matrix helps us to find out the equation and constraints for the bullwhip effect (demand amplification).

In this dissertation we also investigate the controllability and the observability of the supply-chain model. Controllability and observability help us to investigate better the control system dynamics and provide an additional tool to study the overall state behaviour.

Moreover, we find location measures and measures of variation - more specifically the average and the variance - for the state variables of the state space model. Finally, information-sharing techniques are studied between neighbouring participants - disclosure of policy parameter k_1 (of the retailer) to the distributor - seeking the optimal choice for the parameter k_2 of the distributor, $k_2 = f(k_1)$, which minimizes his inventory costs (the variance and the average of the distributor) and we prove that this "selfish" policy by the distributor can not give rise to the bullwhip effect. This, in general, deals with the solution of an optimization problem for a three-node supply-chain model (with a proportional controller in each intermediate node) involving the minimization of inventory subject to a probabilistic constraint on downstream demand.

Keywords: supply-chain, bullwhip effect (demand amplification), state-space model, covariance matrix, controllability, observability, optimisation, information-sharing

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εφοδιαστική αλυσίδα είναι η διαδρομή του προϊόντος από την παραγωγή μέχρι την κατανάλωση. Αποτελείται από μονάδες παραγωγής και αποθήκευσης που συνδέονται μεταξύ τους με διαύλους μεταφοράς και αποσκοπεί στον έλεγχο, την υποστήριξη και την πρόβλεψη της ροής της ζήτησης και της προσφοράς.

Στις μέρες μας μια καλά στημένη εφοδιαστική αλυσίδα με σωστή διαχείριση μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά κέρδη για την επιχείρηση, ενώ αντιθέτως ένα λάθος ή μία παράλειψη στην εφοδιαστική αλυσίδα είναι πολύ πιθανό να οδηγήσει στην καταστροφή και στα πρόθυρα της χρεοκοπίας. Οι εταιρείες σήμερα επενδύουν μεγάλα χρηματικά ποσά στον σχεδιασμό και τη διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας, καθώς από αυτήν εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό, η επίτευξη ή όχι των στόχων τους.

Μερικά παραδείγματα γνωστών εταιρειών απλά επιβεβαιώνουν το γεγονός ότι η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας παίζει πλέον τον κυρίαρχο ρόλο στο παιχνίδι του ανταγωνισμού. Η Siemens CT, εταιρεία κατασκευής αξονικών τομογράφων μεγάλης αξίας, αναδιοργανώνοντας την εφοδιαστική της αλυσίδα κατάφερε να μειώσει αποτελεσματικά και θεαματικά τον χρόνο παράδοσης των εμπορευμάτων της καταργώντας όλους τους προσωρινούς αποθηκευτικούς χώρους. Η Gillette, το 2000, δημιουργώντας μια ομάδα για τη διαχείριση της αλυσίδας οδηγήθηκε σε εξοικονόμηση της τάξης των 90 εκατομμυρίων δολαρίων, και σε κέρδη τα οποία απολαμβάνει ακόμα και σήμερα. Η Chrysler είχε φτάσει πολύ νωρίτερα από το 2008 στα πρόθυρα της χρεοκοπίας. Το 1980 βρισκόταν στο χείλος του γκρεμού, αλλά δημιουργώντας και αυτή μια ομάδα για τη διαχείριση της αλυσίδας κατάφερε να εξοικονομήσει τεράστια ποσά και κατά συνέπεια να αποσοβήσει την καταστροφή. Μία άλλη εταιρεία που έφτασε μια ανάσα από την πτώχευση ήταν η Apple Computers, αλλά κατάφερε να ξεφύγει από τον κίνδυνο χάρη στις δραστικές αλλαγές που έκανε στην εφοδιαστική της αλυσίδα. Υιοθέτησε τεχνικές παραγωγής «τη στιγμή που χρειάζεται», αναθεώρησε το σύστημα πρόβλεψης πωλήσεων και ελαχιστοποίησε τα αποθέματα. Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η εταιρία Dell, η οποία ουσιαστικά

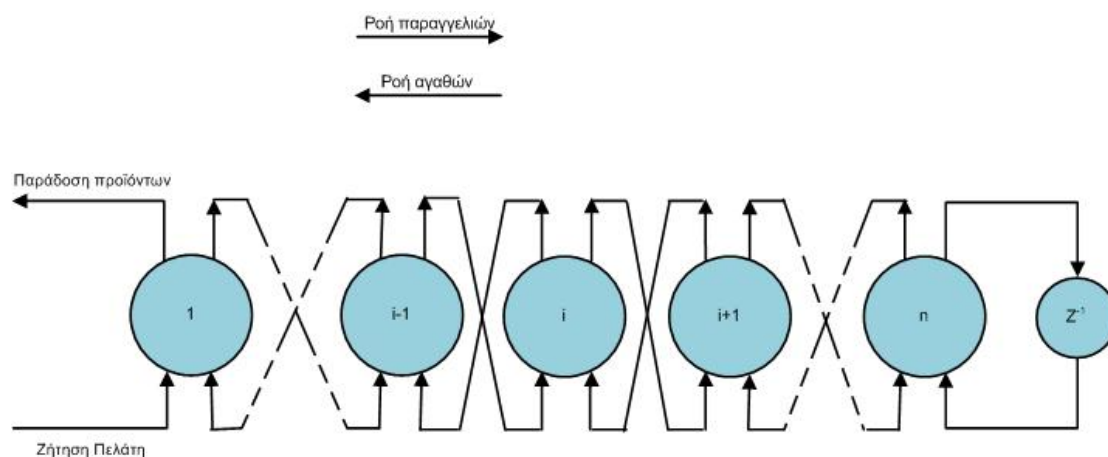
μεταμόρφωσε τον κλάδο των προσωπικών υπολογιστών, αλλάζοντας σχεδόν εξολοκλήρου την εφοδιαστική της αλυσίδα, κατασκευάζοντας κατά παραγγελία τον κάθε υπολογιστή. Το χαρακτηριστικότερο παράδειγμα όμως είναι η εταιρία Nike, η οποία κυριαρχεί στην αγορά των αθλητικών προϊόντων, χωρίς καν να διαθέτει ένα δικό της εργοστάσιο, διαθέτοντας απλά ένα πρωτοποριακό πρόγραμμα διαχείρισης της εφοδιαστικής της αλυσίδας.

Ένα άλλο γεγονός που τονίζει τη σημασία της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι ότι στην Αμερική οι εταιρείες ξοδεύουν το 10% περίπου του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος (ΑΕΠ) της χώρας στις εφοδιαστικές τους αλυσίδες. Περίπου το ένα τρίτο αυτού του κόστους αφορά την διατήρηση των αποθεμάτων, και το υπόλοιπο τη διακίνηση των εμπορευμάτων, με μικροποσά να μένουν για τα διαχειριστικά έξοδα. Και εδώ πρέπει να σημειωθεί πως όσο μεγάλα και να φαίνονται τα ποσά στο παρελθόν ήταν πολύ μεγαλύτερα. Απλά η μείωση του κόστους οφείλεται στο γεγονός ότι βελτιώθηκε αισθητά ο κλάδος των μεταφορών και μειώθηκε σημαντικά ο όγκος των αποθεμάτων.

Από όλα αυτά τα παραδείγματα και τα γεγονότα γίνεται κατανοητό ότι σήμερα η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι πολύ πιο σημαντική από την ίδια τη βιομηχανική παραγωγή και η συστηματική μελέτη και σωστή αξιοποίησή της αποτελεί κομβικό σημείο για την πορεία της εταιρείας.

Οι επιχειρήσεις, οι οποίες επιθυμούν να αξιοποιήσουν πλεονεκτήματα όπως η ελαχιστοποίηση του κόστους και η μέγιστη ικανοποίηση του πελάτη, αναζητούν με διάφορους τρόπους την κατάλληλη οργάνωση της επιχείρησής τους. Η οργάνωση μιας επιχείρησης βασίζεται στην διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας, η οποία αποτελεί σημαντικό κομμάτι του προβλήματος. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, εφοδιαστική αλυσίδα είναι η αλυσίδα που συνδέει τον πελάτη με τον κατασκευαστή, και μπορεί στο ενδιάμεσο αυτής της σύνδεσης να παρεμβάλλονται κόμβοι (εμπορικοί εταίροι). Στόχος της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι να υποστηρίξει την αδιάλειπτη ροή της ζήτησης, της προσφοράς και της ταμειακής ρευστότητας. Το σημαντικότερο πρόβλημα στην διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι η αντιμετώπιση της πολυπλοκότητας, της μεταβλητότητας, καθώς και η σωστή συνεργασία ανάμεσα στους εμπορικούς εταίρους.

Μια απλή σειριακή εφοδιαστική αλυσίδα είναι ένα σύνολο από κόμβους που συνδέονται με διαύλους μεταφοράς, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα (Σχήμα 1.1).



Σχήμα 1.1: Σειριακή εφοδιαστική αλυσίδα με n ενδιάμεσους κόμβους

Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι η ζήτηση του πελάτη (Customer Demand) αποτελεί την είσοδο στην εφοδιαστική αλυσίδα, ενώ η απόδοση των αγαθών στον πελάτη (Dispatch of goods) είναι η έξοδος της εφοδιαστικής αλυσίδας. Επίσης, παρατηρούμε ότι απεικονίζονται οι ροές της ζήτησης (Information flow – Ροή Πληροφοριών) και της προσφοράς (Products flow – Ροή Αγαθών).

Υπάρχουν διάφορες τεχνικές-πολιτικές για τη διαμόρφωση και τον έλεγχο της εφοδιαστικής αλυσίδας. Ο στόχος της εργασίας αυτής είναι να αναλύσει τις επιδράσεις συγκεκριμένων τεχνικών αναπλήρωσης αποθεμάτων (α) αναλογίας (ελεγκτής αναλογίας *P-controller*) και (β) αναλογίας-ολοκλήρωσης (ελεγκτής αναλογίας-ολοκλήρωσης *PI-controller*), στην σταθερότητα και στην απόδοση μιας σειριακής πολλαπλής εφοδιαστικής αλυσίδας. Μια σύντομη περιγραφή αυτής της διαδικασίας έχει γίνει από τους *Paranagou και Halikia (2006)*.

Σε αντίθεση με τις πιο παραδοσιακές τεχνικές αναπλήρωσης αποθεμάτων που συνήθως χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της εφοδιαστικής αλυσίδας, οι συνεχείς τεχνικές (δηλαδή τεχνικές με *P-controller* ή με *PI-controller*) έχουν αναπτυχθεί πρόσφατα και είναι φανερά εμπνευσμένες από τον τομέα της κλασικής εφαρμοσμένης μηχανικής και τον έλεγχο των

διεργασιών σε αυτή (Lin, Wong, Jang, Shieh and Chu 2004 — Dejonckheere, Disney, Lambrecht and Towill 2003 — E. Perea-Lopez, I.E. Grossmann, B.E. Ydstie, T. Tahmassebi 2001). Στις τεχνικές αυτές που θα εξετάσουμε, θεωρείται ότι η ζήτηση αγαθών σε κάθε κόμβο είναι συνεχής, και δεν ενεργοποιείται από κάποιο γεγονός (π.χ. όταν το απόθεμα σε αγαθά πέφτει κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο). Παρόλο που σε μερικές τεχνικές συνεχούς ζήτησης αγαθών είναι πιθανόν να υπάρχουν πρακτικοί περιορισμοί, αυτές οι τεχνικές μπορεί να προσφέρουν επιπλέον ελαστικότητα (π.χ. εξομαλύνοντας τις ροές), γεγονός το οποίο μπορεί να βελτιώσει σημαντικά την σταθερότητα και τις επιδόσεις μιας εφοδιαστικής αλυσίδας. Στην πραγματικότητα, οι τεχνικές συνεχούς ζήτησης αγαθών εφαρμόζονται σε περιπτώσεις όπου τα έξοδα αποθήκευσης εξαιτίας της υπερβολικής ζήτησης δεν είναι σημαντικά.

Η σταθερότητα σε μια εφοδιαστική αλυσίδα συχνά ποσοτικοποιείται μέσω της έννοιας, «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (bullwhip effect). Το φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης είναι ένα από τα πιο συνηθισμένα φαινόμενα, που χαρακτηρίζουν την αστάθεια σε μια εφοδιαστική αλυσίδα. Όπως αναφέρει ο Forrester (1961) και ο Sterman (1989), το φαινόμενο αυτό σχετίζεται με την αυξημένη ζήτηση της ποσότητας των αγαθών στους προς τα πάνω κόμβους της αλυσίδας. Ουσιαστικά το bullwhip effect είναι η ενίσχυση των ευρών των διαταραχών της ζήτησης από την ουρά στα προς τα πάνω επίπεδα της εφοδιαστικής αλυσίδας. Οι συγγραφείς Simchi-Levi D., Kaminsky P., Simchi-Levi E. (2003) τονίζουν ότι η ενίσχυση της ζήτησης μπορεί να περιορίσει σημαντικά την ομαλή λειτουργία της αλυσίδας και να οδηγήσει σε υψηλές δαπάνες που προκύπτουν εξαιτίας των επιπτώσεων της στον προγραμματισμό της παραγωγής, σε υψηλά επίπεδα αποθηκευτικού κόστους, σε φτωχή εξυπηρέτηση των πελατών, κ.τ.λ. Το «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» έχει απασχολήσει τους ειδικούς και έχει αναλυθεί διεξοδικά από τη σύγχρονη βιβλιογραφία, με αποτέλεσμα να αναγνωριστούν πολλοί παράγοντες που συνεργάζονται για την εμφάνισή του. Σε αυτούς σύμφωνα με τους J. Dejonckheere, S.M. Disney, M.R. Lambrecht and D.R. Towill (2003), E. Perea-Lopez, I.E. Grossmann, B.E. Ydstie, T. Tahmassebi (2001) και H.L. Lee, V. Padmanabhan, and S. Whang (1997), περιλαμβάνεται ο ελλιπής συντονισμός, οι επιθετικές πολιτικές πρόβλεψης της ζήτησης για ανεφοδιασμό των αποθεμάτων και οι αβέβαιοι χρόνοι προπορείας (χρόνοι

που απαιτούνται από τη στιγμή που αποστέλλεται τα προϊόντα μέχρι την παραλαβή τους από τους γειτονικούς κόμβους μιας αλυσίδας). Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι αυτοί οι παράγοντες ισχύουν γενικά για όλες τις πολιτικές παραγγελίας, και όχι μόνο για τις αναλογικές πολιτικές που θα μελετήσουμε.

Η κλασική θεωρία ελέγχου, σύμφωνα με τον *D.R. Towill (1981)*, υποστηρίζει ένα ευρύ φάσμα ιδιοτήτων και μετρήσεων για τον κατάλληλο σχεδιασμό συστημάτων, όπως η σταθερότητα, η δυνατότητα εντοπισμού και η απόρριψη θορύβου και έχει αναπτύξει διάφορες μεθόδους για την περιγραφή και την ανάλυση συστημάτων. Παραδείγματα τέτοιων μεθόδων είναι, η προσομοίωση, η ανάλυση του πεδίου συχνότητας μέσω συναρτήσεων μεταφοράς, η ανάλυση της χρονικού πεδίου μέσω διαφορικών εξισώσεων και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν την αναπαράσταση στο χώρο των καταστάσεων. Οι *Chandra S. Lalwani, Stephen M. Disney, Denis R. Towill (2006)* παρουσιάζουν μία μέθοδο για συστήματα διακριτού χρόνου, σύμφωνα με την οποία από μοντέλα που έχουν ήδη αναπτυχθεί στο πεδίο z , μπορούμε να αντλήσουμε αναπαραστάσεις του χώρου των καταστάσεων, οι οποίες είναι και ελέγξιμες και παρατηρήσιμες. Οι *Stefani R.T., B. Savant, C.J. Hostetter, G.H. (2002)*, παρουσίασαν μια μεθοδολογία για την παραγωγή ελέγξιμων και παρατηρήσιμων αναπαραστάσεων στο χώρο των καταστάσεων από τις συναρτήσεις μεταφοράς του συστήματος. Στη συνέχεια αυτή η προσέγγιση του χώρου των καταστάσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιορίσουμε το όριο σταθερότητας για τις παραγγελίες στο κάθε σύστημα με βάση τις ιδιοτιμές του πίνακα των καταστάσεων.

Στην εργασία αυτή θα παρουσιαστούν σαφείς μέθοδοι για την ανάλυση και πρόβλεψη του φαινομένου της ενίσχυσης της ζήτησης μέσω της ανάλυσης των τιμών συνδιακύμανσης των ελεγκτών αναλογίας και αναλογίας-ολοκλήρωσης των σχημάτων αυτομάτου ελέγχου που περιγράφουν τα μοντέλα των εφοδιαστικών αλυσίδων με αυθαίρετη πολυπλοκότητα. Επιπλέον θα μελετήσουμε θέματα που σχετίζονται με την απόδοση της εφοδιαστικής αλυσίδας με τη χρήση τέτοιων σχημάτων, και τα δυναμικά πλεονεκτήματα της διαμοιραζόμενης πληροφορίας. Τα πλεονεκτήματα της χρησιμοποίησης μίας *state-space* προσέγγισης (και όχι μιας συνάρτησης μεταφοράς) προκύπτουν κυρίως από την καταλληλότητά της για την επαναλαμβανόμενη ενημέρωση του πίνακα συνδιακύμανσης συστημάτων με πολλούς κόμβους σαν αυτά που

θα ασχοληθούμε. Επίσης η ανάλυση συνδιακύμανσης παράγει σημαντικές πληροφορίες για τη συνολική σταθερότητα και απόδοση της αλυσίδας, πράγμα το οποίο δεν είναι αμέσως διαθέσιμο από άλλες μορφές ανάλυσης.

Ένα άλλο επιπρόσθετο χαρακτηριστικό είναι ότι το μοντέλο οδηγείται από μια πιθανολογική (στοχαστική) διαδικασία που αντιπροσωπεύει τη ζήτηση των πελατών, η οποία αρχικά θεωρείται ότι είναι «λευκός θόρυβος», δηλαδή μια χρονική σειρά ασύνδετων κανονικά διανεμημένων τυχαίων μεταβλητών. Σε περίπτωση που θέλουμε μια πιο ρεαλιστική απεικόνιση της ζήτησης των πελατών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια φιλτραρισμένη έκδοση του παραπάνω σήματος.

Αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι να αντλήσουμε συμπεράσματα βασισμένα σε ένα γενικό μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας, το οποίο είναι εύκολο να αναλυθεί ποσοτικά, αλλά την ίδια στιγμή είναι και αρκετά γενικό για να βάλει τα ουσιαστικά ζητήματα υπό έρευνα, και αυτά είναι: α) Η ανάλυση του «Φαινομένου της ενίσχυσης της ζήτησης» σε σειριακές, με πολλούς κόμβους αλυσίδες, που προκύπτει ειδικά λόγω των επιθετικών πολιτικών παραγγελίας, β) Μελέτη του μοντέλου ως προς την ελεγχσιμότητα και την παρατηρησιμότητα, ώστε να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τη γενική συμπεριφορά του συστήματος, γ) Θέματα βελτιστοποίησης με τη χρήση διαμοιραζόμενων πληροφοριών και μελέτη των επιπτώσεων τους στη συνολική σταθερότητα και απόδοση της αλυσίδας (π.χ. επίπεδα ικανοποίησης των πελατών). Κατά συνέπεια, δεν εξετάζουμε κατηγορηματικά τους πολλαπλούς προμηθευτές είτε στην προς τα πάνω είτε στην προς τα κάτω πλευρά ενός ιδιαίτερου κόμβου και η ροή των παραγγελιών και των προϊόντων μέσω ενός συγκεκριμένου κόμβου ερμηνεύεται με συνολικούς όρους (δηλ. όπως προκύπτουν από πολλαπλές πηγές).

2. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ

Μια απλή σειριακή εφοδιαστική αλυσίδα με πολλαπλά στάδια παρουσιάζεται στο *σχήμα 1.1*. Υπάρχουν n μεμονωμένα στάδια ανάμεσα στον Πελάτη και τον Κατασκευαστή και σημειώνουμε με τον δείκτη i τους ενδιάμεσους προμηθευτές $i \geq 1$. Επίσης στο *σχήμα 1.1* μπορούμε να δούμε τη ροή των αγαθών και των πληροφοριών (παραγγελίες) διαμέσου της εφοδιαστικής αλυσίδας. Το $I_i(t)$ είναι το επίπεδο αποθέματος στον κόμβο i τη χρονική στιγμή t . Το $Y_{i,i-1}(t)$ δείχνει το ποσό των εμπορευμάτων που παραδίδονται στον κόμβο $i-1$ από τον προς τα πάνω κόμβο i στη χρονική στιγμή t . Επιπλέον εισάγουμε μια χρονική καθυστέρηση L , η οποία είναι η χρονική ανοχή που απαιτείται για να αποστέλλονται τα αγαθά στον προς τα κάτω κόμβο (δηλαδή τα αγαθά που αποστέλλονται στο χρόνο t παραδίδονται στο χρόνο $t+L$). Για περισσότερη ανάλυση υποθέτουμε ότι το $L=1$. Επιπλέον θεωρούμε το δίκτυο της εφοδιαστικής αλυσίδας σαν ένα αποκεντρωτικό σύστημα ελέγχου, όπου δεν υπάρχει κανένας κύριος επόπτης και οι αποφάσεις παίρνονται τοπικά σε κάθε κόμβο.

Η εξισορρόπηση του αποθέματος $I_i(t)$ του κόμβου i στο χρονικό βήμα t δίνει την παρακάτω εξίσωση:

$$I_i(t) = I_i(t-1) + Y_{i+1,i}(t-L) - Y_{i,i-1}(t) \quad (1)$$

όπου το $I_i(t-1)$ είναι το επίπεδο αποθέματος στο κόμβο i στο χρονικό βήμα $t-1$ και το $Y_{i+1,i}(t-L)$ αναπαριστά τα προϊόντα που αποστέλλονται από τον προς τα πάνω κόμβο $i+1$ στον κόμβο i , τα οποία υποθέτουμε ότι φτάνουν με μια χρονική καθυστέρηση από L χρονικά βήματα.

Παρόλο που το επίπεδο του αποθέματος είναι μια μεταβλητή κλειδί για την λειτουργία της εφοδιαστικής αλυσίδας, σε κάθε κόμβο i μπορούμε να δούμε καλύτερα τις αλλαγές στο επίπεδο αποθέματος στο χρόνο t χρησιμοποιώντας τη θέση αποθέματος, $IP_i(t)$, η οποία δίνεται από το τύπο:

$$IP_i(t) = IP_i(t-1) + Y_{i+1,i}(t) - Y_{i,i-1}(t) \quad (2)$$

Επιπλέον το $O_{i,i+1}(t)$ δείχνει το ποσό των παραγγελιών που γίνονται από τον κόμβο i στο κόμβο $i+1$, και δίνεται από το τύπο:

$$O_{i,i+1}(t) = k_i(SP_i - IP_i(t)) \quad (3)$$

όπου το SP_i αναπαριστά το σημείο ρύθμισης (στόχος ο οποίος θεωρείται σταθερά) και το k_i είναι ο αντίστοιχος παράγοντας (συντελεστής) κέρδους ανεφοδιασμού του αποθέματος.

Τέλος, θα πρέπει να εισάγουμε μια τελευταία εξίσωση για τη μεταβλητή $O_i^*(t)$. Η μεταβλητή αυτή περιγράφει την ποσότητα της παραγγελίας προϊόντων ενός κόμβου i την χρονική στιγμή t που θα επεξεργαστεί την χρονική στιγμή $t+1$. Παρόλο που υποθέτουμε ότι οι πληροφορίες της παραγγελίας μεταδίδονται μεταξύ των κόμβων ακαριαία, μια εντολή παραγγελίας την χρονική στιγμή t θα επεξεργαστεί την χρονική στιγμή $t+1$, εξαιτίας καθυστέρησης στον διαχειριστή. Συνεπώς, η έννοια του επιπέδου παραγγελίας για κάθε κόμβο i την χρονική στιγμή t μετριέται ως η ποσότητα της παραγγελίας που θα επεξεργαστεί την χρονική στιγμή $t+1$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μια παραγγελία μπορεί να προστεθεί στην επόμενη χρονική στιγμή σε περίπτωση που δεν υλοποιηθεί η παραγγελία. Αυτό μπορούμε να το υποθέσουμε, καθώς κάθε πελάτης έχει έναν και μόνο προμηθευτή σε μια απλή σειριακή εφοδιαστική αλυσίδα. Η εξίσωση της μεταβλητής $O_i^*(t)$ για ένα κόμβο i την χρονική στιγμή t είναι το άθροισμα της ποσότητας της παραγγελίας, που μόλις έγινε, και οποιασδήποτε άλλης μη υλοποιημένης παραγγελίας της προηγούμενης χρονικής στιγμής.

$$O_i^*(t) = O_{j,i}(t) + O_i^*(t-1) - Y_{i,j}(t)$$

Τέλος, θα πρέπει να εξηγήσουμε λεπτομερώς τη μεταβλητή $Y_{i,j}(t)$, που είδαμε προηγουμένως. Για αυτήν τη μεταβλητή ισχύει η παρακάτω εξίσωση:

$$Y_{i,i-1}(t) = \begin{cases} 0 & O_j^*(t-1) \leq 0 \\ O_j^*(t-1) & 0 \leq O_j^*(t-1) \leq I_j(t-1) \\ I_j(t-1) & 0 \leq I_j(t-1) \leq O_j^*(t-1) \end{cases}$$

Για σκοπούς της περαιτέρω ανάλυσης θεωρείται ότι $Y_{i,i-1}(t) = O_i^*(t-1)$. Αυτό υποδηλώνει ότι το ποσό των αγαθών που αποστέλλονται από τον κόμβο i στον προς τα κάτω κόμβο $i-1$ στο χρόνο t είναι το ποσό των παραγγελιών που γίνονται στον κόμβο i στο χρόνο $t-1$. Αυτό είναι ουσιαστικά μια γραμμική υπόθεση δεδομένου ότι υποθέτει πως υπάρχει πάντα αρκετό απόθεμα για να ικανοποιήσει την προς τα κάτω ζήτηση.

Οι παραπάνω εξισώσεις για τον i κόμβο μπορούν να γραφτούν πιο συμπαγώς σε μορφή χώρου κατάστασης επιλέγοντας το $IP_i(t-1)$ και το $Y_{i,i-1}(t)$ ως μεταβλητές χώρου κατάστασης. Οι μεταβλητές εισόδου και εξόδου του κόμβου i επιλέγονται να είναι οι $(O_{i-1,i}(t), Y_{i+1,i}(t))$ και $(Y_{i,i-1}(t), O_{i,i+1}(t))$ αντιστοίχως.

Με αυτή την επιλογή, το μοντέλο χώρου κατάστασης του κόμβου i μπορεί να γραφτεί πιο συμπαγώς ως εξής:

$$\begin{pmatrix} IP_i(t) \\ Y_{i,i-1}(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} IP_i(t-1) \\ Y_{i,i-1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{i-1,i}(t) \\ Y_{i+1,i}(t) \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} Y_{i,i-1}(t) \\ O_{i,i+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_i & k_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} IP_i(t-1) \\ Y_{i,i-1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{i-1,i}(t) \\ Y_{i+1,i}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_i \end{pmatrix} SP_i$$

Το ισοδύναμο μοντέλο χώρου κατάστασης του κατασκευαστή (κόμβος $n+1$) είναι:

$$x_\varphi(t+1) = A_\varphi x_\varphi(t) + B_\varphi O_{n,n+1}(t)$$

$$Y_{n+1,n}(t) = C_\varphi x_\varphi(t)$$

όπου με x_φ συμβολίζουμε την κατάσταση του κόμβου $n+1$. Θα υποθέσουμε ότι ο κατασκευαστής ενεργεί με μια ελάχιστη χρονική καθυστέρηση, δηλαδή είναι ικανός να συναντήσει τις παραγγελίες που του γίνονται με μια καθυστέρηση ενός χρονικού βήματος. Συνεπώς, έχουμε απλά ότι $Y_{n+1,n}(t) = O_{n,n+1}(t-1)$ και μπορούμε να επιλέξουμε το $A_\varphi = 0$ και $B_\varphi = C_\varphi = 1$.

Η πραγματοποίηση του χώρου κατάστασης όλης της εφοδιαστικής αλυσίδας ($n+1$) μπορεί να επιτευχθεί δημιουργώντας το συνολικό χώρο κατάστασης όλων των $n+1$ κόμβων. Σαν παράδειγμα η πραγματοποίηση του χώρου κατάστασης μιας αλυσίδας τριών κόμβων δίνεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} IP_1(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ IP_2(t) \\ Y_{2,1}(t+1) \\ Y_{3,2}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SP_1 \\ SP_2 \end{bmatrix}$$

το οποίο είναι της μορφής $x(t+1) = Ax(t) + Be(t) + F(SP)$. Εδώ να σημειωθεί ότι για μια αλυσίδα με $m+1$ κόμβους (περιλαμβάνοντας και τον τελικό κόμβο του κατασκευαστή) οι διαστάσεις των πινάκων A, B και F είναι $(2m+1) \times (2m+1)$, $(2m+1) \times 1$ και $(2m+1) \times m$ αντίστοιχα. Πραγματοποιούμε την εξάρτηση αυτή παρακάτω αναλυτικά (όπου έχουμε μοντέλα με ποικίλους αριθμούς κόμβων) γράφοντας τον πίνακα κατάστασης-μετάβασης ως $A = A_{2m+1}$.

3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Σε αυτό το κομμάτι θα περιγράψουμε μια μέθοδο για τον υπολογισμό του πίνακα συνδιακύμανσης του διανύσματος κατάστασης $x(t)$ του συνολικού μοντέλου που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο χρησιμοποιώντας συμβολικούς υπολογισμούς. Στην εφαρμογή μας, οι συμβολικοί αυτοί υπολογισμοί είναι απαραίτητοι από τη στιγμή που επιθυμούμε να επιτύχουμε τη λύση, ως συνάρτηση των παραμέτρων κέρδους $\{k_i\}$, οι οποίες στη συνέχεια θα μας βοηθήσουν στην έρευνα του «Φαινομένου της ενίσχυσης της ζήτησης» χρησιμοποιώντας το μοντέλο μας. Πρώτα θα παρουσιάσουμε μια γενική μέθοδο λύσης βασισμένη στα παράγωγα του πίνακα Kronecker και σε λειτουργίες διανυσμάτων (*Horn and Johnson 1994*) στη συνέχεια, η ειδική δομή του χώρου κατάστασης προτύπου αξιοποιείται για να παράγει μια απλή επαναλαμβανόμενη διαδικασία λύσης η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε μοντέλα με αυθαίρετα υψηλή πολυπλοκότητα.

Θεωρώντας το LTI μοντέλο χώρου κατάστασης διακριτού χρόνου: $x(t+1) = Ax(t) + Be(t)$, $y(t) = Cx(t)$, όπου το $\{e(t)\}$ δηλώνει μια ακολουθία διανύσματος που αναπαριστά λευκό θόρυβο μοναδιαίας έντασης, που αναπαριστά τη ζήτηση του πελάτη, που υποτίθεται ότι είχε εφαρμοστεί ως εισαγωγή στο μοντέλο από το άπειρο παρελθόν. Μετά υποθέτουμε ότι ο A είναι ασυμπτωτικά σταθερός (όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν συντελεστή <1), η (σταθερής κατάστασης συνδιακύμανση του διανύσματος κατάστασης $x(t)$, $E[x(t)x'(t)]$, δίνεται από τη (μοναδική, θετική ημι-ορισμένη) λύση της διακριτής εξίσωσης Lyapunov: $P - APA' - BB' = 0$. Επιπλέον (*Davies και Vinter 1985*), $E(yy') = CPC'$. Στην περίπτωση μας, ο A εξαρτάται γραμμικά από n παραμέτρους k_1, k_2, \dots, k_n , οι οποίες θεωρούνται σταθερές (αλλά πιθανότατα άγνωστες). Έτσι, η λύση της παραπάνω εξίσωσης Lyapunov είναι ο σταθερής-κατάστασης πίνακας συνδιακύμανσης του $x(t)$ για όλους τους συνδυασμούς του $\{k_i\}$ για τους οποίους ο A είναι ασυμπτωτικά σταθερός. Στη συνέχεια δείχνεται ότι αυτή η συνθήκη ικανοποιείται αν και μόνο αν το

διάνυσμα παραμέτρων $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ βρίσκεται στον Υπέρ-κύβο (n -κύβο):

$$K_n = (0, 2)^n := \{k \in \mathbb{R}^n : 0 < k_i < 2, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Λήμμα 1: Θεωρούμε το μοντέλο με $(m+1)$ κόμβους που εξαρτάται από m αληθείς παραμέτρους κέρδους $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$. Στη συνέχεια το σύστημα είναι ασυμπτωτικά σταθερό αν και μόνο αν $k \in \{K\}_m$. Ειδικότερα, αν $A = A_{2m+1}$ δηλώνει τον πίνακα 'A' του χώρου κατάστασης που περιγράφει στην πραγματικότητα το σύστημα, τότε οι ιδιοτιμές του A είναι $\{1-k_1, 1-k_2, \dots, 1-k_m, 0, \dots, 0\}$, όπου η πολυπλοκότητα της μηδενικής ιδιοτιμής είναι $(m+1)$.

Στη συνέχεια ας αφήσουμε το $A \otimes B$ να δηλώνει το παράγωγο Kronecker δύο πινάκων A και B, και επιπλέον το $\text{vec}(A)$ να είναι η λειτουργία που στοιβάζει τα στοιχεία του πίνακα A σε μία στήλη διανύσματος (διατρέχοντας κατά μήκος των γραμμών του A). Εφαρμόζοντας τη $\text{vec}(\cdot)$ λειτουργία στην εξίσωση Lyapunov έχουμε $(I_{n^2} - A \otimes A)\text{vec}(P) = \text{vec}(BB')$ όπου $n = 2m+1$, η οποία ίσως μπορεί να λυθεί ως: $\text{vec}(P) = (I_{n^2} - A \otimes A)^{-1}\text{vec}(BB')$. Το επόμενο Λήμμα 2 εγγυάται ότι ο αντίστροφος που δηλώνεται παραπάνω υπάρχει στην πραγματικότητα.

Λήμμα 2: Ο πίνακας $I_{n^2} - A \otimes A$ δεν είναι μοναδικός για όλα τα k για τα οποία ισχύει $k \in K_m$. Στην πραγματικότητα, $I_{n^2} - A \otimes A$ είναι μοναδικό αν και μόνο αν $(1-k_i)(1-k_j) = 1$ για οποιουδήποτε δύο δείκτες i και j , για τους οποίους ισχύει ότι $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq m$, όπου $n = 2m+1$.

Ο υπολογισμός του πίνακα συνδιακύμανσης P ουσιαστικά περιλαμβάνει τη λύση του συστήματος n^2 γραμμικών εξισώσεων στα στοιχεία του P, τα οποία εξαρτώνται παραμετρικά από τα k_i . Από τη λύση της εξίσωσης Lyapunov είναι συμμετρικός, όμως, αυτό το σύστημα των

εξισώσεων είναι επαναλαμβανόμενο (με $n(n-1)/2$ εξισώσεις να επαναλαμβάνονται (Horn και Johnson 1990). Η λύση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας την παρακάτω διαδικασία: για ένα συμμετρικό πίνακα P , το $\overline{vec}(P)$ δείχνει το $vec(P)$ με όλες τις καταχωρήσεις του πίνακα P κάτω από την κύρια διαγώνιο να αποβάλλονται. Πιο καθαρά, αν $P \in R^{n \times n}$, τότε $\overline{vec}(P) \in R^r$, όπου $r = n(n+1)/2$. Ορίζουμε $W \in R^{n^2 \times r}$, έτσι ώστε $vec(P) = W \overline{vec}(P)$. Επίσης το $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ ως είναι το υποσύνολο των $n(n-1)/2$ δεικτών του $vec(P)$, οι οποίοι αποβάλλονται όταν κατασκευάζουμε το $\overline{vec}(P)$. Μετά μπορούμε να γράψουμε $V(I_{n^2} - A \otimes A)W \overline{vec}(P) = Vvec(BB')$ όπου το $V \in R^{r \times n^2}$ δείχνει τον μοναδιαίο πίνακα με όλες τις γραμμές που αντιστοιχούν στους δείκτες στο S που αποβάλλεται. Ακόμα πιο καθαρά, ο πολλαπλασιασμός από τα δεξιά του πίνακα V αποβάλλει τις $n(n-1)/2$ επαναλαμβανόμενες εξισώσεις. Επιπλέον έχουμε:

Λήμμα 3: Ο πίνακας $V(I_{n^2} - A \otimes A)W$ δεν είναι μοναδικός για όλα τα $k \in K_m$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3, μπορούμε να επιτύχουμε την μοναδική λύση $p = \overline{vec}(P) = [V(I_{n^2} - A \otimes A)W]^{-1} Vvec(BB')$ από την οποία το P μπορεί να ανακτηθεί ως $P = \overline{vec}^{-1}(p)$.

Παράδειγμα: Χρησιμοποιώντας τις δύο μεθόδους που περιγράψαμε προηγουμένως, οι πίνακες συνδιακύμανσης που αντιστοιχούν σε μοντέλα τριών κόμβων επιτυγχάνονται με τη χρήση του συμβολικού toolbox του Matlab, ως

$$P_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k_1(k_1-2)} & 0 & -\frac{k_1-1}{(k_1-2)k} & \frac{1}{(k_1-2)} & \frac{k_2(k_1-1)}{(k_1-2)k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1-1}{(k_1-2)k} & 0 & -\frac{(k+2)k_1}{k_2(k_2-2)(k_1-2)k} & \frac{k_1(k_1-1)}{(k_1-2)k} & \frac{(k+2)k_1}{(k_2-2)(k_1-2)k} \\ \frac{1}{(k_1-2)} & 0 & \frac{k_1(k_1-1)}{(k_1-2)k} & -\frac{k_1}{k_1-2} & -\frac{(k_1-1)k_1k_2}{(k_1-2)k} \\ \frac{k_2(k_1-1)}{(k_1-2)k} & 0 & \frac{(k+2)k_1}{(k_2-2)(k_1-2)k} & -\frac{(k_1-1)k_1k_2}{(k_1-2)k} & -\frac{(k+2)k_1k_2}{(k_2-2)(k_1-2)k} \end{pmatrix}$$

όπου το $k = k_1k_2 - k_2 - k_1$.

Μία καλύτερη μέθοδος για τον υπολογισμό του πίνακα συνδιακύμανσης του διανύσματος κατάστασης είναι να χρησιμοποιηθεί η ειδική δομή του μοντέλου χώρου κατάστασης, η οποία οδηγεί σε έναν απλό επαναλαμβανόμενο αλγόριθμο ενημέρωσης. Αυτό περιγράφεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Λήμμα 4: Το (A_{2j+1}, B_{2j+1}) ως δείχνει το χώρο κατάστασης μοντέλο με $(j+1)$ κόμβους, που εξαρτάται από τις j παραμέτρους $\{k_1, k_2, \dots, k_j\}$ όπου $j \geq 1$. Μετά:

- (1) Υπάρχει ένας μετασχηματισμός χώρου κατάστασης που ορίζεται από έναν μεταλλαγμένο πίνακα Q_j , έτσι ώστε

$$Q_j A_{2j+1} Q_j := A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

και $Q_j B_{2j+1} = B_{2j+1} := B$ στο οποίο: (i) $A_{11} = A_{2j-1}$, (ii) A_{21} και A_{22} έχουν rank ένα, και (iii) B είναι της μορφής $[B' \ 0_{2j-1}]'$.

- (2) Η εξίσωση Lyapunov $P - APA' - BB' = 0$ έχει μία μοναδική συμμετρική θετική-ημιορισμένη λύση της P για όλα τα

$(k_1, k_2, \dots, k_j) \in (0, 2)^j$. Αφήστε το P να χωριστεί σύμφωνα με το A , δηλαδή,

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

όπου $P_{11} = P'_{11} \in R^{(2j-1) \times (2j-1)}$, $P_{12} \in R^{(2j-1) \times 2}$ και $P_{22} = P'_{22} \in R^{2 \times 2}$. Μετά

$P_{11} = P_{2j-1}$ όπου P_{2j-1} είναι ο πίνακας συνδιακύμανσης του μοντέλου με j κόμβους, δηλαδή η μοναδική λύση της διακριτής εξίσωσης Lyapunov $P_{2j-1} - A_{2j-1}P_{2j-1}A'_{2j-1} - B_{2j-1}B'_{2j-1} = 0$. Επιπλέον τα P_{12} και P_{22} έχουν rank το πολύ ένα και μπορούν να ληφθούν από τις μοναδικές λύσεις των γραμμικών εξισώσεων:

$$P_{12} - A_{11}P_{12}A'_{22} = A_{11}P_{11}A'_{21} \text{ και } P_{22} - A_{22}P_{22}A'_{22} = A_{21}P_{12}A'_{21} + A_{22}P_{22}A'_{21} + A_{21}P_{12}A'_{22}$$

αντίστοιχα.

- (3) Αν $(k_1, k_2, \dots, k_j) \in (0, 2)^j$, η εξίσωση Lyapunov: $P_{2j-1} - A_{2j-1}P_{2j-1}A'_{2j-1} - B_{2j-1}B'_{2j-1} = 0$ έχει μία συμμετρική θετική ημι-ορισμένη λύση που δίνεται από το:

$$P_{2j+1} = Q_j \begin{pmatrix} P_{2j-1} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{pmatrix} Q_j$$

Παρατήρηση: Το λήμμα 4 δείχνει ότι ο πίνακας συνδιακύμανσης του μοντέλου με $j+1$ κόμβους μπορεί να προκύψει επαναληπτικά από τη λύση του μοντέλου με j κόμβους με την επίλυση δύο γραμμικών εξισώσεων των παραγγελιών $2(2j-1)$ και 4, αντίστοιχα (στην περίπτωση των παραγγελιών $(2j-1)$ και 2 λαμβάνουμε υπόψη ότι τα P_{12} και P_{22} έχουν rank το πολύ ένα). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί από την διανυσματική προσέγγιση που περιγράφεται νωρίτερα. Ως εκ τούτου, ο όγκος του υπολογισμού που περιλαμβάνει τη λύση μιας εξίσωσης $(2j-1) \times (2j-1)$ πίνακα αποφεύγεται

εντελώς. Αφότου έχει συγκεντρωθεί το P από το P_{2j-1}, P_{12} και το P_{22}, P_{2j+1} μπορεί να ληφθεί με την αντιστροφή της μεταλλαγής μέσω του πίνακα Q_j .

4. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ BULLWHIP EFFECT

Η ανάλυση συνδιακύμανσης του μοντέλου μας επιτρέπει να αναλύσουμε τις επιδράσεις των τεχνικών αναπλήρωσης αποθέματος στο «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (bullwhip effect). Ανακαλώντας ότι η τελική ζήτηση του καταναλωτή $O_{0,1}(t)$ έχει μοντελοποιηθεί ως μία ακολουθία ανεξάρτητων και όμοια κατανομημένων τυχαίων μεταβλητών μοναδιαίας συνδιακύμανσης. Έτσι, η διασπορά του σήματος της ζήτησης σε οποιοδήποτε κόμβο της αλυσίδας μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από τον πίνακα συνδιακύμανσης. Θεωρούμε σαν παράδειγμα το μοντέλο των τριών κόμβων με δύο αναλογικούς ελεγκτές (*P-P-controller*) (σχήμα 5.3) (το μοντέλο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα). Οι παραγγελίες που γίνονται από το δεύτερο κόμβο (στον κατασκευαστή) αντιστοιχούν στο σήμα $O_{2,3}(t)$ και μπορούμε να γράψουμε:

$$O_{2,3}(t) = Y_{3,2}(t+1) = -k_2 IP_2(t-1) + k_2 Y_{2,1}(t) - k_2 Y_{3,2}(t) + k_2 SP_2$$

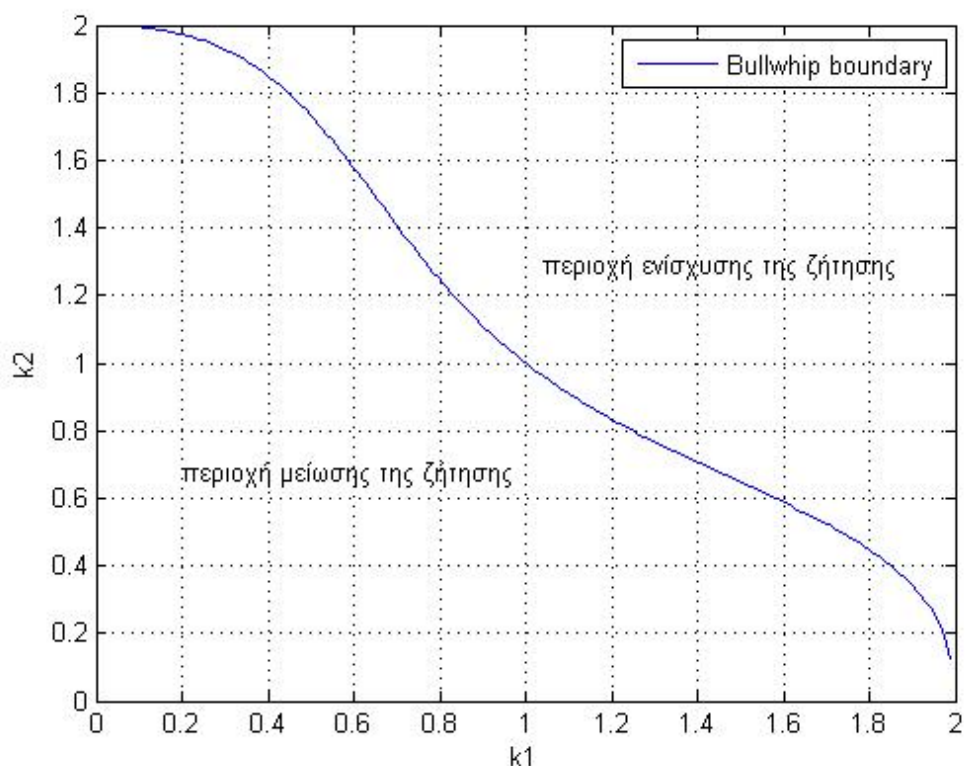
το οποίο μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών κατάστασης (και SP_2) στη μορφή $O_{2,3}(t) = C'x(t) + k_2 SP_2$ όπου το $x(t)$ είναι το διάνυσμα κατάστασης του μοντέλου και $C' = (0 \ 0 \ -k_2 k_2 \ -k_2)$. Το «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (bullwhip effect), που αναπαριστά την ενίσχυση των διακυμάνσεων των παραγγελιών που γίνονται στους κόμβους 1 και 3 δίνεται από:

$$\beta = \frac{Var(O_{2,3})}{Var(O_{0,1})} = \frac{P_{5,5}}{P_{5,2}} = \frac{k_1 k_2 (2 + k_1 k_2 - k_1 - k_2)}{(2 - k_1)(2 - k_2)(k_1 + k_2 - k_1 k_2)}$$

Για να βρούμε τις περιοχές στο οριζόντιο επίπεδο (k_1, k_2) όπου η ενίσχυση της ζήτησης και η μείωσή της εμφανίζονται, θέσαμε το β ένα, και λύσαμε την εξίσωση για να προκύψει το k_2 ως συνάρτηση του k_1 . Αυτό μας δίνει δύο λύσεις:

$$k_2 = f(k_1) = \frac{2 - 5k_1 + 2k_1^2 \pm \sqrt{4 - 12k_1 + 13k_1^2 - 4k_1^3}}{2(k_1 - 1)^2},$$

οι οποίες είναι έγκυρες για $k_1 \neq 1$. Μπορεί εύκολα να φανεί ότι η θετική τετραγωνική ρίζα πρέπει να επιλεχτεί, γιατί με αυτήν την επιλογή, οι τιμές του k_1 μέσα στο διάστημα $0 \leq k_1 \leq 2$ χαρτογραφούνται στις τιμές k_2 μέσα στο ίδιο διάστημα. Η καμπύλη που προκύπτει φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 4.1) και δείχνει το όριο μεταξύ της περιοχής της ενίσχυσης-ζήτησης και της περιοχής της μείωσης-ζήτησης. Όπως περιμέναμε, οι επιθετικές-επαναλαμβανόμενες τεχνικές (δηλαδή μεγάλες τιμές των k_1 και k_2) ενισχύουν το «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (bullwhip effect).

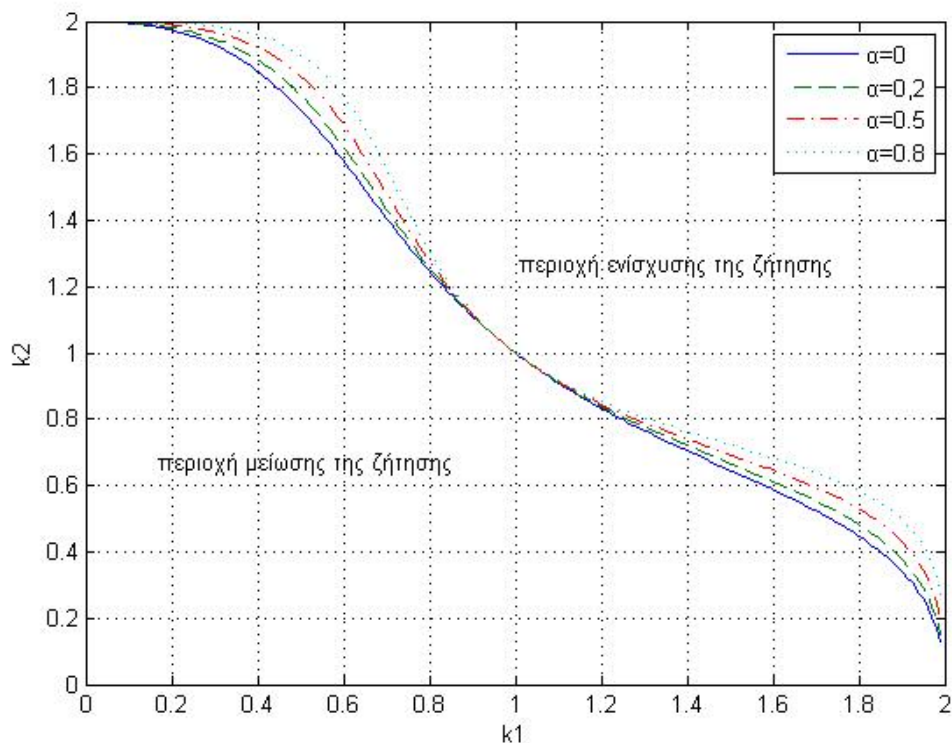


Σχήμα 4.1: Φαινόμενο ενίσχυσης ζήτησης εφοδιαστικής αλυσίδας P-P Controller και περιοχές μείωσης και ενίσχυσης της ζήτησης

Η ανάλυση μπορεί εύκολα να επεκταθεί για τα συσχετισμένα σήματα, που μοντελοποιούνται μέσω αυθαίρετων μοντέλων ARMA καθοδηγούμενα από σήμα λευκού θορύβου μοναδιαίας έντασης $e(t)$. Υποθέτουμε, για παράδειγμα, ότι $O_{0,1}$ είναι ένα σήμα παλινδρόμησης πρώτου βαθμού (AR), δηλαδή

$$O_{0,1}(t+1) = \alpha O_{0,1}(t) + (1-\alpha)e(t)$$

όπου το α είναι μια (ομαλή) παράμετρος συσχέτισης που βρίσκεται στο διάστημα $-1 \leq \alpha \leq 1$, και μπορεί να δειχθεί ότι η περιοχή της μείωσης-ζήτησης απλώνεται εις βάρος της περιοχής της ενίσχυσης-ζήτησης όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 4.2), που σχεδιάζεται για διάφορες τιμές του $\alpha = 0, 0.2, 0.5$ και 0.8 . Να σημειωθεί ότι, όπως ήταν αναμενόμενο, «ομαλότερες» διακυμάνσεις στη ζήτηση των πελατών έχουν αποτέλεσμα την ανακούφιση του bullwhip effect.



Σχήμα 4.2: Όριο μεταξύ των περιοχών μείωσης και ενίσχυσης της ζήτησης ως συνάρτηση της παραμέτρου α

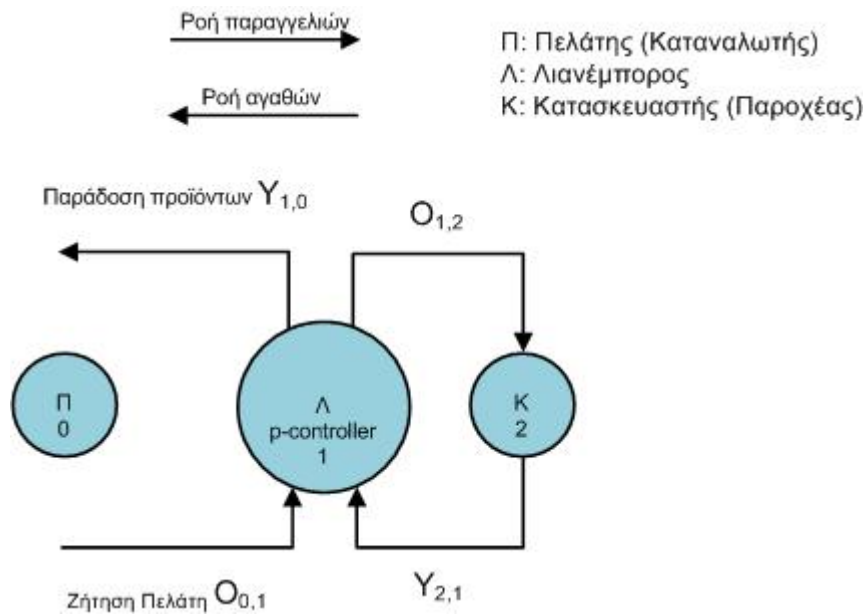
5. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ, ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ, ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ BULLWHIP EFFECT

Θα εξετάσουμε διάφορες περιπτώσεις εφοδιαστικών αλυσίδων με βάση δύο κριτήρια, τα οποία είναι:

- το πλήθος των κόμβων της εφοδιαστικής αλυσίδας που παρεμβάλλονται μεταξύ του πελάτη και του κατασκευαστή (λιανέμπορος, χονδρέμπορος, κλπ.)
- το είδος του ελεγκτή που θα χρησιμοποιήσουμε στον κάθε κόμβο

5.1. ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΕΝΑΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΣ ΚΟΜΒΟΣ ΚΑΙ ΕΝΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΣ ΕΛΕΓΚΤΗΣ (P-CONTROLLER)

Η πρώτη και πιο απλή περίπτωση που θα μελετήσουμε είναι να έχουμε μια εφοδιαστική αλυσίδα με έναν ενδιάμεσο κόμβο, ο οποίος είναι ο λιανέμπορος και έναν αναλογικό ελεγκτή (*P-controller*). Το μοντέλο της εφοδιαστικής αλυσίδας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 5.1).



Σχήμα 5.1: Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν ενδιάμεσο κόμβο και έναν αναλογικό ελεγκτή (p-controller)

Με βάση τις εξισώσεις που υπάρχουν για τον αναλογικό ελεγκτή (*P-controller*) και το γεγονός ότι έχουμε μόνον έναν ενδιάμεσο κόμβο, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις του χώρου κατάστασης:

$$IP(t) = IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t) \quad (1)$$

$$O_{1,2}(t) = k_1 * (SP(t) - IP(t)) \quad (2)$$

$$Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1) \quad (3)$$

$$Y_{2,1}(t) = O_2^*(t-1) \quad (4)$$

Λύνοντας την εξίσωση (2) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (2) \Rightarrow O_{1,2}(t) &= k_1 * (SP(t) - [IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow O_{1,2}(t) &= k_1 * SP(t) - k_1 * IP(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t) \quad (5)
 \end{aligned}$$

Λύνοντας την εξίσωση (3) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(3) \Rightarrow Y_{1,0}(t) = O_{0,1}(t-1) + O_1^*(t-2) - Y_{1,0}(t-1) \quad (6)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (6) &\Leftrightarrow^{(3)} Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + O_1^*(t-1) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + Y_{1,0}(t) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) \quad (7) \end{aligned}$$

Λύνοντας την εξίσωση (4) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(4) \Rightarrow Y_{2,1}(t) = O_{1,2}(t-1) + O_2^*(t-2) - Y_{2,1}(t-1) \quad (8)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (8) &\Rightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + O_2^*(t-1) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^{(4)} Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + Y_{2,1}(t) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^{(5)} Y_{2,1}(t+1) = k_1 * SP(t) - k_1 * IP(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t) \quad (9) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1),(7) και (9), μπορούμε να δημιουργήσουμε τους πίνακες στον χώρο των καταστάσεων, οι οποίοι είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{bmatrix} IP(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ Y_{2,1}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & -k_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} * SP$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \quad 1 \quad 0] * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με ένα ενδιάμεσο κόμβο και έναν αναλογικό ελεγκτή (*P-controller*) είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & -k_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0]$$

$$D = [0]$$

Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής (όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μικρότερες από ένα), ο πίνακας συμμεταβλητότητας της χώρου καταστάσεων του διανύσματος $x(t)$, υπολογίζεται λύνοντας την γραμμική εξίσωση Lyapunov. Η εξίσωση Lyapunov είναι

$$P - APA' - BB' = 0$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση με βάση τους πίνακες A και B, θα υπολογίσουμε τον πίνακα συμμεταβλητότητας του συγκεκριμένου χώρου καταστάσεων P_3 , ο οποίος είναι

$$P_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k_1 * (k_1 - 2)} & 0 & \frac{1}{k_1 - 2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{k_1 - 2} & 0 & -\frac{k_1}{k_1 - 2} \end{pmatrix}$$

Οι παραγγελίες, οι οποίες γίνονται από τον ενδιαμέσο κόμβο προς τον κατασκευαστή, αντιστοιχούν στο σήμα $O_{1,2}(t)$, το οποίο μπορεί να γραφτεί και ως

$$O_{1,2}(t) = Y_{2,1}(t-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_1 * (SP_1(t) - IP_1(t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_1 * SP(t) - k_1 * IP(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί και ως εξίσωση των μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και της μεταβλητής $SP_1(t)$. Δηλαδή, μπορεί να γραφτεί και με την μορφή $O_{1,2}(t) = C' * x(t) + k_1 * SP_1(t)$, όπου $x(t)$ είναι το διάνυσμα μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και $C' = (-k_1 \quad k_1 \quad -k_1)$. Το φαινόμενο της ενίσχυσης της ζήτησης, το οποίο απεικονίζει τις αυξομειώσεις στα επίπεδα ζήτησης των κόμβων 1 (π.χ. πελάτης) και 2 (π.χ. λιανέμπορος) υπολογίζεται από

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{1,2})}{\text{var}(O_{0,1})} \approx C' * P_{3,3} * C$$

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{1,2})}{\text{var}(O_{0,1})} = \frac{P_{3,3}}{P_{2,2}} = P_{3,3} = -\frac{k_1}{k_1 - 2} \quad (10)$$

Γνωρίζοντας ότι το φαινόμενο της ενίσχυσης της ζήτησης εμφανίζεται όταν ο λόγος των διακυμάνσεων των παραγγελιών είναι μεγαλύτερος του ενός. Εμείς πρέπει να εξετάσουμε την περίπτωση που είναι μικρότερος του ένα. Οι τιμές της μεταβλητής k_1 , για τις οποίες ο λόγος αυτός είναι μικρότερος

του ένα, είναι και αυτές που θα καθορίσουν το πεδίο τιμών της μεταβλητής. Θα λύσουμε την εξίσωση του φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης θέτοντας την μικρότερη του ένα.

$$(10) \Rightarrow -\frac{k_1}{k_1-2} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k_1 \leq k_1 - 2 \Leftrightarrow$$

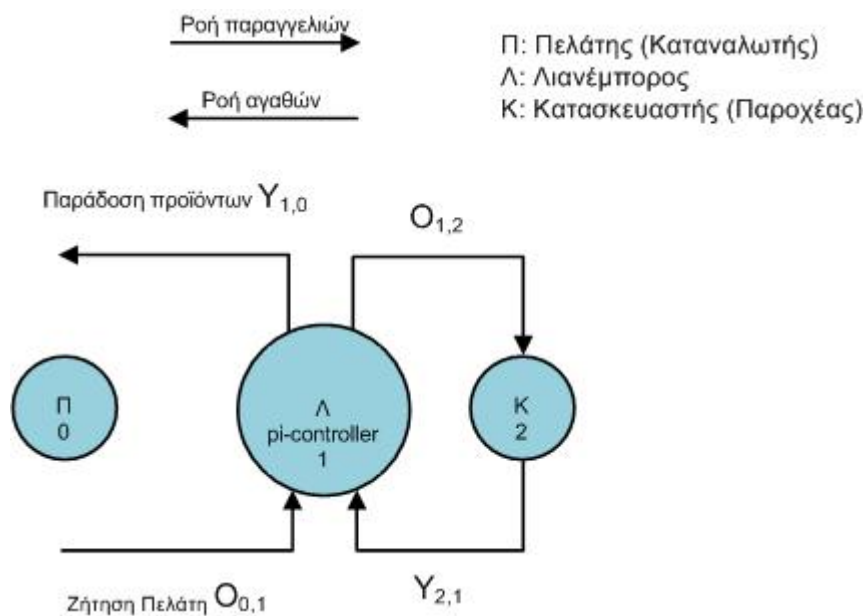
$$\Leftrightarrow -2 * k_1 \leq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_1 \leq 1$$

Λύνοντας την εξίσωση του φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης, όπως είδαμε παραπάνω, παρατηρούμε ότι η μεταβλητή k_1 πρέπει να παίρνει τιμές μικρότερες της μονάδος για να μην εμφανίζεται το φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το πεδίο τιμών της μεταβλητής k_1 είναι $0 < k_1 \leq 1$.

5.2. ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΕΝΑΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΣ ΚΟΜΒΟΣ ΚΑΙ ΕΝΑΣ ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ (PI-CONTROLLER)

Η δεύτερη περίπτωση είναι να έχουμε πάλι μια εφοδιαστική αλυσίδα με έναν ενδιάμεσο κόμβο, ο οποίος είναι ο λιανέμπορος, άλλα αυτή τη φορά έχουμε έναν *ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (PI-controller)*. Το μοντέλο της εφοδιαστικής αλυσίδας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 5.2).



Σχήμα 5.2: Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν ενδιάμεσο κόμβο και έναν ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (pi-controller)

Εξαιτίας του γεγονότος ότι έχουμε έναν ενδιάμεσο κόμβο και έναν *ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης*, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις του χώρου κατάστασης:

$$IP(t) = IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t) \quad (1)$$

$$O_{1,2}(t) = (k_p + \frac{k_i}{s}) * (SP(t) - IP(t)) \quad (2)$$

$$Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1) \quad (3)$$

$$Y_{2,1}(t) = O_2^*(t-1) \quad (4)$$

Λύνοντας την εξίσωση (2) και κάνοντας τις κατάλληλες αντικαταστάσεις, έχουμε,

$$(2) \Rightarrow O_{1,2}(t) = (k_p + \frac{k_i}{s}) * (SP(t) - IP(t))$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = (k_p + \frac{k_i}{s}) * (SP(t) - [IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)])$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_p * (SP(t) - [IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) + \frac{k_i}{s} * (SP(t) - [IP(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)])$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_p * SP(t) - k_p * IP(t-1) - k_p * Y_{2,1}(t) + k_p * Y_{1,0}(t) + k_i * SP(t) + k_i * SP(t) - k_i * IP(t-1) - k_i * Y_{2,1}(t) + k_i * Y_{1,0}(t) + k_i * (IP(t-2) - Y_{2,1}(t-1) + Y_{1,0}(t-1))$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_p * SP(t) - k_p * IP(t-1) - k_p * Y_{2,1}(t) + k_p * Y_{1,0}(t) + k_i * SP(t) + k_i * SP(t-1) - k_i * IP(t-1) - k_i * Y_{2,1}(t) + k_i * Y_{1,0}(t) + k_i * IP(t-1)$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_p * SP(t) - k_p * IP(t-1) - k_p * Y_{2,1}(t) + k_p * Y_{1,0}(t) + k_i * SP(t) + k_i * SP(t-1) - k_i * Y_{2,1}(t) + k_i * Y_{1,0}(t)$$

$$\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = (k_p + k_i) * SP(t) - k_p * IP(t-1) - (k_p + k_i) * Y_{2,1}(t) + (k_p + k_i) * Y_{1,0}(t) \quad (5)$$

Λύνοντας την εξίσωση (3) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(3) \Rightarrow Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1)$$

$$\Leftrightarrow Y_{1,0}(t) = O_{0,1}(t-1) + O_1^*(t-2) - Y_{1,0}(t-1)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\Rightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + O_1^*(t-1) - Y_{1,0}(t)$$

$$\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + Y_{1,0}(t) - Y_{1,0}(t)$$

αφού ($O_1^*(t-1) = Y_{1,0}(t)$), και επομένως:

$$\Rightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) \quad (6)$$

Λύνοντας την εξίσωση (4) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(4) \Rightarrow Y_{2,1}(t) = O_2^*(t-1)$$

$$\Leftrightarrow Y_{2,1}(t) = O_{1,2}(t-1) + O_2^*(t-2) - Y_{2,1}(t-1)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + O_2^*(t-1) - Y_{2,1}(t)$$

$$\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + Y_{2,1}(t) - Y_{2,1}(t)$$

αφού ($O_2^*(t-1) = Y_{2,1}(t)$), και επομένως:

$$\Rightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t)$$

$$\stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} Y_{2,1}(t+1) = (k_p + k_i) * SP(t) - k_p * IP(t-1) - (k_p + k_i) * Y_{2,1}(t) + (k_p + k_i) * Y_{1,0}(t) \quad (7)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1),(6) και (7), μπορούμε να δημιουργήσουμε τους πίνακες στον χώρο των καταστάσεων, οι οποίοι είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{bmatrix} IP(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ Y_{2,1}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_p & (k_p + k_i) & -(k_p + k_i) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * [O_{0,1}(t)] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_p + k_i \end{bmatrix} * SP_1$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0] * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν ενδιάμεσο κόμβο και έναν *ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (PI-controller)* είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_p & (k_p + k_i) & -(k_p + k_i) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0]$$

$$D = [0]$$

Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A είναι ασυμππτωτικά ευσταθής (όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μικρότερες από ένα), ο πίνακας συμμεταβλητότητας της χώρου καταστάσεων του διανύσματος $x(t)$, υπολογίζεται λύνοντας την γραμμική εξίσωση Lyapunov. Η εξίσωση Lyapunov είναι

$$P - APA' - BB' = 0$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση με βάση τους πίνακες A και B, θα υπολογίσουμε τον πίνακα συμμεταβλητότητας του συγκεκριμένου χώρου καταστάσεων P_3 , ο οποίος είναι:

$$P_3 = \begin{pmatrix} \frac{k_i - 1}{k_p * (k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)} & 0 & \frac{1}{(k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{(k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)} & 0 & \frac{-(2 * k_i^2 + k_i * k_p + k_p)}{(k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)} \end{pmatrix}$$

Οι παραγγελίες, οι οποίες γίνονται από τον λιανέμπορο προς τον κατασκευαστή, αντιστοιχούν στο σήμα $O_{1,2}(t)$, που μπορεί να γραφτεί όπως δείξαμε παραπάνω ως:

$$O_{1,2}(t) = (k_p + k_i) * SP(t) - k_p * IP(t-1) - (k_p + k_i) * Y_{2,1}(t) + (k_p + k_i) * Y_{1,0}(t)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί και ως εξίσωση των μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και της μεταβλητής $SP(t)$. Δηλαδή, μπορεί να γραφτεί και με την μορφή $O_{1,2}(t) = C' * x(t) + (k_p + k_i) * SP(t)$, όπου $x(t)$ είναι το διάνυσμα μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και $C' = (-k_p \quad k_p + k_i \quad -(k_p + k_i))$. Το «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (bullwhip effect), που αναπαριστά την ενίσχυση των διακυμάνσεων των παραγγελιών που γίνονται στον λιανέμπορο και στον κατασκευαστή δίνεται από:

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} \approx C' * P_{3,3} * C$$

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} = \frac{P_{3,3,3}}{P_{3,2,2}} = P_{3,3,3} = \frac{-(2 * k_i^2 + k_i * k_p + k_p)}{(k_i + 1) * (2 * k_i + k_p - 2)}$$

Για να βρούμε τις περιοχές στο οριζόντιο επίπεδο (k_i, k_p) όπου η ενίσχυση της ζήτησης και η μείωσή της εμφανίζονται, θέτουμε το β ίσο με ένα, και λύνουμε την εξίσωση για να προκύψει το k_i ως συνάρτηση του k_p . Αυτό μας δίνει δύο λύσεις:

$$k_i = f(k_p) = \frac{-k_p \pm \sqrt{k_p^2 - 8k_p + 8}}{4}$$

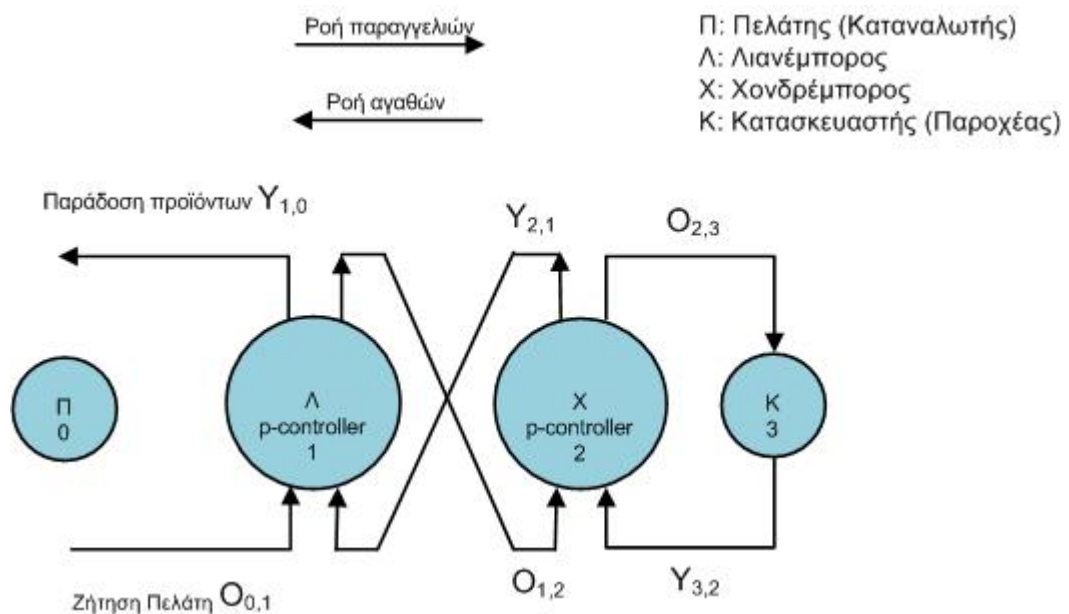
η οποία είναι έγκυρη για $0 < k_p < 4 - 2\sqrt{2}$. Επιλέγουμε το θετικό πρόσημο για την τετραγωνική ρίζα που υπάρχει στον αριθμητή, καθώς με αυτή την επιλογή το k_i πιθανόν να πάρει θετικές τιμές. Έτσι:

$$k_i = f(k_p) = \frac{-k_p + \sqrt{k_p^2 - 8k_p + 8}}{4}$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει τη γραμμική σχέση μεταξύ του k_p και του k_i .

5.3. ΤΡΙΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΚΑΙ ΔΥΟ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΙ ΕΛΕΓΚΤΕΣ (P-P- CONTROLLER)

Η τρίτη περίπτωση είναι να έχουμε μια εφοδιαστική αλυσίδα με δύο ενδιάμεσους κόμβους, οι οποίοι είναι ο λιανέμπορος και ο χονδρέμπορος, και αυτή τη φορά έχουμε δύο αναλογικούς ελεγκτές (*P-P-controller*), έναν στο λιανέμπορο και έναν στο χονδρέμπορο. Το μοντέλο της εφοδιαστικής αλυσίδας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 5.3).



Σχήμα 5.3: Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο αναλογικούς ελεγκτές (p-p-controller)

Εξαιτίας του γεγονότος ότι έχουμε δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο αναλογικούς ελεγκτές (*P-P-controller*), προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις του χώρου κατάστασης:

$$IP_1(t) = IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t) \quad (1)$$

$$IP_2(t) = IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t) \quad (2)$$

$$O_{1,2}(t) = k_1 * (SP_1(t) - IP_1(t)) \quad (3)$$

$$O_{2,3}(t) = k_2 * (SP_2(t) - IP_2(t)) \quad (4)$$

$$Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1) \quad (5)$$

$$Y_{2,1}(t) = O_2^*(t-1) \quad (6)$$

$$Y_{3,2}(t) = O_3^*(t-1) \quad (7)$$

Λύνοντας την εξίσωση (3) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (3) &\Rightarrow O_{1,2}(t) = k_1 * (SP_1(t) - [IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow O_{1,2}(t) = k_1 * SP_1(t) - k_1 * IP_1(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Λύνοντας την εξίσωση (4) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (4) &\Rightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * (SP_2(t) - [IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t)]) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Λύνοντας την εξίσωση (5) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (5) &\Rightarrow Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t) = O_{0,1}(t-1) + O_1^*(t-2) - Y_{1,0}(t-1) \end{aligned} \quad (10)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (10) &\Leftrightarrow^{(3)} Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + O_1^*(t-1) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + Y_{1,0}(t) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

Λύνοντας την εξίσωση (6) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(6) \Rightarrow Y_{2,1}(t) = O_{1,2}(t-1) + O_2^*(t-2) - Y_{2,1}(t-1) \quad (12)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (12) &\Rightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + O_2^*(t-1) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^{(6)} Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + Y_{2,1}(t) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^{(8)} Y_{2,1}(t+1) = k_1 * SP(t) - k_1 * IP(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t) \quad (13) \end{aligned}$$

Λύνοντας την εξίσωση (7) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(7) \Rightarrow Y_{3,2}(t) = O_{2,3}(t-1) + O_3^*(t-2) - Y_{3,2}(t-1) \quad (14)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (12) &\Rightarrow Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) + O_3^*(t-1) - Y_{3,2}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^{(7)} Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) + Y_{3,2}(t) - Y_{3,2}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^{(10)} Y_{3,2}(t+1) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t) \quad (15) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1),(2), (11), (13) και (15), μπορούμε να δημιουργήσουμε τους πίνακες στον χώρο των καταστάσεων, οι οποίοι είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{bmatrix} IP_1(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ IP_2(t) \\ Y_{2,1}(t+1) \\ Y_{3,2}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} SP_1 \\ SP_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο αναλογικούς ελεγκτές (*P-P-controller*) είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$D = [0]$$

Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής (όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μικρότερες από ένα), ο πίνακας συμμεταβλητότητας της

χώρου καταστάσεων του διανύσματος $x(t)$, υπολογίζεται λύνοντας την γραμμική εξίσωση Lyapunov. Η εξίσωση Lyapunov είναι

$$P - APA' - BB' = 0$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση με βάση τους πίνακες A και B, θα υπολογίσουμε τον πίνακα συμμεταβλητότητας του συγκεκριμένου χώρου καταστάσεων P_5 , ο οποίος είναι

$$P_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1 * (k_1 - 2)} & 0 & -\frac{k_1 - 1}{(k_1 - 2) * a} & \frac{1}{(k_1 - 2)} & \frac{k_2 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 - 1}{(k_1 - 2) * a} & 0 & -\frac{(a + 2) * k_1}{k_2 * (k_2 - 2) * (k_1 - 2) * a} & \frac{k_1 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * a} & \frac{(a + 2) * k_1}{(k_2 - 2) * (k_1 - 2) * a} \\ \frac{1}{(k_1 - 2)} & 0 & \frac{k_1 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * a} & -\frac{k_1}{k_1 - 2} & -\frac{(k_1 - 1) * k_1 * k_2}{(k_1 - 2) * a} \\ \frac{k_2 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * a} & 0 & \frac{(a + 2) * k_1}{(k_2 - 2) * (k_1 - 2) * a} & -\frac{(k_1 - 1) * k_1 * k_2}{(k_1 - 2) * a} & -\frac{(a + 2) * k_1 * k_2}{(k_2 - 2) * (k_1 - 2) * a} \end{pmatrix}$$

$$a = k_1 * k_2 - k_1 - k_2$$

Οι παραγγελίες, οι οποίες γίνονται από τον δεύτερο κόμβο προς τον κατασκευαστή, αντιστοιχούν στο σήμα $O_{2,3}(t)$, το οποίο μπορεί να γραφτεί και ως

$$O_{2,3}(t) = Y_{3,2}(t+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * (SP_2(t) - [IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t)]) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί και ως εξίσωση των μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και της μεταβλητής $SP_2(t)$. Δηλαδή, μπορεί να γραφτεί και με την μορφή $O_{2,3}(t) = C' * x(t) + k_2 * SP_2(t)$, όπου $x(t)$ είναι το διάνυσμα μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και

$C' = (0 \ 0 \ -k_2 \ k_2 \ -k_2)$. Το φαινόμενο της ενίσχυσης της ζήτησης, το οποίο απεικονίζει τις αυξομειώσεις στα επίπεδα ζήτησης των κόμβων 1 (πελάτης) και 3 (χονδρέμπορος) υπολογίζεται από

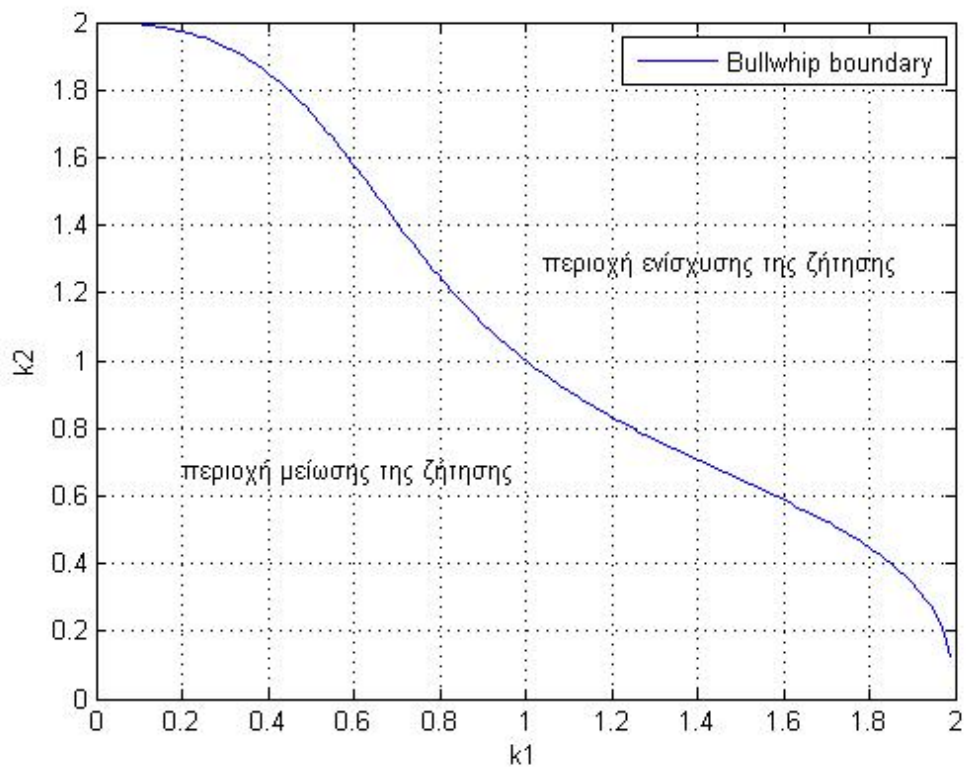
$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} \approx C' * P_{5,5} * C$$

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} = \frac{P_{5,5}}{P_{5,2}} = P_{5,5} = \left(-\frac{(k_1 * k_2 - k_1 - k_2 + 2) * k_1 * k_2}{(k_2 - 2) * (k_1 - 2) * (k_1 * k_2 - k_1 - k_2)} \right)$$

Για να υπολογίσουμε τις περιοχές όπου της γραφικής παράστασης μεταξύ του k_1 και k_2 , όπου συμβαίνει η αύξηση και η μείωση της ζήτησης, πρέπει να θέσουμε το β ίσον με 1, και την εξίσωση, που δημιουργήθηκε, την λύνουμε για να βρούμε εξίσωση του k_2 βάσει του k_1 . Αυτό δίνει δύο λύσεις

$$k_2 = f(k_1) = \frac{2 - 5 * k_1 + 2 * k_1^2 \pm (4 - 12 * k_1 + 13 * k_1^2 - 4 * k_1^3)}{2 * (k_1 - 1)^2}$$

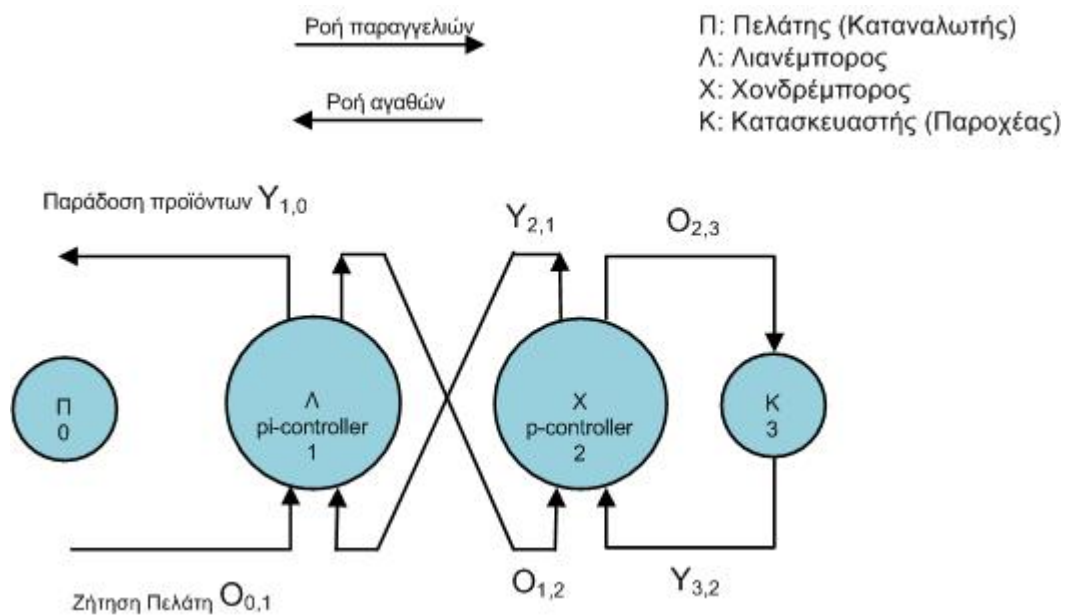
οι οποίες είναι έγκυρες για $k_1 \neq 1$. Μπορεί εύκολα να φανεί ότι η θετική τετραγωνική ρίζα πρέπει να επιλεγεί, γιατί με αυτήν την επιλογή, οι τιμές του k_1 μέσα στο διάστημα $0 \leq k_1 \leq 2$ χαρτογραφούνται στις τιμές k_2 μέσα στο ίδιο διάστημα. Η καμπύλη που προκύπτει φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 5.4) και δείχνει το όριο μεταξύ της περιοχής της ενίσχυσης-ζήτησης και της περιοχής της μείωσης-ζήτησης. Όπως περιμέναμε, οι επιθετικές-επαναλαμβανόμενες τεχνικές (δηλαδή μεγάλες τιμές των k_1 και k_2) ενισχύουν το «Φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (bullwhip effect).



Σχήμα 5.4: Φαινόμενο ενίσχυσης ζήτησης εφοδιαστικής αλυσίδας P-P Controller

5.4. ΤΕΤΑΡΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΚΑΙ ΔΥΟ ΕΛΕΓΚΤΕΣ, ΕΝΑΣ ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΚΑΙ ΕΝΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΣ ΕΛΕΓΚΤΗΣ (PI-P-CONTROLLER)

Η τέταρτη περίπτωση είναι να έχουμε μια εφοδιαστική αλυσίδα με δύο ενδιάμεσους κόμβους, οι οποίοι είναι ο λιανέμπορος και ο χονδρέμπορος, και αυτή τη φορά έχουμε έναν *ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (PI-controller)* στον λιανέμπορο και έναν *αναλογικό ελεγκτή (P-controller)* στον χονδρέμπορο. Το μοντέλο της εφοδιαστικής αλυσίδας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 5.5).



Σχήμα 5.5: Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους, έναν ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης και έναν αναλογικό ελεγκτή (pi-p-controller)

Εξαιτίας του γεγονότος ότι έχουμε δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο ελεγκτές (*PI-P-controller*), προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις του χώρου κατάστασης:

$$IP_1(t) = IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t) \quad (1)$$

$$IP_2(t) = IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t) \quad (2)$$

$$O_{1,2}(t) = (k_1 + k_i * \frac{1}{s}) * (SP_1(t) - IP_1(t)) \quad (3)$$

$$O_{2,3}(t) = k_2 * (SP_2(t) - IP_2(t)) \quad (4)$$

$$Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1) \quad (5)$$

$$Y_{2,1}(t) = O_2^*(t-1) \quad (6)$$

$$Y_{3,2}(t) = O_3^*(t-1) \quad (7)$$

Λύνοντας την εξίσωση (3) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (3) \Rightarrow O_{1,2}(t) &= k_1 * (SP_1(t) - [IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) + \\ &+ k_i * (SP_1(t) - [IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) - k_i * (SP_1(t-1) - IP_1(t-1)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow O_{1,2}(t) &= k_1 * SP_1(t) - k_1 * IP_1(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t) + \\ &+ k_i * SP_1(t) - k_i * IP_1(t-1) - k_i * Y_{2,1}(t) + k_i * Y_{1,0}(t) - k_i * SP_1(t-1) + k_i * IP_1(t-1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow O_{1,2}(t) &= k_1 * SP_1(t) - k_1 * IP_1(t-1) - (k_1 + k_i) * Y_{2,1}(t) + (k_1 + k_i) * Y_{1,0}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Λύνοντας την εξίσωση (4) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (4) \Rightarrow O_{3,2}(t) &= k_2 * (SP_2(t) - [IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t)]) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow O_{3,2}(t) &= k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Λύνοντας την εξίσωση (5) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (5) \Rightarrow Y_{1,0}(t) &= O_1^*(t-1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Y_{1,0}(t) &= O_{0,1}(t-1) + O_1^*(t-2) - Y_{1,0}(t-1) \end{aligned} \quad (10)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (10) &\Leftrightarrow^{(3)} Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + O_1^*(t-1) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + Y_{1,0}(t) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) \quad (11)
 \end{aligned}$$

Λύνοντας την εξίσωση (6) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(6) \Rightarrow Y_{2,1}(t) = O_{1,2}(t-1) + O_2^*(t-2) - Y_{2,1}(t-1) \quad (12)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (12) &\Rightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + O_2^*(t-1) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^{(6)} Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + Y_{2,1}(t) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^{(8)} Y_{2,1}(t+1) = k_1 * SP_1(t) - k_1 * IP_1(t-1) - (k_1 + k_i) * Y_{2,1}(t) + (k_1 + k_i) * Y_{1,0}(t) \quad (13)
 \end{aligned}$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα και λύνοντας την εξίσωση (7) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (7) &\Leftrightarrow Y_{3,2}(t+1) = O_3^*(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) + O_3^*(t-1) - Y_{3,2}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^{(7)} Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) + Y_{3,2}(t) - Y_{3,2}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^{(9)} Y_{3,2}(t+1) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t) \quad (14)
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1),(2), (11), (13) και (14), μπορούμε να δημιουργήσουμε τους πίνακες στον χώρο των καταστάσεων, οι οποίοι είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{bmatrix} IP_1(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ IP_2(t) \\ Y_{2,1}(t+1) \\ Y_{3,2}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1+k_i & 0 & -k_1-k_i & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} SP_1 \\ SP_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο ελεγκτές (*PI-P-controller*) είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1+k_i & 0 & -k_1-k_i & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$D = [0]$$

Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής (όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μικρότερες από ένα), ο πίνακας συμμεταβλητότητας της

χώρου καταστάσεων του διανύσματος $x(t)$, υπολογίζεται λύνοντας την γραμμική εξίσωση Lyapunov. Η εξίσωση Lyapunov είναι

$$P - APA' - BB' = 0$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση με βάση τους πίνακες A και B, θα υπολογίσουμε τον πίνακα συμμεταβλητότητας του συγκεκριμένου χώρου καταστάσεων P_3 , ο οποίος είναι

$$P_5 = \begin{pmatrix} \frac{k_i - 1}{k_1 * a} & 0 & -\frac{y}{a * x} & \frac{1}{a} & \frac{y * k_2}{a * x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{y}{a * x} & 0 & -\frac{d}{a * (k_2 - 2) * x * k_2} & \frac{z}{a * x} & \frac{d}{a * x} \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{z}{a * x} & -\frac{k_1 + k_1 * k_i + 2 * k_i^2}{a} & -\frac{z * k_2}{a * x} \\ \frac{y * k_2}{a * x} & 0 & \frac{d}{a * x} & -\frac{z * k_2}{a * x} & -\frac{d * k_2}{x * a * (k_2 - 2)} \end{pmatrix}$$

$$x = k_2^2 * k_i + k_1 * k_2 - k_2 * k_i - k_1 - k_2$$

$$y = k_2 * k_i + 2 * k_i^2 + k_1 * k_i - k_i + k_1 - 1$$

$$z = 2 * k_2 * k_i^3 + k_1 * k_2 * k_i^2 + k_2 * k_1 * k_i + 2 * k_1 * k_i^2 - k_1^2 * k_i - k_1 + k_1^2$$

$$a = (k_i + 1) * (2 * k_i + k_1 - 2)$$

$$d = 2 * k_2^2 * k_i^3 + k_2^2 * k_1 * k_i^2 + k_2^2 * k_1 * k_i - 2 * k_2 * k_i^3 + k_1 * k_2 * k_i^2 + 2 * k_2 * k_i^2 + k_2 * k_1^2 * k_i - k_1 * k_2 + k_2 * k_1^2 - 2 * k_1 * k_i^2 - k_1^2 * k_i + 2 * k_1 - k_1^2$$

Οι παραγγελίες, οι οποίες γίνονται από τον δεύτερο κόμβο προς τον κατασκευαστή, αντιστοιχούν στο σήμα $O_{2,3}(t)$, το οποίο μπορεί να γραφτεί και ως

$$O_{2,3}(t) = Y_{3,2}(t+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * (SP_2(t) - IP_2(t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί και ως εξίσωση των μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και της μεταβλητής $SP_2(t)$. Δηλαδή, μπορεί να γραφτεί και με την μορφή $O_{2,3}(t) = C' * x(t) + k_2 * SP_2(t)$, όπου $x(t)$ είναι το διάνυσμα μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και $C' = (0 \ 0 \ -k_2 \ k_2 \ -k_2)$. Το φαινόμενο της ενίσχυσης της ζήτησης, το οποίο απεικονίζει τις αυξομειώσεις στα επίπεδα ζήτησης των κόμβων 1 (π.χ. πελάτης) και 3 (π.χ. χονδρέμπορος) υπολογίζεται από:

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} \approx C' * P_{5,5} * C$$

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} = \frac{P_{5,5,5}}{P_{5,2,2}} = P_{5,5,5} = -\frac{d * k_2}{x * a * (k_2 - 2)} \quad (15)$$

$$x = k_2^2 * k_i + k_1 * k_2 - k_2 * k_i - k_1 - k_2$$

$$a = (k_i + 1) * (2 * k_i + k_1 - 2)$$

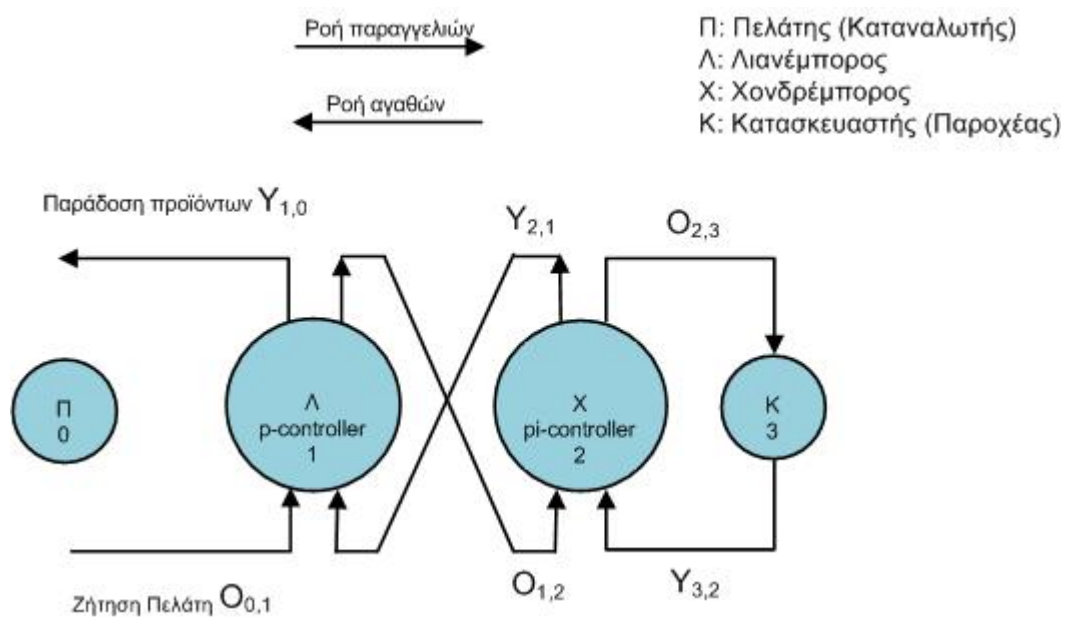
$$d = 2 * k_2^2 * k_i^3 + k_2^2 * k_1 * k_i^2 + k_2^2 * k_1 * k_i - 2 * k_2 * k_i^3 + k_1 * k_2 * k_i^2 + 2 * k_2 * k_i^2 + k_2 * k_1^2 * k_i - k_1 * k_2 + k_2 * k_1^2 - 2 * k_1 * k_i^2 - k_1^2 * k_i + 2 * k_1 - k_1^2$$

Εξισώνοντας την συνάρτηση (15) του «φαινομένου ενίσχυσης της ζήτησης» με τη μονάδα έχουμε την παρακάτω εξίσωση, την οποία μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή k_i (ελεγκτής στον πρώτο ενδιάμεσο κόμβο) δίνοντας κάποιες τιμές στις μεταβλητές k_1 και k_2 .

$$(8) \Leftrightarrow 1 = -\frac{d * k_2}{x * a * (k_2 - 2)} \quad (16)$$

5.5. ΠΕΜΠΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΚΑΙ ΔΥΟ ΕΛΕΓΚΤΕΣ, ΕΝΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΣ ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΚΑΙ ΕΝΑΣ ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ (P-PI-CONTROLLER)

Η πέμπτη περίπτωση είναι να έχουμε μια εφοδιαστική αλυσίδα με δύο ενδιάμεσους κόμβους, οι οποίοι είναι ο λιανέμπορος και ο χονδρέμπορος, και αυτή τη φορά έχουμε έναν αναλογικό ελεγκτή (*P-controller*) στον λιανέμπορο και έναν ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (*PI-controller*) στον χονδρέμπορο. Το μοντέλο της εφοδιαστικής αλυσίδας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 5.6).



Σχήμα 5.6: Μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους, έναν αναλογικό ελεγκτή και έναν ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (p-pi-controller)

Εξαιτίας του γεγονότος ότι έχουμε δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο ελεγκτές (*P-PI-controller*), προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις του χώρου κατάστασης:

$$IP_1(t) = IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t) \quad (1)$$

$$IP_2(t) = IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t) \quad (2)$$

$$O_{1,2}(t) = k_1 * (SP_1(t) - IP_1(t)) \quad (3)$$

$$O_{2,3}(t) = (k_2 + k_i * \frac{1}{s}) * (SP_2(t) - IP_2(t)) \quad (4)$$

$$Y_{1,0}(t) = O_1^*(t-1) \quad (5)$$

$$Y_{2,1}(t) = O_2^*(t-1) \quad (6)$$

$$Y_{3,2}(t) = O_3^*(t-1) \quad (7)$$

Λύνοντας την εξίσωση (3) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (3) \Rightarrow O_{1,2}(t) &= k_1 * (SP_1(t) - [IP_1(t-1) + Y_{2,1}(t) - Y_{1,0}(t)]) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow O_{1,2}(t) &= k_1 * SP_1(t) - k_1 * IP_1(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Λύνοντας την εξίσωση (4) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (4) \Rightarrow O_{2,3}(t) &= k_2 * (SP_2(t) - [IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t)]) + \\ &+ k_i * (SP_2(t) - [IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t)]) - k_i * (SP_2(t-1) - IP_2(t-1)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow O_{2,3}(t) &= k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t) + \\ &+ k_i * SP_2(t) - k_i * IP_2(t-1) - k_i * Y_{3,2}(t) + k_i * Y_{2,1}(t) - k_i * SP_2(t-1) + k_i * IP_2(t-1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow O_{2,3}(t) &= k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - (k_2 + k_i) * Y_{3,2}(t) + (k_2 + k_i) * Y_{2,1}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Λύνοντας την εξίσωση (5) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} (5) \Rightarrow Y_{1,0}(t) &= O_1^*(t-1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Y_{1,0}(t) &= O_{0,1}(t-1) + O_1^*(t-2) - Y_{1,0}(t-1) \end{aligned} \quad (10)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (10) &\Leftrightarrow^{(3)} Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + O_1^*(t-1) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) + Y_{1,0}(t) - Y_{1,0}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_{1,0}(t+1) = O_{0,1}(t) \quad (11)
 \end{aligned}$$

Λύνοντας την εξίσωση (6) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(6) \Rightarrow Y_{2,1}(t) = O_{1,2}(t-1) + O_2^*(t-2) - Y_{2,1}(t-1) \quad (12)$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα την προηγούμενη εξίσωση έχουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (12) &\Rightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + O_2^*(t-1) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^{(6)} Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) + Y_{2,1}(t) - Y_{2,1}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_{2,1}(t+1) = O_{1,2}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^{(8)} Y_{2,1}(t+1) = k_1 * SP(t) - k_1 * IP(t-1) - k_1 * Y_{2,1}(t) + k_1 * Y_{1,0}(t) \quad (13)
 \end{aligned}$$

Αυξάνοντας κατά μια χρονική μονάδα και λύνοντας την εξίσωση (7) έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 (7) &\Leftrightarrow Y_{3,2}(t+1) = O_3^*(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) + O_3^*(t-1) - Y_{3,2}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^{(7)} Y_{3,2}(t+1) = O_{2,3}(t) + Y_{3,2}(t) - Y_{3,2}(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^{(9)} Y_{3,2}(t+1) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - (k_2 + k_i) * Y_{3,2}(t) + (k_2 + k_i) * Y_{2,1}(t) \quad (14)
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1),(2), (11), (13) και (14), μπορούμε να δημιουργήσουμε τους πίνακες στον χώρο των καταστάσεων, οι οποίοι είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{bmatrix} IP_1(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ IP_2(t) \\ Y_{2,1}(t+1) \\ Y_{3,2}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 + k_i & -k_2 - k_i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} SP_1 \\ SP_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο ελεγκτές (*P-PI-controller*) είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 + k_i & -k_2 - k_i \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$D = [0]$$

Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A είναι ασυμππρωτικά ευσταθής (όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μικρότερες από ένα), ο πίνακας συμμεταβλητότητας της χώρας καταστάσεων του διανύσματος $x(t)$, υπολογίζεται λύνοντας την γραμμική εξίσωση Lyapunov. Η εξίσωση Lyapunov είναι

$$P - APA' - BB' = 0$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση με βάση τους πίνακες A και B, θα υπολογίσουμε τον πίνακα συμμεταβλητότητας του συγκεκριμένου χώρου καταστάσεων P_3 , ο οποίος είναι

$$P_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1 * (k_1 - 2)} & 0 & -\frac{k_1 - 1}{(k_1 - 2) * x} & \frac{1}{(k_1 - 2)} & \frac{(k_1 * k_i + k_2) * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 - 1}{(k_1 - 2) * x} & 0 & \frac{z * k_1}{a * x * k_2} & \frac{k_1 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * x} & \frac{k_1 * y}{a * x} \\ \frac{1}{(k_1 - 2)} & 0 & \frac{k_1 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * x} & -\frac{k_1}{k_1 - 2} & -\frac{b}{(k_1 - 2) * x} \\ \frac{(k_1 * k_i + k_2) * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * x} & 0 & \frac{k_1 * y}{a * x} & -\frac{b}{(k_1 - 2) * x} & -\frac{d * k_1}{x * a} \end{pmatrix}$$

$$x = k_1^2 * k_i + k_1 * k_2 - k_1 * k_i - k_1 - k_2$$

$$y = k_1^2 * k_i + 2 * k_1 * k_i^2 + k_1 * k_2 * k_i - k_1 * k_i + k_1 * k_2 - k_1 - 2 * k_i^2 - k_2 * k_i + 2 - k_2$$

$$z = k_1^2 * k_i^2 - k_1^2 * k_i - 3 * k_1 * k_i^2 + 2 * k_1 * k_i - k_1 * k_2 * k_i - k_1 * k_2 + k_1 + 2 * k_i^2 + k_2 * k_i - 2 + k_2$$

$$a = (k_i + 1) * (k_1 - 2) * (2 * k_i + k_2 - 2)$$

$$b = (k_1 - 1) * k_1 * (k_1 * k_i - k_2)$$

$$d = 2 * k_1^2 * k_i^3 + k_1^2 * k_2 * k_i^2 + k_1^2 * k_2 * k_i - 2 * k_1 * k_i^3 + k_1 * k_2 * k_i^2 + 2 * k_1 * k_i^2 + k_1 * k_2^2 * k_i - k_1 * k_2 + k_1 * k_2^2 - 2 * k_2 * k_i^2 - k_2^2 * k_i + 2 * k_2 - k_2^2$$

Οι παραγγελίες, οι οποίες γίνονται από τον δεύτερο κόμβο προς τον κατασκευαστή, αντιστοιχούν στο σήμα $O_{2,3}(t)$, το οποίο μπορεί να γραφτεί και ως

$$O_{2,3}(t) = Y_{3,2}(t+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * (SP_2(t) - [IP_2(t-1) + Y_{3,2}(t) - Y_{2,1}(t)]) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O_{2,3}(t) = k_2 * SP_2(t) - k_2 * IP_2(t-1) - k_2 * Y_{3,2}(t) + k_2 * Y_{2,1}(t)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί και ως εξίσωση των μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και της μεταβλητής $SP_2(t)$. Δηλαδή, μπορεί να γραφτεί και με την μορφή $O_{2,3}(t) = C' * x(t) + k_2 * SP_2(t)$, όπου $x(t)$ είναι το διάνυσμα μεταβλητών του χώρου των καταστάσεων και $C' = (0 \ 0 \ -k_2 \ k_2 \ -k_2)$. Το φαινόμενο της ενίσχυσης της ζήτησης, το οποίο απεικονίζει τις αυξομειώσεις στα επίπεδα ζήτησης των κόμβων 1 (π.χ. πελάτης) και 3 (π.χ. χονδρέμπορος) υπολογίζεται από

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} \approx C' * P_{5,5} * C$$

$$\beta = \frac{\text{var}(O_{2,3})}{\text{var}(O_{0,1})} = \frac{P_{5,5}}{P_{5,2}} = P_{5,5} = -\frac{d * k_1}{x * a} \quad (15)$$

$$x = k_1^2 * k_i + k_1 * k_2 - k_1 * k_i - k_1 - k_2$$

$$a = (k_i + 1) * (k_1 - 2) * (2 * k_i + k_2 - 2)$$

$$d = 2 * k_1^2 * k_i^3 + k_1^2 * k_2 * k_i^2 + k_1^2 * k_2 * k_i - 2 * k_1 * k_i^3 + k_1 * k_2 * k_i^2 + 2 * k_1 * k_i^2 + k_1 * k_2^2 * k_i - k_1 * k_2 + k_1 * k_2^2 - 2 * k_2 * k_i^2 - k_2 * k_i + 2 * k_2 - k_2^2$$

Εξισώνοντας την συνάρτηση (15) του «φαινόμενου ενίσχυσης της ζήτησης» με τη μονάδα έχουμε την παρακάτω εξίσωση, την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή k_i (ελεγκτής στον πρώτο ενδιάμεσο κόμβο) δίνοντας κάποιες τιμές στις μεταβλητές k_1 και k_2 .

$$(8) \Leftrightarrow 1 = -\frac{d * k_1}{x * a} \quad (16)$$

6. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ

Οι έννοιες της ελεγχιμότητας και της παρατηρησιμότητας έχουν ιδιαίτερη σημασία τόσο στον αυτόματο έλεγχο όσο και στη θεωρία των συστημάτων ελέγχου. Η ελεγχιμότητα συστήματος είναι η ιδιότητα της ύπαρξης κατάλληλης εισόδου που μπορεί να οδηγήσει το σύστημα από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση σε μια οποιαδήποτε άλλη κατάσταση σε πεπερασμένο χρόνο. Η παρατηρησιμότητα είναι η δυνατότητα εκτίμησης των καταστάσεων ενός συστήματος με πληροφορία που προέρχεται από την είσοδο και την έξοδο, (Φ. Ν. Κουμπουλής 2004). Ένα σύστημα πρέπει να και ελέγξιμο και παρατηρήσιμο, ώστε να επιτρέπεται ο πλήρης έλεγχος της σταθερότητάς του, Nise (1995) και Desai and Lalwani (1972).

Αφού παρουσιάσουμε τις δύο αυτές έννοιες και εξηγήσουμε πότε ένα σύστημα είναι ελέγξιμο και πότε παρατηρήσιμο, θα προχωρήσουμε στην εφαρμογή τους για την μελέτη της συμπεριφοράς των διαφόρων μοντέλων της εφοδιαστικής μας αλυσίδας.

6.1. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ

Έστω οι εξισώσεις του χώρου των καταστάσεων που περιγράφουν την χρονική εξέλιξη συστήματος σε χρόνο t :

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad \text{«άνυσμα καταστάσεων»}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1} \quad \text{«άνυσμα εισόδων»}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times 1} \quad \text{«άνυσμα εξόδων»}$$

Το σύστημα ονομάζεται ελέγξιμο αν και μόνο αν, για κάθε αρχική κατάσταση $x(0) \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει είσοδος $u(t)$, $t=0,1,\dots,N-1$ τέτοια ώστε, σε χρόνο N , να μεταφέρει την αρχική κατάσταση $x(0) \in \mathbb{R}^n$ σε κάθε τελική κατάσταση $x(N) \in \mathbb{R}^n$, (A. Βαρδουλάκης 2006).

Δηλαδή η ελεγχιμότητα περιγράφει τη δυνατότητα μιας εξωτερικής εισαγωγής να οδηγήσει την εσωτερική κατάσταση ενός συστήματος από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση προς οποιαδήποτε τελική κατάσταση σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα, Ogata (1997).

Για να διαπιστώσουμε αν ένα σύστημα είναι ελέγξιμο, είναι απαραίτητο να δημιουργήσουμε τον πίνακα ελεγχιμότητας. Ο πίνακας ελεγχιμότητας προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης του χώρου των καταστάσεων:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

Για $t = t_0$

$$x(t_0 + 1) = Ax(t_0) + Bu(t_0)$$

$$\begin{aligned}x(t_0 + 2) &= Ax(t_0 + 1) + Bu(t_0 + 1) \\ &= A[Ax(t_0) + Bu(t_0)] + Bu(t_0 + 1) \\ &= A^2x(t_0) + ABu(t_0) + Bu(t_0 + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(t_0 + 3) &= Ax(t_0 + 2) + Bu(t_0 + 2) \\ &= A[A^2x(t_0) + ABu(t_0) + Bu(t_0 + 1)] + Bu(t_0 + 2) \\ &= A^3x(t_0) + A^2Bu(t_0) + ABu(t_0 + 1) + Bu(t_0 + 2)\end{aligned}$$

⋮

$$x(t_0 + n) = A^n x(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t_0+n-1} A^{t_0+n-i-1} Bu(i)$$

Για $t_0 + n = t$

$$x(t) = A^{t-t_0} x(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} A^{t-i-1} Bu(i)$$

για $t_0 = 0$ και $t = N$ έχουμε:

$$x(N) = A^N x(0) + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} Bu(i)$$

Έστω ότι

$$X(N) = x(N) - A^N x(0)$$

Τότε

$$\begin{aligned}
X(N) &= \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} B u(i) \\
&= A^{N-1} B u(0) + A^{N-2} B u(1) + \dots + A B u(N-2) + B u(N-1) \\
&= \begin{bmatrix} A^{N-1} B & A^{N-2} B & \dots & A B & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-2) \\ u(N-1) \end{bmatrix} = S U
\end{aligned}$$

όπου

$$S = \begin{bmatrix} A^{N-1} B & A^{N-2} B & \dots & A B & B \end{bmatrix}$$

και

$$U = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-2) \\ u(N-1) \end{bmatrix}$$

Έτσι λοιπόν ο πίνακας ελεγχιμότητας ενός συστήματος είναι της μορφής:

$$S = \begin{bmatrix} B & A B & A^2 B \dots A^{N-1} B \end{bmatrix}$$

και για να διαπιστώσουμε αν το σύστημά μας είναι ελέγξιμο υπολογίζουμε το *Rank* (βαθμίδα) του και το συγκρίνουμε με το *Rank* του πίνακα A , (*Stefani R.T., B. Savant, C.J. Hostetter, G.H. 2002*). Αν το *Rank* του πίνακα ελεγχιμότητας είναι ίσο με το *Rank* του πίνακα A , τότε το σύστημα μας είναι ελέγξιμο, αν όχι τότε δεν είναι ελέγξιμο.

6.2. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

Έστω οι εξισώσεις του χώρου των καταστάσεων που περιγράφουν την χρονική εξέλιξη συστήματος σε χρόνο t :

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad \text{«άνυσμα καταστάσεων»}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1} \quad \text{«άνυσμα εισόδων»}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times 1} \quad \text{«άνυσμα εξόδων»}$$

Το σύστημα ονομάζεται παρατηρήσιμο αν και μόνο αν, γνώση της εξόδου $y(t)$ και της εισόδου $u(t)$ για $t=0,1,\dots,N-1$ επιτρέπει τον προσδιορισμό κάθε αρχικής κατάστασης $x(0) \in \mathbb{R}^n$, (A. Βαρδουλάκης 2006).

Δηλαδή χρησιμοποιώντας την έννοια της παρατηρησιμότητας μπορούμε να προσδιορίσουμε τις εσωτερικές αρχικές καταστάσεις ενός συστήματος και κατά συνέπεια την συμπεριφορά ολόκληρου του συστήματος, αν μας είναι γνωστές οι εξωτερικές εισοδοί και οι έξοδοι του συστήματος.

Αν το σύστημά μας δεν είναι παρατηρήσιμο, σημαίνει ότι οι τιμές κάποιων καταστάσεων του συστήματος δεν μπορούν να προσδιοριστούν διαμέσου των εισόδων και των εξόδων του συστήματος, και άρα είναι άγνωστες στον ελεγκτή. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να είναι ανίκανος να εκπληρώσει τις προδιαγραφές ελέγχου που αφορούν αυτές τις εξωτερικές εισόδους και εξόδους του συστήματος.

Για να εκτιμήσουμε αν ένα σύστημα είναι παρατηρήσιμο ή όχι, είναι απαραίτητο να δημιουργήσουμε τον πίνακα παρατηρησιμότητας. Ο πίνακας παρατηρησιμότητας προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης του χώρου των καταστάσεων:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Για $t = t+1$

$$\begin{aligned} y(t+1) &= Cx(t+1) + Du(t+1) \\ &= C[Ax(t) + Bu(t)] + Du(t+1) \\ &= CAx(t) + CBu(t) + Du(t+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t+2) &= CAx(t+1) + CBu(t+1) + Du(t+2) \\ &= CA[Ax(t) + Bu(t)] + CBu(t+1) + Du(t+2) \\ &= CA^2x(t) + CABu(t) + CBu(t+1) + Du(t+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t+3) &= CA^2x(t+1) + CABu(t+1) + CBu(t+2) + Du(t+3) \\ &= CA^2[Ax(t) + Bu(t)] + CABu(t+1) + CBu(t+2) + Du(t+3) \\ &= CA^3x(t) + CA^2u(t) + CABu(t+1) + CBu(t+2) + Du(t+3) \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές υπό μορφή πινάκων γράφονται:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y(t+1) \\ y(t+2) \\ y(t+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ CB & D & 0 & 0 \\ CAB & CB & D & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ u(t+2) \\ u(t+3) \end{bmatrix}$$

Γενικά για N φυσικό έχουμε

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y(t+1) \\ y(t+2) \\ \vdots \\ y(t+N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & CA^{N-4}B & \dots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ u(t+2) \\ \vdots \\ u(t+N-1) \end{bmatrix}$$

Ή

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t+1) \\ y(t+2) \\ \vdots \\ y(t+N-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & CA^{N-4}B & \dots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ u(t+2) \\ \vdots \\ u(t+N-1) \end{bmatrix}$$

Για $t=0$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & CA^{N-4}B & \dots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix}$$

Αν οι τιμές της εισόδου και της εξόδου κατά τις χρονικές στιγμές $1, 2, \dots, N-1$ είναι γνωστές για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε το αρχικό άνυσμα κατάστασης $x(0)$ πρέπει και αρκεί ο πίνακας παρατηρησιμότητας που είναι της μορφής:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}$$

να έχει *Rank* (βαθμίδα) ίσο με το *Rank* του πίνακα A . (*Stefani R.T., B. Savant, C.J. Hostetter, G.H. 2002*). Για να είναι δηλαδή το σύστημα παρατηρήσιμο πρέπει $Rank(O) = Rank(A)$.

6.3. ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΤΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΜΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ

Θα εξετάσουμε διάφορες περιπτώσεις εφοδιαστικών αλυσίδων με βάση δύο κριτήρια, τα οποία είναι:

- το πλήθος των κόμβων της εφοδιαστικής αλυσίδας που παρεμβάλλονται μεταξύ του πελάτη και του κατασκευαστή (λιανέμπορος, χονδρέμπορος, κλπ.)
- το είδος του ελεγκτή που θα χρησιμοποιήσουμε στον κάθε κόμβο

6.3.1. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΕΝΑΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟ ΚΟΜΒΟ ΚΑΙ ΕΝΑΝ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΕΛΕΓΚΤΗ (P-CONTROLLER)

Η πρώτη και πιο απλή περίπτωση που θα μελετήσουμε είναι να έχουμε μια εφοδιαστική αλυσίδα με έναν ενδιάμεσο κόμβο, ο οποίος είναι ο λιανέμπορος και έναν αναλογικό ελεγκτή (*P-controller*) (σχήμα 5.1). Με βάση τις εξισώσεις που υπάρχουν για τον αναλογικό ελεγκτή (*P-controller*) και το γεγονός ότι έχουμε μόνον έναν ενδιάμεσο κόμβο, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις του χώρου κατάστασης:

$$\begin{bmatrix} IP(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ Y_{2,1}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & -k_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} * SP$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \quad 1 \quad 0] * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με ένα ενδιάμεσο κόμβο και έναν αναλογικό ελεγκτή (*P-controller*) είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & -k_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0]$$

$$D = [0]$$

6.3.1.1. Ελεγχιμότητα (p-controller)

Για να μελετήσουμε το σύστημα ως προς την ελεγχιμότητα κατασκευάζουμε τον πίνακα ελεγχιμότητας, που είναι της μορφής:

$$S = [B \quad AB \quad A^2B]$$

αφού πρώτα υπολογίσουμε τον AB και τον A^2B :

$$AB = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} k_1 - 1 \\ 0 \\ k_1 - k_1^2 \end{bmatrix}$$

Έτσι λοιπόν,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & k_1 - 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_1(1 - k_1) \end{bmatrix}$$

βρίσκουμε το rank του S , $Rank(S) = 2$ και το συγκρίνουμε με το rank του A , $Rank(A) = 1$:

$$Rank(S) \neq Rank(A)$$

Όμως επειδή ο πίνακας ελεγχιμότητας κερδίζει $Rank$ σε σχέση με τον πίνακα A , $Rank(S) > Rank(A)$, το σύστημα μας είναι ελέγξιμο.

6.3.1.2. Παρατηρησιμότητα (p-controller)

Για να μελετήσουμε το σύστημα ως προς την παρατηρησιμότητα κατασκευάζουμε τον πίνακα παρατηρησιμότητας, που είναι της μορφής:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου } C = C' = [-k_1 \quad k_1 \quad -k_1],$$

που αντιστοιχεί στη τελευταία γραμμή του πίνακα A , δηλαδή στο σήμα $Y_{2,1}$, που δηλώνει τα προϊόντα που παραδίδονται τελικά από τον κατασκευαστή.

αφού πρώτα υπολογίσουμε το CA και το CA^2 :

$$CA = [-k_1 + k_1^2 \quad k_1 - k_1^2 \quad -k_1 + k_1^2]$$

$$CA^2 = [-k_1 * (k_1 - 1)^2 \quad k_1 * (k_1 - 1)^2 \quad -k_1 * (k_1 - 1)^2]$$

Έτσι λοιπόν,

$$O = \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 & -k_1 \\ -k_1 + k_1^2 & k_1 - k_1^2 & -k_1 + k_1^2 \\ -k_1 * (k_1 - 1)^2 & k_1 * (k_1 - 1)^2 & -k_1 * (k_1 - 1)^2 \end{bmatrix}$$

βρίσκουμε το rank του O , $Rank(O) = 1$ και το συγκρίνουμε με το rank του A , $Rank(A) = 1$:

$$Rank(S) = Rank(A)$$

και επομένως το σύστημα μας είναι παρατηρήσιμο.

6.3.2. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΕΝΑΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟ ΚΟΜΒΟ ΚΑΙ ΕΝΑΝ ΕΛΕΓΚΤΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ (PI-CONTROLLER)

Η δεύτερη περίπτωση είναι να έχουμε πάλι μια εφοδιαστική αλυσίδα με έναν ενδιάμεσο κόμβο, ο οποίος είναι ο λιανέμπορος, άλλα αυτή τη φορά έχουμε έναν *ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (PI-controller)* (σχήμα 5.2). Εξαιτίας του γεγονότος ότι έχουμε έναν ενδιάμεσο κόμβο και έναν *ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης*, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις του χώρου κατάστασης:

$$\begin{bmatrix} IP(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ Y_{2,1}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_p & (k_p + k_i) & -(k_p + k_i) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * [O_{0,1}(t)] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_p + k_i \end{bmatrix} * SP_1$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0] * \begin{bmatrix} IP(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ Y_{2,1}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με έναν ενδιάμεσο κόμβο και έναν *ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (PI-controller)* είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_p & (k_p + k_i) & -(k_p + k_i) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0]$$

$$D = [0]$$

6.3.2.1. Ελεγχιμότητα (pi-controller)

Για να μελετήσουμε το σύστημα ως προς την ελεγχιμότητα κατασκευάζουμε τον πίνακα ελεγχιμότητας, που είναι της μορφής:

$$S = [B \ AB \ A^2B]$$

αφού πρώτα υπολογίσουμε τον AB και τον A^2B :

$$AB = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ k_p + k_i \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} (k_p + k_i) - 1 \\ 0 \\ k_p - (k_p + k_i)^2 \end{bmatrix}$$

Έτσι λοιπόν,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & (k_p + k_i) - 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_p + k_i & k_p - (k_p + k_i)^2 \end{bmatrix}$$

βρίσκουμε το rank του S , $Rank(S) = 3$ και το συγκρίνουμε με το rank του A ,
 $Rank(A) = 2$:

$$Rank(S) \neq Rank(A)$$

Όμως επειδή ο πίνακας ελεγχιμότητας κερδίζει $Rank$ σε σχέση με τον πίνακα
 A , $Rank(S) > Rank(A)$, το σύστημα μας είναι ελέγξιμο.

6.3.2.2. Παρατηρησιμότητα (pi-controller)

Για να μελετήσουμε το σύστημα ως προς την παρατηρησιμότητα κατασκευάζουμε τον πίνακα παρατηρησιμότητας, που είναι της μορφής:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου } C = C' = \begin{bmatrix} -k_p & k_p + k_i & -(k_p + k_i) \end{bmatrix},$$

αφού πρώτα υπολογίσουμε το CA και το CA^2 :

$$CA = \begin{bmatrix} k_p(k_p + k_i - 1) & k_p - (k_p + k_i)^2 & -k_p + (k_p + k_i)^2 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} -k_p(1 - 2k_p - k_i + (k_p + k_i)^2) & k_p - 2k_p^2 - 2k_p k_i + (k_p + k_i)^3 & -k_p + 2k_p^2 + 2k_p k_i - (k_p + k_i)^3 \end{bmatrix}$$

Έτσι λοιπόν,

$$O = \begin{bmatrix} -k_p & k_p + k_i & -(k_p + k_i) \\ k_p(k_p + k_i - 1) & k_p - (k_p + k_i)^2 & -k_p + (k_p + k_i)^2 \\ -k_p(1 - 2k_p - k_i + (k_p + k_i)^2) & k_p - 2k_p^2 - 2k_p k_i + (k_p + k_i)^3 & -k_p + 2k_p^2 + 2k_p k_i - (k_p + k_i)^3 \end{bmatrix}$$

βρίσκουμε το rank του O , $Rank(O) = 2$ και το συγκρίνουμε με το rank του A ,
 $Rank(A) = 2$:

$$Rank(S) = Rank(A)$$

και επομένως το σύστημα μας είναι παρατηρήσιμο.

6.3.3. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ ΚΑΙ ΔΥΟ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥΣ ΕΛΕΓΚΤΕΣ (P-P- CONTROLLER)

Η τρίτη περίπτωση είναι να έχουμε μια εφοδιαστική αλυσίδα με δύο ενδιάμεσους κόμβους, οι οποίοι είναι ο λιανέμπορος και ο χονδρέμπορος, και αυτή τη φορά έχουμε δύο αναλογικούς ελεγκτές (*P-P-controller*), έναν στο λιανέμπορο και έναν στο χονδρέμπορο (σχήμα 5.3). Εξαιτίας του γεγονότος ότι έχουμε δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο αναλογικούς ελεγκτές (*P-P-controller*), προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις του χώρου κατάστασης:

$$\begin{bmatrix} IP_1(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ IP_2(t) \\ Y_{2,1}(t+1) \\ Y_{3,2}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} SP_1 \\ SP_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο αναλογικούς ελεγκτές (*P-P-controller*) είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$D = [0]$$

6.3.3.1. Ελεγχιμότητα (p-p-controller)

Για να μελετήσουμε το σύστημα ως προς την ελεγχιμότητα κατασκευάζουμε τον πίνακα ελεγχιμότητας, που είναι της μορφής:

$$S = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B]$$

αφού πρώτα υπολογίσουμε τον AB , τον A^2B , τον A^3B και τον A^4B :

$$AB = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ k_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} k_1 - 1 \\ 0 \\ -k_1 \\ k_1 - k_1^2 \\ k_1 k_2 \end{bmatrix}$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} -(k_1 - 1)^2 \\ 0 \\ k_1(k_1 + k_2 - 2) \\ k_1(k_1 - 1)^2 \\ -k_1(k_1 - 1)^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4B = \begin{bmatrix} (k_1 - 1)^3 \\ 0 \\ -k_1(3 - 3k_1 - 3k_2 + k_1^2 + k_2k_1 + k_2^2) \\ -k_1(k_1 - 1)^3 \\ k_1k_2(3 - 3k_1 - 3k_2 + k_1^2 + k_2k_1 + k_2^2) \end{bmatrix}$$

Έτσι λοιπόν,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & k_1 - 1 & -(k_1 - 1)^2 & (k_1 - 1)^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 & k_1(k_1 + k_2 - 2) & -k_1(3 - 3k_1 - 3k_2 + k_1^2 + k_2k_1 + k_2^2) \\ 0 & k_1 & k_1 - k_1^2 & k_1(k_1 - 1)^2 & -k_1(k_1 - 1)^3 \\ 0 & 0 & k_1k_2 & -k_1(k_1 - 1)^3 & k_1k_2(3 - 3k_1 - 3k_2 + k_1^2 + k_2k_1 + k_2^2) \end{bmatrix}$$

βρίσκουμε το rank του S , $Rank(S) = 3$ και το συγκρίνουμε με το rank του A ,

$$Rank(A) = 2:$$

$$Rank(S) \neq Rank(A)$$

Όμως επειδή ο πίνακας ελεγχιμότητας κερδίζει $Rank$ σε σχέση με τον πίνακα A , $Rank(S) > Rank(A)$, το σύστημα μας είναι ελέγξιμο.

6.3.3.2. Παρατηρησιμότητα (p-p-controller)

Για να μελετήσουμε το σύστημα ως προς την παρατηρησιμότητα κατασκευάζουμε τον πίνακα παρατηρησιμότητας, που είναι της μορφής:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \end{bmatrix}$$

όπου $C = C' = [0 \ 0 \ -k_2 \ k_2 \ -k_2]$,

αφού πρώτα υπολογίσουμε το CA , το CA^2 , το CA^3 και το CA^4 :

$$CA = \begin{bmatrix} -k_1 k_2 & k_1 k_2 & -k_2 + k_2^2 & k_2 - k_2 k_1 - k_2^2 & -k_2 + k_2^2 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} k_1 k_2 (k_1 - 2 + k_2) & -k_1 k_2 (k_1 - 2 + k_2) & -k_2 (k_2 - 1)^2 & k_2 (1 - 2k_1 - 2k_2 + y) & -k_2 (k_2 - 1)^2 \end{bmatrix}$$

$$CA^3 = \begin{bmatrix} -k_1 k_2 (3 - 3k_1 - 3k_2 + y) & k_1 k_2 (3 - 3k_1 - 3k_2 + y) & k_2 (k_2 - 1)^3 & -k_2 (3k_1 - 1 + 3k_2 - 3y + k_1^3 + x) & k_2 (k_2 - 1)^3 \end{bmatrix}$$

$$CA^4 = \begin{bmatrix} k_1 k_2 (k_2 - 2 + k_1) v & -k_1 k_2 (k_2 - 2 + k_1) v & -k_2 (k_2 - 1)^4 & k_2 (-4k_1 + 6y + 1 - 4k_2 - 4x + k_1 x + k_2^4) & -k_2 (k_2 - 1)^4 \end{bmatrix}$$

Έτσι λοιπόν,

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \\ -k_1k_2 & k_1k_2 & -k_2+k_2^2 & k_2-k_2k_1-k_2^2 & -k_2+k_2^2 \\ k_1k_2(k_1-2+k_2) & -k_1k_2(k_1-2+k_2) & -k_2(k_2-1)^2 & k_2(1-2k_1-2k_2+y) & -k_2(k_2-1)^2 \\ -k_1k_2(3-3k_1-3k_2+y) & k_1k_2(3-3k_1-3k_2+y) & k_2(k_2-1)^3 & -k_2(3k_1-1+3k_2-3y+k_1^3+x) & k_2(k_2-1)^3 \\ k_1k_2(k_2-2+k_1)v & -k_1k_2(k_2-2+k_1)v & -k_2(k_2-1)^4 & k_2(-4k_1+6y+1-4k_2-4x+k_1x+k_2^4) & -k_2(k_2-1)^4 \end{bmatrix}$$

Όπου,

$$v = k_1^2 - 2k_1 - 2k_2 + k_2^2 + 2$$

$$x = k_1^3 + k_2k_1^2 + k_1k_2^2 + k_2^3$$

$$y = k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2$$

βρίσκουμε το rank του O , $Rank(O) = 2$ και το συγκρίνουμε με το rank του A ,

$$Rank(A) = 2:$$

$$Rank(S) = Rank(A)$$

και επομένως το σύστημα μας είναι παρατηρήσιμο.

6.3.4. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ ΚΑΙ ΔΥΟ ΕΛΕΓΚΤΕΣ, ΕΝΑΝ ΕΛΕΓΚΤΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΚΑΙ ΕΝΑΝ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΕΛΕΓΚΤΗ (PI-P-CONTROLLER)

Η τέταρτη περίπτωση είναι να έχουμε μια εφοδιαστική αλυσίδα με δύο ενδιάμεσους κόμβους, οι οποίοι είναι ο λιανέμπορος και ο χονδρέμπορος, και αυτή τη φορά έχουμε έναν *ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (PI-controller)* στον λιανέμπορο και έναν *αναλογικό ελεγκτή (P-controller)* στον χονδρέμπορο (σχήμα 5.5). Εξαιτίας του γεγονότος ότι έχουμε δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο ελεγκτές (*PI-P-controller*), προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις του χώρου κατάστασης:

$$\begin{bmatrix} IP_1(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ IP_2(t) \\ Y_{2,1}(t+1) \\ Y_{3,2}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1+k_i & 0 & -k_1-k_i & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} SP_1 \\ SP_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο ελεγκτές (*PI-P-controller*) είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 + k_i & 0 & -k_1 - k_i & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$D = [0]$$

6.3.4.1. Ελεγχιμότητα (pi-p-controller)

Για να μελετήσουμε το σύστημα ως προς την ελεγχιμότητα κατασκευάζουμε τον πίνακα ελεγχιμότητας, που είναι της μορφής:

$$S = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B]$$

αφού πρώτα υπολογίσουμε τον AB , τον A^2B , τον A^3B και τον A^4B :

$$AB = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ k_1 + k_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} k_1 + k_i - 1 \\ 0 \\ -k_1 - k_i \\ k_1 - (k_1 + k_i)^2 \\ k_2(k_1 + k_i) \end{bmatrix}$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} -1 + 2k_1 + k_i - (k_1 + k_i)^2 \\ 0 \\ (k_1 + k_i)^2 + k_1k_2 + k_2k_i - 2k_1 - k_i \\ k_1 - 2k_1^2 - 2k_1k_i + (k_1 + k_i)^3 \\ -k_2((k_1 + k_i)^2 + k_1k_2 + k_2k_i - 2k_1 - k_i) \end{bmatrix}$$

$$A^4B = \begin{bmatrix} (k_1 + k_i - 1)((k_1 + k_i)^2 - 2k_1 + 1) \\ 0 \\ -3k_1 + 3k_1^2 + 4k_1k_i + 3k_2k_1 - k_i + 2k_1k_2 + k_i^2 - x \\ y \\ -k_2(-3k_1 + 3k_1^2 + 4k_1k_i + 3k_2k_1 - k_i + 2k_1k_2 + k_i^2 - x) \end{bmatrix}$$

Έτσι λοιπόν,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & k_1 + k_i - 1 & -1 + 2k_1 + k_i - (k_1 + k_i)^2 & (k_1 + k_i - 1)((k_1 + k_i)^2 - 2k_1 + 1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 - k_i & (k_1 + k_i)^2 + k_1k_2 + k_2k_i - 2k_1 - k_i & -3k_1 + 3k_1^2 + 4k_1k_i + 3k_2k_1 - k_i + 2k_1k_2 + k_i^2 - x \\ 0 & k_1 + k_i & k_1 - (k_1 + k_i)^2 & k_1 - 2k_1^2 - 2k_1k_i + (k_1 + k_i)^3 & y \\ 0 & 0 & k_2(k_1 + k_i) & -k_2((k_1 + k_i)^2 + k_1k_2 + k_2k_i - 2k_1 - k_i) & -k_2(-3k_1 + 3k_1^2 + 4k_1k_i + 3k_2k_1 - k_i + 2k_1k_2 + k_i^2 - x) \end{bmatrix}$$

όπου,

$$x = (k_1 + k_i)^3 - k_2((k_1 + k_i)^2 - k_1k_2 - k_i k_2)$$

$$y = k_1 - 3k_1^2 - 2k_1k_i + 3k_1^3 + 6k_1^2k_i + 3k_1k_i^2 - k_1^4 - 4k_1^3k_i - 6k_1^2k_i^2 - 4k_1k_i^3 - k_i^4$$

βρίσκουμε το rank του S , $Rank(S) = 4$ και το συγκρίνουμε με το rank του A , $Rank(A) = 3$:

$$Rank(S) \neq Rank(A)$$

Όμως επειδή ο πίνακας ελεγχιμότητας κερδίζει $Rank$ σε σχέση με τον πίνακα A , $Rank(S) > Rank(A)$, το σύστημα μας είναι ελέγξιμο.

6.3.4.2. Παρατηρησιμότητα (pi-p-controller)

Για να μελετήσουμε το σύστημα ως προς την παρατηρησιμότητα κατασκευάζουμε τον πίνακα παρατηρησιμότητας, που είναι της μορφής:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου } C = C' = [0 \quad 0 \quad -k_2 \quad k_2 \quad -k_2],$$

αφού πρώτα υπολογίσουμε το CA , το CA^2 , το CA^3 και το CA^4 :

$$CA = \begin{bmatrix} -k_1 k_2 & k_2(k_1 + k_i) & -k_2 + k_2^2 & k_2 - k_2(k_1 + k_i) - k_2^2 & -k_2 + k_2^2 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} k_1 k_2(k_1 - 2 + k_2 + k_i) & -k_2(-k_i - 2k_1 + x) & -k_2(k_2 - 1)^2 & k_2(1 - 2k_1 - 2k_2 - k_i + x + k_2^2) & -k_2(k_2 - 1)^2 \end{bmatrix}$$

$$CA^3 = \begin{bmatrix} -k_1 k_2(3 - 3k_1 - 3k_2 - 2k_i + x + k_2^2) & k_2(w + (k_1 + k_i)^3 + k_2 x) & k_2(k_2 - 1)^3 & -k_2(wh + (k_1 + k_i)^3 + k_2 x) & k_2(k_2 - 1)^3 \end{bmatrix}$$

$$CA^4 = \begin{bmatrix} k_1 k_2 (k_2 x + (k_1 + k_i)^3 - 4z + 6d + y) & -k_2 (k_2^2 x + k_2 (k_1 + k_i)^3 + n) & -k_2 (k_2 - 1)^4 & k_2 (1 - k_2^2 x + k_2 (k_1 + k_i)^3 + m) & -k_2 (k_2 - 1)^4 \end{bmatrix}$$

Έτσι λοιπόν,

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 k_2 & k_2 (k_1 + k_i) & -k_2 + k_2^2 & k_2 - k_2 (k_1 + k_i) - k_2^2 & -k_2 + k_2^2 \\ k_1 k_2 (k_1 - 2 + k_2 + k_i) & -k_2 (-k_1 - 2k_1 + x) & -k_2 (k_2 - 1)^2 & k_2 (1 - 2k_1 - 2k_2 - k_1 + x + k_2^2) & -k_2 (k_2 - 1)^2 \\ -k_1 k_2 (3 - 3k_1 - 3k_2 - 2k_1 + x + k_2^2) & k_2 (w + (k_1 + k_i)^3 + k_2 x) & k_2 (k_2 - 1)^3 & -k_2 (wh + (k_1 + k_i)^3 + k_2 x) & k_2 (k_2 - 1)^3 \\ k_1 k_2 (k_2 x + (k_1 + k_i)^3 - 4z + 6d + y) & -k_2 (k_2^2 x + k_2 (k_1 + k_i)^3 + n) & -k_2 (k_2 - 1)^4 & k_2 (1 - k_2^2 x + k_2 (k_1 + k_i)^3 + m) & -k_2 (k_2 - 1)^4 \end{bmatrix}$$

όπου,

$$x = (k_1 + k_i)^2 + k_1 k_2 + k_2 k_i$$

$$w = 3k_1 - 3k_1^2 - 4k_1 k_i - 3k_1 k_2 + k_i - 2k_2 k_i - k_i^2$$

$$z = k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2 + 1$$

$$d = k_1 + k_2 - k_1 k_i$$

$$f = k_1 + k_i - k_i^2 + k_1 k_i^2$$

$$g = k_1 + k_2 + k_2^2 k_1 + k_2 k_1^2 + k_2^3 + k_1^3 - k_1^3 k_i - k_1 k_i^3$$

$$j = k_1^4 + k_i^4 + k_2^4 - k_i^3 + k_i^2 + 3k_2 k_i - 2k_2 k_i^2 - 3k_2^2 k_i - 9k_1^2 k_i - k_i$$

$$m = 6k_2 d + 6k_1 f - 4g + j$$

$$n = 6k_2 d + 6k_1 f - 6k_2^2 - 6k_1 k_2 - 4g + 4k_2^3 + 4k_2 + j - k_2^4$$

$$y = 3k_i + k_2^3 - 2k_i^2 - 3k_2 k_i$$

$$h = -1 + 3k_2 - 3k_2^2 + k_2^3$$

βρίσκουμε το rank του O , $Rank(O) = 3$ και το συγκρίνουμε με το rank του A ,

$$Rank(A) = 3 :$$

$$Rank(S) = Rank(A)$$

και επομένως το σύστημα μας είναι παρατηρήσιμο.

6.3.5. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ ΚΑΙ ΔΥΟ ΕΛΕΓΚΤΕΣ, ΕΝΑΝ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΕΛΕΓΚΤΗ ΚΑΙ ΕΝΑΝ ΕΛΕΓΚΤΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ (P-PI-CONTROLLER)

Η πέμπτη περίπτωση είναι να έχουμε μια εφοδιαστική αλυσίδα με δύο ενδιάμεσους κόμβους, οι οποίοι είναι ο λιανέμπορος και ο χονδρέμπορος, και αυτή τη φορά έχουμε έναν αναλογικό ελεγκτή (*P-controller*) στον λιανέμπορο και έναν ελεγκτή αναλογίας-ολοκλήρωσης (*PI-controller*) στον χονδρέμπορο (σχήμα 5.6). Εξαιτίας του γεγονότος ότι έχουμε δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο ελεγκτές (*P-PI-controller*), προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις του χώρου κατάστασης:

$$\begin{bmatrix} IP_1(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ IP_2(t) \\ Y_{2,1}(t+1) \\ Y_{3,2}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 + k_i & -k_2 - k_i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} SP_1 \\ SP_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο ελεγκτές (*P-PI-controller*) είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 + k_i & -k_2 - k_i \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$D = [0]$$

6.3.5.1. Ελεγχιμότητα (p-pi-controller)

Για να μελετήσουμε το σύστημα ως προς την ελεγχιμότητα κατασκευάζουμε τον πίνακα ελεγχιμότητας, που είναι της μορφής:

$$S = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B]$$

αφού πρώτα υπολογίσουμε τον AB , τον A^2B , τον A^3B και τον A^4B :

$$AB = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ k_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} k_1 - 1 \\ 0 \\ -k_1 \\ k_1 - k_1^2 \\ k_1(k_2 + k_i) \end{bmatrix}$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} -(k_1 - 1)^2 \\ 0 \\ k_1(k_1 + k_i + k_i - 2) \\ k_1(k_1 - 1)^2 \\ -k_1((k_2 + k_i)^2 + k_1k_2 + k_1k_i - 2k_2 - k_i) \end{bmatrix}$$

$$A^4B = \begin{bmatrix} (k_1 - 1)^3 \\ 0 \\ -k_1(3 - 3k_1 + k_1^2 + (k_2 + k_i)^2 + x) \\ -k_1(k_1 - 1)^3 \\ k_1(k_1(k_2 + k_i)^2 + (k_2 + k_i)^3 + y + k_1x) \end{bmatrix}$$

Έτσι λοιπόν,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & k_1 - 1 & -(k_1 - 1)^2 & (k_1 - 1)^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 & k_1(k_1 + k_i + k_i - 2) & -k_1(3 - 3k_1 + k_1^2 + (k_2 + k_i)^2 + x) \\ 0 & k_1 & k_1 - k_1^2 & k_1(k_1 - 1)^2 & -k_1(k_1 - 1)^3 \\ 0 & 0 & k_1(k_2 + k_i) & -k_1((k_2 + k_i)^2 + k_1k_2 + k_1k_i - 2k_2 - k_i) & k_1(k_1(k_2 + k_i)^2 + (k_2 + k_i)^3 + y + k_1x) \end{bmatrix}$$

όπου,

$$x = k_2k_1 + k_1k_i - 2k_i - 3k_2$$

$$y = k_i - 4k_2k_i + 3k_2 - k_i^2 - 3k_2^2$$

βρίσκουμε το rank του S , $Rank(S) = 4$ και το συγκρίνουμε με το rank του A ,
 $Rank(A) = 3$:

$$Rank(S) \neq Rank(A)$$

Όμως επειδή ο πίνακας ελεγχιμότητας κερδίζει $Rank$ σε σχέση με τον πίνακα
 A , $Rank(S) > Rank(A)$, το σύστημα μας είναι ελέγξιμο.

6.3.5.2. Παρατηρησιμότητα (p-pi-controller)

Για να μελετήσουμε το σύστημα ως προς την παρατηρησιμότητα κατασκευάζουμε τον πίνακα παρατηρησιμότητας, που είναι της μορφής:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου } C = C' = [0 \quad 0 \quad -k_2 \quad k_2 + k_i \quad -k_2 - k_i],$$

αφού πρώτα υπολογίσουμε το CA , το CA^2 , το CA^3 και το CA^4 :

$$CA = \begin{bmatrix} -k_1(k_2 + k_i) & k_1(k_2 + k_i) & k_2(k_i + k_2 - 1) & k_2 - k_1k_2 - k_1k_i - (k_2 + k_i)^2 & -k_2 + (k_i + k_2)^2 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} k_1(x + (k_2 + k_i)^2) & -k_1(x + (k_2 + k_i)^2) & -k_2(1 - 2k_2 - k_i + (k_2 + k_i)^2) & k_1(k_2 + k_i)^2 + (k_2 + k_i)^3 - y + k_1x & y - (k_2 + k_i)^3 \end{bmatrix}$$

$$CA^3 = \begin{bmatrix} -k_1(k_2z + v + k_1w) & k_1(k_2z + v + k_1w) & k_2(k_2 + k_i - 1)((k_2 + k_i)^2 - 2k_2 + 1) & -k_1v + q + 4r & 3e + n \end{bmatrix}$$

$$CA^4 = \begin{bmatrix} k_1(k_1v + 4f + 3d + g) & -k_1(k_1v + 4f + 3d + g) & -k_2(4m + 3j + h) & -3u + 5t - p + 4k_1f + 3k_1j + k_1^2v + k_1l + 3k_1^2b & 3u - 5t + p \end{bmatrix}$$

Έτσι λοιπόν,

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_2 & k_2+k_i & -k_2-k_i \\ -k_i(k_2+k_i) & k_i(k_2+k_i) & k_2(k_2+k_i-1) & k_2-k_1k_2-k_1k_i-(k_2+k_i)^2 & -k_2+(k_2+k_i)^2 \\ k_1(x+(k_2+k_i)^2) & -k_1(x+(k_2+k_i)^2) & -k_2(1-2k_2-k_2+k_2+k_i)^2 & k_1(k_2+k_i)^2+(k_2+k_i)^3-y+k_1x & y-(k_2+k_i)^3 \\ -k_i(k_2z+v+k_1w) & k_i(k_2z+v+k_1w) & k_2(k_2+k_i-1)(k_2+k_i)^2-2k_2+1 & -k_1v+q+4r & 3e+n \\ k_1(k_1v+4f+3d+g) & -k_1(k_1v+4f+3d+g) & -k_2(4m+3j+h) & -3u+5t-p+4k_1f+3k_1j+k_1^2v+k_1l+3k_1^2b & 3u-5t+p \end{bmatrix}$$

όπου,

$$x = -2k_2 + k_2k_1 - k_i + k_1k_i$$

$$y = -k_2 + 2k_2^2 + 2k_2k_i$$

$$z = 3 - 3k_1 - 3k_2 - 4k_i$$

$$w = -3k_2 - 2k_i + k_2k_1 + k_1k_i$$

$$q = -k_2^4 - k_i^4 + k_2 + 4k_1k_1k_2 - 4k_2^3k_i - 4k_2k_i^3 - k_1k_i - 2k_2k_i + 2k_1^2k_i + k_i^2k_1 - k_1^3k_2 - k_1^3k_i$$

$$r = k_1k_2 - k_2^2 + k_1^2k_2 + k_1k_2^2 + 2k_2^2k_i + k_2k_i^2 + k_2^3 - 2k_2^2k_i^2$$

$$e = k_2^2 - k_2^3 - 2k_2^2k_i - k_2k_i^2 + 2k_2^2k_i^2$$

$$n = -k_2 + 2k_2k_i + k_2^4 + 4k_2^3k_i + 4k_2k_i^3 + k_i^4$$

$$v = (k_2 + k_i)^3 + k_1(k_2 + k_i)^2$$

$$f = k_2k_i^3 + k_2^3k_i - k_2^3 - k_1k_2^2 - k_1^2k_2 - k_2$$

$$d = 2k_1k_2k_i + 2k_1k_2 + k_1k_i + k_2^2 + k_2k_i - k_1^2k_i - 3k_2^2k_i - 2k_2k_i^2 + 2k_2^2k_i^2$$

$$g = -k_i + k_i^2 - 2k_1k_i^2 - k_i^3 + k_1^3k_2 + k_1^3k_i + k_2^4 + k_i^4$$

$$m = k_2k_i^3 + k_2^3k_i - k_2^3 - k_2$$

$$j = 2k_2^2 + 2k_2k_i - 3k_2^2k_i - 2k_2k_i^2 + 2k_2^2k_i^2$$

$$h = 1 + k_2^4 - k_i + k_i^2 - k_i^3 + k_i^4$$

$$t = k_2^4k_i + 2k_2^3k_i^2 + 2k_2^2k_i^3 + k_2k_i^4$$

$$u = 4k_2^2k_i^2 + 4k_2^3k_i - k_2k_i^2 - 3k_2^2k_i - 2k_2^3$$

$$p = -k_2 + 4k_2^4 - k_2^5 - k_i^5 + 4k_2^2 + 2k_2k_i + 4k_2k_i^3$$

$$l = k_i^4 + k_2^4 + k_i^2 + k_2k_1^3 + k_1k_1^3 - k_i^3 - k_i - 2k_i^2k_1$$

$$b = 2k_2 - 2k_2k_i + k_i - k_1k_1$$

βρίσκουμε το rank του O , $Rank(O) = 3$ και το συγκρίνουμε με το rank του A ,

$$Rank(A) = 3 :$$

$$\text{Rank}(S) = \text{Rank}(A)$$

και επομένως το σύστημα μας είναι παρατηρήσιμο.

7. ΑΝΑΛΥΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΓΕΙΤΟΝΙΚΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΣΕΙΡΙΑΚΗ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗ ΑΛΥΣΙΔΑ

Οι τεχνικές επιθετικής αναπλήρωσης από αυτούς που συμμετέχουν στα κατώτερα στρώματα της εφοδιαστικής αλυσίδας, δηλαδή στη ροή της ζήτησης, οδηγεί σε ενίσχυση της ζήτησης στους όγκους προμηθειών των συμμετεχόντων στην επάνω ροή της εφοδιαστικής αλυσίδας, δηλαδή στη ροή της παράδοσης προϊόντων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, αυτοί που συμμετέχουν στη ροή της παράδοσης των προϊόντων να επηρεάζονται από τις διακυμάνσεις της ζήτησης έχοντας υπερβολικά αποθέματα, ελλιπείς προβλέψεις παραγωγής, ανεπαρκείς ή υπερβολικές χωρητικότητες, φτωχή εξυπηρέτηση πελατών εξαιτίας της μη διαθεσιμότητας προϊόντων ή των υπέρογκων σωρών καθυστερημένης δουλειάς, και αβέβαιο σχεδιασμό παραγωγής. Πολλές και διάφορες τεχνικές και μέθοδοι έχουν προταθεί από ερευνητές και ελεύθερους επαγγελματίες με σκοπό να αντιμετωπίσουν τις μεταβολές και τις διακυμάνσεις της ζήτησης. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τεχνικές διαμοίρασης της πληροφορίας μεταξύ γειτονικών κόμβων, που συμμετέχουν στη ροή της παράδοσης των προϊόντων σε μια εφοδιαστική αλυσίδα.

Το μοντέλο της εφοδιαστικής αλυσίδας, που θα μελετήσουμε, παρουσιάστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο και αφορά την περίπτωση που έχουμε τρεις κόμβους, δύο ενδιάμεσους κόμβους, οι οποίοι είναι ο λιανέμπορος και ο χονδρέμπορος και σαν τρίτος κόμβος υπολογίζεται ο κατασκευαστής. Επιπλέον το μοντέλο αυτό διαθέτει δύο αναλογικούς ελεγκτές (*P-P-controller*), έναν στο χονδρέμπορο και έναν στο λιανέμπορο (σχήμα 5.3). Στη συνέχεια θα αναλύσουμε λεπτομερώς το μοντέλο των τριών κόμβων κάτω από συνθήκες διαμοίρασης της πληροφορίας και θα αναζητήσουμε τη βέλτιστη τεχνική, που ελαχιστοποιεί τις διακυμάνσεις του αποθέματος (και το μέσο όρο του αποθέματος) κάτω από έναν πιθανολογικό περιορισμό που σχετίζεται με τη ροή της ζήτησης. Θα δείξουμε ότι αυτή η τεχνική δεν οδηγεί ποτέ σε ενίσχυση της ζήτησης στην εφοδιαστική αλυσίδα, εφόσον η

παράμετρος k_i του κόμβου i κατά την ροή της ζήτησης εκτείνεται στην περιοχή σταθερότητας.

7.1. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ-ΑΛΥΣΙΔΑΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥΣ ΕΛΕΓΚΤΕΣ (P-P-CONTROLLER), ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΔΙΑΜΟΙΡΑΣΗΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

Όπως είπαμε και νωρίτερα θα ασχοληθούμε με το μοντέλο εφοδιαστικής αλυσίδας με τρεις κόμβους (σχήμα 5.3). Το μοντέλο αυτό στο χώρο των καταστάσεων είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} IP_1(t) \\ Y_{1,0}(t+1) \\ IP_2(t) \\ Y_{2,1}(t+1) \\ Y_{3,2}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * O_{0,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} SP_1 \\ SP_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{1,0}(t+1) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] * \begin{bmatrix} IP_1(t-1) \\ Y_{1,0}(t) \\ IP_2(t-1) \\ Y_{2,1}(t) \\ Y_{3,2}(t) \end{bmatrix} + [0] * [O_{0,1}(t)]$$

Οι πίνακες A, B, C και D του χώρου των καταστάσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας με δύο ενδιάμεσους κόμβους και δύο αναλογικούς ελεγκτές (P-P-controller) είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$D = [0]$$

και όπως δείξαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ο πίνακας συνδιακύμανσης για αυτή την περίπτωση είναι:

$$P_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1 * (k_1 - 2)} & 0 & -\frac{k_1 - 1}{(k_1 - 2) * k} & \frac{1}{(k_1 - 2)} & \frac{k_2 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 - 1}{(k_1 - 2) * k} & 0 & -\frac{(k + 2) * k_1}{k_2 * (k_2 - 2) * (k_1 - 2) * k} & \frac{k_1 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * k} & \frac{(k + 2) * k_1}{(k_2 - 2) * (k_1 - 2) * k} \\ \frac{1}{(k_1 - 2)} & 0 & \frac{k_1 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * k} & -\frac{k_1}{k_1 - 2} & -\frac{(k_1 - 1) * k_1 * k_2}{(k_1 - 2) * k} \\ \frac{k_2 * (k_1 - 1)}{(k_1 - 2) * k} & 0 & \frac{(k + 2) * k_1}{(k_2 - 2) * (k_1 - 2) * k} & -\frac{(k_1 - 1) * k_1 * k_2}{(k_1 - 2) * k} & -\frac{(k + 2) * k_1 * k_2}{(k_2 - 2) * (k_1 - 2) * k} \end{pmatrix}$$

$$k = k_1 * k_2 - k_1 - k_2$$

Θεωρούμε ότι το μοντέλο είναι γραμμικό δυναμικό, (δηλαδή όλα τα αποθέματα είναι αρκετά υψηλά για να ικανοποιήσουν την προς τα κάτω ζήτηση χωρίς καθυστερημένες παραγγελίες). Ο κατασκευαστής (κόμβος 3) μοντελοποιείται ακόμα σαν μονάδα καθυστέρησης, δηλαδή παραδίδει τα προϊόντα που του παραγγέλλονται με μία καθυστέρηση μίας χρονικής περιόδου. Θεωρούμε επιπλέον ότι η ζήτηση από τον πελάτη είναι κανονικά κατανομημένη ως $e(t) = O_{0,1}(t) \square N(\mu, \sigma^2)$. Υπό τον όρο ότι το σύστημα είναι σταθερό ($0 < k_1 < 2$ και $0 < k_2 < 2$) όλα τα σήματα στο όριο είναι σταθερά. Οι αναμενόμενες τιμές των μεταβλητών κατάστασης μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας το μοντέλο του χώρου κατάστασης, το οποίο είναι της μορφής:

$$x(t+1) = Ax(t) + Be(t) + F(SP)$$

όπου SP είναι το (ντετερμινιστικό) διάνυσμα των σημείων ρύθμισης $SP = (SP_1 \ SP_2)'$ (θεωρείται σταθερό). Έτσι κάτω από συνθήκες σταθερότητας,

$$x(t) = (I - A)^{-1}Be(t) + (I - A)^{-1}F(SP)$$

και επομένως

$$E[x(t)] = \mu(I - A)^{-1}B + (I - A)^{-1}F(SP)$$

Εδώ να σημειώσουμε ότι το παραπάνω αντίστροφο του πίνακα υπάρχει δεδομένου ότι η φασματική ακτίνα του A είναι λιγότερο από ένα, εφόσον ($0 < k_1 < 2$ και $0 < k_2 < 2$). Έτσι, οι πέντε μεταβλητές του χώρου καταστάσεων κατανέμονται ως:

$$IP_1(t) \square N\left(SP_1 - \frac{\mu}{k_1}, \frac{\sigma^2 k_1}{2 - k_1}\right)$$

$$Y_{1,0}(t) \square N(\mu, \sigma^2)$$

$$IP_2(t) \square N\left(SP_2 - \frac{\mu}{k_2}, \frac{\sigma^2 k_1 (k_1 k_2 - k_1 - k_2 + 2)}{k_2 (2 - k_1)(2 - k_2)(k_1 + k_2 - k_1 k_2)}\right)$$

$$Y_{2,1}(t) \square N\left(\mu, \frac{\sigma^2 k_1}{2 - k_1}\right)$$

$$O_{2,3}(t) \square N\left(\mu, \frac{\sigma^2 k_1 k_2 (k_1 k_2 - k_1 - k_2 + 2)}{(2 - k_1)(2 - k_2)(k_1 + k_2 - k_1 k_2)}\right)$$

Εδώ είναι απαραίτητο να αναφέρουμε ότι για διασπορές επιλέξαμε τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα συνδιακύμανσης.

Κάναμε αυτή η επιλογή, καθώς από τη στατιστική, (*Ben Danforth 2009*), γνωρίζουμε ότι η συνδιακύμανση μετρά το βαθμό στον οποίο δύο μεταβλητές αλλάζουν ή διαφέρουν μαζί (δηλ. συν-διαφέρουν). Αφ' ενός, η συνδιακύμανση δύο μεταβλητών είναι θετική εάν διαφέρουν μαζί στην ίδια κατεύθυνση σχετικά με τις αναμενόμενες τιμές τους (δηλ. εάν μία μεταβλητή κινείται πάνω από την αναμενόμενη τιμή της, κατόπιν η άλλη μεταβλητή κινείται επίσης πάνω από την αναμενόμενη τιμή της). Αφ' ετέρου, εάν μια μεταβλητή τείνει να είναι πάνω από την αναμενόμενη τιμή της όταν είναι άλλη κάτω από την αναμενόμενη τιμή της, τότε η συνδιακύμανση μεταξύ των δύο μεταβλητών είναι αρνητική. Εάν δεν υπάρχει καμία γραμμική εξάρτηση μεταξύ των δύο μεταβλητών, τότε η συνδιακύμανση είναι 0.

Με μαθηματικούς όρους η συνδιακύμανση δύο μεταβλητών X_i και X_j είναι η προσδοκώμενη τιμή του γινομένου της απόκλισης του X_i από την μέση τιμή του και της απόκλισης του X_j από την μέση τιμή του,

$$\text{cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$$

Έτσι αν $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$,

κάθε στοιχείο του πίνακα συνδιακύμανσης θα είναι:

$$\Sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$$

και επομένως

$$\Sigma = \begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_1)(X_1 - \mu_1)] & E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] & \cdots & E[(X_1 - \mu_1)(X_n - \mu_n)] \\ E[(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1)] & E[(X_2 - \mu_2)(X_2 - \mu_2)] & \cdots & E[(X_2 - \mu_2)(X_n - \mu_n)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_n - \mu_n)(X_1 - \mu_1)] & E[(X_n - \mu_n)(X_2 - \mu_2)] & \cdots & E[(X_n - \mu_n)(X_n - \mu_n)] \end{bmatrix}$$

Ή

$$\Sigma = \begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_1)^2] & E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] & \cdots & E[(X_1 - \mu_1)(X_n - \mu_n)] \\ E[(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1)] & E[(X_2 - \mu_2)^2] & \cdots & E[(X_2 - \mu_2)(X_n - \mu_n)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_n - \mu_n)(X_1 - \mu_1)] & E[(X_n - \mu_n)(X_2 - \mu_2)] & \cdots & E[(X_n - \mu_n)^2] \end{bmatrix}$$

οπότε τα διαγώνια στοιχεία είναι οι διασπορές για κάθε μεταβλητή του X .

Τώρα αφού $Y_{2,1}(t) = O_{1,2}(t)$,

$$O_{1,2}(t) \square N\left(\mu, \frac{\sigma^2 k_1}{2 - k_1}\right)$$

και

$$IP_2(t) \square N\left(SP_2 - \frac{\mu}{k_2}, \frac{\sigma^2 k_1 (k_1 k_2 - k_1 - k_2 + 2)}{k_2 (2 - k_1)(2 - k_2)(k_1 + k_2 - k_1 k_2)}\right)$$

$$IP_2 - O_{1,2} \square N\left(SP_2 - \frac{\mu(k_2 + 1)}{k_2}, \frac{\sigma^2 k_1 (2 - 5k_2 k_1 + k_2^2 k_1 - k_2^3 + k_2^3 k_1 - k_1 + 3k_2 + 4k_2 k_1^2 - 2k_2^2 k_1^2)}{k_2 (2 - k_1)(2 - k_2)(k_1 + k_2 - k_1 k_2)}\right)$$

Εδώ να σημειώσουμε ότι η μέση τιμή του IP_i ($i=1,2$) δεν είναι ίση ακριβώς με το σημείο ρύθμισης SP_i , αλλά υπάρχει ένα σφάλμα σταθερής-κατάστασης της τάξης του $\frac{\mu}{k_i}$, που είναι χαρακτηριστικό για τα συστήματα μηδενικής ανάδρασης. Όπως περιμέναμε, η μορφή της πληροφορίας δεν είναι συμμετρική, δηλαδή ο κόμβος 2, που είναι ο διανομέας (χονδρέμπορος) επηρεάζεται από την πολιτική που εφαρμόζει για το απόθεμα ο κόμβος 1, που είναι ο μεταπωλητής (λιανέμπορος), αλλά δεν συμβαίνει το ίδιο και αντιστρόφως. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο μεταπωλητής γνωστοποιεί την παράμετρο k_1 . Σε αυτή την περίπτωση ο διανομέας μπορεί να χρησιμοποιήσει την πληροφορία αυτή ώστε να καταφέρει να ελαχιστοποιήσει τα δικά του κόστη, που κυρίως σχετίζονται με τα υπερβολικά επίπεδα αποθέματος. Αν και αυτός ο αντικειμενικός στόχος είναι συγκεκριμένης-κατάστασης (π.χ. εξαιτίας της πιθανής ύπαρξης περιορισμών χωρητικότητας, υποτίμησης των επιρροών, κ.τ.λ.) είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι ο αντικειμενικός στόχος του διανομέα είναι να ελαχιστοποιήσει και το μέσο όρο αποθέματος του αλλά και τις διακυμάνσεις του αποθέματός του. Εδώ να σημειώσουμε ότι στο μοντέλο μας ο διανομέας είναι πάντα ικανός να ελέγχει το μέσο όρο του επιπέδου του αποθέματός του διαμέσου της επιλογής του για το SP_2 , το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετατοπίσει το $E(IP_2)$ σε οποιοδήποτε απαιτούμενο επίπεδο. Στην πραγματικότητα, μία πιο γενική συνάρτηση κόστους μπορεί να διατυπωθεί, περιλαμβάνοντας το ολοκλήρωμα

μιας κατάλληλης συνάρτησης κόστους αποθέματος, που σταθμίζεται από την κατανομή του IP_2 .

Μία επιπλέον απαίτηση είναι ότι ο διανομέας πρέπει να έχει αρκετό απόθεμα ώστε να ικανοποιήσει την ροή της ζήτησης προς αυτόν, τουλάχιστον για τις περισσότερες παραγγελίες που του γίνονται. Αυτό γίνεται για να εξασφαλιστεί η ομαλή λειτουργία της εφοδιαστικής αλυσίδας, για την οποία ο διανομέας έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού συμμετέχει σε αυτήν. Ένας τρόπος για να μοντελοποιηθεί αυτή η απαίτηση είναι να λάβουμε υπόψη ρητούς όρους-ποινής στην αντικειμενική συνάρτηση του διανομέα, που αντιστοιχούν σε πραγματικά ή εικονικά κόστη (π.χ. όροι ποινής για τη μη εκπλήρωση ενός συμβολαίου, χάσιμο πωλήσεων εξαιτίας της μη ικανοποίησης και της δυσαρέσκειας του καταναλωτή, κ.τ.λ.). Εδώ επιβάλλουμε έναν πιθανολογικό περιορισμό για την εκπλήρωση των παραγγελιών, δηλαδή, απαιτούμε ότι $Prob[IP_2 \leq O_{1,2}] \leq \delta$ για μια (μικρή) παράμετρο δ .

Ας θεωρήσουμε ότι το $\Phi(z)$ δηλώνει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής $N(0,1)$, δηλαδή:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\xi^2/2} d\xi$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την κατανομή του $IP_2 - O_{1,2}$ που περιγράψαμε παραπάνω, ο περιορισμός για την «εκπλήρωση-παραγγελιών» παίρνει τη μορφή:

$$SP_2 - \frac{\mu(k_2 + 1)}{k_2} + \sigma \Phi^{-1}(\delta) \sqrt{\frac{k_1(2 - 5k_2k_1 + k_2^2k_1 - k_2^3 + k_2^3k_1 - k_1 + 3k_2 + 4k_2k_1^2 - 2k_2^2k_1^2)}{k_2(2 - k_1)(2 - k_2)(k_1 + k_2 - k_1k_2)}} \geq 0 \quad (1)$$

Έτσι, το πρόβλημα βελτιστοποίησης που αντιμετωπίζεται από τον διανομέα είναι να επιλέξει για τα αποθέματά του τις κατάλληλες παραμέτρους, k_2 και IP_2 , ώστε να ελαχιστοποιήσει τα κόστη του αποθέματος του, υπό τον όρο ότι καλύπτεται ο περιορισμός που περιγράφεται από την εξίσωση 1.

(Εδώ να σημειώσουμε ότι το k_1 δεν βρίσκεται υπό τον έλεγχο του διανομέα και θεωρούμε ότι είναι γνωστό και μπορεί να καθορισθεί). Παρά την προσπάθεια να λυθεί αυτή η περιορισμένη βελτιστοποίηση για μία γενική συνάρτηση κόστους, έχουμε επιλέξει την παρακάτω (πιο αποκαλυπτική) διαδικασία: Για οποιοδήποτε k_1 που μας δίνεται, στο διάστημα $0 < k_1 < 2$ αναζητούμε την βέλτιστη επιλογή για το k_2 , $k_2^* = f^*(k_1)$, το οποίο ελαχιστοποιεί τη διασπορά του IP_2 , και ακολούθως ελαχιστοποιούμε τη μέση τιμή του IP_2 με βάση πάντα τον περιορισμό από την εξίσωση 1. Εδώ να σημειώσουμε ότι από τη στιγμή που το βέλτιστο $k_2^* = f^*(k_1)$ έχει καθορισθεί, χρειαζόμαστε να θέσουμε:

$$SP_2^* = \frac{\mu(k_2^* + 1)}{k_2^*} - \sigma \Phi^{-1}(\delta) \Xi$$

όπου:

$$\Xi = \sqrt{\frac{k_1(2 - 5k_2^*k_1 + (k_2^*)^2k_1 - (k_2^*)^3 + (k_2^*)^3k_1 - k_1 + 3k_2^* + 4k_2^*k_1^2 - 2(k_2^*)^2k_1^2)}{k_2^*(2 - k_1)(2 - k_2^*)(k_1 + k_2^* - k_1k_2^*)}}$$

και ως αποτέλεσμα αυτού η μέση τιμή που υπόκειται στον περιορισμό να είναι:

$$E[IP_2] = SP_2^* - \frac{\mu}{k_2^*}$$

Θεωρούμε ότι οι παράμετροι μ και σ (δηλαδή η μέση τιμή και η διασπορά) της ζήτησης του πελάτη είναι γνωστές ή μπορούν να εκτιμηθούν επακριβώς από τα δεδομένα.

Λόγω της υψηλής πολυπλοκότητας που περιέχουν οι μαθηματικές εκφράσεις μας, βασιζόμαστε (εν μέρει) στο Matlab για να επιτύχουμε μία αναλυτική έκφραση για το βέλτιστο $k_2^* = f^*(k_1)$. Ακολουθείται η παρακάτω

διαδικασία: Πρώτα, παραγωγίζουμε τη διασπορά του IP_2 ως προς k_2 και θέτουμε την έκφραση που προκύπτει ίση με το μηδέν. Μετά λύνουμε την έκφραση αυτή και βρίσκουμε το k_2 ως συνάρτηση του k_1 . Καταλήγουμε σε τρεις (προφανώς πολύπλοκες) λύσεις:

$$k_2 = \frac{1}{6} \frac{\sqrt[3]{l} + 16/\sqrt[3]{l} + 6k_1 - 8}{k_1 - 1}$$

$$k_2 = -\frac{1}{12} \frac{\sqrt[3]{l} + 16/\sqrt[3]{l} - 12k_1 + 16 - i\sqrt{3}(\sqrt[3]{l} - 16/\sqrt[3]{l})}{k_1 - 1}$$

$$k_2 = -\frac{1}{12} \frac{\sqrt[3]{l} + 16/\sqrt[3]{l} - 12k_1 + 16 + i\sqrt{3}(\sqrt[3]{l} - 16/\sqrt[3]{l})}{k_1 - 1}$$

όπου

$$l = 108k_1^2 - 216k_1 + 64 + 12\sqrt{3k_1(k_1 - 2)(27k_1^2 - 54k_1 + 32)}$$

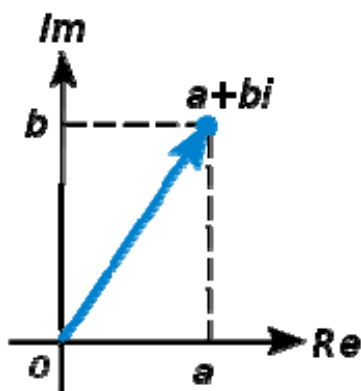
Στη συνέχεια ερευνούμε κάθε μία από τις τρεις αυτές λύσεις. Θεωρούμε πρώτα τον όρο $m(k_1) = 27k_1^2 - 54k_1 + 32$ που εμφανίζεται μέσα στην τετραγωνική ρίζα που ορίζει το l . Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτός ο όρος είναι πάντα θετικός για οποιαδήποτε τιμή του k_1 (και η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει είναι το $m(1) = 5$). Κατά συνέπεια, ολόκληρος ο όρος μέσα στη τετραγωνική ρίζα που ορίζει το l είναι πάντοτε αρνητικός στο διάστημα $0 < k_1 < 2$. Ως εκ τούτου το l είναι πολύπλοκο και μπορεί να γραφτεί με όρους του πραγματικού και του φανταστικού του μέρους ως εξής:

$$l = 108k_1^2 - 216k_1 + 64 + 12i\sqrt{3k_1(2 - k_1)(27k_1^2 - 54k_1 + 32)}$$

αφού ισχύει ότι $i = \sqrt{-1}$.

Εδώ να σημειώσουμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός $z = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z)$ μπορεί να γραφτεί σε πολική μορφή ως εξής:

$$z = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z) = r \cos \varphi + ri \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$$



Σχήμα 7.1: Μιγαδικός αριθμός στο επίπεδο

όπου r είναι το μέτρο του μιγαδικού, $r = |z| = \sqrt{(\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2}$, και φ είναι το όρισμα του μιγαδικού, $\varphi = \text{τοξεφ} \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} = \arg(z)$.

Έτσι λοιπόν η παράμετρος l μπορεί να γραφτεί σε πολική μορφή ως $l = r e^{i\varphi}$ όπου r είναι το μέτρο του l ,

$$r = \sqrt{(108k_1^2 - 216k_1 + 64)^2 + 432k_1(2 - k_1)(27k_1^2 - 54k_1 + 32)} = 64$$

και φ είναι το όρισμα του l ,

$$\varphi = \text{τοξεφ} \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} \Leftrightarrow$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{12\sqrt{3k_1(2 - k_1)(27k_1^2 - 54k_1 + 32)}}{108k_1^2 - 216k_1 + 64} \right) \Leftrightarrow$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{12\sqrt{3k_1(2-k_1)(27k_1^2 - 54k_1 + 32)}}{4(27k_1^2 - 54k_1 + 16)} \right) \Leftrightarrow$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3k_1(2-k_1)(27k_1^2 - 54k_1 + 32)}}{27k_1^2 - 54k_1 + 16} \right) \quad (2)$$

Για να αποφευχθεί κάθε σύγχυση που προκύπτει από το γεγονός ότι το $\tan^{-1}(\cdot)$ είναι μία πολύ-συνάρτηση, τονίζουμε ότι το φ θεωρείται ότι παίρνει τιμές στο διάστημα $0 \leq \varphi \leq \pi$ (από τη στιγμή που το φανταστικό μέρος του l είναι θετικό στο διάστημα $0 < k_1 < 2$, ενώ το πραγματικό μέρος του l παίρνει θετικές, μηδενική και αρνητικές τιμές στο ίδιο διάστημα).

Μετά από κάποιους υπολογισμούς,

$$l = re^{i\varphi} \Leftrightarrow \sqrt[3]{l} = \sqrt[3]{re^{i\varphi}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{l} = \sqrt[3]{64e^{i\varphi}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{l} = \sqrt[3]{64}\sqrt[3]{e^{i\varphi}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{l} = 4(e^{i\varphi})^{1/3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{l} = 4e^{i\varphi/3}$$

καταλήγουμε ότι (λόγω περιοδικότητας):

$$l^{1/3} = \left\{ 4e^{i\varphi/3}, 4e^{i(\varphi+2\pi)/3}, 4e^{i(\varphi-2\pi)/3} \right\}$$

και αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στις τρεις εκφράσεις που βρήκαμε νωρίτερα για το k_2 ,

Για $\sqrt[3]{l} = 4e^{i\varphi/3}$,

$$k_2 = \frac{1}{6} \frac{\sqrt[3]{l} + 16/\sqrt[3]{l} + 6k_1 - 8}{k_1 - 1} \Leftrightarrow k_2 = \frac{1}{6} \frac{4e^{i\varphi/3} + 16/4e^{i\varphi/3} + 6k_1 - 8}{k_1 - 1}$$

$$\Leftrightarrow k_2 = \frac{4e^{i\varphi/3} + 4/e^{i\varphi/3} + 6k_1 - 8}{6(k_1 - 1)} \Leftrightarrow k_2 = \frac{2(2e^{i\varphi/3} + 2/e^{i\varphi/3} + 3k_1 - 4)}{6(k_1 - 1)}$$

$$k_2 = \frac{2(e^{i\varphi/3} + 1/e^{i\varphi/3}) + 3k_1 - 4}{3(k_1 - 1)} \Leftrightarrow k_2 = \frac{2\left(\frac{(e^{i\varphi/3})^2 + 1}{e^{i\varphi/3}}\right) + 3k_1 - 4}{3(k_1 - 1)}$$

όμως επειδή $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$k_2 = \frac{2\left(\frac{(\cos(\varphi/3) + i \sin(\varphi/3))^2 + 1}{\cos(\varphi/3) + i \sin(\varphi/3)}\right) + 3k_1 - 4}{3(k_1 - 1)}$$

$$\Leftrightarrow k_2 = \frac{2\left(\frac{\cos^2(\varphi/3) + 2 \cos(\varphi/3)i \sin(\varphi/3) + i^2 \sin^2(\varphi/3) + 1}{\cos(\varphi/3) + i \sin(\varphi/3)}\right) + 3k_1 - 4}{3(k_1 - 1)}$$

και αφού $\cos^2(\varphi/3) + \sin^2(\varphi/3) = 1$

$$\Leftrightarrow k_2 = \frac{2\left(\frac{\cos^2(\varphi/3) + 2 \cos(\varphi/3)i \sin(\varphi/3) + i^2 \sin^2(\varphi/3) + \cos^2(\varphi/3) + \sin^2(\varphi/3)}{\cos(\varphi/3) + i \sin(\varphi/3)}\right) + 3k_1 - 4}{3(k_1 - 1)}$$

$$\Leftrightarrow k_2 = \frac{2\left(\frac{2 \cos^2(\varphi/3) + 2 \cos(\varphi/3)i \sin(\varphi/3)}{\cos(\varphi/3) + i \sin(\varphi/3)}\right) + 3k_1 - 4}{3(k_1 - 1)}$$

$$\Leftrightarrow k_2 = \frac{2\left(\frac{2 \cos(\varphi/3)(\cos(\varphi/3) + i \sin(\varphi/3))}{\cos(\varphi/3) + i \sin(\varphi/3)}\right) + 3k_1 - 4}{3(k_1 - 1)}$$

$$\Leftrightarrow k_2 = \frac{2(2 \cos(\varphi/3)) + 3k_1 - 4}{3(k_1 - 1)}$$

$$\Leftrightarrow k_2 = \frac{4 \cos(\varphi/3) + 3k_1 - 4}{3(k_1 - 1)}$$

Μπορεί εύκολα να δειχθεί μετά από μερικές πράξεις, ότι κάθε έκφραση καταλήγει στο ίδιο σύνολο λύσεων, που δίνονται από τις τρεις συναρτήσεις:

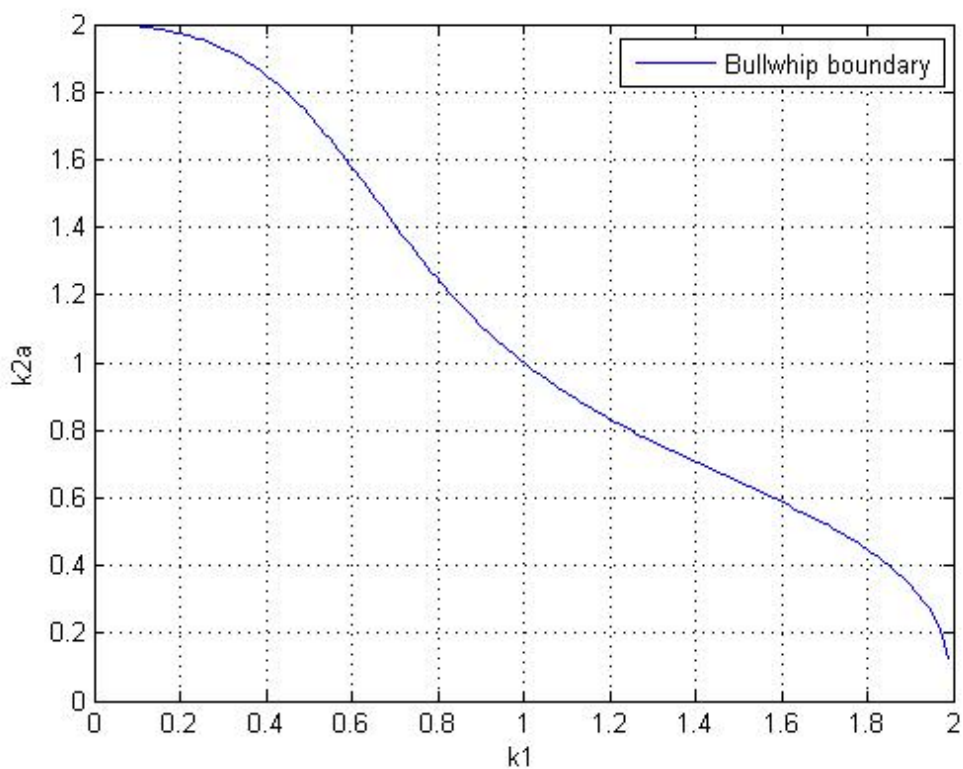
$$k_2 = \left\{ \frac{4 \cos(\varphi/3) + 3k_1 - 4}{3(k_1 - 1)}, \frac{4 \cos(\varphi/3 - 2\pi/3) + 3k_1 - 4}{3(k_1 - 1)}, \frac{4 \cos(\varphi/3 + 2\pi/3) + 3k_1 - 4}{3(k_1 - 1)} \right\}$$

Μπορεί τώρα να εξακριβωθεί εύκολα ότι η λύση ελαχιστοποίησης αντιστοιχεί στη δεύτερη συνάρτηση, έτσι ώστε

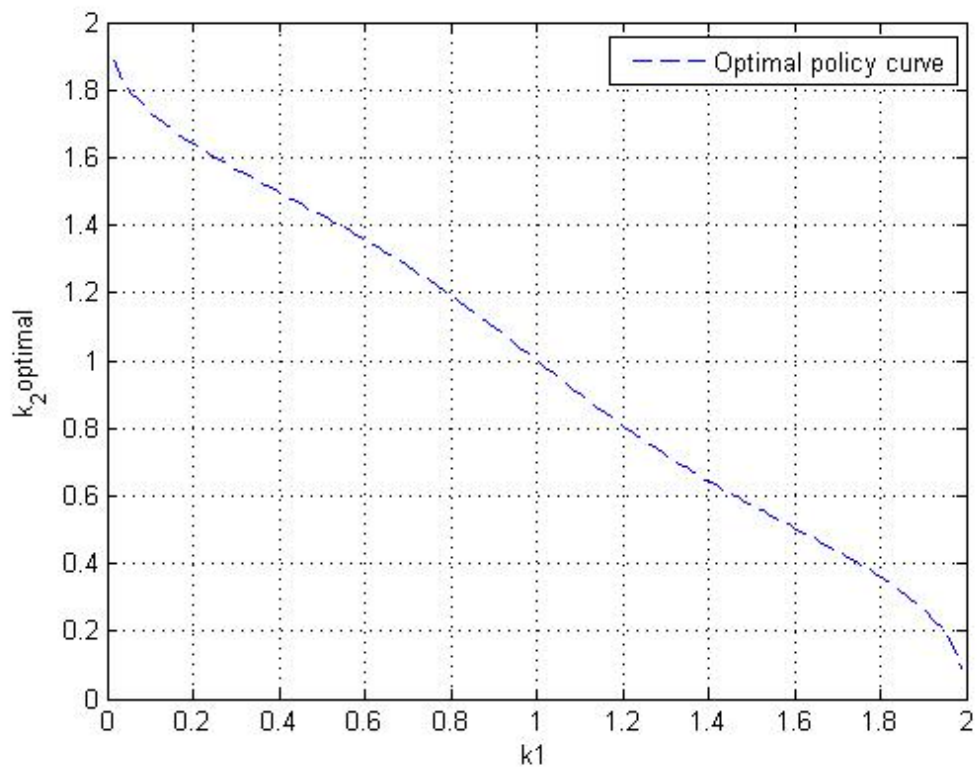
$$k_2^* = f^*(k_1) = \frac{4 \cos(\varphi/3 - 2\pi/3) + 3k_1 - 4}{3(k_1 - 1)}$$

όπου το $\varphi = \varphi(k_1)$ ορίζεται στην εξίσωση 2. Επειδή για $k_1 = 1$ η συνάρτηση $f^*(1)$ δεν ορίζεται θέτουμε $f^*(1) = 1$ ώστε να κάνουμε τη συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη στο $k_1 = 1$. Μία γραφική παράσταση της συνάρτησης $k_2^* = f^*(k_1)$ (περιέχοντας και το όριο μεταξύ των περιοχών μείωσης και ενίσχυσης) φαίνεται στο *σχήμα 7.4*. Μία σημαντική παρατήρηση είναι ότι η βέλτιστη καμπύλη εκτείνεται εξολοκλήρου στην περιοχή μείωσης. Έτσι, κάτω από συνθήκες διαμοίρασης της πληροφορίας (αποκάλυψη της παραμέτρου k_1 στον διανομέα), μία «εγωιστική» πολιτική από τον διανομέα (που είναι αποτέλεσμα της προσπάθειας του να μειώσει τα κόστη του δικού του αποθέματος) δεν μπορεί να προκαλέσει το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (bullwhip effect). Φυσικά αυτό το συμπέρασμα περιορίζεται και εξαρτάται από τις υποθέσεις του μοντέλου (π.χ. γραμμικότητα, «λευκού θορύβου» ζήτηση του πελάτη, μη πρόβλεψη της ζήτησης, κ.τ.λ.).

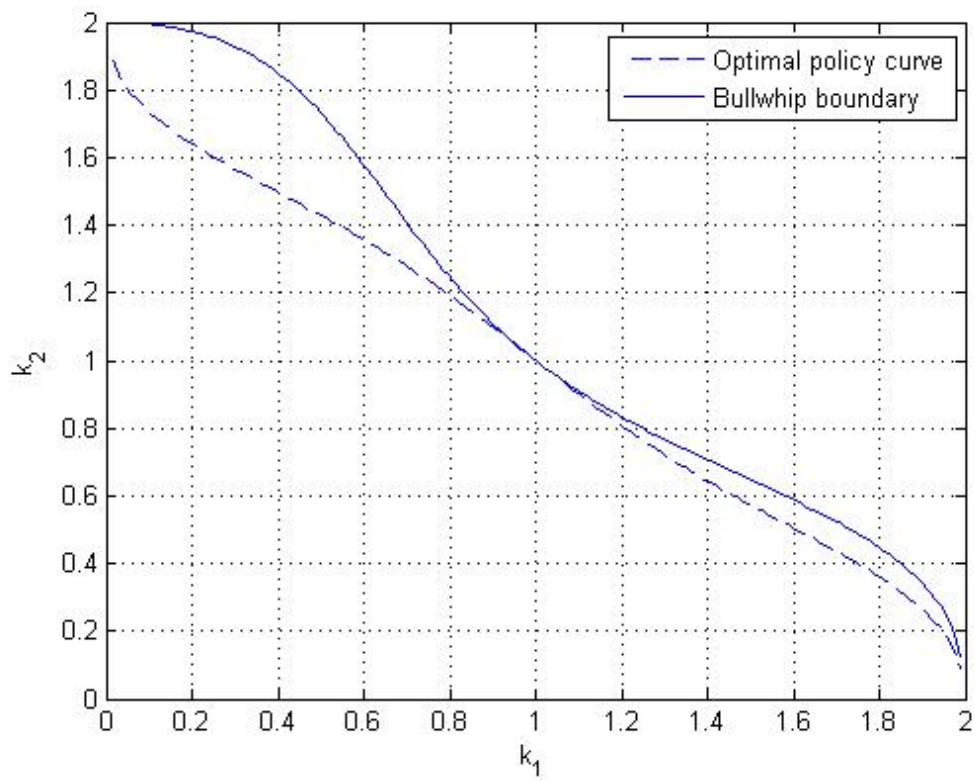
Η ελάχιστη διασπορά $Var^*(IP_2)$ μπορεί να επιτευχθεί αντικαθιστώντας το βέλτιστο $k_2^* = f^*(k_1)$ στο (3,3) στοιχείο του πίνακα συνδιακύμανσης P_5 . Μία γραφική παράσταση του $Var^*(IP_2)$ σε σχέση με το k_1 αποκαλύπτει ότι το $Var^*(IP_2)$ είναι μία μονότονα αύξουσα συνάρτηση του k_1 . Η βέλτιστη καμπύλη $k_2^* = f^*(k_1)$ (η οποία είναι μία μονότονα φθίνουσα συνάρτηση) αρχίζει από το σημείο (2,0) (όπου το $Var^*(IP_2) = 0$), περνάει από το σημείο $(1, k_2^*(1) = 1)$ (όπου $Var^*(IP_2) = \sigma^2$) και προσεγγίζει το μηδέν όταν $k_1 \rightarrow 2$ (όπου το $Var^*(IP_2) \rightarrow \infty$ καθώς αυτό αντιστοιχεί στην άκρη της περιοχής σταθερότητας).



Σχήμα 7.2: Όριο μεταξύ περιοχών μείωσης και ενίσχυσης



Σχήμα 7.3: Βέλτιστη συνάρτηση $k_2^* = f^*(k_1)$



Σχήμα 7.4: Βέλτιστη συνάρτηση $k_2^* = f^*(k_1)$ και όριο μεταξύ περιοχών μείωσης και ενίσχυσης

7.2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

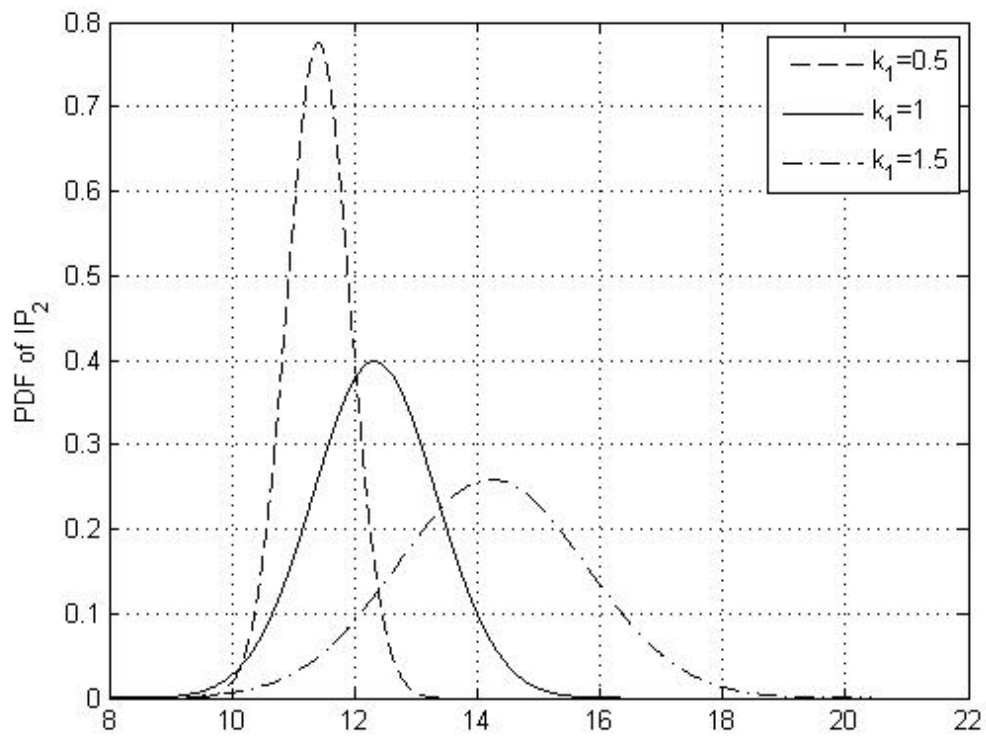
Στη συνέχεια κάνουμε κάποια παραδείγματα, για να δείξουμε πως επιδρά η βέλτιστη επιλογή του $k_2^* = f^*(k_1)$ στη μέση τιμή και τη διασπορά του IP_2 και του $IP_2 - O_{1,2}$. Επιλέγουμε τρεις τιμές για το k_1 , $k_1 = 0.5, 1, 1.5$, και μεταβάλλουμε κάθε φορά τις τιμές των παραμέτρων μ και σ . Συγκεντρώνουμε σε πίνακα τις τιμές για τα k_2^* , $E[IP_2]$, $Var[IP_2]$, $E[IP_2 - O_{1,2}]$ και $Var[IP_2 - O_{1,2}]$, και στο τέλος σχεδιάζουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κανονική κατανομή, ώστε να μελετήσουμε γραφικά τις μεταβολές.

7.2.1. Παράδειγμα 1:

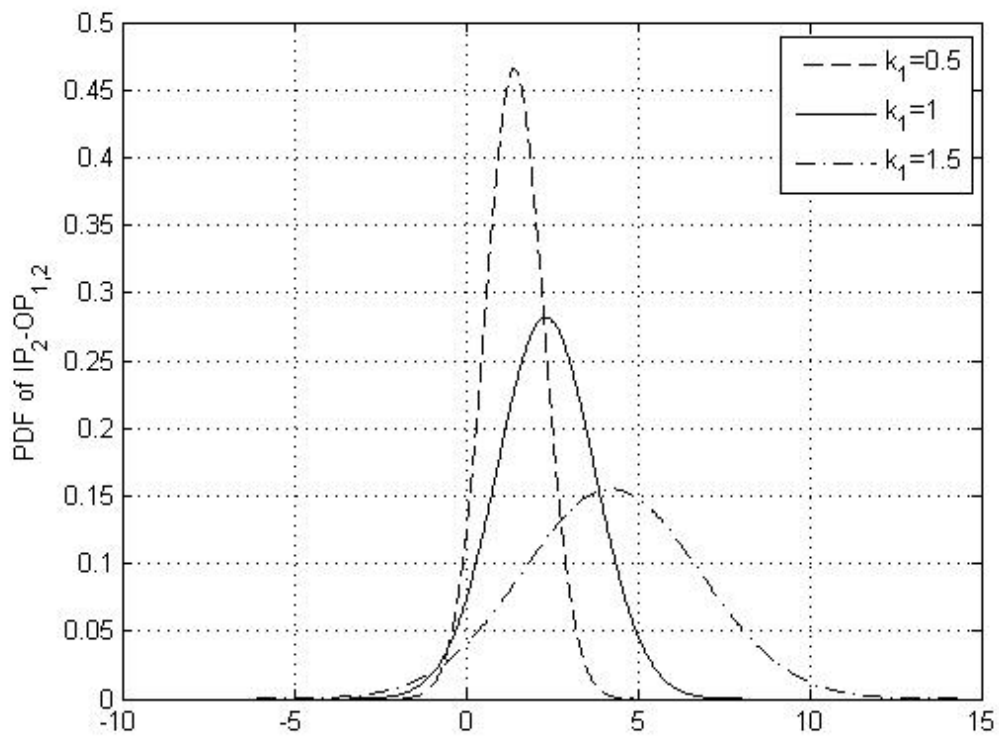
Τα αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής $k_2^* = f^*(k_1)$ για τρεις τιμές του $k_1 = 0.5, 1, 1.5$ συνοψίζονται στον *πίνακα 7.1*. Οι παράμετροι για την κανονική κατανομή επιλέχτηκαν να είναι $\mu = 10$ και $\sigma = 1$, ενώ στην παράμετρο δ δώσαμε μια πολύ μικρή τιμή, την $\delta = 0.05$. Οι κατανομές για το IP_2 και το $IP_2 - O_{1,2}$ για τις τρεις τιμές του k_1 παρουσιάζονται στο *σχήμα 7.5* και στο *σχήμα 7.6* αντίστοιχα. Να σημειωθεί ότι και οι τρεις κατανομές του $IP_2 - O_{1,2}$ προϋποθέτουν ότι το απόθεμα IP_2 είναι ανεπαρκές να εκπληρώσει την ζήτηση $O_{1,2}$ από τα κατώτερα στρώματα, με μία πιθανότητα το πολύ της τάξης του 0.05, που αντιστοιχεί στη τιμή που δώσαμε στο δ . Έτσι εξασφαλίζουμε ότι ο διανομέας έχει αρκετό απόθεμα ώστε να ικανοποιήσει την ροή της ζήτησης προς αυτόν, τουλάχιστον για τις περισσότερες παραγγελίες που του γίνονται. Και κατά συνέπεια εξασφαλίζουμε την ομαλή ροή της εφοδιαστικής μας αλυσίδας.

k_1	k_2^*	$E[IP_2]$	$Var[IP_2]$	$E[IP_2 - O_{1,2}]$	$Var[IP_2 - O_{1,2}]$
0.50	1.43	11.41	0.26	1.41	0.73
1.00	1.00	12.33	1.00	2.33	2.00
1.50	0.57	14.23	2.38	4.23	6.61

Πίνακας 7.1: Συνοπτικά αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής



Σχήμα 7.5: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του IP_2



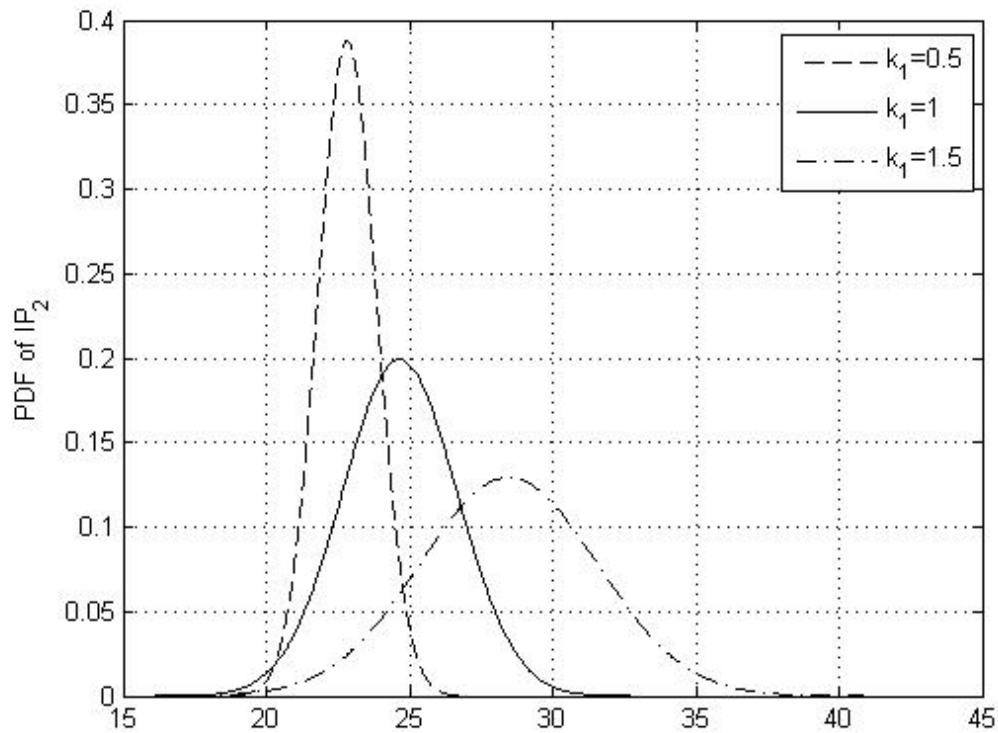
Σχήμα 7.6: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $IP_2 - O_{1,2}$

7.2.2. Παράδειγμα 2:

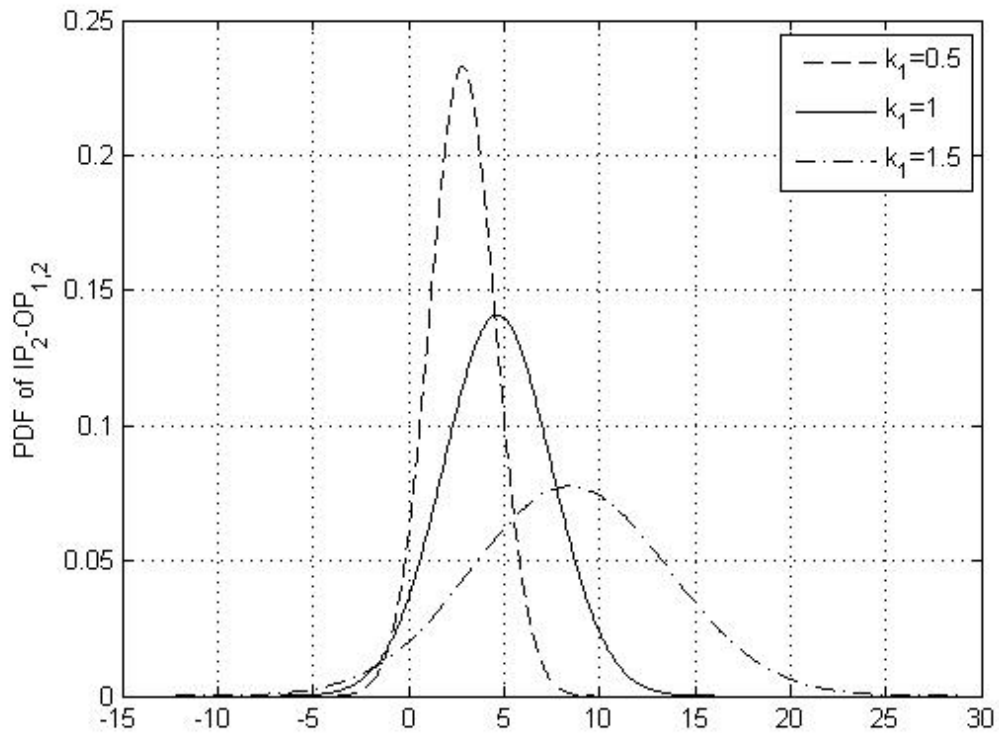
Τα αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής $k_2^* = f^*(k_1)$ για τρεις τιμές του $k_1 = 0.5, 1, 1.5$ συνοψίζονται στον πίνακα 7.2. Οι παράμετροι για την κανονική κατανομή αυτή τη φορά επιλέχτηκαν να είναι $\mu = 20$ και $\sigma = 2$, διπλασιάσαμε δηλαδή τη μέση τιμή και τη τυπική απόκλιση, ενώ στην παράμετρο δ δώσαμε πάλι μια πολύ μικρή τιμή, την $\delta = 0.05$. Οι κατανομές για το IP_2 και το $IP_2 - O_{1,2}$ για τις τρεις τιμές του k_1 παρουσιάζονται στο σχήμα 7.7 και στο σχήμα 7.8 αντίστοιχα.

k_1	k_2^*	$E[IP_2]$	$Var[IP_2]$	$E[IP_2 - O_{1,2}]$	$Var[IP_2 - O_{1,2}]$
0.50	1.43	22.82	1.06	2.82	2.94
1.00	1.00	24.66	4.00	4.66	8.02
1.50	0.57	28.46	9.51	8.46	26.45

Πίνακας 7.2: Συνοπτικά αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής, μετά από διπλασιασμό του μ και του σ , $\mu = 20$ και $\sigma = 2$



Σχήμα 7.7: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του IP_2 , μετά από διπλασιασμό του μ και του σ , $\mu = 20$ και $\sigma = 2$



Σχήμα 7.8: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $IP_2 - O_{1,2}$, μετά από διπλασιασμό του μ και του σ , $\mu = 20$ και $\sigma = 2$

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή για το IP_2 και το $IP_2 - O_{1,2}$ διπλασιάζεται, ενώ η διασπορά τετραπλασιάζεται, γεγονός που είναι λογικό, αφού

$$SP_2^* = \frac{\mu(k_2^* + 1)}{k_2^*} - \sigma \Phi^{-1}(\delta)\Xi$$

$$E[IP_2] = SP_2^* - \frac{\mu}{k_2^*}$$

$$Var[IP_2] = \frac{\sigma^2 k_1 (k_1 k_2^* - k_1 - k_2^* + 2)}{k_2^* (2 - k_1) (2 - k_2^*) (k_1 + k_2^* - k_1 k_2^*)}$$

$$E[IP_2 - O_{1,2}] = SP_2^* - \frac{\mu(k_2^* + 1)}{k_2^*}$$

και

$$Var[IP_2 - O_{1,2}] = \frac{\sigma^2 k_1 (2 - 5k_2^* k_1 + (k_2^*)^2 k_1 - (k_2^*)^3 + (k_2^*)^3 k_1 - k_1 + 3(k_2^*) + 4(k_2^*) k_1^2 - 2(k_2^*)^2 k_1^2)}{k_2^* (2 - k_1)(2 - k_2^*)(k_1 + k_2^* - k_1 k_2^*)}$$

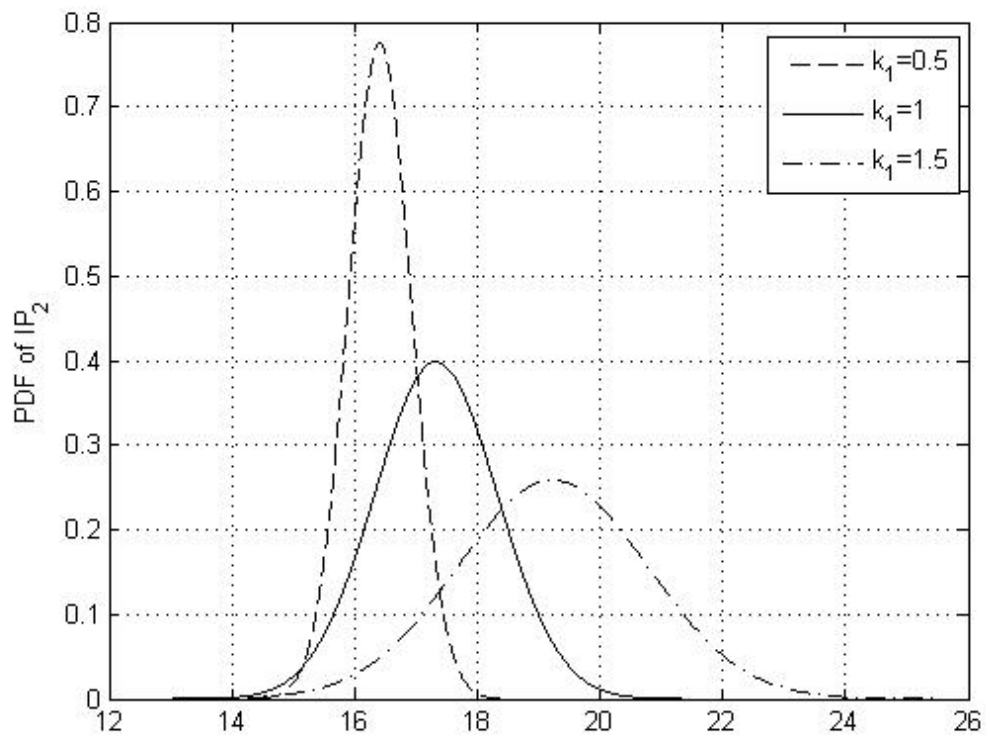
Αντίστοιχα αν υποδιπλασιάσουμε το μ και το σ , $\mu = 5$ και $\sigma = 0.5$, η μέση τιμή για το IP_2 και το $IP_2 - O_{1,2}$ υποδιπλασιάζεται, ενώ η διασπορά υποτετραπλασιάζεται.

7.2.3. Παράδειγμα 3:

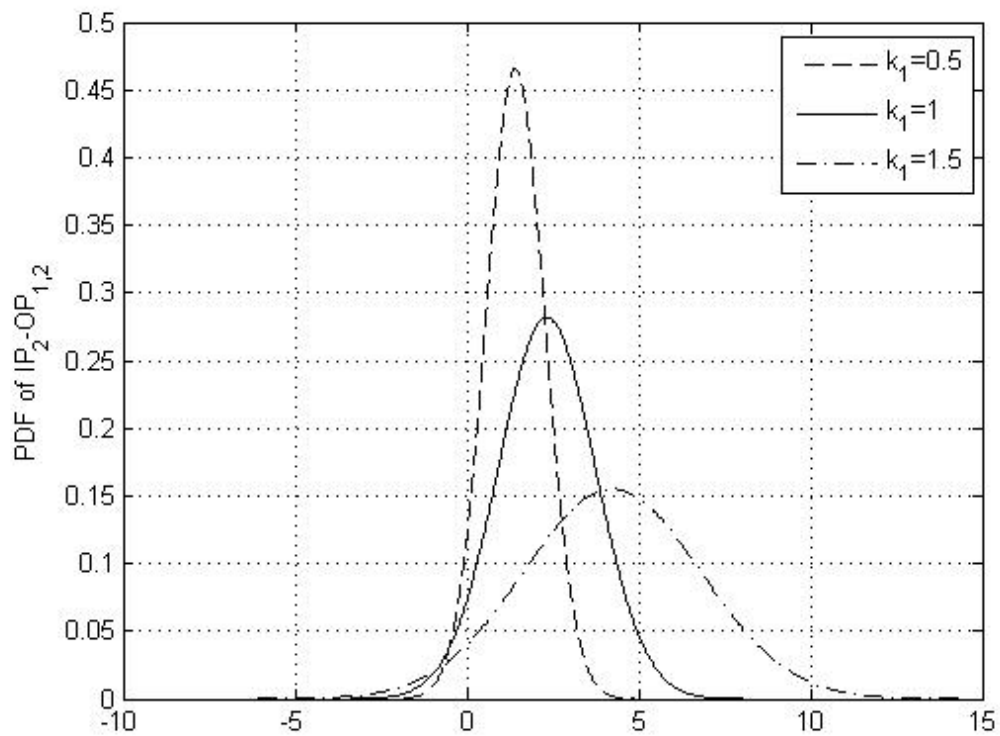
Τα αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής $k_2^* = f^*(k_1)$ για τρεις τιμές του $k_1 = 0.5, 1, 1.5$ συνοψίζονται στον πίνακα 7.3. Οι παράμετροι για την κανονική κατανομή αυτή τη φορά επιλέχτηκαν να είναι $\mu = 15$ και $\sigma = 1$, αυξάνεται δηλαδή η μέση τιμή κατά 5 και η τυπική απόκλιση παραμένει ίδια, ενώ στην παράμετρο δ δώσαμε πάλι μια πολύ μικρή τιμή, την $\delta = 0.05$. Οι κατανομές για το IP_2 και το $IP_2 - O_{1,2}$ για τις τρεις τιμές του k_1 παρουσιάζονται στο σχήμα 7.9 και στο σχήμα 7.10 αντίστοιχα.

k_1	k_2^*	$E[IP_2]$	$Var[IP_2]$	$E[IP_2 - O_{1,2}]$	$Var[IP_2 - O_{1,2}]$
0.50	1.43	16.41	0.26	1.41	0.73
1.00	1.00	17.33	1.00	2.33	2.00
1.50	0.57	19.23	2.38	4.23	6.61

Πίνακας 7.3: Συνοπτικά αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής, ύστερα από αύξηση του μ κατά 5 μονάδες, $\mu = 15$ και $\sigma = 1$



Σχήμα 7.9: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του IP_2 , μετά από αύξηση του μ κατά 5, $\mu=15$ και $\sigma=1$



Σχήμα 7.10: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $IP_2 - O_{1,2}$, μετά από αύξηση του μ κατά 5, $\mu = 15$ και $\sigma = 1$

Παρατηρούμε ότι μεταβάλλεται μόνο η μέση τιμή για το IP_2 και αυξάνεται και αυτή κατά 5, καθώς

$$SP_2^* = \frac{\mu(k_2^* + 1)}{k_2^*} - \sigma \Phi^{-1}(\delta)\Xi$$

$$E[IP_2] = SP_2^* - \frac{\mu}{k_2^*}$$

τα υπόλοιπα παραμένουν ίδια, γιατί όπως είδαμε από τις παραπάνω σχέσεις το μ είτε δεν υπάρχει, είτε απαλείφεται.

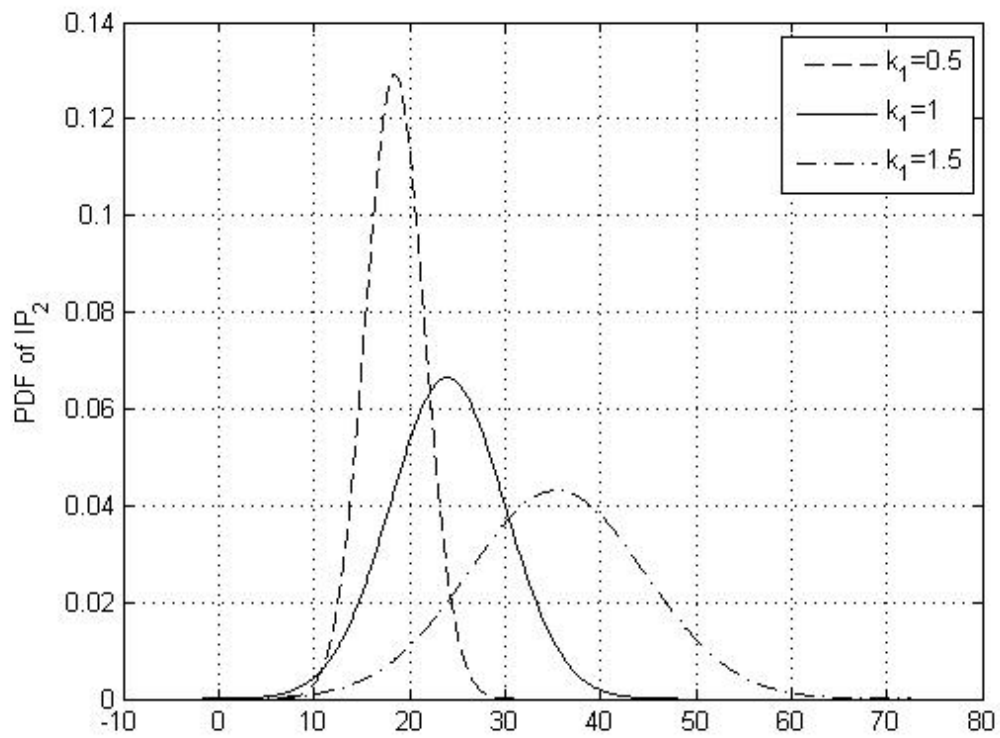
Αντίστοιχα όσο μειώνουμε το μ , τόσο μειώνεται και η μέση τιμή του IP_2 , ενώ τα υπόλοιπα παραμένουν σταθερά.

7.2.4. Παράδειγμα 4:

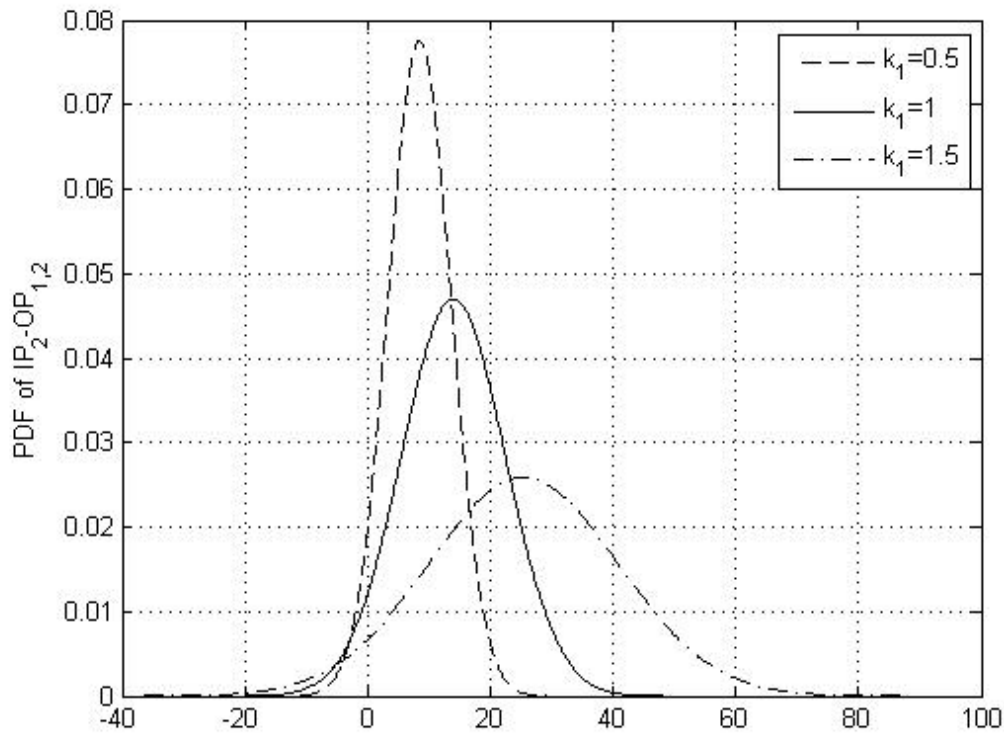
Τα αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής $k_2^* = f^*(k_1)$ για τρεις τιμές του $k_1 = 0.5, 1, 1.5$ συνοψίζονται στον πίνακα 7.4. Οι παράμετροι για την κανονική κατανομή αυτή τη φορά επιλέχτηκαν να είναι $\mu = 10$ και $\sigma = 6$, αυξάνεται δηλαδή η τυπική απόκλιση κατά 5 και η μέση τιμή παραμένει ίδια, ενώ στην παράμετρο δ δώσαμε πάλι μια πολύ μικρή τιμή, την $\delta = 0.05$. Οι κατανομές για το IP_2 και το $IP_2 - O_{1,2}$ για τις τρεις τιμές του k_1 παρουσιάζονται στο σχήμα 7.11 και στο σχήμα 7.12 αντίστοιχα.

k_1	k_2^*	$E[IP_2]$	$Var[IP_2]$	$E[IP_2 - O_{1,2}]$	$Var[IP_2 - O_{1,2}]$
0.50	1.43	18.46	9.51	8.46	26.45
1.00	1.00	23.97	36.10	13.97	72.14
1.50	0.57	35.38	85.61	25.38	238.10

Πίνακας 7.4: Συνοπτικά αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής, ύστερα από αύξηση του σ κατά 5 μονάδες, $\mu = 10$ και $\sigma = 6$



Σχήμα 7.11: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του IP_2 , μετά από αύξηση του σ κατά 5, $\mu = 10$ και $\sigma = 6$



Σχήμα 7.12: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $IP_2 - O_{1,2}$, μετά από αύξηση του σ κατά 5, $\mu = 10$ και $\sigma = 6$

Παρατηρούμε ότι αυξάνεται η μέση τιμή του IP_2 και του $E[IP_2 - O_{1,2}]$ και αυξάνεται και η διασπορά τους (πολλαπλασιάζεται επί 36 περίπου, που είναι η τιμή της τυπικής απόκλισης υψωμένης στο τετράγωνο).

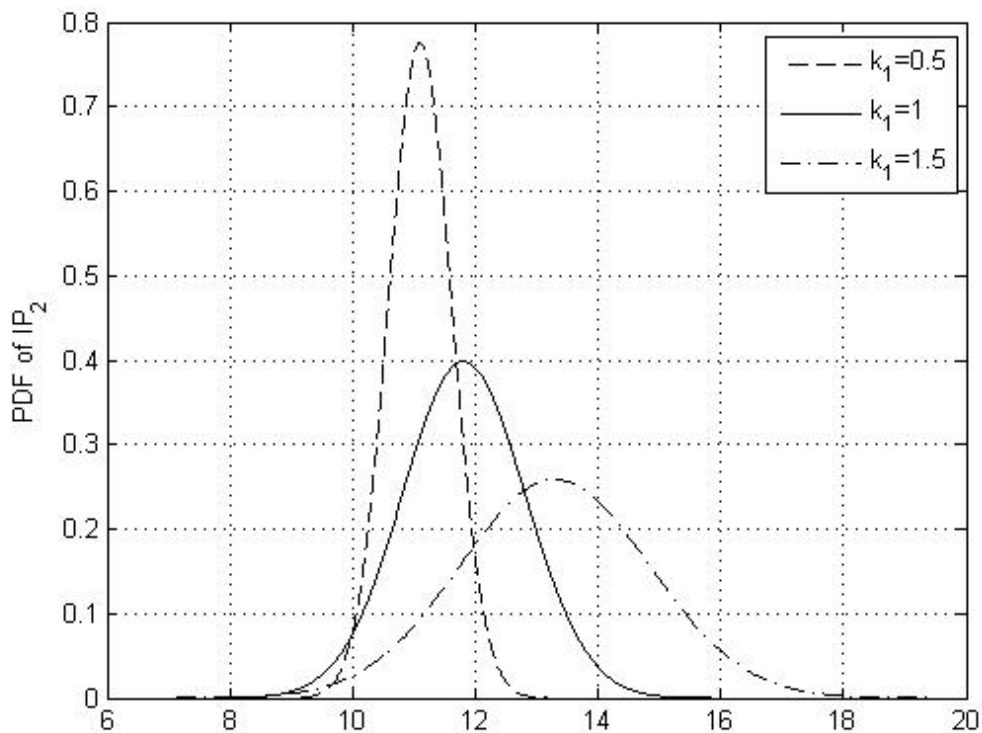
7.2.5. Παράδειγμα 5:

Τα αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής $k_2^* = f^*(k_1)$ για τρεις τιμές του $k_1 = 0.5, 1, 1.5$ συνοψίζονται στον πίνακα 7.5. Οι παράμετροι για την κανονική κατανομή επιλέχθηκαν να είναι $\mu = 10$ και $\sigma = 1$, δηλαδή παρέμειναν ίδιες, ενώ στην παράμετρο δ δώσαμε αυτή τη φορά μια μεγαλύτερη τιμή, την

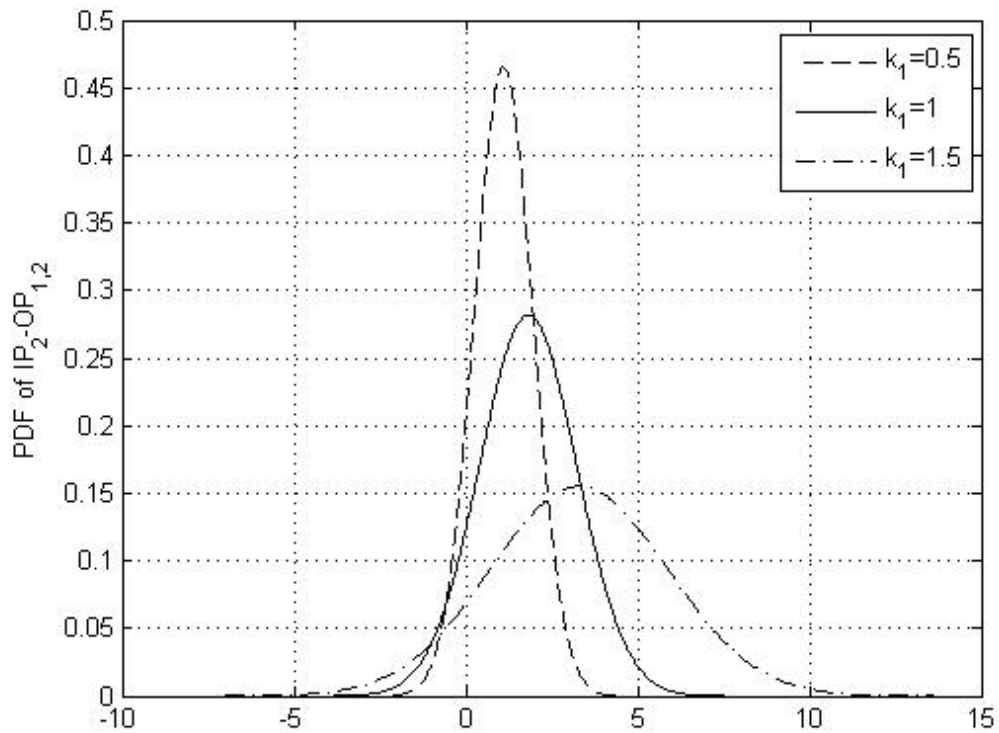
$\delta = 0.10$. Οι κατανομές για το IP_2 και το $IP_2 - O_{1,2}$ για τις τρεις τιμές του k_1 παρουσιάζονται στο *σχήμα 7.13* και στο *σχήμα 7.14* αντίστοιχα.

k_1	k_2^*	$E[IP_2]$	$Var[IP_2]$	$E[IP_2 - O_{1,2}]$	$Var[IP_2 - O_{1,2}]$
0.50	1.43	11.10	0.26	1.10	0.73
1.00	1.00	11.81	1.00	1.81	2.00
1.50	0.57	13.30	2.38	3.30	6.61

Πίνακας 7.5: Συνοπτικά αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής, ύστερα από αύξηση του δ , $\delta = 0.10$



Σχήμα 7.13: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του IP_2 , μετά από αύξηση του δ , $\delta = 0.10$



Σχήμα 7.14: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $IP_2 - O_{1,2}$, μετά από αύξηση του δ , $\delta = 0.10$

Όπως περιμέναμε όταν αυξάνεται το δ , μειώνεται η μέση τιμή του IP_2 και η μέση τιμή του $IP_2 - O_{1,2}$. Αυτό συμβαίνει διότι το δ δηλώνει ουσιαστικά την πιθανότητα μη εκπλήρωσης των παραγγελιών και όσο αυτό μεγαλώνει, τόσο ο διανομέας μπορεί να μην έχει αρκετό απόθεμα ώστε να ικανοποιήσει την ροή της ζήτησης. Η διασπορά του IP_2 και η διασπορά του $IP_2 - O_{1,2}$ παραμένουν ίδιες.

Αντίστοιχα αν μειωθεί το δ , αυξάνεται η μέση τιμή του IP_2 και η μέση τιμή του $IP_2 - O_{1,2}$, ενώ οι διασπορές τους παραμένουν ίδιες.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτή τη διατριβή ξεκινήσαμε παρουσιάζοντας την έννοια της εφοδιαστικής αλυσίδας και προσπαθήσαμε να δείξουμε το σημαντικό ρόλο που παίζει στην λειτουργία της κάθε επιχείρησης. Χρησιμοποιώντας παραδείγματα κάποιων γνωστών επιχειρήσεων και εξηγώντας τον τρόπο με τον οποίο διαχειρίστηκαν την εφοδιαστική τους αλυσίδα, καταφέραμε να επιβεβαιώσουμε το γεγονός ότι η σωστή διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας και η άμεση αντιμετώπιση των προβλημάτων που προκύπτουν σε αυτήν μπορούν να οδηγήσουν την επιχείρηση σε τεράστια οφέλη. Αντιθέτως η έλλειψη της εφοδιαστικής αλυσίδας ή ένα λάθος ή μία παράλειψη σε αυτήν μπορεί να οδηγήσει την επιχείρηση στην καταστροφή και στα πρόθυρα της χρεοκοπίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάσαμε το γενικό μοντέλο της εφοδιαστικής αλυσίδας και δώσαμε τους κατάλληλους συμβολισμούς για να εκφράσουμε την ζήτηση και το απόθεμα σε κάθε κόμβο, αλλά και την αντίστοιχη προσφορά (παράδοση προϊόντων).

Στο τρίτο κεφάλαιο δείξαμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα συνδιακύμανσης όταν είναι γνωστοί οι πίνακες στο χώρο των καταστάσεων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράψαμε το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης» (*bullwhip effect*) και εξηγήσαμε ότι είναι ένας παράγοντας που χαρακτηρίζει την αστάθεια σε μια εφοδιαστική αλυσίδα και ουσιαστικά εκφράζει την ενίσχυση των διακυμάνσεων της ζήτησης από τον πελάτη μέχρι τις παραγγελίες που τελικά φτάνουν στον κατασκευαστή.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάσαμε της εξισώσεις για πέντε διαφορετικές παραλλαγές του μοντέλου της εφοδιαστικής αλυσίδας, ανάλογα με το πλήθος των κόμβων (δύο ή τρεις) και το είδος του ελεγκτή ή των ελεγκτών που χρησιμοποιήσαμε (*ελεγκτής αναλογίας P-controller και ελεγκτής αναλογίας-ολοκλήρωσης PI-controller*). Στη συνέχεια δημιουργήσαμε τον πίνακα συνδιακύμανσης για κάθε περίπτωση και δείξαμε πως και κατά πόσο οι ελεγκτές μπορούν να επηρεάσουν το «φαινόμενο ενίσχυσης της ζήτησης»

και κατά συνέπεια τη σταθερότητα και την απόδοση της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Στο έκτο κεφάλαιο μελετήσαμε τις πέντε διαφορετικές περιπτώσεις του μοντέλου της εφοδιαστικής μας αλυσίδας ως προς την ελεγχσιμότητα και την παρατηρησιμότητά τους. Αποδείξαμε ότι το σύστημά μας μπορεί και να ελεγχθεί και να παρατηρηθεί ανεξάρτητα από το πλήθος των κόμβων και το είδος των ελεγκτών που χρησιμοποιούμε. Όταν ένα σύστημα δύναται να ελεγχθεί με σαφήνεια, υπάρχει η δυνατότητα μια εξωτερική είσοδος να οδηγήσει την εσωτερική κατάσταση του συστήματος από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση προς οποιαδήποτε τελική κατάσταση σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Ενώ όταν ένα σύστημά δύναται να παρατηρηθεί, νοείται ότι είναι εφικτός ο προσδιορισμός κάθε αρχικής κατάστασης του συστήματος και κατά συνέπεια η συμπεριφορά ολόκληρου του συστήματος, εάν είναι γνωστές οι εξωτερικές εισοδοί και οι έξοδοι του συστήματος.

Στο κεφάλαιο επτά αναλύσαμε λεπτομερώς το μοντέλο των τριών κόμβων με δύο αναλογικούς ελεγκτές (*P-P-controller*) κάτω από συνθήκες διαμοίρασης της πληροφορίας. Στη συνέχεια αναζητήσαμε και τελικά βρήκαμε την βέλτιστη τεχνική, που να ελαχιστοποιεί τις διακυμάνσεις του αποθέματος (και το μέσο όρο του αποθέματος) κάτω από έναν πιθανολογικό περιορισμό που σχετίζεται με τη ροή της ζήτησης και δείξαμε ότι αυτή η τεχνική δεν οδηγεί ποτέ σε ενίσχυση της ζήτησης (*bullwhip effect*) στην εφοδιαστική μας αλυσίδα.

Τέλος κάναμε μερικά παραδείγματα για να δείξουμε πως επιδρά η βέλτιστη επιλογή του $k_2^* = f^*(k_1)$ στη μέση τιμή και τη διασπορά του IP_2 και του $IP_2 - O_{1,2}$. Επιλέξαμε τρεις τιμές για το k_1 , $k_1 = 0.5, 1, 1.5$, και μεταβάλλαμε κάθε φορά τις τιμές των παραμέτρων μ και σ . Συγκεντρώσαμε σε πίνακα τις τιμές για τα k_2^* , $E[IP_2]$, $Var[IP_2]$, $E[IP_2 - O_{1,2}]$ και $Var[IP_2 - O_{1,2}]$, και στο τέλος σχεδιάσαμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κανονική κατανομή, ώστε να μελετήσουμε γραφικά τις μεταβολές. Παρατηρήσαμε ότι όσο το k_1 αυξάνεται, αυξάνεται και το άνοιγμα στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (δηλαδή η διασπορά), αλλά και η μέση τιμή.

Επιπλέον όταν διπλασιάσαμε τις παραμέτρους για τη μέση τιμή και τη τυπική απόκλιση (μ και σ), διαπιστώσαμε ότι η μέση τιμή για το IP_2 και το

$IP_2 - O_{1,2}$ διπλασιάστηκε, ενώ η διασπορά τετραπλασιάστηκε, γεγονότα που βάση των τύπων περιμέναμε να συμβούν. . Αντίστοιχα όταν υποδιπλασιάσαμε το μ και το σ , η μέση τιμή για το IP_2 και το $IP_2 - O_{1,2}$ υποδιπλασιάστηκε, ενώ η διασπορά υποτετραπλασιάστηκε.

Στη συνέχεια διαπιστώσαμε πως όταν μεταβάλλουμε το μ , μεταβάλλεται μόνο η μέση τιμή του IP_2 και η καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μετατοπίζεται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά (κατά διάστημα ίδιο με τη μεταβολή του μ), αν έχουμε αύξηση ή μείωση του μ αντίστοιχα. Όταν όμως μεταβάλλουμε το σ , εκτός από τη μέση τιμή του IP_2 και του $IP_2 - O_{1,2}$, μεταβάλλεται και η διασπορά τους και μάλιστα πολλαπλασιάζεται επί 36 (που είναι η τιμή της τυπικής απόκλισης υψωμένης στο τετράγωνο).

Τέλος ένα ακόμη χρήσιμο συμπέρασμα αποτελεί η συμπεριφορά της παραμέτρου δ , πιο συγκεκριμένα όταν αυξάναμε το δ , τον πιθανολογικό περιορισμό, μειωνόταν η μέση τιμή του IP_2 και η μέση τιμή του $IP_2 - O_{1,2}$. Αυτό συνέβαινε διότι το δ δηλώνει ουσιαστικά την πιθανότητα μη εκπλήρωσης των παραγγελιών και όσο αυτό μεγαλώνει, μειώνεται το IP_2 και όλο και περισσότερες παραγγελίες μπορούν να χάνονται στο διανομέα. Αντίστοιχα, όταν μειωνόταν το δ , αυξανόταν η μέση τιμή του IP_2 και η μέση τιμή του $IP_2 - O_{1,2}$, γιατί όταν μειώνεται το δ , αυξάνεται το IP_2 και στενεύουν τα περιθώρια για τις παραγγελίες που μπορούν να χαθούν.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΔΙΕΘΝΗΣ

- David A. Taylor, Ph.D, "Supply Chains: A Manager's Guide", Pearson Education Inc. (2004).
- Pin-Ho Lin, David Shan-Hill Wong, Shi-Shang Jang, Shyan-Shu Shieh, Ji-Zheng Chu, "Controller design and reduction of bullwhip for a model supply chain system using z-transform analysis", *Journal of Process Control*, 14, 487-499, (2004).
- C.I. Papanagnou and G.D. Halikias, "Supply-Chain modeling and control under proportional inventory-replenishment policies", *International Journal of Systems Science*, Vol. 39, No. 7, 699–711, (2008).
- Ben Danforth, "Variance-Covariance Matrix", June 1, (2009).
- C.I. Papanagnou and G.D. Halikias, "A State-space Approach for Analysing the bullwhip Effect in Supply Chains", in *Proc. 5th Intern. Conf. on Technology and Automation (ICTA2005)*, Thessaloniki, Greece, pp 79-85, (2005).
- , "Supply Chain Modelling and Control Under Proportional Inventory Replenishment Policies", in *12th IFAC Conference for Information Control Problems in Manufacturing (INCOM2006)*, Saint-Etienne, France, pp. 17-19, (2006).
- M.H.A. Davies and R.B. Vinter, "Stochastic Modelling and Control", London, England: Chapman and Hall, . (1985).
- J. Dejonckheere, S.M. Disney, M.R. Lambrecht and D.R. Towhill, "Measuring and Avoiding the Bullwhip Effect: A Control-theoretic Approach", *European Journal of Operational Research*, 147, 567–590, (2003).
- J.W. Forrester, *Industrial Dynamics*, New York: John Wiley and Sons Inc, (1961).
- R. Horn and C. Johnson, "Matrix Analysis", Cambridge, England: Cambridge University Press, (1990).

- , *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge, England: Cambridge University Press, (1994).
- H.L. Lee, V. Padmanabhan, and S. Whang, “Information Distortion in supply-chain: The Bullwhip Effect”, *Management Science*, 43, 546–558, (1997).
- Mathworks, *Matlab Symbolic Toolbox*.
- D. Simchi-Levi, P. Kaminsky and E. Simchi-Levi, *Designing and Managing the Supply Chain: Concepts, Strategies and Case Studies*, New York: McGraw-Hill, (2003).
- J.D. Serman, “Modeling Managerial Behaviour: Misperceptions of Feedback in a Dynamic Decision Making Experiment”, *Management Science*, 35(3), 321–339, (1989).
- P.H. Zipkin, *Foundations of Inventory Management*, New York: McGraw-Hill, (2000).
- E. Perea, I. Grossmann, E. Ydstie, T. Tahmassebi, Dynamic modeling and classical control theory for supply chain management, *Computers & Chemical Engineering* 24 (2000) 1143–1149.
- E. Perea-Lopez, I.E. Grossmann, B.E. Ydstie, T. Tahmassebi, Dynamic modeling and decentralized control of supply chains, *Industrial & Engineering Chemistry Research* 40 (2001) 3369-3383.
- D.R. Towill, Dynamic analysis of an inventory and order based production control system, *International Journal of Production Research* 20 (1982) 671–687.
- Chandra S. Lalwani, Stephen M. Disney, Denis R. Towill, “Controllable, observable and stable state space representations of a generalized order-up-to policy”, *International Journal of Production Economics*, 101 (2006) 172-184.
- Ogata K., *Modern Control Engineering*, Prentice Hall International, London, England, (1997).
- Stefani R.T., B. Savant, C.J. Hostetter, G.H., *Design of Feedback Control Systems*, Oxford University Press, New York, (2002).
- Disney S.M., Towill D.R., van de Velde W., Variance amplification and the golden ratio in production and inventory control, *International Journal of Production Economics* 90 (3), 295-309, (2004).

- Disney S.M., Towill D.R., Eliminating inventory drift in supply chains, International Journal of production Economics 93-94, 331-344, (2005).
- D.R. Towill, Coefficient plane models for control system analysis and design, Research Studies Press, John Wiley Inc., London, England, (1981).
- N.S. Nice, Control Systems Engineering, The Benjamin Cummings Publishing Company, Inc., California, (1995).
- Desai R.C., Chandra S. Lalwani, Identification Techniques, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., Bombay, New Delhi, (1972).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

- David A. Taylor, Ph.D, «Διαχείριση Εφοδιαστικής Αλυσίδας», Μετάφραση: Γιώργος Αυγέρης, Επιστημονική Επιμέλεια Ελληνικής Έκδοσης: Κωνσταντίνος Τερζίδης, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, (2006).
- A. Βαρδουλάκης, «Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου: Διδακτικές σημειώσεις για το μάθημα», (2006).
- Φ. Κολύβα-Μαχαίρα και Ε. Μπόρα-Σέντα, «Στατιστική Θεωρία και Εφαρμογές», Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, (1999).
- Ευάγγελος Β. Χατζίκος, «Matlab 7 για μηχανικούς», Εκδόσεις Τζιόλα, (2007).
- Τρύφων Κουσιουρής, «Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο: Ελεγκσιμότητα και Πρατηρησιμότητα», (2006).
- Φ. Ν. Κουμπουλής, «Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο: Διδακτικές σημειώσεις για το μάθημα», Χαλκίδα, (2004).
- Χρυσούλα Ζαχαροπούλου, «Στατιστική: μέθοδοι - εφαρμογές», Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη, (2001).
- Ανδρέας Γ. Αθανασιάδης, «Γραμμική Άλγεβρα», Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, (1997).
- Βασίλης Κώστογλου, «Επιχειρησιακή Έρευνα: Μεθοδολογία – Εφαρμογές & Προβλήματα – Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης», Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, (2004).