



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ”

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΜΑΡΙΑ Π. ΖΕΒΛΗ

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2006



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ”

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΚΑΙ
ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΖΕΒΛΗ Π. ΜΑΡΙΑ

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

.....
Ν. Καραμπετάκης
Επικ.Καθηγητής Α.Π.Θ

.....
Α. Βαρδουλάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ

.....
Μ. Γουσίδου
Επικ. Καθηγήτρια Α.Π.Θ

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2006

Copyright © Μαρία Π. Ζέβλη, 2006.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα πλαίσια των περασμένων δεκαετιών η εξέλιξη στον χώρο του αυτόματου ελέγχου υπήρξε αρκετά μεγάλη κυρίως εξαιτίας της συνεχώς αυξανόμενης πολυπλοκότητας των ελεγχόμενων συστημάτων και της ταυτόχρονης επιθυμίας για επίτευξη βέλτιστης συμπεριφοράς. Επιπλέον όσο ένα σύστημα γίνεται πολυπλοκότερο τόσο περισσότερο είναι απαραίτητο να λαμβάνονται υπόψη οι διάφορες σχέσεις που υφίστανται μεταξύ των μεταβλητών του, στο γενικότερο σχήμα ελέγχου. Γι' αυτό και η ανάλυση και η σχεδίαση συστημάτων με περισσότερες από μια μεταβλητές ήταν αναπόφευκτη. Στην παρούσα εργασία θα επικεντρωθούμε στα συστήματα δύο διαστάσεων. Αρχικά στο Κεφάλαιο 1 αναφέρονται τα δισδιάστατα μοντέλα της μορφής χώρου καταστάσεων, μελετούνται οι σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ τους και παρουσιάζονται οι λύσεις τους. Στο δεύτερο Κεφάλαιο αναλύονται τα ιδιόμορφα μοντέλα δισδιάστατων συστημάτων. Στο πρώτο μέρος του Κεφαλαίου ορίζονται τα ιδιόμορφα δισδιάστα μοντέλα, οι σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ τους, οι επιτρεπτές οριακές συνθήκες, καθώς και αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη λύσης στα μοντέλα αυτά. Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζονται οι λύσεις των δισδιάστατων ιδιόμορφων μοντέλο συναρτήσεων των προς τα εμπρός και προς τα πίσω θεμελιωδών πινάκων. Τέλος στο Κεφάλαιο 3 ορίστηκαν και μελετήθηκαν οι ιδιότητες των δισδιάστατων μοντέλων. Αναλυτικότερα παρουσιάζονται η τοπική ελεγχσιμότητα, παρατηρησιμότητα η τοπική εφικτότητα και αναδομησιμότητα τόσο για τα δισδιάστατα μοντέλα χώρου καταστάσεως όσο για τα δισδιάστατα ιδιόμορφα μοντέλα. Και στα τρία κεφάλαια εμπεριέχονται αριθμητικά παραδείγματα για την διευκρίνιση και καλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Δισδιάστατα μοντέλα χώρου καταστάσεων, δισδιάστατα γενικευμένα ιδιόμορφα μοντέλα, πίνακας μετάβασης, θεώρημα Cayley Hamilton, θεμελιώδεις πίνακες, προς τα εμπρός λύση, προς τα πίσω λύση, συμμετρική λύση, ελεγχσιμότητα, εφικτότητα, παρατηρησιμότητα, αναδομησιμότητα.

ABSTRACT

In the frame of the old decades, the evolution in the world of the automatic control was big enough especially because of the constantly increased complexibility of the controlled systems and of the simultaneous desire for the achievement of its best behavior. Furthermore, the most complicated a system becomes the more it is necessary to be taken into account the various relations that are effected between its variables, to the control schedule in general. For this reason, the analysis and the systems drawing up affected by more than one variable were inevitable. In the present assignment we will focus on 2-D systems. Initially on Chapter 1, the 2-D state space models are mentioned, secondly the relations of equality between them are studied and at the end their solutions are presented. On Chapter 2, the 2-D general singular models are defined in addition to their relations of equality, the admissible boundaries conditions, such as the necessary and appropriate conditions so as to be feasible for a solution to be given on these models. At the second part are presented the solutions of the 2-D general singular models as a function to the forward and backward fundamental matrix. Finally, on Chapter 3, the properties of the 2-D general singular models are defined and studied. In more details are presented, the local controllability and reachability, observability, reconstrubility so for the 2-D state space models as much as for the 2-D general singular models. In all of the three above-mentioned chapters are included illustrated examples given for the clarify and the better understanding of the results.

KEY WORDS

2-D state space models, 2-D general singular models, transition matrix, Cayley-Hamilton theorem, fundamental matrix, forward solution, backward solution, symmetric solution, controllability, reachability, observability, reconstrubility.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Θέλω να εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου στον επιβλέπων καθηγητή μου κ. Καραμπετάκη Νικόλαο για την βοήθεια, την επιστημονική καθοδήγηση του και την συνολική επίβλεψη της εργασίας. Ήταν πάντα διαθέσιμος για συζήτηση, καίριες και παραγωγικές παρατηρήσεις καθόλη την διάρκεια της εκπαιδευτικής μου προσπάθειας.

Οφείλω να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κ. Βαρδουλάκη Αντώνιο και κα. Γουσίδου-Κουτίτα Μαρία για τον χρόνο που αφιέρωσαν στην μελέτη και την αξιολόγηση της εργασίας.

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την αγάπη και την υποστήριξη τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	5
ABSTRACT.....	6
ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	7
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΤΑ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΧΩΡΟΥ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

1.1 Εισαγωγή	13
1.2 Μαθηματικά μοντέλα δισδιάστατων γραμμικών συστημάτων της μορφής χώρου καταστάσεων.....	14
1.2.1 Το δισδιάστατο Roesser μοντέλο.....	14
1.2.2 Τα Fornasini-Marchesini μοντέλα	16
1.2.3 Το Attasi μοντέλο	17
1.3 Ισοδυναμία δισδιάστατων μοντέλων χώρου καταστάσεων.....	18
1.4 Ο πίνακας μετάβασης και οι ιδιότητες του.....	22
1.5 Ο 2-D μετασχηματισμός z.....	23
1.6 Απόκριση δισδιάστατων συστημάτων χώρου καταστάσεων.....	25
1.6.1 Απόκριση του Roesser μοντέλου χώρου καταστάσεων.....	26
1.6.2 Απόκριση του Roesser μοντέλου χώρου καταστάσεων συναρτήσει των 2-D ιδιοτιμών.....	29
1.7 Απόκριση των Fornasini- Marchesini μοντέλων.....	35
1.7.1 Απόκριση του Fornasini - Marchesini I μοντέλου.....	35
1.7.2 Απόκριση του Fornasini- Marchesini II μοντέλου.....	39
1.8 Εφαρμογή μοντέλου μορφής χώρου καταστάσεων.....	44

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΙΔΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2.1	Εισαγωγή	50
2.2	Τα δισδιάστατα γενικευμένα ιδιόμορφα μοντέλα	50
2.3	Σχέσεις μεταξύ των μοντέλων	52
2.4	Ύπαρξη και ορισμός των οριακών συνθηκών για τα δισδιάστατα ιδιόμορφα μοντέλα	56
2.5	Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη λύσης ενός του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου.....	64
2.5.1	Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη λύσης του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου σύμφωνα με τον Kaczorek.....	71
2.6	Λύσεις των γενικευμένων ιδιόμορφων συστημάτων.....	74
2.6.1	Η προς τα εμπρός λύση του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου	74
2.6.2	Η προς τα πίσω λύση του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου.....	81
2.6.3	Η συμμετρική λύση του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου.....	90
2.7	Εφαρμογή δισδιάστατου ιδιόμορφου μοντέλου.....	96

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΤΟΠΙΚΗ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ, ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ, ΕΦΙΚΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΝΑΔΟΜΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

3.1	Εισαγωγή.....	107
3.2	Ιδιότητες των δισδιάστατων μοντέλων χώρου καταστάσεων.....	107
3.2.1	Τοπική ελεγχσιμότητα του Roesser Μοντέλου χώρου καταστάσεων...108	
3.2.2	Τοπική παρατηρησιμότητα στο Roesser Μοντέλου χώρου καταστάσεων.....	110
3.2.3	Τοπική ελεγχσιμότητα στα Fornasini-Marchesini I Μοντέλο.....	113
3.2.4	Τοπική ελεγχσιμότητα στο Fornasini-Marchesini II Μοντέλο.....	116
3.2.5	Τοπική παρατηρησιμότητα στο Fornasini-Marchesini Μοντέλο I...118	
3.3	Ιδιότητες των δισδιάστατων γενικευμένων ιδιόμορφων μοντέλων.....	121
3.3.1	Τοπική ελεγχσιμότητα του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου.....	121

3.3.2 Τοπική εφικτότητα του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου.....128

3.3.3 Τοπική αναδομησιμότητα του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου..132

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ136

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ138

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΑ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΧΩΡΟΥ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

1.1 Εισαγωγή

Η έρευνα των δυναμικών συστημάτων στις επιστήμες των μηχανολόγων, ηλεκτρολόγων και χημικών μηχανικών συνήθως απαιτεί την δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου το οποίο θα αναπαριστά πλήρως την δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Η συνεχώς αυξανόμενη πολυπλοκότητα τέτοιων διαδικασιών οδηγεί στην ανάπτυξη προγραμμάτων υπολογιστών τα οποία παράγουν αυτόματα τις εξισώσεις του συστήματος αλλά και στην ανάπτυξη του μοντέλου το οποίο αποτελείται από υποσυστήματα τα οποία συνθέτουν το ολοκληρωμένο σύστημα. Η αλληλοσύνδεση μεταξύ των υποσυστημάτων και του ολοκληρωμένου συστήματος πραγματοποιείται ως εξής: Η δυναμική συμπεριφορά των μεμονωμένων υποσυστημάτων περιγράφεται μέσω διαφορικών εξισώσεων και η ενοποίηση αυτών των συμπεριφορών πραγματοποιείται μέσω αλγεβρικών εξισώσεων. Συνολικά το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει πλήρως το ολοκληρωμένο σύστημα είναι ένας συνδυασμός διαφορικών-αλγεβρικών εξισώσεων.

Τα τελευταία χρόνια παρατηρήθηκε τεράστιο ενδιαφέρον και ανάπτυξη σε προβλήματα με συστήματα και σήματα που περιλαμβάνουν περισσότερες από μία μεταβλητές. Τα πολυδιάστατα σήματα και συστήματα έχουν μελετηθεί ειδικότερα σε σχέση με διάφορους σύγχρονους τομείς της εφαρμοσμένης μηχανικής. Τα πολυδιάστατα ψηφιακά φίλτρα, η πολυμεταβλητή πραγμάτωση δικτύων, η επεξεργασία ψηφιακών εικόνων σύνθεσης πολυδιάστατων συστημάτων, η σεισμική επεξεργασία δεδομένων, η επαύξηση εικόνας ακτινών-X, η αύξηση και η ανάλυση των αεροφωτογραφιών για την ανίχνευση της ζημίας δασικής πυρκαγιάς ή συγκομιδών, η ανάλυση των δορυφορικών καιρικών φωτογραφιών για την πρόβλεψη καιρού, η επεξεργασία συσκευών ραδιοναυτιλίας (ραντάρ) και υποβρύχιων ηχητικών

επεξεργαστών (σονάρ) είναι λίγοι από τους τομείς που εφαρμόζονται τα πολυδιάστατα σήματα και συστήματα. Τα πιο σημαντικά αποτελέσματα που έχουν σχέση με τα πολυδιάστατα σήματα και συστήματα, έχουν αναπτυχθεί για τα δισδιάστατα με τα οποία θα ασχοληθούμε στην παρούσα διπλωματική.

1.2 Μαθηματικά μοντέλα δισδιάστατων γραμμικών συστημάτων της μορφής χώρου καταστάσεων

Τα γραμμικά, διακριτά, χρονικά, χώρου καταστάσεων μοντέλα έχουν γενικευθεί από μονοδιάστα-χρόνου σε δισδιάστατα-χώρου. Η γενίκευση περιλαμβάνει και την επέκταση βασικών εννοιών των μονοδιάστατων συστημάτων, σε αντίστοιχες έννοιες στα δισδιάστατα συστήματα, έννοιες όπως η γενική απόκριση, ο πίνακας μετάβασης και το Θεώρημα Cayley-Hamilton. Στα δισδιάστατα (2-Dimensional) γραμμικά συστήματα, τα σημαντικότερα γραμμικά διακριτά μοντέλα συστημάτων έχουν προταθεί από τους Robert P. Roesser (1975), Ettore Fornasini και Giovanni Marchesini (1976, 1978), και Kurek (1985). Πιο κάτω θα ορίσουμε τα δισδιάστατα μοντέλα χώρου καταστάσεων και θα τα συσχετίσουμε μεταξύ τους, επίσης θα δούμε τις γενικές αποκρίσεις τους όπως τις ορίζει ο καθένας από τους παραπάνω συγγραφείς

1.2.1 Το δισδιάστατο Roesser μοντέλο

Το δισδιάστατο Roesser μοντέλο γενικεύει την ανάλυση, την δομή και τα αποτελέσματα των μονοδιάστατων (1-D) συστημάτων χώρου καταστάσεων. Το τοπικό διάνυσμα κατάστασης του μοντέλου διαιρείται σε οριζόντιο και κάθετο διάνυσμα κατάστασης που μας δείχνει την εξέλιξη του συστήματος οριζόντια και κάθετα αντίστοιχα στο επίπεδο.

Ο Roesser (1975) έχει προτείνει το ομώνυμο δισδιάστατο μοντέλο χώρου καταστάσεων και ορίζεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

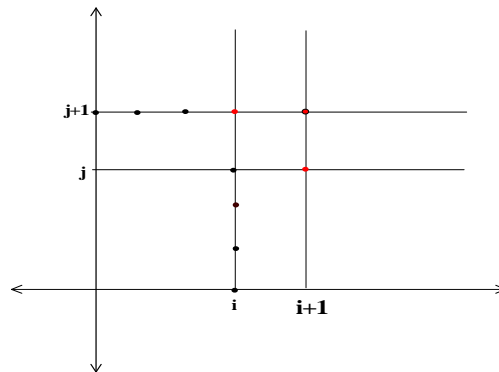
$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (1.1\alpha)$$

$$y(i, j) = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j) \quad (1.1\beta)$$

όπου $i, j \geq 0$ είναι ακέραιοι αριθμοί που δηλώνουν κάθετες και οριζόντιες συντεταγμένες αντίστοιχα, $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ είναι το διάνυσμα εισόδου, $y(i, j) \in \mathbb{R}^l$ είναι το διάνυσμα εξόδου, $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_2}$ είναι το οριζόντιο και κάθετο διάνυσμα κατάστασης αντίστοιχα, και $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n_1}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{l \times n_2}$, $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$.

Οι οριακές συνθήκες για το διδιάστατο Roesser μοντέλο δίνονται απ' τις:

$$x^h(0, j), x^v(i, 0) \quad \text{για } i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$



Διάγραμμα 1.1. Αρχικές συνθήκες στο Roesser μοντέλο

Γενικότερα, τα συστήματα πολλών εισόδων-εξόδων που περιγράφονται από μία ή περισσότερες γραμμικές εξισώσεις διαφορών σταθερών συντελεστών, μπορούν να παρασταθούν συνοπτικά από μία εξίσωση πινάκων-διανυσμάτων της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

όπου $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, $C = [C_1 \quad C_2]$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}, \quad u = u(i, j), \quad y = y(i, j)$$

1.2.2 Τα Fornasini-Marchesini μοντέλα

Δύο εξίσου σημαντικά μοντέλα με το Roesser μοντέλο, έχουν προταθεί από τους Fornasini-Marchesini (1976, 1978).

Το πρώτο F-MM I ορίζεται ως εξής:

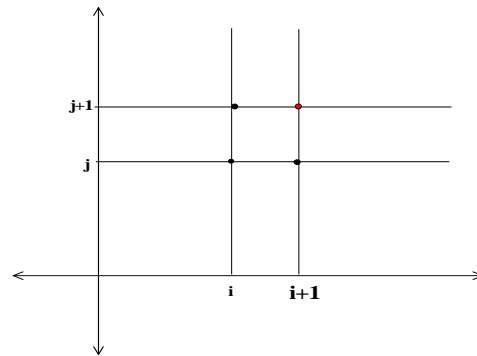
$$\hat{x}(i+1, j+1) = \hat{A}_0 \hat{x}(i, j) + \hat{A}_1 \hat{x}(i+1, j) + \hat{A}_2 \hat{x}(i, j+1) + \hat{B}u(i, j) \quad (1.3a)$$

$$y(i, j) = \hat{C} \hat{x}(i, j) \quad (i, j \geq 0) \quad (1.3b)$$

όπου $\hat{x}(i, j) \in \mathbb{R}^n$ είναι το τοπικό διάνυσμα κατάστασης στο (i, j) , $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ και $y(i, j) \in \mathbb{R}^l$ είναι αντίστοιχα τα διανύσματα εισόδου και εξόδου και $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\hat{C} \in \mathbb{R}^{l \times n}$.

Οριακές συνθήκες για το πρώτο F-MM I θεωρούμε τις:

$$\hat{x}(i, 0), \hat{x}(0, j) \quad \text{για } i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$



Διάγραμμα 1.2. Αρχικές συνθήκες στο F-MM I

Οι εξισώσεις που αναπαράσταν το δεύτερο Fornasini-Marchesini μοντέλο (F-MMII) είναι οι:

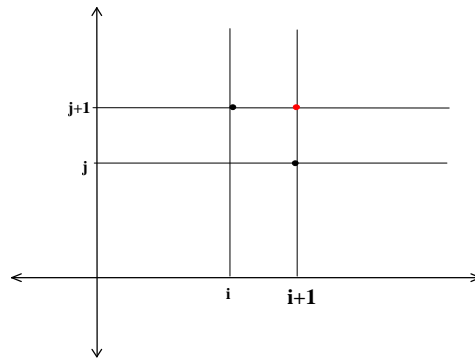
$$x(i+1, j+1) = A_1 x(i, j+1) + A_2 x(i+1, j) + B_{01} u(i+1, j) + B_{10} u(i, j+1) \quad (1.5a)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j) \quad (i, j \geq 0) \quad (1.5b)$$

όπου $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$ είναι το τοπικό διάνυσμα κατάστασης στο (i, j) , $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$, $y(i, j) \in \mathbb{R}^l$ είναι αντίστοιχα τα διανύσματα εισόδου και εξόδου και $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^n$, $B_{10}, B_{10} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$.

Οι οριακές συνθήκες για το F-MM II δίνονται από τις σχέσεις:

$$x(i, 0), x(0, j) \quad \text{για } i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$



Διάγραμμα 1.3. Αρχικές συνθήκες στο F-MM II

1.2.3 Το Attasi μοντέλο

Το Attasi μοντέλο ορίζεται ως εξής:

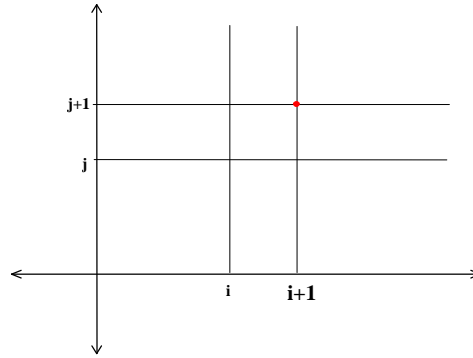
$$\bar{x}(i+1, j+1) = \bar{A}_1 \bar{x}(i+1, j) + \bar{A}_2 \bar{x}(i, j+1) - \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{x}(i, j) + \bar{B}u(i, j) \quad (1.7\alpha)$$

$$y(i, j) = \bar{C} \bar{x}(i, j) \quad \text{με } \bar{A}_1 \bar{A}_2 = \bar{A}_2 \bar{A}_1 \quad (1.7\beta)$$

με οριακές συνθήκες

$$\bar{x}(i, 0), \bar{x}(0, j) \quad \text{για } i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

όπου $\bar{x}(i, j) \in \mathbb{R}^n$ είναι το τοπικό διάνυσμα κατάστασης στο (i, j) , $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ είναι το διάνυσμα εισόδου, $y(i, j) \in \mathbb{R}^l$ είναι το διάνυσμα εξόδου και $\bar{A}_1, \bar{A}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\bar{C} \in \mathbb{R}^{l \times n}$.



Διάγραμμα 1.4. Αρχικές συνθήκες στο Attasi μοντέλο

1.3 Ισοδυναμία δισδιάστατων μοντέλων χώρου καταστάσεων

Όλα τα μοντέλα είναι μεταξύ τους ισοδύναμα, δηλαδή μέσω σχέσεων ισοδυναμίας μπορούμε να οδηγηθούμε από το ένα μοντέλο στο άλλο και αντίστροφα. Η ισοδυναμία των μοντέλων βοηθά στην επέκταση των εννοιών και αποτελεσμάτων από το ένα μοντέλο στο άλλο. Μια τέτοια σχέση είναι χρήσιμη δεδομένου ότι συχνά στα αρχικά στάδια της διαμόρφωσης ενός δοσμένου φυσικού συστήματος λαμβάνεται ένα Roesser μοντέλο ενώ ένα ισοδύναμο πρώτης τάξεως μοντέλο FM θα απλοποιούσε την ανάλυση.

□ Σύγκριση F-MM I και Attasi μοντέλου.

Από την σύγκριση των εξισώσεων των δύο μοντέλων (1.7) και (1.3) παρατηρούμε ότι το Attasi μοντέλο προκύπτει από το F-MM I, αν θέσουμε όπου:

$$\widehat{A}_0 = -\overline{A_1 A_2} = -\overline{A_2 A_1}, \quad \widehat{A}_1 = \overline{A_1}, \quad \widehat{A}_2 = \overline{A_2} \quad \text{και} \quad \widehat{x}(i, j) = \overline{x}(i, j).$$

Αντίστροφα είναι προφανές ότι το F-MM I προκύπτει από την αντικατάσταση των πιο πάνω σχέσεων στο Attasi μοντέλο.

□ Σύγκριση F-MM I και Roesser μοντέλου.

Ας ορίσουμε

$$x^h(i, j) = \widehat{x}(i, j+1) - \widehat{A}_1 \widehat{x}(i, j)$$

και

$$x^v(i, j) = \widehat{x}(i, j)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση του F-MM I (1.2), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} x^h(i+1, j) &= \widehat{A}_0 x^v(i, j) + \widehat{A}_2 \{x^h(i, j) + \widehat{A}_1 x^v(i, j)\} + \widehat{B}u(i, j) = \\ &= \widehat{A}_2 x^h(i, j) + \{\widehat{A}_0 + \widehat{A}_2 \widehat{A}_1\} x^v(i, j) + \widehat{B}u(i, j) \end{aligned}$$

και

$$x^v(i, j+1) = x^h(i, j) + \widehat{A}_1 x^v(i, j)$$

Ως εκ τούτου μπορούν να γραφτούν στην μορφή του Roesser μοντέλου:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \widehat{A}_2 & \widehat{A}_0 + \widehat{A}_2 \widehat{A}_1 \\ I_n & \widehat{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j) \\ y(i, j) &= \begin{bmatrix} 0 & \widehat{C} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια το F-MM I μπορεί να ανασχηματιστεί σε Roesser μοντέλο αν θέσουμε όπου:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_2 & \widehat{A}_0 + \widehat{A}_2 \widehat{A}_1 \\ I_n & \widehat{A}_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [C_1 \quad C_2] = [0 \quad \widehat{C}], \quad D = 0 \quad (1.9)$$

Αντίστροφα, με την βοήθεια των σχέσεων (1.9) είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι αν θεωρήσουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις :

$$A_{21} = I_n, \quad B_2 = 0, \quad C_1 = 0$$

τότε το Roesser μοντέλο μπορεί επίσης να αναδιασκευαστεί σε F-MM I με τις εξής ισοδυναμίες:

$$\widehat{A}_0 = A_{12} - A_{11}A_{22}, \quad \widehat{A}_1 = A_{22}, \quad \widehat{A}_2 = A_{11}, \quad \widehat{B} = B_1, \quad \widehat{C} = C_2$$

Τότε με την αντικατάσταση των πιο πάνω σχέσεων στο Roesser μοντέλο έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widehat{x}(i+1, j+1) - A_{22}\widehat{x}(i+1, j) \\ \widehat{x}(i, j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ I & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}(i, j+1) - A_{22}\widehat{x}(i, j) \\ \widehat{x}(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j) \\ y(i, j) &= [0 \quad C_2] \begin{bmatrix} \widehat{x}(i, j+1) \\ \widehat{x}(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j) \end{aligned}$$

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{x}(i+1, j+1) - A_{22}\hat{x}(i+1, j) &= A_{11}\hat{x}(i, j+1) - A_{11}A_{22}\hat{x}(i, j) + A_{12}\hat{x}(i, j) + B_1u(i, j) \\ \hat{x}(i, j+1) &= I_n\hat{x}(i, j+1) - A_{22}\hat{x}(i, j) + A_{22}\hat{x}(i, j)\end{aligned}$$

και

$$y(i, j) = C_2\hat{x}(i, j)$$

Πραγματοποιώντας τις πράξεις καταλήγουμε στην:

$$\begin{aligned}\hat{x}(i+1, j+1) &= \{A_{12} - A_{11}A_{22}\}\hat{x}(i, j) + A_{22}\hat{x}(i+1, j) + A_{11}\hat{x}(i, j+1) + B_1u(i, j) \\ y(i, j) &= C_2\hat{x}(i, j)\end{aligned}$$

Επομένως το Roesser μοντέλο μπορεί να γραφτεί στην μορφή του F-MM I με τις σχέσεις που ορίσαμε πιο πάνω.

□ Σύγκριση Attasi και Roesser μοντέλου.

Μπορούμε να ξαναδιατυπώσουμε το AM σε RM με τις σχέσεις :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & 0 \\ I_n & \bar{A}_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [C_1 \quad C_2] = [0 \quad \bar{C}], \quad D = 0$$

και αντίστροφα αν ισχύει:

$$A_{12} = 0, \quad A_{21} = I_n, \quad A_{11}A_{22} = A_{22}A_{11}, \quad B_2 = 0, \quad C_1 = 0$$

τότε το RM μπορεί να γραφτεί σε μορφή AM με

$$\bar{A}_1 = A_{22}, \quad \bar{A}_2 = A_{11}, \quad \bar{B} = B_1, \quad \bar{C} = C_2$$

□ Σύγκριση Roesser μοντέλου και F-MM II.

Παρόμοια μπορούμε να δείξουμε την συσχέτιση μεταξύ RM και F-MM II

Ορίζοντας

$$x(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$$

μπορούμε να γράψουμε την RM μορφή:

$$x(i+1, j+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(i+1, j) + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(i, j+1) + \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i+1, j) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j+1)$$

και

$$y(i, j) = [C_1 \ C_2] x(i, j) + Du(i, j).$$

Αντίστροφα απ' το RM μπορούμε να καταλήξουμε σε F-MM II αν θέσουμε όπου:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad B_{10} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \ C_2]$$

(1.10)

□ Σύγκριση των F-MM I και F-MM II.

Αν στις εξισώσεις του F-MM I θέσουμε:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(i+1, j+1) \\ \hat{x}(i+1, j) \\ u(i+1, j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(i+1, j) \\ \hat{x}(i+1, j-1) \\ u(i+1, j-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{A}_2 & \hat{A}_0 & \hat{B} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(i, j+1) \\ \hat{x}(i, j) \\ u(i, j) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} u(i+1, j) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j+1)$$

$$y(i, j) = [\hat{C} \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \hat{x}(i, j) \\ \hat{x}(i, j-1) \\ u(i, j-1) \end{bmatrix}$$

και θεωρήσουμε το $x(i, j) = \begin{bmatrix} \hat{x}(i, j) \\ \hat{x}(i, j-1) \\ u(i, j-1) \end{bmatrix}$ σαν το τοπικό διάνυσμα του F-MM II

παρατηρούμε ότι είναι εύκολο το F-MM I να γραφτεί σε F-MM II μορφή.

1.4 Ο πίνακας μετάβασης και οι ιδιότητες του

Πιο κάτω θα ορίσουμε τον πίνακα μετάβασης (state-transition matrix), $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $A_{ii} \in R^{n_i \times n_i}$, για $i=1,2$. Ο πίνακας μετάβασης θα χρησιμοποιηθεί στον τύπο της απόκρισης ενός συστήματος συναρτήσει των διανυσμάτων εισόδου και των οριακών συνθηκών. Ο πίνακας μετάβασης στα δισδιάστατα συστήματα είναι παραλληλισμός του πίνακα μετάβασης $A^t = A^1 A^{t-1}$ στα μονοδιάστατα χρονικά διακριτά συστήματα.

Ας ορίσουμε πρώτα την μερική διάταξη που χρησιμοποιείται για τα ζεύγη των ακέραιων αριθμών:

Ορισμός 1.1

Ισχύει $(h, k) \leq (i, j)$ αν και μόνο αν $(h \leq i$ και $k \leq j)$,

Ισχύει $(h, k) = (i, j)$ αν και μόνο αν $(h = i$ και $k = j)$,

Ισχύει $(h, k) < (i, j)$ αν και μόνο αν $((h, k) < (i, j)$ και $(h, k) \neq (i, j)$.

Ορισμός 1.2

Ο πίνακας μετάβασης $A^{i,j}$ του πίνακα A (state-transition matrix) ορίζεται ως εξής:

- 1ο. $A^{0,0} = I$,
- 2ο. $A^{1,0} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$,
- 3ο. $A^{i,j} = 0$ για $i < 0$ ή $j < 0$,
- 4ο. $A^{i,j} = A^{1,0} A^{i-1,j} + A^{0,1} A^{i,j-1}$ για κάθε $(i, j) > (0,0)$. (1.11)

Απ' τον ορισμό 1.2 του πίνακα μετάβασης προκύπτουν κάποιες προφανείς ιδιότητες του πίνακα $A^{i,j}$:

Από την 1) έχουμε:

$$i. \quad I^{1,0} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad I^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } I \text{ ο ταυτοτικός πίνακας,}$$

Από την 3) προκύπτει επίσης η εξής σχέση:

$$\text{ii.} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = A^{1,0} + A^{0,1}$$

iii. Από την 2) έχουμε για $j = 0$:

$$A^{i,0} = A^{1,0} A^{i-1,0} + A^{0,1} A^{i,-1} = A^{1,0} A^{i-1,0}$$

Συνεπώς

$$A^{i,0} = (A^{1,0})^i \quad \text{για } i = 1, 2, 3, \dots$$

Με τον ίδιο τρόπο:

$$A^{0,j} = (A^{0,1})^j \quad \text{για } j = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{iv.} \quad I^{1,0} A = I^{1,0} A^{1,0} = A^{1,0} \quad \text{και} \quad I^{0,1} A = I^{0,1} A^{0,1} = A^{0,1}$$

$$\text{v.} \quad I^{0,1} A^{1,0} = 0 \quad \text{και} \quad I^{1,0} A^{0,1} = 0$$

Επαγωγικά είναι εύκολο να δείξουμε ότι για τον πίνακα μετάβασης ισχύει επίσης:

$$\text{vi.} \quad A^{1,0} A^{i-1,j} + A^{0,1} A^{i,j-1} = A^{i-1,j} A^{1,0} + A^{i,j-1} A^{0,1}$$

1.5 Ο 2-D μετασχηματισμός z

Μια πολύ σημαντική μέθοδος μετασχηματισμού, που χρησιμοποιείται για να περιγράψει σήματα και στοιχεία που απαντώνται σε συστήματα αυτόματου ελέγχου διακριτού χρόνου, είναι ο μετασχηματισμός-z. Ο τύπος αυτού του μετασχηματισμού στα δισδιάστατα συστήματα κατ' επέκταση από τα μονοδιάστατα ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.3 (Kaczorek 1985)

Ο 2-D (δύο διαστάσεων) μετασχηματισμός-z μιας διακριτής 2-D συνάρτησης $f(i, j)$ συμβολίζεται με $F(z_1, z_2)$ ικανοποιεί τις συνθήκες $f(i, j) = 0$ για $i < 0$ ή $j < 0$ και ορίζεται από την σχέση:

$$F(z_1, z_2) = Z[f(i, j)] := \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f(i, j) z_1^{-i} z_2^{-j} \quad (1.12)$$

Από τον ορισμό προκύπτει το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 1.1

Αν $F(z_1, z_2) = Z[f(i, j)]$, τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} Z[f(i+k, j+l)] &= z_1^k z_2^l F(z_1, z_2) - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} f(i, j) z_1^{k-i} z_2^{l-j} - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} f(i, j) z_1^{k-i} z_2^{l-j} - \\ &- \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{l-1} f(i, j) z_1^{k-i} z_2^{l-j} = z_1 z_2 [F(z_1, z_2) - F(z_1, 0) - F(0, z_2) + f(0, 0)] \end{aligned}$$

όπου $F(z_1, 0) := \sum_{i=0}^{\infty} f(i, 0) z_1^{-i}$ και $F(0, z_2) := \sum_{j=0}^{\infty} f(0, j) z_2^{-j}$.

Απόδειξη:

Από τον ορισμό του 2-D μετασχηματισμού-z έχουμε:

$$\begin{aligned} Z[f(i+k, j+l)] &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f(i+k, j+l) z_1^{-i} z_2^{-j} = \\ &= \sum_{t=k}^{\infty} \sum_{s=l}^{\infty} f(t, s) z_1^{k-t} z_2^{l-s} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} f(t, s) z_1^{k-t} z_2^{l-s} - \\ &- \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{l-1} f(t, s) z_1^{k-t} z_2^{l-s} - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=l}^{\infty} f(i, j) z_1^{k-i} z_2^{l-j} - \\ &- \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=0}^{l-1} f(i, j) z_1^{k-i} z_2^{l-j} = z_1^k z_2^l F(z_1, z_2) - \\ &- \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{l-1} f(t, s) z_1^{k-t} z_2^{l-s} - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=l}^{\infty} f(i, j) z_1^{k-i} z_2^{l-j} - \\ &- \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=0}^{l-1} f(i, j) z_1^{k-i} z_2^{l-j} \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Απόρροια του πιο πάνω θεωρήματος είναι το πιο κάτω πόρισμα:

Πόρισμα 1.1

Αν $F(z_1, z_2) = Z[f(i, j)]$, τότε ισχύει: $Z[f(i-k, j-l)] = z_1^{-k} z_2^{-l} F(z_1, z_2)$. ▲

Εφαρμόζοντας τον ορισμό του 2-D μετασχηματισμού-z και το Θεώρημα 1.1 έπονται οι ακόλουθες ειδικές περιπτώσεις που συναντάμε στην επίλυση γραμμικών συστημάτων:

□ για $k > 0, l = 0$

$$Z[f(i+k, j)] = z_1^k F(z_1, z_2) - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} f(i, j) z_1^{k-i} z_2^{-j} = z_1 [F(z_1, z_2) - F(0, z_2)]$$

□ για $k = 1, l = 0$

$$Z[f(i+1, j)] = z_1 F(z_1, z_2) - z_1 F(0, z_2) = z_1 [F(z_1, z_2) - F(0, z_2)]$$

□ για $k = 0, l = 1$

$$Z[f(i, j+1)] = z_2 F(z_1, z_2) - z_2 F(z_1, 0) = z_2 [F(z_1, z_2) - F(z_1, 0)]$$

□ για $k = 1, l = 1$

$$\begin{aligned} Z[f(i+1, j+1)] &= z_1 z_2 F(z_1, z_2) - z_1 z_2 F(z_1, 0) - z_1 z_2 F(0, z_2) + z_1 z_2 f(0, 0) = \\ &= z_1 z_2 [F(z_1, z_2) - F(z_1, 0) - F(0, z_2) + f(0, 0)] \end{aligned}$$

1.6 Απόκριση δισδιάστατων συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων

Στην παράγραφο που ακολουθεί θα αναφερθούμε στην λύση Roesser μοντέλου σε όρους των πινάκων μετάβασης και στηριζόμενοι στο Θεώρημα Cayley-Hamilton. Θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε την λύση του μοντέλου συναρτήσει των 2-D ιδιοτιμών.

1.6.1 Απόκριση του Roesser μοντέλου χώρου καταστάσεων

Θεώρημα 1.2

Για το Roesser μοντέλο (1.1)

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j)$$

$$y(i, j) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j)$$

με οριακές συνθήκες $x^h(0, j)$, $x^v(i, 0)$ για $i, j = 0, 1, 2, \dots$

η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} &= \sum_{k_1=0}^i A^{i-k_1, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^j A^{i, j-k_2} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i, j)} \{A^{i-k_1-1, j-k_2} B^{1,0} + A^{i-k_1, j-k_2-1} B^{0,1}\} u(k_1, k_2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\text{όπου } B^{1,0} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Απόδειξη:

Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι η λύση ενός Roesser μοντέλο είναι η (1.13).

Για $(i, j) = (0, 0)$ παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (1.1α) και (1.13) δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα:

$$\begin{bmatrix} x^h(1, 0) \\ x^v(0, 1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(0, 0) \\ x^v(0, 0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(0, 0)$$

Το ίδιο ισχύει και για $(i, j) = (i_0, 0)$, $(0, j_0)$, όπου $i_0, j_0 > 0$.

Ας υποθέσουμε λοιπόν, ότι ισχύει για όλα τα (k_1, k_2) έτσι ώστε $(0, 0) \leq (k_1, k_2) < (i, j)$, δηλαδή οι εξισώσεις (1.1α) και (1.13) δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Σύμφωνα με τον επαγωγικό νόμο πρέπει τότε να δείξουμε ότι η υπόθεση ισχύει και για (i, j) .

Εφαρμόζοντας στην εξίσωση (1.1α) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} &= A^{1,0} \begin{bmatrix} x^h(i-1, j) \\ x^v(i-1, j) \end{bmatrix} + A^{0,1} \begin{bmatrix} x^h(i, j-1) \\ x^v(i, j-1) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(i-1, j) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j-1) \end{aligned} \quad (1.14)$$

για $i = i-1$ από την (1.13) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i-1, j) \\ x^v(i-1, j) \end{bmatrix} &= \sum_{k_1=0}^{i-1} A^{i-k_1-1, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^j A^{i-1, j-k_2} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i-1, j)} \left(A^{i-k_1-2, j-k_2} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i-k_1-1, j-k_2-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) u(k_1, k_2) \end{aligned}$$

ενώ για $j = j-1$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i, j-1) \\ x^v(i, j-1) \end{bmatrix} &= \sum_{k_1=0}^i A^{i-k_1, j-1} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^{j-1} A^{i, j-k_2-1} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i, j-1)} \left(A^{i-k_1-1, j-k_2-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i-k_1, j-k_2-2} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) u(k_1, k_2) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (1.14) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} &= A^{1,0} \left\{ \sum_{k_1=0}^{i-1} A^{i-k_1-1, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^j A^{i-1, j-k_2} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \right. \\ &+ \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i-1, j)} \left(A^{i-k_1-2, j-k_2} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i-k_1-1, j-k_2-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) u(k_1, k_2) \left. \right\} + \\ &+ A^{0,1} \left\{ \sum_{k_1=0}^i A^{i-k_1, j-1} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^{j-1} A^{i, j-k_2-1} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \right. \\ &+ \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i, j-1)} \left(A^{i-k_1-1, j-k_2-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i-k_1, j-k_2-2} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) u(k_1, k_2) \left. \right\} + \\ &+ \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(i-1, j) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j-1) \end{aligned}$$

Κάνοντας τις πράξεις και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του πίνακα μετάβασης όπως τις έχουμε ορίσει στην παράγραφο 1.2, η πιο πάνω εξίσωση αναδιαμορφώνεται στην:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{k_1=0}^{i-1} \left(A^{1,0} A^{i-k_1-1, j} + A^{0,1} A^{i-k_1, j-1} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} \right) + \\
 & + A^{0,1} A^{0, j-1} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^{j-1} \left(A^{1,0} A^{i-1, j-k_2} + A^{0,1} A^{i, j-k_2-1} \right) \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 & + A^{1,0} A^{i-1, 0} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i-1, j-1)} \left(A^{1,0} A^{i-k_1-2, j-k_2} + \right. \\
 & \left. + A^{0,1} A^{i-k_1-1, j-k_2-1} \right) \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k_1, k_2) + \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i-1, j-1)} \left(A^{1,0} A^{i-k_1-1, j-k_2-1} + \right. \\
 & \left. + A^{0,1} A^{i-k_1, j-k_2-2} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k_1, k_2) + \\
 & + A^{1,0} \sum_{k_1=0}^{i-2} \left(A^{i-k_1-2, 0} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i-k_1-1, -1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) u(k_1, k_2) + \\
 & + A^{0,1} \sum_{k_2=0}^{j-2} \left(A^{-1, j-k_2-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{0, j-k_2-2} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) u(k_1, k_2) + \\
 & + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(i-1, j) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j-1) = \\
 & = \sum_{k_1=0}^{i-1} \left(A^{i-k_1, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + A^{0, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} \right) + \sum_{k_2=0}^{j-1} \left(A^{i, j-k_2} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \\
 & + A^{i, 0} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i-1, j-1)} \left(A^{i-k_1-1, j-k_2} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. + A^{i-k_1, j-k_2-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) u(k_1, k_2) + \left\{ \sum_{k_1=0}^{i-2} A^{i-k_1-1, 0} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. + \sum_{k_2=0}^{j-2} A^{0, j-k_2-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right\} u(k_1, k_2) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(i-1, j) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j-1) = \\
 & = \sum_{k_1=0}^i A^{i-k_1, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^j A^{i, j-k_2} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 & + \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i, j)} \left(A^{i-k_1-1, j-k_2} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i-k_1, j-k_2-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) u(k_1, k_2) .
 \end{aligned}$$

▲

Αντικαθιστώντας την σχέση (1.13) στην εξίσωση (1.1β) βρίσκουμε την γενική απόκριση του συστήματος η οποία δίνεται από την πιο κάτω σχέση.

$$y(i, j) = [C_1 \quad C_2] \left\{ \sum_{k_1=0}^i A^{i-k_1, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^y(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^j A^{i, j-k_2} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i, j)} \left(A^{i-k_1-1, j-k_2} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i-k_1, j-k_2-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) u(k_1, k_2) \right\} + Du(i, j) \quad (1.15)$$

1.6.2 Απόκριση του Roesser μοντέλου χώρου καταστάσεων συναρτήσει των 2-D ιδιοτιμών

Συγκρίνοντας τις έννοιες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και της χαρακτηριστικής εξίσωσης στα δισδιάστατα συστήματα με τις έννοιες αυτές στα μονοδιάστατα συστήματα θα παρατηρήσουμε ότι είναι αντιστοίχως ανάλογες.

Ορισμός 1.4

Το 2-D χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(z_1, z_2)$, ενός πίνακα $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ορίζεται

ως εξής:

$$p(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} z_2 - A_{22} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} z_1^i z_2^j \quad (1.16)$$

Για να βρούμε την 2-D χαρακτηριστική εξίσωση του A , όπως και στα μονοδιάστατα συστήματα, απλά μηδενίζουμε το 2-D χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(z_1, z_2)$ δηλαδή.

$$p(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} z_1^i z_2^j = 0 \quad (1.17)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Cayley-Hamilton, στην περίπτωση των 1-D συστημάτων, ο πίνακας A ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση. Για την επέκταση και την του θεωρήματος στα δισδιάστατα συστήματα είναι απαραίτητο να αναφέρουμε το επόμενο θεώρημα και λήμμα.

Θεώρημα 1.3

Ο μετασχηματισμός-z ενός πίνακα $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, για $i = 1, 2$, ορίζεται:

$$z[A^{i,j}] = \begin{bmatrix} I_{n_1} - A_{11}z_1^{-1} & -A_{12}z_1^{-1} \\ -A_{21}z_2^{-1} & I_{n_2} - A_{22}z_2^{-1} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (1.18)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Με οριακές συνθήκες: $x^h(0, j) = 0$ για $j > 0$ και $x^v(i, 0) = 0$ για $j > 0$.

Από το Θεώρημα 1.1 και την (1.13) προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} = A^{i,j} \begin{bmatrix} x^h(0, 0) \\ x^v(0, 0) \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Χρησιμοποιώντας στην (1.19) τις :

$$Z[f(i+1, j)] = z_1 F(z_1, z_2) - z_1 F(0, z_2) = z_1 [F(z_1, z_2) - F(0, z_2)]$$

και

$$Z[f(i, j+1)] = z_2 F(z_1, z_2) - z_2 F(z_1, 0) = z_2 [F(z_1, z_2) - F(z_1, 0)]$$

Η (1.19) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} z_1 x^h(z_1, z_2) \\ z_2 x^v(z_1, z_2) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(z_1, z_2) \\ x^v(z_1, z_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 x^h(0, 0) \\ z_2 x^v(0, 0) \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

και κάνοντας τις πράξεις η (1.16) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} x^h(z_1, z_2) \\ x^v(z_1, z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} - A_{11}z_1^{-1} & -A_{12}z_1^{-1} \\ -A_{21}z_2^{-1} & I_{n_2} - A_{22}z_2^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x^h(0, 0) \\ x^v(0, 0) \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

συγκρίνοντας τις (1.20) και (1.22) προκύπτει η σχέση (1.18).



Λήμμα 1.1

$$\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} A^{i+h, j+k} = 0, \quad \text{για } h \geq 0 \quad \text{ή} \quad k \geq 0 \quad (1.23)$$

Απόδειξη:

Ο μετασχηματισμός-z ενός πίνακα μεταφοράς σύμφωνα με το θεώρημα 1.3 είναι:

$$z[A^{i,j}] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A^{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j} = \begin{bmatrix} I_{n_1} - A_{11} z_1^{-1} & -A_{12} z_1^{-1} \\ -A_{21} z_2^{-1} & I_{n_2} - A_{22} z_2^{-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

Σύμφωνα με την θεωρία πινάκων ισχύει:

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} z_2 - A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} - A_{11} z_1^{-1} & -A_{12} z_1^{-1} \\ -A_{21} z_2^{-1} & I_{n_2} - A_{22} z_2^{-1} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με τον $\begin{bmatrix} I_{n_1} - A_{11} z_1^{-1} & -A_{12} z_1^{-1} \\ -A_{21} z_2^{-1} & I_{n_2} - A_{22} z_2^{-1} \end{bmatrix}^{-1}$ και από αριστερά

με τον $\begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} z_2 - A_{22} \end{bmatrix}$ προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} - A_{11} z_1^{-1} & -A_{12} z_1^{-1} \\ -A_{21} z_2^{-1} & I_{n_2} - A_{22} z_2^{-1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} z_2 \end{bmatrix}$$

Τότε ο μετασχηματισμός-z του πίνακα $A^{i,j}$ γράφεται σαν:

$$z[A^{i,j}] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A^{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j} = \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} z_2 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A^{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j} \begin{bmatrix} \sum_{h=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} a_{hk} z_1^h z_2^k \end{bmatrix} &= \sum_{h=-i}^{\infty} \sum_{k=-j}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} A^{i+h, j+k} \right] z_1^{-h} z_2^{-k} = \\ &= \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} z_2 - A_{22} \end{bmatrix}_{adj} \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} z_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \hat{B}_{ij} z_1^i z_2^j \end{aligned}$$

με $\hat{B}_{00} = 0$, για $i < 0$ ή $j < 0$

Η (1.23) και κατά συνέπεια και η ολοκλήρωση της απόδειξης του λήμματος συνάγεται από την τελευταία σχέση, για $\hat{B}_{ij} = 0$ όπου $i < 0$ ή $j < 0$. ▲

Θεώρημα 1.4 (2-D Cayley-Hamilton theorem)

Κάθε πίνακας $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση δηλ:

$$p(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} A^{i,j} = 0 \quad (1.24)$$

Απόδειξη:

Σύμφωνα με το Λήμμα 1.1 ισχύει για κάθε $h \geq 0$ ή $k \geq 0$: $\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} A^{i+h, j+k} = 0$,

Αν θέσουμε όπου $h = k = 0$, τότε: $p(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} A^{i,j} = 0$. ▲

Ορισμός 1.5

Οι 2-D ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ είναι το ζευγάρι (z_1, z_2) το οποίο

ικανοποιεί ταυτόχρονα τις πιο κάτω εξισώσεις:

- i. $p_{i,-1}(z_1, z_2) = 0$ για $0 < i \leq n_1$
- ii. $p_{-1,j}(z_1, z_2) = 0$ για $0 < j \leq n_2$
- iii. $p(z_1, z_2) = 0$

όπου $p_{i,j}(z_1, z_2) = \sum_{k=i}^{n_1} \sum_{l=j}^{n_2} a_{kl} z_1^{k-i} z_2^{l-j}$ για κάθε ζευγάρι ακεραίων (i, j) .

Λήμμα 1.2

Αν το 2-D χαρακτηριστικό πολώνυμο $p(z_1, z_2)$ είναι παραγοντοποιήσιμο (separable) δηλ. όταν μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$p(z_1, z_2) = p_1(z_1) p_2(z_2),$$

και ταυτόχρονα ισχύει:

$$p_i(z_i) = (z_i - z_{i1})(z_i - z_{i2}) \dots (z_i - z_{in_i}), \quad i = 1, 2 \quad (1.26)$$

Τότε το σύνολο των 2-D ιδιοτιμών του είναι:

$$\left\{ (z_{1i}, z_{2j}) : (0, 0) < (i, j) \leq (n_1, n_2) \right\}, \quad \text{όπου } z_{10} = z_{20} = 0. \quad (1.27)$$

Απόδειξη:

Απ' την υπόθεση ότι το 2-D χαρακτηριστικό πολυώνυμο μας είναι παραγοντοποιήσιμο έχουμε ότι :

$$p_{i,-1}(z_1, z_2) = \hat{p}_{1i}(z_1) z_2 p_2(z_2)$$

και

$$p_{-1,j}(z_1, z_2) = z_1 p_1(z_1) \hat{p}_{2j}(z_2)$$

για κάποια πολυώνυμα $\hat{p}_{1i}(z_1), \hat{p}_{2j}(z_2)$. Είναι προφανές ότι το $p_2(z_{2j})$ ικανοποιεί την $p_{i,-1}(z_1, z_{2j}) = 0$ και το $p_1(z_{1i})$ ικανοποιεί την $p_{-1,j}(z_{1i}, z_2) = 0$. Έτσι έχουμε για κάθε (z_{1i}, z_{2j}) όλα τα πολυώνυμα $p_{i,-1}(z_1, z_2), p_{-1,j}(z_1, z_2), p(z_1, z_2)$ να είναι ισοδύναμα με μηδέν και κατά συνέπεια, σύμφωνα με τον ορισμό (1.5), το σύνολο $(z_{1i}, z_{2j}) : (0,0) < (i, j) \leq (n_1, n_2)$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A . ▲

Η λύση του Roesser μοντέλου με την βοήθεια των πιο πάνω ορισμών μπορεί να δοθεί σύμφωνα με το θεώρημα που ακολουθεί μέσω των ιδιοτιμών του χαρακτηριστικού πολυώνυμου.

Θεώρημα 1.5

Αν το 2-D χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(z_1, z_2)$ είναι διαχωρίσιμο και το σύνολο των διακριτών ιδιοτιμών του πίνακα A έχουν την μορφή: $\{(z_{1i}, z_{2j}) : (0,0) < (i, j) \leq (n_1, n_2)\}$, όπου $z_{10} = z_{20} = 0$, τότε η λύση του Roesser μοντέλου (1.1) με οριακές συνθήκες (1.2) δίνεται από τον πιο κάτω τύπο:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} &= \sum_{(0,0) < (k,l) \leq (n_1, n_2)} z_{k,l} \left\{ \sum_{k_1=0}^i z_{1k_1}^{i-k_1} z_{2l}^j \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^j z_{1k}^i z_{2l}^{j-k_2} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \\ &+ \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i, j)} \left(z_{1k_1}^{i-k_1-1} z_{2l}^{j-k_2} B^{1,0} + z_{1k_1}^{i-k_1} z_{2l}^{j-k_2-1} B^{0,1} \right) u(k_1, k_2) \end{aligned} \quad (1.28)$$

για $(0,0) < (i, j)$, όπου $z_{k,l} = v_{k,l}(A)$ και η $v_{k,l}(z_1, z_2)$ ορίζεται από τη σχέση

$$v_{i,j}(z_1, z_2) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n_1} \frac{z_1 - z_{1k}}{z_{1i} - z_{1k}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{n_2} \frac{z_2 - z_{2l}}{z_{2j} - z_{2l}}, \quad (0,0) < (k, l) \leq (n_1, n_2)$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1}^i z_1^{i-k_1} z_2^j \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2}^j z_1^i z_2^{j-k_2} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{(0,0) < (k_1, k_2) \leq (i,j)} \left(z_1^{i-k_1-1} z_2^{j-k_2} B^{1,0} + z_1^{i-k_1} z_2^{j-k_2-1} B^{0,1} \right) \mu(k_1, k_2) \quad (1.29)$$

Η οποία περιέχει τις 2-D ιδιοτιμές (z_{1i}, z_{2j}) για $(0,0) < (i, j) \leq (n_1, n_2)$ του πίνακα A .

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $f(A) = \sum_{(0,0) < (i,j) \leq (n_1, n_2)} z_{i,j} f(z_{1i}, z_{2j})$ (βλέπε Παράρτημα)

για την συνάρτηση (1.29) και διαγράφοντας τους όρους z_1 και z_2 με αρνητικούς εκθέτες προκύπτει η (1.28). ▲

Αλγόριθμος εύρεσης λύση του Roesser μοντέλου συναρτήσσει των 2-D ιδιοτιμών

Βήμα 1: Βρίσκουμε το 2-D χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(z_1, z_2)$ του πίνακα A και

υπολογίζουμε το σύνολο των ιδιοτιμών του $\{(z_{1i}, z_{2j}) : (0,0) < (i, j) \leq (n_1, n_2)\}$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε τους πίνακες $z_{k,l} = v_{k,l}(A)$,

$$\text{όπου } v_{i,j}(z_1, z_2) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n_1} \frac{z_1 - z_{1k}}{z_{1i} - z_{1k}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{n_2} \frac{z_2 - z_{2l}}{z_{2j} - z_{2l}}, \text{ για } (0,0) < (k, l) \leq (n_1, n_2)$$

Βήμα 3: Χρησιμοποιώντας από το θεώρημα 1.5 τον τύπο:

$$\begin{pmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{pmatrix} = \sum_{(0,0) < (k,l) \leq (n_1, n_2)} z_{k,l} \left\{ \sum_{k_1=0}^i z_{1k}^{i-k_1} z_{2l}^j \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^j z_{1k}^i z_{2l}^{j-k_2} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i,j)} \left(z_{1k}^{i-k_1-1} z_{2l}^{j-k_2} B^{1,0} + z_{1k}^{i-k_1} z_{2l}^{j-k_2-1} B^{0,1} \right) \mu(k_1, k_2) \right\}$$

βρίσκουμε τις επιθυμητές λύσεις. ▲

1.7 Απόκριση των Fornasini- Marchesini μοντέλων

Οι έννοιες, που ορίσαμε για το Roesser μοντέλο λόγω της ισοδυναμίας των δύο μοντέλων, επεκτείνονται εύκολα και για τα Fornasini- Marchesini μοντέλα.

1.7.1 Απόκριση του Fornasini- Marchesini I μοντέλου

Θεώρημα 1.6

Αν θεωρήσουμε το Fornasini- Marchesini I μοντέλο το οποίο ορίζεται από τις εξισώσεις (1.3) με οριακές συνθήκες (1.4) τότε η λύση του F-MM I έχει την μορφή:

$$x(i, j) = \sum_{k=0}^i A_{22}^{i-k, j} x(k, 0) + \sum_{l=0}^j A_{21}^{i, j-l} \{x(0, l+1) - \widehat{A}_1 x(0, l)\} + \sum_{(0,0) \leq (k,l) < (i,j)} A_{21}^{i-k-1, j-l} \widehat{B} u(k, l) \quad (1.30)$$

$$\text{για } (i, j) \geq (0, 0), \text{ και όπου } \begin{bmatrix} A_{11}^{k,l} & A_{12}^{k,l} \\ A_{21}^{k,l} & A_{22}^{k,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_2 & \widehat{A}_0 + \widehat{A}_2 \widehat{A}_1 \\ I_n & \widehat{A}_1 \end{bmatrix}^{k,l} = A^{k,l} \quad (1.31)$$

Απόδειξη:

Από τις σχέσεις ισοδυναμίας (1.9) των Roesser και F-MM I μοντέλων και το Θεώρημα 1.2 για την λύση του Roesser μοντέλου, επεκτείνουμε την λύση του Roesser μοντέλου και προκύπτει ότι για το F-MM I μοντέλο ισχύει:

$$\begin{bmatrix} x(i, j+1) - \widehat{A}_1 x(i, j) \\ x(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^i A^{i-k, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x(k, 0) \end{bmatrix} + \sum_{l=0}^j A^{i, j-l} \begin{bmatrix} x(0, l+1) - \widehat{A}_1 x(0, l) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{(0,0) \leq (k,l) < (i,j)} A^{i-k-1, j-l} \begin{bmatrix} \widehat{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(k, l)$$

$$\text{σύμφωνα με την (1.9) όπου } \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ συνεπώς } B^{1,0} = \begin{bmatrix} \widehat{B} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } B^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (1.31) και αντικαθιστώντας την, στην σχέση που βρήκαμε, παίρνουμε την επιθυμητή λύση.



Αντικαθιστώντας στο (1.3β) την λύση του F-MM I που δίνεται από το Θεώρημα 1.6 και την σχέση (1.30), παίρνουμε την γενική απόκριση για το Fornasini- Marchesini I:

$$\begin{aligned}
 y(i, j) = & \sum_{k=0}^i \widehat{C}A_{22}^{i-k, j} x(k, 0) + \sum_{l=0}^j \widehat{C}A_{21}^{i, j-l} \{x(0, l+1) - \widehat{A}_1 x(0, l)\} + \\
 & + \sum_{(0,0) \leq (k,l) \leq (i,j)} \widehat{C}A_{21}^{i-k-1, j-l} \widehat{B}u(k, l)
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

για $(i, j) \geq (0, 0)$.

Παράδειγμα 1.1

Έστω το μοντέλο Fornasini- Marchesini I που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 x(i+1, j+1) = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(i, j) + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(i+1, j) + \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(i, j+1) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(i, j)
 \end{aligned}$$

$$\text{με } \widehat{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \widehat{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \widehat{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \widehat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

με είσοδο $u(i, j) = e^i 2^j$ και μηδενικές οριακές συνθήκες, δηλ $x(i, 0) = x(0, j) = 0$ για κάθε $i, j = 0, 1, 2, \dots$, να βρούμε την λύση $x(i, j)$ του μοντέλου, και συγκεκριμένα την $x(2, 2)$.

Από την σχέση (1.31) βρίσκουμε τους πίνακες μετάβασης που θα χρειαστούμε για την λύση του μοντέλου.

$$A^{k,l} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_2 & \widehat{A}_0 + \widehat{A}_2 \widehat{A}_1 \\ I_n & \widehat{A}_1 \end{bmatrix}^{k,l} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{k,l} = \begin{pmatrix} A_{11}^{k,l} & A_{12}^{k,l} \\ A_{21}^{k,l} & A_{22}^{k,l} \end{pmatrix}$$

$$A^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ τότε } A_{21}^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ τότε } A_{21}^{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{1,1} = A^{1,0}A^{0,1} + A^{0,1}A^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 11 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε $A_{21}^{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{0,2} = A^{1,0}A^{-1,2} + A^{0,1}A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{0,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε } A_{21}^{0,2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{1,2} = A^{1,0}A^{0,2} + A^{0,1}A^{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 11 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 11 & 1 & 4 & 21 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 10 & 1 & 4 & 23 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

τότε
$$A_{21}^{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Από την σχέση (1.30):

$$\begin{aligned} x(2,2) &= A_{22}^{2,2}x(0,0) + A_{22}^{1,2}x(1,0) + A_{22}^{0,2}x(2,0) + A_{21}^{2,2} \{x(0,1) - \widehat{A}_1x(0,0)\} + \\ &+ A_{21}^{2,1} \{x(0,2) - \widehat{A}_1x(0,1)\} + A_{21}^{2,0} \{x(0,3) - \widehat{A}_1x(0,2)\} + A_{21}^{1,2} \widehat{B}u(0,0) + \\ &+ A_{21}^{1,1} \widehat{B}u(0,1) + A_{21}^{0,2} \widehat{B}u(1,0) \end{aligned}$$

Επειδή οι οριακές συνθήκες είναι μηδενικές, τότε οι πρώτοι όροι μηδενίζονται:

$$x(2,2) = A_{21}^{1,2} \widehat{B}u(0,0) + A_{21}^{1,1} \widehat{B}u(0,1) + A_{21}^{0,2} \widehat{B}u(1,0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^0 2^0 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^0 2^1 + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^1 2^0 \Rightarrow$$

$$x(2,2) = \begin{bmatrix} 2e & 1+3e \\ -3 & -16-2e \\ 1 & 1+e \end{bmatrix}$$

Γενικά για κάθε (i, j) η λύση του μοντέλου:

$$x(i, j) = \sum_{(0,0) \leq (k,l) < (i,j)} A_{21}^{i-k-1, j-l} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^k 2^l.$$

Η απόκριση του μοντέλου για $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $D = 0$ είναι:

$$y(2,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e & 1+3e \\ -3 & -16-2e \\ 1 & 1+e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e-3 & -15+e \\ -3 & -16-2e \end{bmatrix}. \quad \Delta$$

1.7.2 Απόκριση του Fornasini- Marchesini II μοντέλου

Ορισμός 1.6

Ο πίνακας μετάβασης για τα F-MM II $A^{i,j}$ ορίζεται ως:

- i. $A^{0,0} = I$
- ii. $A^{i,j} = A_1 A^{i-1,j} + A_2 A^{i,j-1}$ για $(i, j) > (0,0)$
- iii. $A^{-i,j} = A^{i,-j} = 0$ για $i > 0$ ή $j > 0$ (1.33)
- iv. $A^{0,j} = [A_2]^j$, $A^{i,0} = [A_1]^i$ για $i > 0$, $j > 0$
- v. $A_1 A^{i-1,j} + A_2 A^{i,j-1} = A^{i-1,j} A_1 + A^{i,j-1} A_2$ για $(i, j) \geq (0,0)$

Το 2-D χαρακτηριστικό πολυώνυμο του F-MM II δίνεται από την:

$$p(z_1, z_2) = \det [I_n z_1 z_2 - A_1 z_2 - A_2 z_1] = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} z_1^i z_2^j \quad (1.34)$$

Η 2-D χαρακτηριστική εξίσωση του F-MM II δίνεται από την εξίσωση:

$$p(z_1, z_2) = 0 \quad (1.35)$$

Θεώρημα Cayley-Hamilton για το F-MM II

Ο πίνακας μεταφοράς ενός F-MM II ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση. Δηλαδή

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} A^{i,j} = 0 \quad (1.36)$$

όπου $A^{i,j}$ ορίζονται από τις σχέσεις (1.33).

Απόδειξη:

Αντικαθιστώντας την εξίσωση

$$\text{adj}[I_n z_1 z_2 - A_1 z_2 - A_2 z_1] = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} B_{ij} z_1^i z_2^j$$

και του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (1.34) στην σχέση:

$$\text{adj}[I_n z_1 z_2 - A_1 z_2 - A_2 z_1][I_n z_1 z_2 - A_1 z_2 - A_2 z_1] = I_n p(z_1, z_2)$$

παίρνουμε

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} B_{ij} \{I_n z_1^{i+1} z_2^{j+1} - A_1 z_1^i z_2^{j+1} - A_2 z_1^{i+1} z_2^j\} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n I_n a_{ij} z_1^i z_2^j$$

Από τις ιδιότητες του πίνακα μετάβασης ενός F-MM II προκύπτει

$$A^{i+1,j+1} = A_1 A^{i,j+1} + A_2 A^{i+1,j}$$

Κατά συνέπεια ο πίνακας μεταφοράς του ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση. ▲

Θεώρημα 1.7

Η λύση του F-MM II (1.5α) με οριακές συνθήκες (1.6) δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} x(i, j) = & \sum_{k=1}^i A^{i-k, j-1} [A_2 x(k, 0) + B_{01} u(k, 0)] + \\ & + \sum_{l=1}^j A^{i-1, j-l} [A_1 x(0, l) + B_{10} u(0, l)] + \\ & + \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j [A^{i-k-1, j-l} B_{10} + A^{i-k, j-l-1} B_{01}] u(k, l) \end{aligned} \quad (1.37)$$

για $(i, j) > (0, 0)$.

Απόδειξη:

Θέλουμε να δείξουμε ότι $x(i, j) = A^{i-k, j-l} A_2 x(k, 0)$, για $k > 0$

Ας θεωρήσουμε μηδενικά όλα τα διανύσματα εισόδου $u(i, j)$, για κάθε (i, j) , και μηδενικές τις οριακές συνθήκες (1.6), εκτός του $x(k, 0)$ που το θεωρούμε διάφορο του μηδέν.

Από την εξίσωση του μοντέλου μας (1.5) και από τις ιδιότητες του πίνακα μεταφοράς για τα F-MM II που είδαμε στις εξισώσεις (1.33) έχουμε:

$$x(k, j) = [A_2]^j x(k, 0) = [A_2]^{j-1} A_2 x(k, 0) = A^{0, j-1} A_2 x(k, 0), \quad \text{για } j = 1, 2, \dots$$

και

$$x(i, 1) = [A_1]^{i-k} A_2 x(k, 0) = A^{i-k, 0} A_2 x(k, 0) \quad \text{για } i = k, k+1, k+2, \dots$$

Γι αυτό και η υπόθεση μας επαληθεύεται για κάθε $(i, 0)$ και $(0, j)$, $i, j = 1, 2, \dots$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι αν τα διανύσματα εισόδου $u(i, j)$ για κάθε (i, j) και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές εκτός του $x(0, l)$, τότε έχουμε:

$$x(i, j) = A^{i-k, j-l} A_1 x(0, l) \quad \text{για } l > 0$$

Για να αποδείξουμε επαγωγικά την υπόθεση μας, θεωρούμε ότι ισχύει για κάθε (k, l) έτσι ώστε $(0, 0) < (k, l) < (i, j)$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει για (i, j) .

Από την (1.5) και από τις ιδιότητες του πίνακα μεταφοράς για τα F-MM II έχουμε :

$$\begin{aligned} x(i, j) &= A_1 x(i-1, j) + A_2 x(i, j-1) = \\ &= A_1 A^{i-k-1, j-1} A_2 x(k, 0) + A_2 A^{i-k, j-2} A_2 x(k, 0) = \\ &= A^{i-k, j-1} A_2 x(k, 0). \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι για κάποια $(1, 1) \leq (k, l) < (i, j)$, η $u(k, l)$ είναι η μοναδική μη μηδενική είσοδος και οι αρχικές συνθήκες είναι όλες μηδέν. Τότε εφαρμόζοντας στην σχέση (1.5) λαμβάνουμε:

$$x(k, l+1) = B_{01} u(k, l)$$

και

$$x(k+1, l) = B_{10} u(k, l)$$

Επομένως έχουμε:

$$x(i, j) = A^{i-k-1, j-l} x(k+1, l) + A^{i-k, j-l-1} x(k, l+1) =$$

$$\left(A^{i-k-1, j-l} B_{10} + A^{i-k, j-l-1} B_{01} \right) u(k, l)$$

Αν η $u(k, 0)$ είναι η μοναδική μη μηδενική είσοδος και οι αρχικές συνθήκες είναι όλες μηδέν, τότε:

$$x(i, j) = A^{i-k, j-1} B_{01} u(k, 0) \quad \text{για } i = k, k+1, k+2, \dots$$

και αντίστοιχα θεωρούμε την $u(0, l)$ τη μοναδική μη μηδενική είσοδο καθώς και τις αρχικές συνθήκες όλες μηδέν, τότε έχουμε:

$$x(i, j) = A^{i-1, j-l} B_{10} u(0, l) \quad \text{για } j = l, l+1, l+2, \dots$$

για κάθε $k, l=1, 2, \dots$

Τέλος από την υπόθεση των αποτελεσμάτων των οριακών συνθηκών και εισόδων όπως τις ορίσαμε στις πιο πάνω σχέσεις, καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. ▲

Η γενική απόκριση του συστήματος λαμβάνεται από την αντικατάσταση της λύσης του F-MM II όπως δίνεται από το Θεώρημα 1.7 την σχέση (1.35) στην (1.5β) και μας δίνει:

$$\begin{aligned} y(i, j) = & \sum_{k=1}^i C A^{i-k, j-1} \{ A_2 x(k, 0) + B_{01} u(k, 0) \} + \sum_{l=1}^j C A^{i-1, j-l} [A_1 x(0, l) + \\ & + B_{10} u(0, l)] + \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j C [A^{i-k-1, j-l} B_{10} + A^{i-k, j-l-1} B_{01}] u(k, l) \end{aligned} \quad (1.38)$$

για κάθε $(i, j) > (0, 0)$.

Παράδειγμα 1.2

Έστω το μοντέλο Fornasini- Marchesini II, που δίνεται από την εξίσωση:

$$x(i+1, j+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(i, j+1) + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(i+1, j) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(i+1, j) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(i, j+1)$$

με πίνακες: $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_{01} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

Να βρούμε την λύση του $x(i, j) = x(3, 2)$, για διάνυσμα εισόδου $u(i, j) = e^{i+j}$ και μηδενικές οριακές συνθήκες $x(i, 0) = x(0, j) = 0$, για $i, j = 0, 1, 2, \dots$

Οι πίνακες μετάβασης σύμφωνα με τον ορισμό 1.6 για το F-MM-II υπολογίζονται από τις σχέσεις (1.33):

$$A^{1,0} = [A_1]^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{0,1} = [A_2]^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{1,1} = A_1 A^{0,1} + A_2 A^{1,0} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{2,0} = A^{i,j} = A_1 A^{1,0} + A_2 A^{2,-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{2,1} = A_1 A^{1,1} + A_2 A^{2,0} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 21 \\ -4 & -3 & 5 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.7, η λύση του δίνεται από την σχέση (1.37):

$$\begin{aligned} x(3, 2) = & A^{2,1} [A_2 x(1, 0) + B_{01} u(1, 0)] + A^{1,1} [A_2 x(2, 0) + B_{01} u(2, 0)] + \\ & + A^{0,1} [A_2 x(3, 0) + B_{01} u(3, 0)] + A^{2,1} [A_1 x(0, 1) + B_{10} u(0, 1)] + \\ & + A^{2,0} [A_1 x(0, 2) + B_{10} u(0, 2)] + [A^{1,1} B_{10} + A^{2,0} B_{01}] u(1, 1) + \\ & + [A^{1,0} B_{10} + A^{2,-1} B_{01}] u(1, 2) + [A^{0,1} B_{10} + A^{1,0} B_{01}] u(2, 1) + \\ & + [A^{0,0} B_{10} + A^{1,-1} B_{01}] u(2, 2) + [A^{-1,1} B_{10} + A^{0,0} B_{01}] u(3, 1) + \\ & + [A^{-1,0} B_{10} + A^{0,-1} B_{01}] u(3, 2) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας:

$$\begin{aligned} x(3, 2) = & \begin{bmatrix} 5 & 14 & 21 \\ -4 & -3 & 5 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^3 + \\ & + \begin{bmatrix} 5 & 14 & 21 \\ -4 & -3 & 5 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^2 + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] e^3 + \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] e^3 + \\
 & + \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] e^4 + \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] e^4 + \\
 & + \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] e^5 \Rightarrow x(3,2) = \begin{bmatrix} 33e + 22e^2 + 7e^3 + e^4 \\ -10e - 2e^2 + 3e^3 + 2e^4 \\ 14e + 5e^2 + e^3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Η απόκριση του για $C = [1 \ 0 \ -1]$ δίνεται από την σχέση (1.38):

$$y(3,2) = [1 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} 33e + 22e^2 + 7e^3 + e^4 \\ -10e - 2e^2 + 3e^3 + 2e^4 \\ 14e + 5e^2 + e^3 \end{bmatrix} = 19e + 17e^2 + 6e^3 + e^4. \quad \triangle$$

1.8 Εφαρμογή μοντέλου μορφής χώρου καταστάσεων

Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με το Roesser μοντέλο και όπως είδαμε, έχουν καθιερώσει μια συνεπή θεωρία για την λύση, βασισμένη σε μια πολυωνυμική προσέγγιση και στον δισδιάστατο μετασχηματισμό-z. Εντούτοις, έχουν υπάρξει μόνο μερικά έγγραφα σχετικά με τις εφαρμογές της εξίσωσης του Roesser μοντέλου, στη μελέτη των συνεχών γραμμικών συστημάτων που περιγράφονται από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιάσουμε την χρήση πεπερασμένων διαφορικών μεθόδων, ένα θεμελιώδες πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων το οποίο μπορεί να μετασχηματιστεί στην εξίσωση του Roesser μοντέλου και κατά συνέπεια να βρούμε την λύση του όπως την παρουσιάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Η αριθμητική λύση των διακριτών μοντέλων μας επιτρέπει να ανάγουμε και να απλοποιήσουμε τις υπολογιστικές πράξεις σε σύγκριση με την παραδοσιακή τεχνική της αριθμητικής μεθόδου για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Το παρακάτω παράδειγμα αναλύει κάποια θερμική διαδικασία σε χημικούς αντιδραστήρες (chemical reactors) ή σε ανταλλάκτες θερμότητας (heat exchangers), ή σε φούρνους σωλήνων (pipe furnaces) περιγραφόμενη από μερική διαφορική εξίσωση.

Θεωρούμε την εξίσωση:

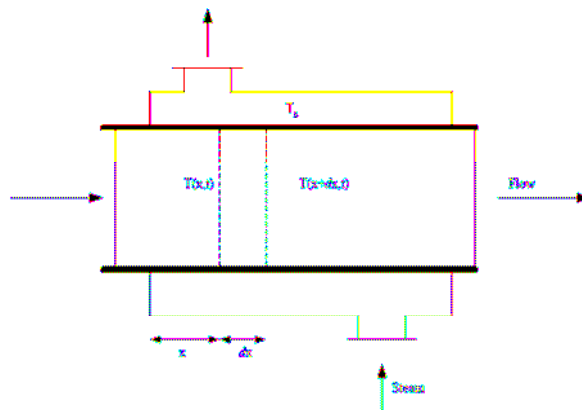
$$\frac{dT(x,t)}{dx} = -\frac{dT(x,t)}{dt} - T(x,t) + U(t) \quad (1.39)$$

με αρχικές και οριακές συνθήκες:

$$T(x,0) = f_1(x) = U_H(1 - e^{-x}), \quad T(0,t) = f_2(t) = 0 \quad (1.40)$$

όπου $T(x,t)$ είναι συνήθως η θερμοκρασία για $x \in [0, x_k]$ και $t \in [0, \infty]$.

Η U_H είναι σταθερά και $U(t)$ είναι δοσμένη συνάρτηση δύναμης.



Heat Exchanger

Ένας τρόπος επίλυσης της εξίσωσης είναι η μέθοδος διακριτοποίησης.

$$T(i, j) = T(i\Delta x, j\Delta t) \quad \text{και} \quad U(j) = U(j\Delta t) \quad (1.41)$$

και προσεγγίζοντας την μερική παράγωγο ως:

$$\frac{dT(x,t)}{dt} \cong \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta t} \quad \text{και} \quad \frac{dT(x,t)}{dx} \cong \frac{T(i, j) - T(i-1, j)}{\Delta x} \quad (1.42)$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε την μερική διαφορική εξίσωση που δίνεται από την σχέση (1.39) σαν:

$$T(i, j+1) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} - \Delta t\right) T(i, j) + \frac{\Delta t}{\Delta x} T(i-1, j) + \Delta t U(j) \quad (1.43)$$

με συνθήκη ευστάθειας:

$$\left|1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} - \Delta t\right| < 1 \quad (1.44)$$

ορίζουμε

$$x^h(i, j) := T(i-1, j) \quad \text{και} \quad x^v(i, j) := T(i, j) \quad (1.45)$$

Τότε από τις εξισώσεις (1.43) και (1.45) παίρνουμε την μερική διαφορική εξίσωση στην μορφή του Roesser μοντέλου :

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} U(j) \quad (1.46)$$

όπου

$$a_1 = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} - \Delta t, \quad a_2 = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad b = \Delta t \quad (1.47)$$

το μοντέλο αυτό είναι προσεγγιστική μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης (1.39) με οριακές συνθήκες

$$x^v(i, 0) = U_H (1 - e^{-i\Delta x}), \quad (1.48)$$

και

$$x^h(0, j) \cong T(0, j) = 0 \quad (1.49)$$

Θέλουμε να βρούμε την λύση του $\begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^h(2, 2) \\ x^v(2, 2) \end{bmatrix}$, με οριακές συνθήκες που

δίνονται από τις εξισώσεις (1.48) και (1.49) και διάνυσμα εισόδου

$U(t) = 100 \times 1(t-0)$, (όπου $1(t)$ είναι η μοναδιαία συνάρτηση), $x \in [0, 2]$ και $t \in [0, 0.9]$. Ας θεωρήσουμε ότι $\Delta t = 0.1$, $\Delta x = 0.2$ και $U_H = 10$.

Τότε έχουμε $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.5$ και $b = 0.1$ άρα το μοντέλο γράφεται

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} U(j)$$

με πίνακες $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$, $B_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$.

Ελέγχουμε αν ισχύει η συνθήκη ευστάθειας (1.44): $\left| 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} - \Delta t \right| = 0.4 < 1$.

Υπολογίζουμε τους πίνακες μετάβασης:

$$A^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$A^{1,1} = A^{1,0} A^{0,1} + A^{0,1} A^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^{0,2} = A^{1,0} A^{-1,0} + A^{0,1} A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0.16 \end{bmatrix}$$

$$A^{2,0} = A^{1,0} A^{1,0} + A^{0,1} A^{2,-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{1,2} = A^{1,0} A^{0,2} + A^{0,1} A^{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0.16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.16 \\ 0.25 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$A^{2,1} = A^{1,0} A^{1,1} + A^{0,1} A^{2,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{2,2} = A^{1,0} A^{1,2} + A^{0,1} A^{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.16 \\ 0.25 & 0.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.4 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

για $i = j = 2$, από την εξίσωση (1.13) έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(2, 2) \\ x^v(2, 2) \end{bmatrix} &= \sum_{k_1=0}^2 A^{2-k_1, 2} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^2 A^{2, 2-k_2} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (2,2)} \left\{ A^{2-k_1-1, 2-k_2} B^{1,0} + A^{2-k_1, 2-k_2-1} B^{0,1} \right\} u(k_1, k_2) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^h(2,2) \\ x^v(2,2) \end{pmatrix} &= A^{2,2} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(0,0) \end{bmatrix} + A^{1,2} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(1,0) \end{bmatrix} + A^{0,2} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(2,0) \end{bmatrix} + \\ &+ A^{2,2} \begin{bmatrix} x^h(0,0) \\ 0 \end{bmatrix} + A^{2,1} \begin{bmatrix} x^h(0,1) \\ 0 \end{bmatrix} + A^{2,0} \begin{bmatrix} x^h(0,2) \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \{A^{1,2}B^{1,0} + A^{2,1}B^{0,1}\}U(0) + \{A^{0,2}B^{1,0} + A^{1,1}B^{0,1}\}U(0) + \\ &+ \{A^{1,1}B^{1,0} + A^{2,0}B^{0,1}\}U(1) + \{A^{0,1}B^{1,0} + A^{1,0}B^{0,1}\}U(1) \Rightarrow \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε με τα αριθμητικά δεδομένα μας:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^h(2,2) \\ x^v(2,2) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.25 & 0.4 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.16 \\ 0.25 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & 0.4 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.16 \\ 0.25 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \right\} \times 0 + \\ &+ \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \right\} \times 0 + \\ &+ \left\{ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \right\} \times 100 + \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \right\} \times 100 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x^h(2,2) \\ x^v(2,2) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.16 \\ 0.25 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \times 100 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x^h(2,2) \\ x^v(2,2) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 10.3 \\ 1.2 \end{bmatrix}.$$

Η γενική απόκριση του μοντέλου για $[C_1 \ C_2] = [1 \ 1]$ και $D = 0$ δίνεται από την σχέση (1.15):

$$y(2,2) = [C_1 \ C_2] \begin{pmatrix} x^h(2,2) \\ x^v(2,2) \end{pmatrix} + Du(2,2) = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 10.3 \\ 1.2 \end{bmatrix} = 11.5. \quad \Delta$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΙΔΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2.1 Εισαγωγή

Τα δισδιάστατα ιδιόμορφα συστήματα αποτελούν μία γενικότερη κλάση των γραμμικών συστημάτων σε σχέση με τα συστήματα στο χώρο των καταστάσεων και είναι πιο εύχρηστα για εφαρμογές στην επεξεργασία σήματος για την ανάλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων, απ' ό,τι τα δισδιάστατα μοντέλα της μορφής χώρου καταστάσεων. Εμφανίζονται στην μοντελοποίηση πολλών φυσικών φαινομένων όπως στα μηχανικά συστήματα, ηλεκτρολογικά δίκτυα, χημικές και βιομηχανικές διαδικασίες, αεροναυπηγική, οικονομικά και βιολογικά συστήματα. Συγκεκριμένα τα δισδιάστατα διακριτά ιδιόμορφα συστήματα εφαρμόζονται στην επεξεργασία εικόνας (Image processing), στο φιλτράρισμα ψηφιακών στοιχείων (Digital data filtering), στην διακριτοποίηση των συστημάτων συνεχούς χρόνου τα οποία περιγράφονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις, όπως η διακριτοποίηση της ελλειπτικής εξίσωσης και η διακριτοποίηση της εξίσωσης διάχυσης. Ο Karamancioglu (1991) έχει ασχοληθεί με την διακριτικοποίηση εξισώσεων όπως για παράδειγμα την διακριτοποίηση της εξίσωσης θερμότητας, χρησιμοποιώντας την μέθοδο κεντρικών διαφορών, η οποία δεν μπορεί να περιγραφεί από το δισδιάστατο μοντέλο της μορφής χώρου καταστάσεων από την στιγμή που είναι ένα μη-αναδρομικό σύστημα (nonrecursible).

2.2. Τα δισδιάστατα γενικευμένα ιδιόμορφα μοντέλα

Θεωρούμε το δισδιάστατο γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο (General Singular Model) των γραμμικών διακριτών συστημάτων. Το GSM είναι γενίκευση των άλλων δισδιάστατων μοντέλων χώρου καταστάσεων (2-D state space models), όπως του FM και του Roesser μοντέλου. Μια ιδιαίτερη περίπτωση των δισδιάστατων συστημάτων, όπως έχει οριστεί από τον Kaczorek (1988) δίνεται από τις εξισώσεις:

$$Ex(i+1, j+1) = A_0x(i, j) + A_1x(i+1, j) + A_2x(i, j+1) + B_0u(i, j) + B_1u(i+1, j) + B_2u(i, j+1) \quad (2.1\alpha)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j) \quad (2.1\beta)$$

όπου i, j είναι ακέραιες τιμές των κάθετων και οριζόντιων συντεταγμένων αντίστοιχα, $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$ είναι το τοπικό διάνυσμα κατάστασης στο (i, j) , $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$ είναι το διάνυσμα εισόδου, $y(i, j) \in \mathbb{R}^l$ είναι το διάνυσμα εξόδου και $E, A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_0, B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$.

Ένας πίνακας είναι μη-ομαλός (singular) όταν αυτός είναι μη-τετραγωνικός ή μη αντιστρέψιμος, δηλαδή η ορίζουσα του είναι μηδενική ($\det E = 0$) όταν αυτός είναι τετραγωνικός. Στην περίπτωση που ο πίνακας E είναι μη-ομαλός (singular) τότε κάνουμε λόγο για ιδιόμορφα συστήματα. Αν ο πίνακας E δεν είναι ο μοναδιαίος δηλαδή $E \neq I$, τότε το μοντέλο (2.1) ονομάζεται δισδιάστατο πεπλεγμένο μοντέλο (2-D implicit model).

- Αν στην (2.1) θεωρήσουμε $B_1 = B_2 = 0$, παίρνουμε το πρώτο γενικευμένο ιδιόμορφο Fornasini-Marchesini μοντέλο:

$$Ex(i+1, j+1) = A_0x(i, j) + A_1x(i+1, j) + A_2x(i, j+1) + B_0u(i, j) \quad (2.2\alpha)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j) \quad (2.2\beta)$$

- Από την (2.1) και για $A_0 = 0$ και $B_0 = 0$, προκύπτει το δεύτερο γενικευμένο ιδιόμορφο Fornasini-Marchesini μοντέλο:

$$Ex(i+1, j+1) = A_1x(i+1, j) + A_2x(i, j+1) + B_1u(i+1, j) + B_2u(i, j+1) \quad (2.3\alpha)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j) \quad (2.3\beta)$$

- Από την (2.1) και για $A_0 = -A_1A_2$, παίρνουμε το γενικευμένο ιδιόμορφο Attasi μοντέλο:

$$Ex(i+1, j+1) = -A_1A_2x(i, j) + A_1x(i+1, j) + A_2x(i, j+1) + B_0u(i, j) \quad (2.4\alpha)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j) \quad (2.4\beta)$$

- Το δισδιάστατο γενικευμένο ιδιόμορφο Roesser μοντέλο, ως επέκταση του Roesser μοντέλου στον χώρο καταστάσεων, έχει προταθεί από τους Kaczorek (1987) και Lewis (1987), και δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{10} \\ B_{20} \end{bmatrix} u(i, j) \quad (2.5\alpha)$$

$$y(i, j) = \begin{bmatrix} C_{10} & C_{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j) \quad (2.5\beta)$$

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των πιο πάνω γενικευμένων ιδιόμορφων μοντέλων είναι ότι ο E μπορεί να είναι μη ομαλός (singular). Όταν ο πίνακας E είναι ομαλός δηλαδή η ορίζουσα του είναι διάφορη του μηδέν ($\det E \neq 0$) και κατ' επέκταση υπάρχει ο αντίστροφος του E^{-1} , τότε τα μοντέλα μας λέγονται δισδιάστατα γενικευμένα κανονικά μοντέλα (2-D general regular model) εφόσον μπορούν να αναχθούν σε δισδιάστα μοντέλα στον χώρο των καταστάσεων πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την (2.1α) με το πίνακα E^{-1} και λύνουμε όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 1.

2.3 Σχέσεις μεταξύ των μοντέλων

Όπως και τα δισδιάστατα μοντέλα της μορφής χώρου καταστάσεων, έτσι και τα γενικευμένα δισδιάστατα ιδιόμορφα μοντέλα, είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Δηλαδή μέσω κάποιων σχέσεων που θα ορίσουμε στην παράγραφο που ακολουθεί μπορούμε από το ένα μοντέλο να οδηγηθούμε σ' ένα άλλο. Η ισοδυναμία μεταξύ των ιδιόμορφων μοντέλων βοηθάει στην επέκταση των σχέσεων της λύσης, της απόκρισης και των ιδιοτήτων, από το ένα μοντέλο στο άλλο.

- Σύγκριση ιδιόμορφου Fornasini-Marchesini μοντέλου I και ιδιόμορφου Fornasini-Marchesini μοντέλου II.

Το πρώτο γενικευμένο ιδιόμορφο Fornasini-Marchesini μοντέλο που δίνεται από την σχέση (2.2α) μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i+1, j+1) \\ x(i+1, j) \\ u(i+1, j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i+1, j) \\ x(i+1, j-1) \\ u(i+1, j-1) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} A_2 & A_0 & B_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i, j+1) \\ x(i, j) \\ u(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} u(i+1, j) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j+1)$$

$$y(i, j) = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i, j) \\ x(i, j-1) \\ u(i, j-1) \end{bmatrix} + Du(i, j)$$

Επομένως το πρώτο γενικευμένο ιδιόμορφο Fornasini-Marchesini είναι ιδιαίτερη περίπτωση του δεύτερου γενικευμένου ιδιόμορφου Fornasini-Marchesini μοντέλου με τοπικό διάνυσμα κατάστασης:

$$x'(i, j) = \begin{bmatrix} x(i, j) \\ x(i, j-1) \\ u(i, j-1) \end{bmatrix}$$

- Σύγκριση ιδιόμορφου Roesser μοντέλου και ιδιόμορφου Fornasini-Marchesini μοντέλου II.

Αν για το γενικευμένο ιδιόμορφο Roesser μοντέλο που δίνεται από την σχέση (2.5α) ορίσουμε τα τοπικά διανύσματα κατάστασης:

$$x(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$$

και

$$E' = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

Τότε αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην (2.5α), το γενικευμένο ιδιόμορφο Roesser μοντέλο μπορεί να γραφτεί:

$$E' x(i+1, j+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(i+1, j) + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(i, j+1) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ B_{20} \end{bmatrix} u(i+1, j) + \begin{bmatrix} B_{10} \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j+1)$$

$$y(i, j) = [C_{10} \quad C_{20}] x(i, j) + Du(i, j)$$

Επομένως το γενικευμένο ιδιόμορφο Roesser μοντέλο ανάγεται στην μορφή του δεύτερου γενικευμένο ιδιόμορφου Fornasini-Marchesini μοντέλου με:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{20} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} B_{10} \\ 0 \end{bmatrix}, C = [C_1 \quad C_2]$$

- Σύγκριση ιδιόμορφου Roesser μοντέλου και ιδιόμορφου Attasi μοντέλου.

Ορίζοντας για

$$x^h(i, j) = x(i, j+1)$$

και

$$x^v(i, j) = x(i+1, j) - A_2 x(i, j)$$

τότε το γενικευμένο ιδιόμορφο Attasi μοντέλο (2.4α) μπορεί να γραφτεί στην μορφή του ιδιόμορφου Roesser μοντέλου (2.5α):

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & A_1 \\ I - EA_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ B_0 \end{bmatrix} u(i, j)$$

- Σύγκριση γενικευμένο ιδιόμορφου μοντέλου και ιδιόμορφου Roesser μοντέλου

Ορίζοντας για

$$x^h(i, j) = Ex(i, j+1) - A_1 x(i, j) \quad \text{και} \quad x^v(i, j) = x(i, j)$$

τότε το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο (2.1α) μπορεί να γραφτεί στην μορφή του ιδιόμορφου Roesser μοντέλου:

$$\begin{bmatrix} I & -A_2 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_0 \\ I & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(i, j) \\ u(i+1, j) \\ u(i, j+1) \end{bmatrix}$$

Επομένως το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο είναι ιδιαίτερη περίπτωση του ιδιόμορφου Roesser μοντέλου.

Ας θεωρήσουμε:

$$x(i, j) := Px^{h_1}(i, j) + Qx^{h_2}(i, j) + Rx^v(i, j) \quad (2.6)$$

όπου P, Q, R είναι πραγματικοί πίνακες κατάλληλης διαστάσεως έτσι ώστε να ισχύει:

$$PE = EP, QE = EQ, RE = ER$$

Από την σχέση (2.6), για $P = I, Q=0$ και $R=I$, έχουμε:

$$x(i, j) = x^{h_1}(i, j) + x^v(i, j) \quad (2.7)$$

Και χρησιμοποιώντας την σχέση (2.7), γράφουμε την εξίσωση του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου (2.1α) στην μορφή:

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{h_1}(i+1, j) \\ x^{h_2}(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & A_2 \\ -A_0 & 0 & -A_0 \\ A_1 & -I & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{h_1}(i, j) \\ x^{h_2}(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ -B_0 \\ B_1 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (2.8)$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο για $P = 0, Q = I, R = I$, από την (2.6) έχουμε:

$$x(i, j) := x^{h_2}(i, j) + x^v(i, j) \quad (2.9)$$

Τότε το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο γράφεται:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{h_1}(i+1, j) \\ x^{h_2}(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A_0 & -A_0 \\ 0 & A_2 & A_2 \\ -I & A_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{h_1}(i, j) \\ x^{h_2}(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_0 \\ B_2 \\ B_1 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (2.10)$$

Τέλος για $P = I, Q = I, R = I$ έχουμε:

$$x(i, j) = x^{h_1}(i, j) + x^{h_2}(i, j) + x^v(i, j) \quad (2.11)$$

Τότε το GSM γράφεται:

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{h_1}(i+1, j) \\ x^{h_2}(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_0 & -A_0 & -A_0 \\ A_2 + A_0 & A_2 + A_0 & A_2 + A_0 \\ A_1 - E & A_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{h_1}(i, j) \\ x^{h_2}(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_0 \\ B_2 + B_0 \\ B_1 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (2.12)$$

Από τις σχέσεις (2.8), (2.10), (2.12) είναι προφανές ότι το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο αναγάγεται στην μορφή του ιδιόμορφου Roesser μοντέλου.

Αντίστροφα:

Ο πίνακας E στο Roesser μοντέλο γράφεται και σαν $E = [E_1 \ E_2]$, όπου $E_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_1}$ και $E_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_2}$. Τότε το Roesser μοντέλο μπορεί να γραφτεί στην μορφή του ιδιόμορφου γενικευμένου μοντέλου:

$$0 = [E_1 \ 0]x(i+1, j) + [0 \ E_2]x(i, j+1) - Ax(i, j) - Bu(i, j)$$

όπου: $x(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$, $A_1 = [E_1 \ 0]$, $A_2 = [0 \ E_2]$, $A_0 = -A$, $B_0 = -B$.

□ Σύγκριση ιδιόμορφου Fornasini-Marchesini μοντέλου και γενικευμένου Roesser μοντέλου.

Από την σχέση (2.12) και για $A_0 = 0$, $B_0 = 0$ και $x(i, j) := x^h(i, j) + x^v(i, j)$, παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & A_2 \\ A_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ B_1 \end{bmatrix} u(i, j)$$

Συνεπώς κάθε γενικευμένο ιδιόμορφο Fornasini-Marchesini μοντέλο μπορεί να αναχθεί στην μορφή γενικευμένου ιδιόμορφου Roesser μοντέλου.

2.4 Ύπαρξη και ορισμός των οριακών συνθηκών για τα διδιάστατα ιδιόμορφα μοντέλα

Λόγω ισοδυναμίας των διδιάστατων ιδιόμορφων μοντέλων που ορίσαμε, στο εξής θα χρησιμοποιούμε για χάριν ευκολίας το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο (2.1), καθώς τα αποτελέσματα επεκτείνονται και στα άλλα μοντέλα που ορίσαμε. Όπως στα μονοδιάστατα ιδιόμορφα συστήματα, έτσι και στα διδιάστατα συστήματα, σύμφωνα

με τον Lewis (1992), ανάλογα με την περιοχή του ενδιαφέροντος στο (i, j) -επίπεδο, υπάρχουν πολλοί τρόποι να οριστούν οι οριακές συνθήκες.

Ο πιο συνήθης ορισμός των αρχικών συνθηκών των γενικευμένων ιδιόμορφων συστημάτων είναι:

$$x(i, 0) = x_{i_0} \text{ και } x(0, j) = x_{0_j} \quad \text{για } i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Οι οριακές συνθήκες (2.13) λέγονται και επιτρεπτές (admissible) στο ορθογώνιο $[0, h] \times [0, k] := \{(i, j) : 0 \leq i \leq h, 0 \leq j \leq k\}$, αν για δοσμένη ακολουθία εισόδου $u(i, j)$, υπάρχει ακολουθία διανυσμάτων κατάστασης $x(i, j)$ που ικανοποιεί την εξίσωση του συστήματος (2.1) για όλα τα i και j , $0 \leq i \leq h$, $0 \leq j \leq k$.

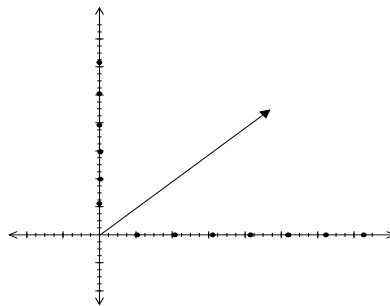
□ Αν οι οριακές συνθήκες για τα δισδιάστατα ιδιόμορφα μοντέλα ορίζονται κατά μήκος των αξόνων i και j , τότε αυτές δίνονται από τις σχέσεις:

$$x(i, 0) = x_{i_0}, \quad \text{για } i = 0, 1, \dots, N \quad (2.14\alpha)$$

$$x(0, j) = x_{0_j}, \quad \text{για } j = 0, 1, \dots, M, \quad (2.14\beta)$$

όπου x_{i_0} και x_{0_j} είναι γνωστά διανύσματα.

Κατά συνέπεια αν η περιοχή ενδιαφέροντος του μοντέλου μας είναι το ορθογώνιο $[0, N] \times [0, M]$ για τους άξονες i , j , τότε κάνουμε λόγο για *λύση προς τα εμπρός* (*forward solution*).



Διάγραμμα 2.1. Οι αρχικές συνθήκες στο ορθογώνιο $[0, N] \times [0, M]$

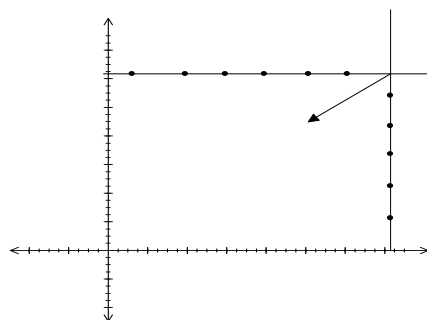
□ Εάν οι οριακές συνθήκες ορίζονται κατά μήκος των ανώτερων και δεξιών πλευρών του ορθογώνιου $[0, N] \times [0, M]$, τότε οι οριακές συνθήκες λέγονται τελικές οριακές συνθήκες και δίνονται από τις σχέσεις:

$$x(i, M) = x_{iM}, \quad \text{για } i = 0, 1, \dots, N \quad (2.15\alpha)$$

$$x(N, j) = x_{Nj}, \quad \text{για } j = 0, 1, \dots, M \quad (2.15\beta)$$

όπου x_{iM} και x_{Nj} είναι γνωστά διανύσματα.

Και η λύση που προκύπτει από την εφαρμογή των πιο πάνω οριακών συνθηκών στο ορθογώνιο $[0, N] \times [0, M]$ λέγεται *λύση προς τα πίσω* (*backward solution*).



Διάγραμμα 2.2. Οι τελικές συνθήκες στο ορθογώνιο $[0, N] \times [0, M]$

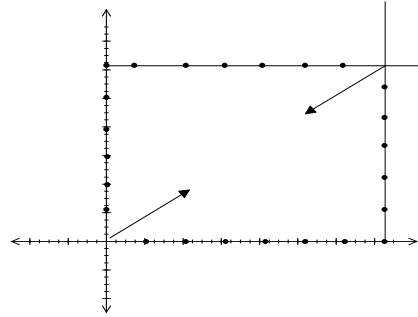
□ Η γενική περίπτωση των οριακών συνθηκών περιλαμβάνει και τις δυο πιο πάνω καταστάσεις (2.14) και (2.15). Οι οριακές συνθήκες γράφονται στην μορφή:

$$C_{i,0}^u x(i, 0) + C_{i,M}^u x(i, M) = c_i^u, \quad \text{για } 0 \leq i \leq N \quad (2.16\alpha)$$

$$C_{0,j}^h x(0, j) + C_{N,j}^h x(N, j) = c_j^h, \quad \text{για } 0 \leq j \leq M \quad (2.16\beta)$$

όπου $[C_{i,0}^u \quad C_{i,M}^u]$ και $[C_{0,j}^h \quad C_{N,j}^h]$ είναι πίνακες με πλήρη τάξη γραμμών και τα c_i^u , c_j^h είναι δοσμένα διανύσματα.

Τότε η λύση που προκύπτει από την εφαρμογή της πιο πάνω μορφής οριακών συνθηκών στο ορθογώνιο $[0, N] \times [0, M]$ λέγεται *συμμετρική λύση* (*symmetric solution*).



Διάγραμμα 2.3. Οι οριακές συνθήκες στο ορθογώνιο $[0, N] \times [0, M]$

Στην συνέχεια θα οριστούν αναγκαίες και ικανές συνθήκες έτσι ώστε οι οριακές συνθήκες (2.13) να είναι επιτρεπτές.

Θεώρημα 2.1

Οι οριακές συνθήκες (2.13) ενός καλά ορισμένου γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου (2.1α), είναι επιτρεπτές στο ορθογώνιο για κάθε ακολουθία εισόδων $u(i, j)$, αν και μόνο αν ισχύει

$$\text{rank}F = \text{rank} \begin{bmatrix} F & H_h & H_k \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

όπου

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ F_2 & F_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & F_2 & F_1 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A_1 & E & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -A_1 & E \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -A_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A_0 & -A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -A_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -A_0 & -A_2 \end{bmatrix}, \quad H_h = \begin{bmatrix} H_{h1} \\ H_{h2} \\ \vdots \\ H_{hh} \end{bmatrix}, \quad H_k = \begin{bmatrix} H_{k1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$H_{h1} = \begin{bmatrix} -A_0 & -A_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_{h2} = \begin{bmatrix} 0 & -A_0 & -A_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_{hk} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -A_0 & -A_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_{k1} = \begin{bmatrix} -A_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A_0 & -A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -A_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -A_0 & -A_2 \end{bmatrix}$$

Απόδειξη:

Η εξίσωση του GSM (2.1α), για $i=0,1,\dots,h-1$, $j=0,1,\dots,k-1$ και για πίνακες οι οποίοι ορίζονται από τις σχέσεις (2.18), μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\begin{bmatrix} F & H_h & H_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_1(h,0) \\ x_2(0,k) \end{bmatrix} = Gu \quad (2.19)$$

όπου:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & G_1 & \overline{G_2} \end{bmatrix}, G_2' = \text{diag}[B_1, B_1, \dots, B_1]$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} B_0 & B_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_0 & B_2 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_h \end{bmatrix}, x_i = \begin{bmatrix} x(i,1) \\ x(i,2) \\ \vdots \\ x(i,k) \end{bmatrix}, i=0,1,2,\dots,h \quad x_1(h,0) = \begin{bmatrix} x(0,0) \\ x(1,0) \\ \vdots \\ x(h,0) \end{bmatrix}, x_2(0,k) = \begin{bmatrix} x(0,1) \\ x(0,2) \\ \vdots \\ x(0,k) \end{bmatrix},$$

$$u = \begin{bmatrix} u_{i0} \\ u_{i1} \\ \vdots \\ u_h \end{bmatrix}, u_i = \begin{bmatrix} u_{i0} \\ u_{i1} \\ \vdots \\ u_{ik} \end{bmatrix}, i=0,1,2,\dots,h-1 \quad u_h = \begin{bmatrix} u(h,0) \\ u(h,1) \\ \vdots \\ u(h,k-1) \end{bmatrix}$$

Ας θεωρήσουμε την τάξη του πίνακα F να μην είναι πλήρης: $\text{rank}F = q < rhk$, τότε υπάρχει ένας ομαλός (μη-ιδιόμορφος) πίνακας $T \in R^{rhk \times rhk}$ που αν τον

πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα F , το γινόμενο του με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών μας δίνει:

$$TF = \begin{bmatrix} \overline{F} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

όπου $\overline{F} \in R^{q \times nhk}$ έχει πλήρη τάξη.

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (2.19) με τον πίνακα T και χρησιμοποιώντας την σχέση (2.20) παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} \overline{F} & \overline{H}_h & \overline{H}_k \\ 0 & \widehat{H}_h & \widehat{H}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_1(h, 0) \\ x_2(0, k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{G} \\ \widehat{G} \end{bmatrix} u \quad (2.21)$$

όπου

$$\begin{bmatrix} \overline{H}_h \\ \widehat{H}_h \end{bmatrix} = TH_h, \quad \begin{bmatrix} \overline{H}_k \\ \widehat{H}_k \end{bmatrix} = TH_k, \quad \begin{bmatrix} \overline{G} \\ \widehat{G} \end{bmatrix} = TG, \quad \overline{H}_h \in R^{q \times (h+1)n}, \quad \overline{H}_k \in R^{q \times kn}, \quad \overline{G} \in R^{q \times (hk+h+k)m}$$

Οι πίνακες \widehat{H}_h και \widehat{H}_k είναι μηδέν αν και μόνο αν ισχύει

$$\text{rank} F = \text{rank} \begin{bmatrix} F & H_h & H_k \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Στην περίπτωση που η (2.22) ισχύει, και κατά συνέπεια ισχύουν και οι σχέσεις $\widehat{H}_h = 0$ και $\widehat{H}_k = 0$, τότε η εξίσωση (2.21) γίνεται

$$\overline{F}x + \overline{H}_h x_1(h, 0) + \overline{H}_k x_2(0, k) = \overline{G}u \quad (2.23\alpha)$$

$$\widehat{G}u = 0 \quad (2.23\beta)$$

Από την υπόθεση ότι πίνακας \overline{F} έχει πλήρη τάξη, και ότι η (2.23α) έχει λύση x για κάθε $x_1(h, 0)$, $x_2(0, k)$ και u , τότε οι εξισώσεις του ιδιόμορφου μοντέλου (2.1α) ικανοποιούν τις συνθήκες (2.23β), και το μοντέλο έχει λύση και λέγεται καλά ορισμένο.

Στην περίπτωση που η (2.22) δεν ισχύει τότε ένας τουλάχιστον από τους πίνακες \widehat{H}_h και \widehat{H}_k είναι μη μηδενικός, και συνεπώς η εξίσωση (2.21) γίνεται

$$\widehat{H}_h x_1(h, 0) + \widehat{H}_k x_2(0, k) = \widehat{G}u \quad (2.24)$$

σχέση η οποία χαρακτηρίζει τους περιορισμούς που επιβάλλονται από το μοντέλο πάνω στις οριακές συνθήκες στο ορθογώνιο $[0, h] \times [0, k]$ για κάθε ακολουθία

εισόδων $u(i, j)$. Επομένως οι οριακές συνθήκες είναι αποδεκτές στην περιοχή ενδιαφέροντος μας, μόνο αν ικανοποιούν την σχέση (2.24). ▲

Οι επιτρεπτές οριακές συνθήκες εξαρτοντιόνται από την δομή και τους συντελεστές του μοντέλου, αλλά και από την ακολουθία $u(i, j)$.

Από το Θεώρημα 2.1 προκύπτουν τα πιο κάτω πορίσματα:

Πόρισμα 2.1.

Από την δομή των πινάκων F και F_1 , αν ο πίνακας E έχει πλήρη τάξη είναι προφανές ότι η σχέση (2.17) ικανοποιείται για κάθε \hat{H}_h και \hat{H}_k . Αν $rankE = q \leq n$, οι οριακές συνθήκες (2.13) του δισδιάστατου γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου (2.1) λέγονται επιτρεπτές στο ορθογώνιο $[0, h] \times [0, k]$ για κάθε h, k και κάθε ακολουθία εισόδων $u(i, j)$. Στην περίπτωση που $q = n$, τότε οι οριακές συνθήκες (2.13) είναι επιτρεπτές στο γενικευμένο κανονικό ιδιόμορφο μοντέλο (2.1) (όπου $E = I$), για κάθε ακολουθία εισόδων $u(i, j)$. ▲

Πόρισμα 2.2.

Οι οριακές συνθήκες (2.13) του δισδιάστατου γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου (2.1) είναι αποδεκτές στο ορθογώνιο $[0, h] \times [0, k]$ για κάθε ακολουθία εισόδων $u(i, j)$ αν και μόνο αν ισχύει:

$$rankF = rank \begin{bmatrix} F & H_h & H_k & G \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Απόδειξη:

Λαμβάνουμε υπόψη ότι ο πίνακας G είναι μηδέν, συνεπώς η (2.23β) ισχύει για κάθε ακολουθία εισόδων $u(i, j)$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 αν η σχέση (2.25) ισχύει, τότε οι οριακές συνθήκες (2.13) είναι αποδεκτές στο ορθογώνιο $[0, h] \times [0, k]$ για κάθε ακολουθία εισόδων $u(i, j)$. ▲

Λαμβάνοντας υπόψη την δομή των πινάκων τότε η (2.25) ισχύει αν και μόνο αν $rankE = rank \begin{bmatrix} E & A_0 & A_1 & A_2 \end{bmatrix}$, γι αυτό έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.1

Αν

$$\text{rank}E = \text{rank} \begin{bmatrix} E & A_0 & A_1 & A_2 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

Τότε

$$\text{rank} [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = \text{rank} \begin{bmatrix} E & A_0 & A_1 & A_2 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

για κάποια $(z_1, z_2) \in C$

Απόδειξη:

Ας θεωρήσουμε την τάξη του πίνακα E να είναι ίση με r_1 και ότι υπάρχει ένας ομαλός πίνακας $T_1 \in R^{r \times r}$ έτσι ώστε

$$T_1 E = \begin{bmatrix} \overline{E} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

όπου $\overline{E} \in R^{r_1 \times n}$ έχει πλήρη τάξη.

Από την σχέση (2.26) έχουμε

$$T_1 A_k = \begin{bmatrix} \overline{A}_k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_k \in R^{r_1 \times n}, \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.29)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.28) και (2.29),

$$\begin{aligned} \text{rank} [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] &= \text{rank} (T_1 [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2]) = \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} \overline{E}z_1z_2 - \overline{A}_0 - \overline{A}_1z_1 - \overline{A}_2z_2 \\ 0 \end{bmatrix} = r_1, \quad \text{για } (z_1, z_2) \in C \end{aligned}$$

δεδομένου ότι ο πίνακας \overline{E} έχει πλήρη τάξη. ▲

Θεώρημα 2.2

Οι οριακές συνθήκες (2.13) ενός καλά ορισμένου μοντέλου, είναι αποδεκτές στο ορθογώνιο $[0, h] \times [0, k]$, για κάθε h, k και για κάθε ακολουθία εισόδων $u(i, j)$, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\text{rank} [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = \text{rank} \begin{bmatrix} Ez_1z_2 & A_0 & A_1z_1 & A_2z_2 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

για κάποια $(z_1, z_2) \in C$

Απόδειξη:

Έστω ότι $\text{rank}[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = \text{rank}[Ez_1z_2 \quad A_0 \quad A_1z_1 \quad A_2z_2]$

Από το λήμμα 2.1 έχουμε ότι :

$$\text{rank}[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = \text{rank}[E \quad A_0 \quad A_1 \quad A_2],$$

συνεπώς έχουμε

$$\text{rank}E = \text{rank}[E \quad A_0 \quad A_1 \quad A_2]$$

Άρα αν ισχύει η σχέση (2.30) τότε οι οριακές συνθήκες (2.13) ενός καλά ορισμένου μοντέλου, είναι αποδεκτές για κάθε ακολουθία εισόδων $u(i, j)$. ▲

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε το κάτω πόρισμα

Πόρισμα 2.3.

Οι οριακές συνθήκες (2.13) ενός καλά ορισμένου μοντέλου GSM, είναι αποδεκτές στο ορθογώνιο $[0, h] \times [0, k] := \{(i, j) : 0 \leq i \leq h, 0 \leq j \leq k\}$ για κάθε ακολουθία εισόδων $u(i, j)$, αν και μόνο αν :

$$\text{rank}[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = \text{rank}[Ez_1z_2 \quad A_0 \quad A_1z_1 \quad A_2z_2 \quad B_0 \quad B_1z_1 \quad B_2z_2] \quad (2.31)$$



2.5 Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη λύσης ενός GSM

Στην παράγραφο που ακολουθεί θα ασχοληθούμε με την λύση του ιδιόμορφου δισδιάστατου μοντέλου (2.1) και θα δείξουμε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη λύσης του, στο ορθογώνιο $[0, N] \times [0, M]$, για κάθε $u(i, j)$.

Το GSM (2.1) με οριακές συνθήκες (2.13) λέγεται επιλύσιμο αν έχει λύση στο ορθογώνιο $[0, N] \times [0, M]$ για κάθε $N > 0$ και $M > 0$ για κάθε ακολουθία εισόδων

$$\underline{u}_{NM}, \quad \text{όπου} \quad \underline{u}_{NM} := \{u_{00}, u_{01}, \dots, u_{0M}, u_{10}, u_{11}, \dots, u_{1M}, u_{20}, \dots, u_{N-1M}, u_{N0}, \dots, u_{NM-1}\}$$

και η ακολουθία διανυσμάτων κατάστασης

$$\underline{x}_{NM} := \{x_{00}, x_{01}, \dots, x_{0M}, x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1M}, x_{20}, \dots, x_{NM}, x_{NM-1}\}$$

για κάθε $(i, j) \in [0, N] \times [0, M]$.

Θεώρημα 2.3

Το δισδιάστατο ιδιόμορφο μοντέλο (2.1) έχει λύση στο ορθογώνιο $[0, N] \times [0, M]$ για κάθε ακολουθία εισόδων $u(i, j)$, αν και μόνο

$$\text{rank}[F \ G] = \text{rank}F, \quad \text{για κάθε } N > 0 \text{ και } M > 0 \quad (2.32)$$

όπου

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & F_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & F_1 & F_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rNM \times n(N+1)(M+1)},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} -A_0 & -A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -A_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -A_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -A_0 & -A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rM \times n(M+1)}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -A_1 & E & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -A_1 & E \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rM \times n(M+1)} \quad (2.33)$$

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & G_1 & \bar{G}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rNM \times m(NM+N+M)}, \quad \bar{G}_2 = \text{diag}[B_1, B_1, \dots, B_1] \in \mathbb{R}^{rM \times mM}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} B_0 & B_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_0 & B_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rM \times m(M+1)}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rM \times m(M+1)}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \in R^{n(N+1)(M+1)}, \quad x_i = \begin{bmatrix} x(i,0) \\ x(i,1) \\ \vdots \\ x(i,M) \end{bmatrix} \in R^{n(M+1)}, \quad i = 0,1,\dots,N-1$$

$$u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \in R^{m(NM+N+M)}, \quad u_i = \begin{bmatrix} u(i,0) \\ u(i,1) \\ \vdots \\ u(i,M) \end{bmatrix} \in R^{m(M+1)}, \quad i = 0,1,\dots,N-1,$$

$$u_N = \begin{bmatrix} u(N,0) \\ u(N,1) \\ \vdots \\ u(N,M-1) \end{bmatrix} \in R^{mM}$$

Απόδειξη:

Το δισδιάστατο ιδιόμορφο μοντέλο (2.1) για $i = 0,1,\dots,N-1$ και $j = 0,1,\dots,M-1$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$Fx = Gu \tag{2.34}$$

όπου οι πίνακες F και G ορίζονται από τις σχέσεις (2.33).

Από την γραμμική άλγεβρα είναι γνωστό για να έχει λύση η εξίσωση (2.34), αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι να ισχύει $rank[F \ G] = rankF$ ή ισοδύναμα $Im G \subset Im F$. ▲

Θεώρημα 2.4

Το δισδιάστατο ιδιόμορφο μοντέλο (2.1) έχει λύση για κάθε είσοδο $u(i, j)$, αν και μόνο αν:

$$rank \begin{bmatrix} Ez_1z_2 & A_0 & A_1z_1 & A_2z_2 \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} Ez_1z_2 & A_0 & A_1z_1 & A_2z_2 & B_0 & B_1z & B_2z_2 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Απόδειξη:

Αν εφαρμόσουμε τον 2-D μετασχηματισμό-z πάνω στο ιδιόμορφο 2-D μοντέλο, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2 & A_1z_2 - Ez_1z_2 & A_2z_2 - Ez_1z_2 & Ez_1z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z_1, z_2) \\ X(0, z_2) \\ X(z_1, 0) \\ x(0, 0) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} B_0 + B_1z_1 + B_2z_2 & -B_1z_1 & -B_2z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(z_1, z_2) \\ U(0, z_2) \\ U(z_1, 0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.36)$$

όπου $X(z_1, z_2)$, $U(z_1, z_2)$, $U(z_1, 0)$, $U(0, z_2)$, $X(z_1, 0)$, $X(0, z_2)$ είναι οι 2-D Z-μετασχηματισμοί των συναρτήσεων $x(i, j)$, $u(i, j)$, $u(i, 0)$, $u(0, j)$, $x(i, 0)$ και $x(0, j)$ αντίστοιχα.

Η (2.36) έχει λύση:

$$\begin{bmatrix} X^T(z_1, z_2) & X^T(0, z_2) & X^T(z_1, 0) & x^T(0, 0) \end{bmatrix}^T$$

για κάθε

$$\begin{bmatrix} U^T(z_1, z_2) & U^T(0, z_2) & U^T(z_1, 0) \end{bmatrix}^T$$

αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} & \text{rank} \begin{bmatrix} Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2 & A_1z_1 - Ez_1z_2 & A_2z_2 - Ez_1z_2 & Ez_1z_2 \end{bmatrix} = \\ & \text{rank} \begin{bmatrix} Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2 & A_1z_1 - Ez_1z_2 & A_2z_2 - Ez_1z_2 & Ez_1z_2 \\ B_0 + B_1z_1 + B_2z_2 & -B_1z_1 & -B_2z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες των πινάκων της σχέσης (2.37), έχουμε:

$$\begin{aligned} & \text{rank} \begin{bmatrix} Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2 & A_1z_1 - Ez_1z_2 & A_2z_2 - Ez_1z_2 & Ez_1z_2 \end{bmatrix} = \\ & = \text{rank} \begin{bmatrix} Ez_1z_2 & A_0 & A_1z_1 & A_2z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.38\alpha)$$

και

$$\begin{aligned} & \text{rank} \begin{bmatrix} Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2 & A_1z_1 - Ez_1z_2 & A_2z_2 - Ez_1z_2 \\ Ez_1z_2 & B_0 + B_1z_1 + B_2z_2 & -B_1z_1 & -B_2z_2 \end{bmatrix} = \\ & = \text{rank} \begin{bmatrix} Ez_1z_2 & A_0 & A_1z_1 & A_2z_2 & B_0 & B_1z_1 & B_2z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.38\beta)$$

λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (2.38), από την (2.37) παίρνουμε την (2.35).



Λήμμα 2.2

Η σχέση $rank[F \ G] = rankF$ είναι ισοδύναμη με την σχέση

$$rank[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = rank \begin{bmatrix} Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2 & B_0 & B_1z & B_2z_2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Επομένως η ύπαρξη λύσης για το (2.1) για κάθε είσοδο $u(i, j)$, προϋποθέτει την ικανοποίηση της συνθήκης (2.39).

Απόδειξη:

Καταρχήν ορίζουμε τα διανύσματα:

$$q^T := \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rNM}, \quad q_i^T = \begin{bmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ \vdots \\ q_{iM} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rM}, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

Από τον ορισμό των πινάκων (2.33) έχουμε:

$$\begin{aligned} qF &= [q_1F_1 \quad q_1F_2 + q_2F_1 \quad \dots \quad q_{N-1}F_2 + q_NF_1 \quad q_NF_2] = \\ &= [-q_{11}A_0 \quad -q_{11}A_2 - q_{12}A_0 \quad \dots \quad -q_{1,M-1}A_2 - q_{1M}A_2 \quad -q_{11}A_1 - q_{21}A_0 \\ &\quad q_{11}E - q_{12}A_1 - q_{21}A_2 - q_{22}A_0 \\ \dots \quad q_{1,M-1}E - q_{1M}A_1 - q_{2,M-1}A_2 - q_{2M}A_0 \quad q_{1M}E - q_{2M}A_2 \quad \dots \quad -q_{N-1,1}A_1 - q_{N1}A_0 \quad (2.40) \\ &\quad q_{N-1,1}E - q_{N-1,2}A_1 - q_{N1}A_2 - q_{N2}A_0 \quad q_{11}E - q_{12}A_1 - q_{21}A_2 - q_{22}A_0 \quad \dots \\ q_{N-1,M-1}E - q_{N-1,M}A_1 - q_{N,M-1}A_2 - q_{NM}A_0 \quad q_{N-1,M}E - q_{NM}A_2 \quad \dots \quad -q_{N1}A_1 \quad q_{N,1}E - q_{N2}A_1 \\ &\quad \dots \quad q_{N,M-1}E - q_{NM}A_1 \quad q_{N,M}E] \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$q(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M q_{ij} z_1^{i-1} z_2^{j-1}$$

παίρνουμε:

$$\begin{aligned} q(z_1, z_2)[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M q_{ij} [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] z_1^{i-1} z_2^{j-1} = \\ &= -q_{11}A_0 - (q_{11}A_2 + q_{12}A_0)z_2 - \dots - (q_{1,M-1}A_2 + q_{1M}A_0)z_2^{M-1} - q_{1,M}A_2z_2^M - \\ &\quad - (q_{11}A_1 + q_{21}A_0)z_1 + (q_{11}E - q_{12}A_1 - q_{21}A_2 - q_{22}A_0)z_1z_2 + \dots + \quad (2.41) \end{aligned}$$

$$+ (q_{1,M-1}E - q_{1M}A_1 - q_{2,M-1}A_2 - q_{2M}A_0)z_1z_2^{M-1} + (q_{1M}E - q_{2M}A_2)z_1z_2^M + \dots -$$

$$- q_{N1}A_1z_1^N + (q_{N,1}E - q_{N2}A_1)z_1^N z_2 + \dots + (q_{N,M-1}E - q_{NM}A_1)z_1^N z_2^{M-1} + q_{N,M}Ez_1^N z_2^M$$

Από τις σχέσεις (2.40) και (2.41) είναι προφανές ότι $qF = 0$ αν και μόνο αν

$$q(z_1, z_2)[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = 0 \text{ για όλα τα } (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \quad (2.42)$$

Παρόμοια η $qG = 0$ αν και μόνο αν

$$q(z_1, z_2)[B_0 \ B_1z_1 \ B_2z_2] = 0, \text{ για όλα τα } (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}. \quad (2.43)$$

Δεδομένου ότι η σχέση (2.32) ισχύει, τότε από την σχέση $qF = 0$ συνεπάγεται ότι $qG = 0$ και κατά επέκταση η σχέση (2.43) συνεπάγεται από την (2.42).

Επομένως,

$$\text{Im}[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2]^\perp \supset \text{Im}[B_0 \ B_1z_1 \ B_2z_2]^\perp \quad (2.44)$$

και

$$\text{Im}[B_0 \ B_1z_1 \ B_2z_2] \subset \text{Im}[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] \quad (2.45)$$

οι οποίες είναι ισοδύναμες με την σχέση (2.39)

Αντίστροφα, ας θεωρήσουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$\text{rank}[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = \text{rank}[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2 \ B_0 \ B_1z_1 \ B_2z_2]$$

Τότε από αυτή την σχέση συνεπάγεται η (2.45) από την οποία στην συνέχεια προκύπτει η (2.44). Επομένως οι (2.42) και (2.43) ισχύουν και συνεπώς ισχύει η σχέση (2.39). ▲

Θεώρημα 2.5

Το δισδιάστατο ιδιόμορφο μοντέλο (2.1) έχει μοναδική λύση για κάθε είσοδο u_{ij} , αν και μόνο αν

$$\ker[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2 \ A_1z_1 - Ez_1z_2 \ A_2z_2 - Ez_1z_2 \ Ez_1z_2] = 0 \quad (2.46)$$

για $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Απόδειξη:

Έστω $X_1(z_1, z_2)$ και $X_2(z_1, z_2)$ δύο διαφορετικές λύσεις του (2.1) για κοινή είσοδο $u(i, j)$,

$$X_1(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} X(z_1, z_2) \\ X(0, z_2) \\ X(z_1, 0) \\ x(0, 0) \end{bmatrix}, \quad X_2(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} X'(z_1, z_2) \\ X'(0, z_2) \\ X'(z_1, 0) \\ x'(0, 0) \end{bmatrix}$$

Τότε:

$$\begin{bmatrix} Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2 & A_1z_2 - Ez_1z_2 & A_2z_2 - Ez_1z_2 & Ez_1z_2 \end{bmatrix} [X_1(z_1, z_2) - X_2(z_1, z_2)] = 0$$

Συνεπώς μιλάμε για μοναδικότητα λύσης, $X_1(z_1, z_2) = X_2(z_1, z_2)$ αν και μόνο αν η (2.46) ισχύει.. ▲

Πόρισμα 2.4.

Το δισδιάστατο ιδιόμορφο μοντέλο (2.1) έχει λύση για κάθε είσοδο u_{ij} , αν ο πίνακας $[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2]$ έχει πλήρη τάξη:

$$\text{rank} [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = r, \quad \text{για κάποια } (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \quad (2.47)$$

Απόδειξη:

Αν ισχύει η (2.47) τότε ικανοποιείται και η συνθήκη (2.35) και σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4 το μοντέλο (2.1) είναι επιλύσιμο για κάθε είσοδο $u(i, j)$. ▲

Η συνθήκη (2.47) λέγεται συνθήκη κανονικότητας (regularity) και ένα μοντέλο που ικανοποιεί αυτή την συνθήκη λέγεται κανονικό (regular).

Το παρακάτω θεώρημα, μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε το ιδιόμορφο μοντέλο (2.1), να έχει έξοδο $y(i, j)$.

Θεώρημα 2.6

Το ιδιόμορφο δισδιάστατο μοντέλο (2.1) έχει έξοδο $y(i, j)$, για κάθε είσοδο $u(i, j)$ αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη:

$$\text{rank} [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = \text{rank} \begin{bmatrix} Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2 \\ C \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Απόδειξη:

Κάνοντας χρήση του 2-D μετασχηματισμού z στην εξίσωση (2.1α) μας δίνει:

$$Y(z_1, z_2) = C X(z_1, z_2) + D U(z_1, z_2) \quad (2.49)$$

όπου $Y(z_1, z_2)$, $X(z_1, z_2)$ και $U(z_1, z_2)$ είναι οι δισδιάστατοι μετασχηματισμοί- z των $y(i, j)$, $x(i, j)$ και $u(i, j)$ αντίστοιχα.

Από τις (2.42), (2.43) και (2.49) η γενική απόκριση του ιδιόμορφου δισδιάστατου μοντέλου (2.1) είναι μοναδική για κάθε είσοδο $u(i, j)$ αν και μόνο αν:

$$\ker [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] \subset \ker C$$

Η οποία είναι ισοδύναμη με την συνθήκη:

$$\text{rank} [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = \text{rank} \begin{bmatrix} Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2 \\ C \end{bmatrix}$$



2.5.2 Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη λύσης ενός GSM (Kaczorek-1988)

Ας θεωρήσουμε ότι: $\text{rank} E = n_1 < n$. Τότε υπάρχουν ομαλοί $n \times n$ πίνακες N και M έτσι ώστε να ισχύει:

$$NEM = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

όπου I_{n_1} ο $n_1 \times n_1$ ταυτοτικός πίνακας.

Ας ορίσουμε ένα νέο τοπικό διάνυσμα χώρου κατάστασης $\bar{x}(i, j)$:

$$x(i, j) = M \bar{x}(i, j) \quad (2.51)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά της εξίσωσης του GSM (2.1) με τον πίνακα N και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.50) και (2.51), παίρνουμε:

$$x_1' = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \quad (2.52\alpha)$$

$$0 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \quad (2.52\beta)$$

όπου

$$x_1' = x_1(i+1, j+1), \quad x_1 = \begin{bmatrix} x_1(i, j) \\ x_1(i+1, j) \\ x_1(i, j+1) \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_2(i, j) \\ x_2(i+1, j) \\ x_2(i, j+1) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad u = \begin{bmatrix} u(i, j) \\ u(i+1, j) \\ u(i, j+1) \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}(i, j) = \begin{bmatrix} x_1(i, j) \\ x_2(i, j) \end{bmatrix}, \quad x_1(i, j) \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad x_2(i, j) \in \mathbb{R}^{n_2} \quad \text{και} \quad n_1 + n_2 = n$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{11}^1 & A_{11}^2 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} A_{12}^0 & A_{12}^1 & A_{12}^2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B_1^0 & B_1^1 & B_1^2 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} A_{21}^0 & A_{21}^1 & A_{21}^2 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} A_{22}^0 & A_{22}^1 & A_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_2^0 & B_2^1 & B_2^2 \end{bmatrix}$$

$$NA_k M = \begin{bmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{bmatrix}, \quad NB_k = \begin{bmatrix} B_1^k \\ B_2^k \end{bmatrix}, \quad \text{για} \quad k=0,1,2.$$

Από την σχέση (2.51) έχουμε:

$$x_1(i, j) = M_1 x(i, j)$$

και

$$x_2(i, j) = M_2 x(i, j) \quad i, j \geq 0$$

(2.53)

$$\text{όπου} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad M_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n} \quad \text{και} \quad M_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$x_1 = M_{d_1} x \quad \text{και} \quad x_2 = M_{d_2} x,$$

όπου $M_{d_1} = \text{diag}[M_1 \quad M_1 \quad M_1]$ και $M_{d_2} = \text{diag}[M_2 \quad M_2 \quad M_2]$, άρα μπορούμε να

ξαναγράψουμε την σχέση $0 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u$ ως

$$(A_{21}M_{d_1} + A_{22}M_{d_2})x + B_2u = 0$$

Από την οποία προκύπτει:

$$(A_{21}M_{d_1} + A_{22}M_{d_2}) \begin{bmatrix} x_1(i, 0) \\ x_1(i+1, 0) \\ x_1(i, 1) \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} u(i, 0) \\ u(i+1, 0) \\ u(i, 1) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{για} \quad i \geq 0 \quad (2.54\alpha)$$

$$(A_{21}M_{d_1} + A_{22}M_{d_2}) \begin{bmatrix} x_1(0, j) \\ x_1(1, j) \\ x_1(0, j+1) \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} u(0, j) \\ u(1, j) \\ u(0, j+1) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{για} \quad j \geq 0 \quad (2.54\beta)$$

Οι οριακές συνθήκες που ικανοποιούν τις πιο πάνω σχέσεις ονομάζονται επιτρεπτές (admissible) οριακές συνθήκες.

Θεώρημα 2.7

Το GSM έχει λύση για αποδεκτές οριακές συνθήκες αν και μόνο αν:

$$\text{rank}A_{22}^2 = \text{rank}\left[A_{22}^1 \mid A_{22}^2\right] = \text{rank}\left[A_{21} \mid A_{22} \mid B_2\right] \quad (2.55)$$

Απόδειξη:

Η εξίσωση (2.52β) μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$A_{22}^2 x_2(i, j+1) = -\begin{bmatrix} A_{22}^1 & A_{22}^0 & A_{21} & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(i+1, j) \\ x_2(i, j) \\ x_1 \\ u \end{bmatrix} \quad (2.56\alpha)$$

και

$$\begin{bmatrix} A_{22}^1 & A_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(i+1, j) \\ x_2(i, j+1) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A_{22}^0 & A_{21} & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(i, j) \\ x_1 \\ u \end{bmatrix} \quad (2.56\beta)$$

όπου

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_1(i, j) \\ x_1(i+1, j) \\ x_1(i, j+1) \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_2(i, j) \\ x_2(i+1, j) \\ x_2(i, j+1) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad u = \begin{bmatrix} u(i, j) \\ u(i+1, j) \\ u(i, j+1) \end{bmatrix}.$$

Από τις (2.52α) και (2.53) μπορούμε να βρούμε αναδρομικά τα $x_1(i+1, j+1), i, j = 0, 1, \dots$ για δεδομένα $\bar{x}(i, j), \bar{x}(i+1, j), \bar{x}(i, j+1)$ και $u(i, j)$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την σχέση (2.56) μπορούμε να βρούμε τα $x_2(i, j+1), x_2(i+1, j)$ και $x_2(i, j)$ για κατάλληλα (i, j) .

Είναι προφανές ότι οι εξισώσεις (2.56) έχουν λύσεις αν η συνθήκη (2.55) ικανοποιείται. ▲

Λήμμα 2.3

Ένα GSM έχει λύση για αποδεκτές οριακές συνθήκες αν $rankA_{22} = n_2$

Απόδειξη:

Στην ιδιαίτερη περίπτωση που $rankA_{22} = n_2$, από την (2.52) λαμβάνουμε:

$$x_2 = \bar{A}_{21}x_1 + \bar{B}_2u \quad (2.57)$$

Όπου $\bar{A}_{21} = -A_{22}^T [A_{22} \quad A_{22}^T]^{-1} A_{21}$, $\bar{B}_2 = -A_{22}^T [A_{22} \quad A_{22}^T]^{-1} B_2$

Αντικαθιστώντας την (2.57) στην (2.52) :

$$x_1' = \bar{A}_{11}x_1 + \bar{B}_1u$$

Όπου $\bar{A}_{11} = A_{11} + A_{12}\bar{A}_{21}$ και $\bar{B}_1 = B_1 + A_{12}\bar{B}_2$. ▲

2.6 Λύσεις των γενικευμένων ιδιόμορφων συστημάτων (GSM)

Στην παράγραφο που ακολουθεί θα οριστούν οι λύσεις των δισδιάστατων ιδιόμορφων μοντέλο (GSM) συναρτήσεων των προς τα εμπρός (forward) και προς τα πίσω (backward) θεμελιωδών πινάκων. Παρουσιάζεται επίσης μια γενικευμένη τεχνική Leverrier για τον υπολογισμό των ακολουθιών των forward και backward θεμελιώδη πινάκων που έχει προταθεί από τους Mertzios και Lewis (1988) και Karapetakis (1994). Και όπως θα παρατηρήσουμε είναι εξαρτημένες από την δομή και τους συντελεστές του μοντέλου καθώς επίσης και της ακολουθία εισόδων $u(i, j)$.

2.6.1 Η προς τα εμπρός λύση (forward solution) του GSM

Η προς τα εμπρός λύση (forward solution) του ιδιόμορφου Roesser μοντέλου σε όρους των προς τα εμπρός (forward) θεμελιωδών πινάκων, έχει προταθεί από τους Lewis και Mertzios (1991). Για το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο έχει προταθεί από τον Kaczorek (1990) συναρτήσεων των προς τα εμπρός (forward) θεμελιωδών πινάκων.

Θεωρούμε το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο (GSM) δισδιάστατων γραμμικών διακριτών συστημάτων (2.1):

$$Ex(i+1, j+1) = A_0x(i, j) + A_1x(i+1, j) + A_2x(i, j+1) + B_0u(i, j) + B_1u(i+1, j) + B_2u(i, j+1)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j)$$

Με επιτρεπτές οριακές συνθήκες στο ορθογώνιο $[0, N] \times [0, M]$ δίνονται από τις σχέσεις

$$x(i, 0) = x_{i0}, \quad \text{για } i = 0, 1, \dots, N \quad \text{και} \quad x(0, j) = x_{0j}, \quad \text{για } j = 0, 1, \dots, M,$$

Εφαρμόζοντας τον 2-D μετασχηματισμό-z στο GSM (2.1) παίρνουμε:

$$X(z_1, z_2) = [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2]^{-1} [(B_0 + B_1z_1 + B_2z_2)U(z_1, z_2) - B_1z_1U(0, z_2) - B_2z_2U(z_1, 0) - A_1z_1X(0, z_2) - A_2z_2X(z_1, 0) + Ez_1z_2(X(z_1, 0) + X(0, z_2) - x(0, 0))]$$

ισοδύναμα:

$$X(z_1, z_2) = G^{-1} [(B_0 + B_1z_1 + B_2z_2)U(z_1, z_2) - B_1z_1U(0, z_2) - B_2z_2U(z_1, 0) - A_1z_1X(0, z_2) - A_2z_2X(z_1, 0) + Ez_1z_2(X(z_1, 0) + X(0, z_2) - x(0, 0))] \quad (2.58)$$

όπου $X(z_1, z_2)$, $U(z_1, z_2)$, $U(z_1, 0)$, $U(0, z_2)$, $X(z_1, 0)$, $X(0, z_2)$ είναι οι 2-D Z-μετασχηματισμοί των συναρτήσεων $x(i, j)$, $u(i, j)$, $u(i, 0)$, $u(0, j)$, $x(i, 0)$ και $x(0, j)$ αντίστοιχα.

Παρατήρηση 2.6.

Όπως είδαμε από την προηγούμενη παράγραφο, το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο (GSM) έχει μοναδική λύση $x(i, j)$ για κάθε είσοδο $u(i, j)$ και επιτρεπτές οριακές συνθήκες (2.13) αν και μόνο αν δεν μηδενίζεται εκ ταυτότητας η πιο κάτω σχέση:

$$\det[G(z_1, z_2)] = \det[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] \neq 0 \quad (2.59)$$

Αν θεωρήσουμε ότι $\det G \neq 0$ για κάποια z_1, z_2 , τότε ο αντίστροφος πίνακας G^{-1} μπορεί να γραφτεί ως ανάπτυγμα Laurent στο άπειρο

$$G^{-1} = \sum_{p=-n_1}^{\infty} \sum_{q=-n_2}^{\infty} T_{pq} z_1^{-p} z_2^{-q}, \quad (2.60)$$

$$n_1 \leq n, \quad n_2 \leq n \quad \text{και} \quad |z_1| > \sigma_1 > 0, \quad |z_2| > \sigma_2 > 0$$

όπου $T_{p,q}$ είναι οι forward θεμελιώδεις πινάκες. Η ακολουθία πινάκων $\{T_{p,q}\}$ είναι γνωστή σαν ακολουθία forward θεμελιώδη πινάκων. Αναγκαία και επαρκή συνθήκη για την ύπαρξη και την μοναδικότητα τους, σύμφωνα με τον Karampetakis (1994) είναι η εξής:

$$\deg_z |G(z, z)| = \deg_{z_1} |G(z_1, z_2)| + \deg_{z_2} |G(z_1, z_2)| \quad (2.61)$$

όπου $\deg_{z_i} G(z_1, z_2)$ είναι ο βαθμός του $G(z_1, z_2)$ στο z_i , $i=1,2$ και το $\deg_z G(z, z)$ είναι ο βαθμός του $G(z_1, z_2)$ στο z .

Αν στην σχέση (2.60) πολλαπλασιάσουμε από αριστερά και τις δύο πλευρές της εξίσωσης με τον πίνακα G παίρνουμε:

$$\sum_{p=-n_1}^{\infty} \sum_{q=-n_2}^{\infty} T_{pq} z_1^{-p} z_2^{-q} G = \sum_{p=-n_1}^{\infty} \sum_{q=-n_2}^{\infty} G T_{pq} z_1^{-p} z_2^{-q} = I_n$$

Τότε από την εξίσωση των συντελεστών-πινάκων των δυνάμεων των z_1 και z_2 της πιο πάνω ισότητας προκύπτουν οι πιο κάτω σχέσεις για τους forward θεμελιώδεις πινάκες T_{pq} :

$$ET_{pq} = \begin{cases} A_0 T_{0,0} + A_1 T_{1,0} + A_2 T_{0,1} + I & \text{για } p=q=1 \\ A_0 T_{p-1,q-1} + A_1 T_{p,q-1} + A_2 T_{p-1,q} & \text{για } p \neq 1 \text{ και/ ή } q \neq 1 \\ 0 & \text{για } p < -n_1 \text{ και/ ή } p < -n_2 \end{cases} \quad (2.62)$$

Το ζευγάρι των θετικών ακεραίων (n_1, n_2) έτσι ώστε $T_{pq} = 0$ για $p < -n_1$ και/ ή $q < -n_2$ λέγεται δείκτης του GSM. Τα n_1 και n_2 είναι πεπερασμένα αν και μόνο αν οι συντελεστές $d_{n_1 n_2}$ του πιο κάτω πολυωνύμου δεν είναι μηδενικοί:

$$\det G = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} d_{ij} z_1^i z_2^j$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (2.60), την σχέση (2.58) λαμβάνουμε:

$$X(z_1, z_2) = \sum_{p=-n_1}^{\infty} \sum_{q=-n_2}^{\infty} T_{pq} z_1^{-p} z_2^{-q} \{ (B_0 + B_1 z_1 + B_2 z_2) U(z_1, z_2) -$$

$$\begin{aligned}
 & -B_1 z_1 U(0, z_2) - B_2 z_2 U(z_1, 0) - A_1 z_1 X(0, z_2) - A_2 z_2 X(z_1, 0) + \quad (2.63) \\
 & + E z_1 z_2 (X(z_1, 0) + X(0, z_2) - x(0, 0)) \}
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο 2-D μετασχηματισμό-z (Kaczorek 1985) στη σχέση που βρήκαμε, και λαμβάνοντας υπόψη ότι $T_{pq} = 0$ για $p < -n_1$ και/ή $p < -n_2$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 x(i, j) = & \sum_{p=0}^{i+n_1} \sum_{q=0}^{j+n_2} T_{i-p, j-q} B_0 u(p, q) + \sum_{p=0}^{i+n_1+1} \sum_{q=0}^{j+n_2} T_{i-p+1, j-q} B_1 u(p, q) + \\
 & + \sum_{p=0}^{i+n_1} \sum_{q=0}^{j+n_2+1} T_{i-p, j-q+1} B_2 u(p, q) - \sum_{p=0}^{i+n_1} T_{i-p, j+1} [A_2 \quad B_2] \begin{bmatrix} x(p, 0) \\ u(p, 0) \end{bmatrix} - \\
 & - \sum_{q=0}^{j+n_2} T_{i+1, j-q} [A_1 \quad B_1] \begin{bmatrix} x(0, q) \\ u(0, q) \end{bmatrix} + T_{i+1, j+1} Ex(0, 0) + \\
 & + \sum_{p=1}^{i+n_1+1} T_{i-p+1, j+1} Ex(p, 0) + \sum_{q=1}^{j+n_2+1} T_{i+1, j-q+1} Ex(0, q)
 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Από τις σχέσεις (2.62) προκύπτει ότι ισχύει:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=1}^{i+n_1+1} T_{i-p+1, j+1} Ex(p, 0) + \sum_{q=1}^{j+n_2+1} T_{i+1, j-q+1} Ex(0, q) + T_{i+1, j+1} Ex(0, 0) - \\
 & - \sum_{p=0}^{i+n_1} T_{i-p, j+1} A_2 x(p, 0) - \sum_{q=0}^{j+n_2} T_{i+1, j-q} A_1 x(0, q) = \\
 & = \sum_{p=1}^{i+n_1} T_{i-p, j} A_0 x(p, 0) + \sum_{p=1}^{i+n_1+1} T_{i-p+1, j} A_1 x(p, 0) + \sum_{q=1}^{j+n_2} T_{i, j-q} A_0 x(0, q) + \\
 & + \sum_{q=1}^{j+n_2+1} T_{i, j-q+1} A_2 x(0, q) + T_{i, j} A_0 x(0, 0)
 \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την πιο πάνω σχέση, μπορούμε να ξαναγράψουμε την λύση του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου στην μορφή:

$$x(i, j) = \sum_{p=1}^{i+n_1} \sum_{q=1}^{j+n_2} T_{i-p, j-q} B_0 u(p, q) + \sum_{p=1}^{i+n_1+1} \sum_{q=1}^{j+n_2} T_{i-p+1, j-q} B_1 u(p, q) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{p=1}^{i+n_1} \sum_{q=1}^{j+n_2+1} T_{i-p, j-q+1} B_2 u(p, q) + \sum_{p=1}^{i+n_1+1} T_{i-p+1, j} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(p, 0) \\ u(p, 0) \end{bmatrix} + \\
 & + \sum_{p=1}^{i+n_1} T_{i-p, j} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(p, 0) \\ u(p, 0) \end{bmatrix} + \sum_{q=1}^{j+n_2+1} T_{i, j-q+1} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0, q) \\ u(0, q) \end{bmatrix} + \\
 & + \sum_{q=1}^{j+n_2} T_{i, j-q} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0, q) \\ u(0, q) \end{bmatrix} + T_{i, j} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0, 0) \\ u(0, 0) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.65\alpha}$$

ή

$$\begin{aligned}
 x(i, j) & = \sum_{p=-n_1}^{i-1} \sum_{q=-n_2}^{j-1} T_{pq} B_0 u(i-p, j-q) + \sum_{p=-n_1}^i \sum_{q=-n_2}^{j-1} T_{pq} B_1 u(i-p, j-q) + \\
 & + \sum_{p=-n_1}^i \sum_{q=-n_2}^{j-1} T_{pq} B_2 u(i-p, j-q+1) - \sum_{p=-n_1}^i T_{pj} \left[A_1 x(i-p+1, 0) + B_1 u(i-p+1, 0) \right] + \\
 & + \sum_{p=-n_1}^{i-1} T_{pj} \left[A_0 x(i-p, 0) + B_0 u(i-p, 0) \right] + \\
 & + \sum_{q=-n_2}^j T_{iq} \left[A_2 x(0, j-q+1) + B_2 u(0, j-q+1) \right] + \\
 & + \sum_{q=-n_2}^{j-1} T_{iq} \left[A_0 x(0, j-q) + B_0 u(0, j-q) \right] + T_{ij} \left[A_0 x(0, 0) + B_0 u(0, 0) \right]
 \end{aligned} \tag{2.65\beta}$$

Καταλήγουμε στο πιο κάτω θεώρημα για την προς τα εμπρός λύση του του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου:

Θεώρημα 2.8

Αν $\det G \neq 0$ τότε η μοναδική λύση του του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου (2.1) με επιτρεπτές οριακές συνθήκες (2.13) δίνεται από τους τύπους (2.65α) και (2.65β).



Αντικαθιστώντας την (2.65α) ή την (2.65β) στην (2.1β) παίρνουμε την γενική απόκριση του του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου (2.1):

$$\begin{aligned}
 y(i, j) & = C \left[\sum_{p=0}^{i+n_1} \sum_{q=0}^{j+n_2} T_{i-p, j-q} B_0 u(p, q) + \sum_{p=0}^{i+n_1+1} \sum_{q=0}^{j+n_2} T_{i-p+1, j-q} B_1 u(p, q) + \right. \\
 & \left. + \sum_{p=0}^{i+n_1} \sum_{q=0}^{j+n_2+1} T_{i-p, j-q+1} B_2 u(p, q) - \sum_{p=0}^{i+n_1} T_{i-p, j+1} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(p, 0) \\ u(p, 0) \end{bmatrix} - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{q=0}^{j+n_2} T_{i+1,j-q} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0,q) \\ u(0,q) \end{bmatrix} + T_{i+1,j+1} E x(0,0) + \\
 & + \sum_{p=1}^{i+n_1+1} T_{i-p+1,j+1} E x(p,0) + \sum_{q=1}^{j+n_2+1} T_{i+1,j-q+1} E x(0,q) \Big] + Du(i,j)
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

ή

$$\begin{aligned}
 y(i,j) = & C \left[\sum_{p=-n_1}^{i-1} \sum_{q=-n_2}^{j-1} T_{pq} B_0 u(i-p,j-q) + \sum_{p=-n_1}^i \sum_{q=-n_2}^{j-1} T_{pq} B_1 u(i-p,j-q) + \right. \\
 & + \sum_{p=-n_1}^i \sum_{q=-n_2}^{j-1} T_{pq} B_2 u(i-p,j-q+1) - \sum_{p=-n_1}^i T_{pj} \left[A_1 x(i-p+1,0) + B_1 u(i-p+1,0) \right] + \\
 & + \sum_{p=-n_1}^{i-1} T_{pj} \left[A_0 x(i-p,0) + B_0 u(i-p,0) \right] + \\
 & + \sum_{q=-n_2}^j T_{iq} \left[A_2 x(0,j-q+1) + B_2 u(0,j-q+1) \right] + \\
 & \left. + \sum_{q=-n_2}^{j-1} T_{iq} \left[A_0 x(0,j-q) + B_0 u(0,j-q) \right] + T_{ij} \left[A_0 x(0,0) + B_0 u(0,0) \right] \right] + Du(i,j)
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Σημείωση.

Ο πίνακας G^{-1} μπορεί να γραφτεί και ως :

$$G^{-1} = \sum_{p=-n_1}^{\infty} \sum_{q=-n_2}^{\infty} T'_{pq} z_1^{-(p+1)} z_2^{-(q+1)} , \tag{2.68}$$

Από τις (2.60) και (2.68) είναι προφανής η συσχέτιση τους:

$$T'_{pq} = T_{p-1,q-1} \quad \text{και} \quad n'_1 = n_1 - 1, \quad n'_2 = n_2 - 1$$

και χρησιμοποιείται για να βρούμε την λύση ενός γενικευμένου κανονικού (GRM) μοντέλου για $n_1 = n_2 = 0$. ▲

Παράδειγμα 2.1

Έστω το δισδιάστατο ιδιόμορφο μοντέλο:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(i+1,j+1) = & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(i,j) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(i+1,j) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(i,j+1) + \\
 & + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(i,j) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(i+1,j) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(i,j+1)
 \end{aligned}$$

με πίνακες $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
 $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Για διάνυσμα εισόδου $u(i, j) = e^{i+j}$ για $i, j \geq 0$ και $u(i, j) = 0$
για $i, j < 0$, και αποδεκτές οριακές συνθήκες $x(i, 0) = e^i$, $x(0, j) = e^j$ στο ορθογώνιο
 $[0, 2] \times [0, 2]$ να βρούμε την προς τα εμπρός λύση του του γενικευμένου ιδιόμορφου
μοντέλου $x(1, 1)$.

Αρχικά βρίσκουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $G(z_1, z_2)$

$$G = G(z_1, z_2) = [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] \Rightarrow$$

$$G(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_1z_2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z_2 = \begin{bmatrix} -z_1 & z_1z_2 \\ 0 & -z_2 \end{bmatrix}$$

Ελέγχουμε αν η ορίζουσα του είναι διάφορη του μηδέν και αν ισχύει η συνθήκη:

$\deg_z G(z, z) = \deg_{z_1} G(z_1, z_2) + \deg_{z_2} G(z_1, z_2)$, έτσι ώστε να υπάρχει λύση.

$\det[G(z_1, z_2)] = z_1z_2 \neq 0$, $\deg_z G(z, z) = 2$, $\deg_{z_1} G(z_1, z_2) = 1$, $\deg_{z_2} G(z_1, z_2) = 1$.

Ακολούθως βρίσκουμε τον αντίστροφο πίνακα του $G(z_1, z_2)$, έτσι ώστε να βρούμε
την ακολουθία των προς τα εμπρός πινάκων.

$$G(z_1, z_2)^{-1} = \begin{bmatrix} -z_1^{-1} & -1 \\ 0 & -z_2^{-1} \end{bmatrix}$$

Τότε από την σχέση (2.60)

$$G(z_1, z_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_1^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z_2^{-1} \Rightarrow$$

$$T_{00} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{10} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Τότε από την (2.65α) βρίσκουμε την λύση του του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου:

$$x(1, 1) = T_{1,1}B_0u(0, 0) + T_{1,0}B_0u(0, 1) + T_{1,-1}B_0u(0, 2) + T_{0,1}B_0u(1, 0) + T_{0,0}B_0u(1, 1) +$$

$$+ T_{0,-1}B_0u(1, 2) + T_{-1,1}B_0u(2, 0) + T_{-1,0}B_0u(2, 1) + T_{-1,-1}B_0u(2, 2) + T_{2,1}B_1u(0, 0) +$$

$$+ T_{2,0}B_1u(0, 1) + T_{2,-1}B_1u(0, 2) + T_{1,1}B_1u(1, 0) + T_{1,0}B_1u(1, 1) + T_{1,-1}B_1u(1, 2) +$$

$$+ T_{0,1}B_1u(2, 0) + T_{0,0}B_1u(2, 1) + T_{0,-1}B_1u(2, 2) + T_{-1,1}B_1u(3, 0) + T_{-1,0}B_1u(3, 1) +$$

$$+ T_{-1,-1}B_1u(3, 2) + T_{1,2}B_2u(0, 0) + T_{1,1}B_2u(0, 1) + T_{1,0}B_2u(0, 2) + T_{1,-1}B_2u(0, 3) +$$

$$\begin{aligned}
 &+T_{0,2}B_2u(1,0)+T_{0,1}B_2u(1,1)+T_{0,0}B_2u(1,2)+T_{0,-1}B_2u(1,3)+T_{-1,2}B_2u(2,0)+ \\
 &+T_{-1,1}B_2u(2,1)+T_{-1,0}B_2u(2,2)+T_{-1,-1}B_2u(2,3)-T_{1,2}\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0,0) \\ u(0,0) \end{bmatrix}+ \\
 &-T_{0,2}\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(1,0) \\ u(1,0) \end{bmatrix}-T_{-1,2}\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(2,0) \\ u(2,0) \end{bmatrix}-T_{2,1}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0,0) \\ u(0,0) \end{bmatrix}+ \\
 &-T_{2,0}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0,1) \\ u(0,1) \end{bmatrix}-T_{2,-1}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0,2) \\ u(0,2) \end{bmatrix}+T_{2,2}Ex(0,0)+T_{1,2}Ex(1,0)+ \\
 &+T_{0,2}Ex(2,0)+T_{-1,2}Ex(3,0)+T_{2,1}Ex(0,1)+T_{2,0}Ex(0,2)+T_{2,-1}Ex(0,3)\Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x(1,1) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^2 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}e^2 + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}e^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}e^3 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^2 + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^3 = -\begin{bmatrix} e^3 + 2e^2 + e \\ e^2 + e \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η λύση δεν εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες, έτσι για $i, j \geq 0$ η λύση μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$x(i, j) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}u(i, j) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}u(i, j+1) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}u(i-1, j) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}u(i, j-1).$$

Η γενική απόκριση του του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου για πίνακες $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $D = 0$ είναι: $y(i, j) = -u(i, j) - u(i, j-1)$ και συγκεκριμένα $y(1,1) = -e^3 - 2e^2 - e$. △

2.6.2 Η προς τα πίσω λύση (backward solution) του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου

Θεωρούμε το δυϊκό γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο (GSM) του (2.1):

$$\begin{aligned}
 E\tilde{x}(i, j) &= A_0\tilde{x}(i+1, j+1) + A_1\tilde{x}(i, j+1) + A_2\tilde{x}(i+1, j) + \\
 &+ B_0\tilde{u}(i+1, j+1) + B_1\tilde{u}(i, j+1) + B_2\tilde{u}(i+1, j)
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Ας θεωρήσουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $G(z_1, z_2) = [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2]$

Τότε το ανάπτυγμα Laurent στο μηδέν του πίνακα $G(z_1, z_2)^{-1}$ δίνεται από τη σχέση:

$$G(z_1, z_2)^{-1} = \sum_{p=l_1}^{-\infty} \sum_{q=l_2}^{-\infty} V_{p,q} z_1^{-p} z_2^{-q}, \quad \text{και} \quad |z_1| < \sigma_1, \quad |z_2| < \sigma_2 \quad (2.70)$$

όπου $V_{p,q}$ είναι οι προς τα πίσω θεμελιώδεις πίνακες (backward fundamental matrix sequence) και η ακολουθία $\{V_{p,q}\}$ είναι γνωστή ως ακολουθία των προς τα πίσω θεμελιώδη πινάκων (backward fundamental matrix sequence).

Λήμμα 2.6

Ας θεωρήσουμε τον δυϊκό πίνακα του $G(z_1, z_2)$:

$$\tilde{G}(z_1, z_2) = E - A_0z_1z_2 - A_2z_1 - A_1z_2 = z_1z_2 G\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) \quad (2.71)$$

Τότε το Laurent ανάπτυγμα στο άπειρο του αντίστροφου δυϊκού πίνακα $\tilde{G}(z_1, z_2)^{-1}$ γράφεται:

$$\tilde{G}(z_1, z_2)^{-1} = \sum_{p=-f_1}^{\infty} \sum_{q=-f_2}^{\infty} \tilde{T}_{pq} z_1^{-p} z_2^{-q} \quad (2.72)$$

όπου $f_i = l_i - 1$ και $\tilde{T}_{i+1, j+1} = V_{-i, -j}$, για $i = l_1, l_1 - 1, \dots$ και $j = l_2, l_2 - 1, \dots$

Οι backward θεμελιώδεις πίνακες $V_{p,q}$ ορίζονται από την (2.70).

Απόδειξη:

Ο δυϊκός πίνακας $\tilde{G}(z_1, z_2)$ του $G(z_1, z_2)$ δίνεται από την (2.71). Αντίστροφα:

$$\begin{aligned} G(z_1, z_2) &= z_1z_2 \tilde{G}\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) \Leftrightarrow \\ G(z_1, z_2)^{-1} &= z_1^{-1} z_2^{-1} \tilde{G}\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1} \sum_{p=-f_1}^{\infty} \sum_{q=-f_2}^{\infty} \tilde{T}_{pq} \left(\frac{1}{z_1}\right)^{-p} \left(\frac{1}{z_2}\right)^{-q} = \\ &= \sum_{p=-f_1}^{\infty} \sum_{q=-f_2}^{\infty} \tilde{T}_{pq} z_1^{p-1} z_2^{q-1} \Leftrightarrow \\ G(z_1, z_2)^{-1} &= \sum_{p=l_1}^{-\infty} \sum_{q=l_2}^{-\infty} V_{p,q} z_1^{-p} z_2^{-q} \quad (2.73) \end{aligned}$$

εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων z_1 και z_2 έχουμε $\tilde{T}_{i+1,j+1} = V_{-i,-j}$ και $f_i = l_i - 1$ για $i = l_1, l_1 - 1, \dots$ και $j = l_2, l_2 - 1, \dots$

▲

Παρατήρηση 2.2

Από το Λήμμα 2.6 παρατηρούμε ότι το ανάπτυγμα Laurent στο μηδέν του πίνακα $G(z_1, z_2)^{-1}$ που δίνεται από την (2.70) και το ανάπτυγμα Laurent στο άπειρο του αντίστροφου του δυϊκού πίνακα $\tilde{G}(z_1, z_2)$ που δίνεται από την (2.72), είναι άμεσα συσχετισμένα. Συνεπώς το ανάπτυγμα του Laurent στο μηδέν του πίνακα $G(z_1, z_2)^{-1}$ υπάρχει και είναι μοναδικό αν και μόνο υπάρχει το ανάπτυγμα του Laurent στο άπειρο του δυϊκού πίνακα $\tilde{G}(z_1, z_2)^{-1}$. Τότε οι συνθήκες (2.59) και (2.61) επεκτείνονται για τον δυϊκό πίνακα $\tilde{G}(z_1, z_2)^{-1}$ και εξασφαλίζουν την ύπαρξη του αναπτύγματος Laurent στο μηδέν του πίνακα $G(z_1, z_2)^{-1}$.

▲

Παρατήρηση 2.3

Η ακολουθία προς τα πίσω (backward) θεμελιωδών πινάκων του $G(z_1, z_2) = [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2]$, είναι η προς τα εμπρός (forward) ακολουθία των θεμελιωδών πινάκων του δυϊκού πολυωνυμικού πίνακα $\tilde{G}(z_1, z_2) = [E - A_0z_1z_2 - A_1z_2 - A_2z_1]$ και για αυτό θεωρούμε και την ακολουθία προς τα πίσω θεμελιώδη πινάκων γνωστή.

▲

Εφαρμόζοντας τον 2-D μετασχηματισμό-z, όπως τον έχει ορίσει Kaczorek (1985), πάνω στο δυϊκό γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο (2.69) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} E\tilde{X}(z_1, z_2) &= A_0 \left\{ z_1z_2 \left[\tilde{X}(z_1, z_2) - \tilde{X}(z_1, 0) - \tilde{X}(0, z_2) + \tilde{x}(0, 0) \right] \right\} + \\ &+ A_1 \left\{ z_2 \left[\tilde{X}(z_1, z_2) - \tilde{X}(z_1, 0) \right] \right\} + A_2 \left\{ z_1 \left[\tilde{X}(z_1, z_2) - \tilde{X}(0, z_2) \right] \right\} + \\ &+ B_0 \left\{ z_1z_2 \left[\tilde{U}(z_1, z_2) - \tilde{U}(z_1, 0) - \tilde{U}(0, z_2) + \tilde{u}(0, 0) \right] \right\} + \\ &+ B_1 \left\{ z_2 \left[\tilde{U}(z_1, z_2) - \tilde{U}(z_1, 0) \right] \right\} + B_2 \left\{ z_1 \left[\tilde{U}(z_1, z_2) - \tilde{U}(0, z_2) \right] \right\} \end{aligned}$$

Κάνοντας τις πράξεις η πιο πάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(z_1, z_2) = & [E - A_0 z_1 z_2 - A_1 z_2 - B_0 z_1 z_2 - B_1 z_2 - B_2 z_1]^{-1} \times \\ & \times \left\{ (B_0 z_1 z_2 + B_1 z_2 + B_2 z_1) \tilde{U}(z_1, z_2) - B_0 z_1 z_2 \tilde{U}(z_1, 0) - B_1 z_2 \tilde{U}(z_1, 0) - \right. \\ & - B_0 z_1 z_2 \tilde{U}(0, z_2) - B_2 z_1 \tilde{U}(0, z_2) + B_0 z_1 z_2 \tilde{u}(0, 0) + A_0 z_1 z_2 \tilde{x}(0, 0) - \\ & \left. - A_1 z_2 \tilde{X}(z_1, 0) - A_0 z_1 z_2 \tilde{X}(z_1, 0) - A_2 z_1 \tilde{X}(0, z_2) - A_0 z_1 z_2 \tilde{X}(0, z_2) \right\} \end{aligned}$$

όπου $\tilde{X}(z_1, z_2)$, $\tilde{X}(z_1, 0)$, $\tilde{X}(0, z_2)$, $\tilde{U}(z_1, z_2)$, $\tilde{U}(z_1, 0)$, $\tilde{U}(0, z_2)$ οι 2-D z-μετασχηματισμοί των $\tilde{x}(i, j)$, $\tilde{x}(i, 0)$, $\tilde{x}(0, j)$, $\tilde{u}(i, j)$, $\tilde{u}(i, 0)$ και $\tilde{u}(0, j)$ αντίστοιχα.

Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα του Laurent στο άπειρο του αντίστροφου δυϊκού πίνακα $\tilde{G}(z_1, z_2)$ όπως ορίζεται από την (2.72) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \tilde{X}(z_1, z_2) = & \left(\sum_{p=-f_1}^{\infty} \sum_{q=-f_2}^{\infty} \tilde{T}_{pq} z_1^{-p} z_2^{-q} \right) \left\{ (B_0 z_1 z_2 + B_1 z_2 + B_2 z_1) \tilde{U}(z_1, z_2) - \right. \\ & - B_0 z_1 z_2 \tilde{U}(z_1, 0) - B_1 z_2 \tilde{U}(z_1, 0) - B_0 z_1 z_2 \tilde{U}(0, z_2) - B_2 z_1 \tilde{U}(0, z_2) + \\ & + B_0 z_1 z_2 \tilde{u}(0, 0) + A_0 z_1 z_2 \tilde{x}(0, 0) - A_1 z_2 \tilde{X}(z_1, 0) - A_0 z_1 z_2 \tilde{X}(z_1, 0) - \\ & \left. - A_2 z_1 \tilde{X}(0, z_2) - A_0 z_1 z_2 \tilde{X}(0, z_2) \right\} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Χρησιμοποιώντας τον 2-D αντίστροφο μετασχηματισμό και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\tilde{T}_{pq} = 0$ για $p < -f_1$ ή $q < -f_2$ παίρνουμε την forward λύση του δυϊκού μοντέλου (2.69):

$$\begin{aligned} \tilde{x}(i, j) = & \sum_{p=0}^{i+f_1+1} \sum_{q=0}^{j+f_2+1} \tilde{T}_{i-p+1, j-q+1} B_0 \tilde{u}(p, q) + \sum_{p=0}^{i+f_1} \sum_{q=0}^{j+f_2+1} \tilde{T}_{i-p, j-q+1} B_1 \tilde{u}(p, q) + \\ & + \sum_{p=0}^{i+f_1+1} \sum_{q=0}^{j+f_2} \tilde{T}_{i-p+1, j-q} B_2 \tilde{u}(p, q) - \sum_{p=0}^{i+f_1} \tilde{T}_{i-p, j+1} [A_1 \quad B_1] \begin{bmatrix} \tilde{x}(p, 0) \\ \tilde{u}(p, 0) \end{bmatrix} - \\ & - \sum_{q=0}^{j+f_2} \tilde{T}_{i+1, j-q} [A_2 \quad B_2] \begin{bmatrix} \tilde{x}(0, q) \\ \tilde{u}(0, q) \end{bmatrix} - \sum_{p=1}^{i+f_1+1} \tilde{T}_{i-p+1, j+1} [A_0 \quad B_0] \begin{bmatrix} \tilde{x}(p, 0) \\ \tilde{u}(p, 0) \end{bmatrix} - \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$- \sum_{q=1}^{j+f_2+1} \tilde{T}_{i+1,j-q+1} [A_0 \quad B_0] \begin{bmatrix} \tilde{x}(0,q) \\ \tilde{u}(0,q) \end{bmatrix} + \tilde{T}_{i+1,j+1} [A_0 \quad B_0] \begin{bmatrix} \tilde{x}(0,0) \\ \tilde{u}(0,0) \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 2.9

α) Αν $\tilde{x}(i, j)$ είναι η λύση του δυϊκού γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου μοντέλου (2.69) για μη-μηδενική είσοδο $\tilde{u}(i, j)$, τότε η ακολουθία διανυσμάτων κατάστασης $x(i, j) = \tilde{x}(N-i, M-j)$ είναι η λύση του του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου (2.1) για μη μηδενική είσοδο $u(i, j) = \tilde{u}(N-i, M-j)$.

β) Αν $x(i, j)$ είναι η λύση του του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου μοντέλου (2.1) για μη-μηδενική είσοδο $u(i, j)$, τότε η ακολουθία $\tilde{x}(i, j) = x(N-i, M-j)$ είναι η λύση του δυϊκού μοντέλου (2.69) για μη μηδενική είσοδο $\tilde{u}(i, j) = u(N-i, M-j)$.

Απόδειξη:

Για το α) Ας θεωρήσουμε την $\tilde{x}(i, j)$ ως λύση του δυϊκού μας GSM μοντέλου (2.69) για μια μη-μηδενική έσοδο $\tilde{u}(i, j)$, άρα το διάνυσμα κατάστασης $\tilde{x}(i, j)$ ικανοποιεί την (2.69) .

Για το ιδιόμορφο μοντέλο (2.1) θέτουμε:

$$x(i, j) = \tilde{x}(N-i, M-j) \text{ και } u(i, j) = \tilde{u}(N-i, M-j),$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι για $p, q = 0, 1, \dots$:

$$x(i+p, j+q) = \tilde{x}(N-(i+p), M-(j+q))$$

$$u(i+p, j+q) = \tilde{u}(N-(i+p), M-(j+q))$$

Έχουμε λοιπόν:

$$Ex(i+1, j+1) = E\tilde{x}(N-(i+1), M-(j+1)).$$

Αντικαθιστώντας στην (2.69):

$$Ex(i+1, j+1) = E\tilde{x}(N-(i+1), M-(j+1)) = A_0\tilde{x}(N-(i+1)+1, M-(j+1)+1) + A_1\tilde{x}(N-(i+1), M-(j+1)+1) + A_2\tilde{x}(N-(i+1)+1, M-(j+1)) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ B_0 \tilde{u}(N-(i+1)+1, M-(j+1)+1) + B_1 \tilde{u}(N-(i+1), M-(j+1)+1) + \\
 &\quad + B_2 \tilde{u}(N-(i+1)+1, M-(j+1)) \tag{2.75}
 \end{aligned}$$

Για $x(i, j) = \tilde{x}(N-i, M-j)$ και $u(i, j) = \tilde{u}(N-i, M-j)$

η (2.75) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 Ex(i+1, j+1) &= A_0 x(i, j) + A_1 x(i+1, j) + A_2 x(i, j+1) + \\
 &\quad + B_0 u(i, j) + B_1 u(i+1, j) + B_2 u(i, j+1)
 \end{aligned}$$

Τον ίδιο τρόπο ακολουθούμε και για την απόδειξη του το δεύτερου μέρους του θεωρήματος. ▲

Η προς τα πίσω λύση (backward solution) του GSM με την βοήθεια της forward λύσης του δυϊκού μοντέλου και του Θεωρήματος 2.9 δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.10

Αν ισχύει $\det G(z_1, z_2) \neq 0$, τότε η μοναδική backward λύση του GSM (2.1) με επιτρεπτές τελικές συνθήκες (2.15) δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned}
 x(i, j) &= \sum_{p=0}^{N-i+l_1} \sum_{q=0}^{M-j+l_2} V_{p-i-N, q-j-M} B_0 u(N-p, M-q) + \\
 &\quad + \sum_{p=0}^{N-i+l_1-1} \sum_{q=0}^{M-j+l_2} V_{p+i+1-N, q+j-M} B_1 u(N-p, M-q) + \\
 &\quad + \sum_{p=0}^{N-i+l_1} \sum_{q=0}^{M-j+l_2-1} V_{p+i-N, j+q+1-M} B_2 u(N-p, M-q) - \\
 &\quad - \sum_{p=0}^{N-i+l_1-1} V_{i+p+1-N, j-M} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(N-p, M) \\ u(N-p, M) \end{bmatrix} - \\
 &\quad - \sum_{q=0}^{M-j+l_2-1} V_{i-N, 1+q+j-M} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(N, M-q) \\ u(N, M-q) \end{bmatrix} - \\
 &\quad - \sum_{p=1}^{N-i+l_1} V_{p+i-N, j-M} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(N-p, M) \\ u(N-p, M) \end{bmatrix} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{q=1}^{M-j+l_2} V_{i-N, q+j-M} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(N, M-q) \\ u(N, M-q) \end{bmatrix} + \\
 & + V_{i-N, j-M} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(N, M) \\ u(N, M) \end{bmatrix} \quad (2.76)
 \end{aligned}$$

όπου $V_{i,j}$ είναι η προς τα πίσω (backward) θεμελιώδη ακολουθία του πίνακα $G(z_1, z_2)^{-1}$ που δίνεται από την σχέση (2.70).

Απόδειξη:

Ας θεωρήσουμε γνωστή την forward λύση του δυϊκού συστήματος (2.69) $\tilde{x}(i, j)$ που δίνεται από την σχέση (2.75) για μια μη-μηδενική είσοδο $\tilde{u}(i, j)$. Τότε η ακολουθία $x(i, j) = \tilde{x}(N-i, M-j)$ σύμφωνα με το Θεώρημα 2.9 είναι η λύση της δυϊκής εξίσωσης της (2.1) για μη μηδενικές εισόδους $u(i, j) = \tilde{u}(N-i, M-j)$ και με τη βοήθεια της σχέσης (2.73) καταλήγουμε στην επιθυμητή μορφή της λύσης (2.76)

$$\begin{aligned}
 x(i, j) &= \tilde{x}(N-i, M-j) = \\
 &= \sum_{p=0}^{N-i+f_1+1} \sum_{q=0}^{M-j+f_2+1} \tilde{T}_{N-i-p+1, M-j-q+1} B_0 u(N-p, M-q) + \\
 &+ \sum_{p=0}^{N-i+f_1} \sum_{q=0}^{M-j+f_2+1} \tilde{T}_{N-i-p, M-j-q+1} B_1 u(N-p, M-q) + \\
 &+ \sum_{p=0}^{N-i+f_1+1} \sum_{q=0}^{M-j+f_2} \tilde{T}_{N-i-p+1, M-j-q} B_2 u(N-p, M-q) - \\
 &- \sum_{p=0}^{N-i+f_1} \tilde{T}_{N-i-p, M-j+1} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(N-p, M) \\ u(N-p, M) \end{bmatrix} - \\
 &- \sum_{q=0}^{M-j+f_2} \tilde{T}_{N-i+1, M-j-q} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(N, M-q) \\ u(N, M-q) \end{bmatrix} - \\
 &- \sum_{p=1}^{N-i+f_1+1} \tilde{T}_{N-i-p+1, M-j+1} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(N-p, M) \\ u(N-p, M) \end{bmatrix} - \\
 &- \sum_{q=1}^{M-j+f_2+1} \tilde{T}_{N-i+1, M-j-q+1} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(N, M-q) \\ u(N, M-q) \end{bmatrix} + \tilde{T}_{N-i+1, M-j+1} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(N, M) \\ u(N, M) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$



Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχει λύση το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο (2.1), είναι οι τελικές συνθήκες (2.15) να ικανοποιούν την πιο πάνω λύση (2.76), για $(i = N$ και $j = 0, 1, \dots, M)$ και (για $i = 0, 1, \dots, N$ και $j = M$).

Παράδειγμα 2.2

Να βρούμε την προς τα πίσω λύση $x(2,2)$ του GSM του παραδείγματος 2.1 με ακολουθία εισόδων $u(i, j) = e^{i+j}$ για $i, j \geq 0$ και αποδεκτές τελικές συνθήκες

$$x(i, M) = \begin{bmatrix} e^i \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ για } i = 0, 1, 2 \text{ και } x(N, j) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^j \end{bmatrix} \text{ για } j = 0, 1, 2, \text{ στο ορθογώνιο } [0, 2] \times [0, 2].$$

Στην πορεία βρίσκουμε τους προς τα εμπρός θεμελιώδη πίνακες του δυϊκού πολυωνυμικού πίνακα $\tilde{G}(z_1, z_2)$, εφόσον σύμφωνα με την Παρατήρηση (2.3) είναι η ακολουθία των προς τα πίσω θεμελιωδών πινάκων του πίνακα $G(z_1, z_2)$.

$$\tilde{G}(z_1, z_2) = z_1 z_2 G\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \begin{bmatrix} -z_2 & 1 \\ 0 & -z_1 \end{bmatrix}$$

Αρχικά ελέγχουμε αν η ορίζουσα του πίνακα $\tilde{G}(z_1, z_2)$ είναι διάφορη του μηδέν έτσι ώστε να έχει μοναδική προς τα πίσω λύση το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο, και αν ικανοποιείται η συνθήκη (2.61) για τον δυϊκό πίνακα $\tilde{G}(z_1, z_2)$ έτσι ώστε να υπάρχει και να είναι μοναδική η ακολουθία των προς τα πίσω πινάκων του $G(z_1, z_2)$:

$$\det[\tilde{G}(z_1, z_2)] = z_1 z_2 \neq 0 \text{ και}$$

$$\deg_z |\tilde{G}(z, z)| = 2, \deg_{z_1} |\tilde{G}(z_1, z_2)| + \deg_{z_2} |\tilde{G}(z_1, z_2)| = 2.$$

Για να βρούμε τους θεμελιώδεις προς τα πίσω πίνακες του $G(z_1, z_2)$:

$$\tilde{G}(z_1, z_2)^{-1} = \begin{bmatrix} -z_2^{-1} & -1 \\ 0 & -z_1^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z_1^{-1} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_2^{-1}$$

Τότε από την σχέση (2.72) βρίσκουμε του προς τα προς τα εμπρός πίνακες του $\tilde{G}(z_1, z_2)$:

$$\tilde{T}_{0,0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \tilde{T}_{0,1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Από την σχέση (2.73) βρίσκουμε τους προς τα εμπρός θεμελιώδεις πίνακες του δυϊκού του πίνακα $G(z_1, z_2)$

$$V_{0,1} = \tilde{T}_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad V_{1,0} = \tilde{T}_{0,1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_{1,1} = \tilde{T}_{0,0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad l_1 = l_2 = 0$$

Τότε η προς τα πίσω λύση $x(2,2)$ του ιδιόμορφου μοντέλου δίνεται από την σχέση (2.76) για $i = j = 2$.

$$\begin{aligned} x(2,2) &= V_{-4,-4} B_0 u(2,2) + V_{1,0} B_1 u(2,2) + V_{0,0} B_1 u(3,2) + V_{0,1} B_2 u(2,2) + \\ &+ V_{0,0} B_2 u(2,3) - V_{1,0} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2,2) \\ u(2,2) \end{bmatrix} - V_{0,0} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(3,2) \\ u(3,2) \end{bmatrix} + \\ &- V_{0,1} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2,2) \\ u(2,2) \end{bmatrix} - V_{0,0} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2,3) \\ u(2,3) \end{bmatrix} - V_{1,0} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1,2) \\ u(1,2) \end{bmatrix} + \\ &- V_{0,0} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2,2) \\ u(2,2) \end{bmatrix} - V_{0,1} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2,1) \\ u(2,1) \end{bmatrix} - V_{0,0} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2,2) \\ u(2,2) \end{bmatrix} + \\ &+ V_{0,0} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2,2) \\ u(2,2) \end{bmatrix} = V_{1,0} B_1 u(2,2) + V_{0,1} B_2 u(2,2) - V_{1,0} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2,2) \\ u(2,2) \end{bmatrix} + \\ &- V_{0,1} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2,2) \\ u(2,2) \end{bmatrix} - V_{1,0} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1,2) \\ u(1,2) \end{bmatrix} - V_{0,1} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2,1) \\ u(2,1) \end{bmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

Άρα η προς τα πίσω λύση του του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου είναι:

$$x(2,2) = \begin{bmatrix} e^2 + e^3 \\ e^2 + e^3 \end{bmatrix}.$$

Η απόκριση του μοντέλου για $C = [0 \ 1]$ και $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$y(2,2) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} e^2 + e^3 \\ e^2 + e^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^4 = \begin{bmatrix} e^4 \\ e^2 + e^3 + e^4 \end{bmatrix}. \quad \Delta$$

2.6.3 Η συμμετρική λύση του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου (symmetric solution)

Η συμμετρική λύση του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου όπως την έχει ορίσει ο Karampetakis (1994) παρουσιάζεται σε αυτό το κεφάλαιο.

Θεωρούμε το ανάπτυγμα του Laurent στο άπειρο του όπως δίνεται από την σχέση (2.60) και τις σχέσεις (2.62).

Ορίζουμε τώρα τους πίνακες:

$$\mathbf{A}_0 = \text{blockdiag} [(-A_1 \quad -A_0), \dots, (-A_1 \quad -A_0)] \in \mathbb{R}^{nN \times n(N+1)}$$

$$\mathbf{A}_1 = \text{blockdiag} [(E \quad -A_2), \dots, (E \quad -A_2)] \in \mathbb{R}^{nN \times n(N+1)}$$

$$\mathbf{B}_0 = \text{blockdiag} [(B_1 \quad B_0), \dots, (B_1 \quad B_0)] \in \mathbb{R}^{nN \times m(N+1)}$$

$$\mathbf{B}_1 = \text{blockdiag} [B_2, \dots, B_2] \in \mathbb{R}^{nN \times m(N+1)}$$

και τα διανύσματα:

$$y_i = \begin{bmatrix} x_{N,i} \\ x_{N-1,i} \\ \vdots \\ x_{1,i} \\ x_{0,i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(N+1)}, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad u_i = \begin{bmatrix} u_{N,i} \\ u_{N-1,i} \\ \vdots \\ u_{1,i} \\ u_{0,i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(N+1)}, \quad i = 0, 1, \dots, M$$

Τότε το 2-D γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο (2.1) μπορεί να ξαναγραφτεί στην μορφή:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} y_M \\ y_{M-1} \\ \vdots \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}}_{y_{0,M}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} u_M \\ u_{M-1} \\ \vdots \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}}_{u_{0,M}} \quad (2.77)$$

Ας θεωρήσουμε επίσης :

$$H_i = \begin{bmatrix} T_{1,i} & T_{2,i} & \cdots & T_{N-1,i} & T_{N,i} \\ T_{0,i} & T_{1,i} & \cdots & T_{N-2,i} & T_{N-1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ T_{-N+1,i} & T_{-N+2,i} & \cdots & T_{0,i} & T_{1,i} \\ T_{-N,i} & T_{-N+1,i} & \cdots & T_{-1,i} & T_{0,i} \end{bmatrix}$$

κατόπιν μπορούμε να ελέγξουμε ότι για

$$S_i = \begin{bmatrix} F_{1,i} & 0 & \cdots & 0 & Q_{N,i} \\ F_{0,i} & \delta_{i-1}I & \cdots & 0 & Q_{N-1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{-N+2,i} & 0 & \cdots & \delta_{i-1}I & Q_{2,i} \\ F_{-N+1,i} & 0 & \cdots & 0 & Q_{1,i} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} F_{k,i} &= T_{k,i}E - T_{k,i-1}A_1 \\ Q_{k,i} &= -T_{k,i}A_2 - T_{k,i-1}A_0 \end{aligned}$$

ισχύει:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} T_{1,i} & T_{2,i} & \cdots & T_{N-1,i} & T_{N,i} \\ T_{0,i} & T_{1,i} & \cdots & T_{N-2,i} & T_{N-1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ T_{-N+1,i} & T_{-N+2,i} & \cdots & T_{0,i} & T_{1,i} \\ T_{-N,i} & T_{-N+1,i} & \cdots & T_{-1,i} & T_{0,i} \end{bmatrix}}_{H_i} \times \underbrace{\begin{bmatrix} E & -A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -A_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & E & -A_2 \end{bmatrix}}_{A_i} + \\ & + \underbrace{\begin{bmatrix} T_{1,i-1} & T_{2,i-1} & \cdots & T_{N-1,i-1} & T_{N,i-1} \\ T_{0,i-1} & T_{1,i-1} & \cdots & T_{N-2,i-1} & T_{N-1,i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ T_{-N+1,i-1} & T_{-N+2,i-1} & \cdots & T_{0,i-1} & T_{1,i-1} \\ T_{-N,i-1} & T_{-N+1,i-1} & \cdots & T_{-1,i-1} & T_{0,i-1} \end{bmatrix}}_{H_{i-1}} \times \\ & \times \underbrace{\begin{bmatrix} -A_1 & -A_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -A_1 & -A_0 \end{bmatrix}}_{A_0} = S_i \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (2.77) με τον πίνακα:

$$\tilde{A}_N^L = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & \cdots & H_M \\ H_0 & H_1 & H_2 & \cdots & H_{M-1} \\ H_{-1} & H_0 & H_1 & \cdots & H_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{-M+1} & H_{-M+2} & H_{-M+3} & \cdots & H_0 \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & \cdots & H_M \\ H_0 & H_1 & H_2 & \cdots & H_{M-1} \\ H_{-1} & H_0 & H_1 & \cdots & H_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{-M+1} & H_{-M+2} & H_{-M+3} & \cdots & H_0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_N^L} \times \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} y_M \\ y_{M-1} \\ \vdots \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}}_{y_{0,M}} = \\ & = \underbrace{\begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & \cdots & H_M \\ H_0 & H_1 & H_2 & \cdots & H_{M-1} \\ H_{-1} & H_0 & H_1 & \cdots & H_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{-M+1} & H_{-M+2} & H_{-M+3} & \cdots & H_0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_N^L} \times \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} u_M \\ u_{M-1} \\ \vdots \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}}_{u_{0,M}} \end{aligned}$$

και κάνοντας τις πράξεις προκύπτει

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_1 \mathbf{A}_1 & S_2 & \cdots & S_M & H_M \mathbf{A}_0 \\ H_0 \mathbf{A}_1 & S_1 & \cdots & S_{M-1} & H_{M-1} \mathbf{A}_0 \\ H_{-1} \mathbf{A}_1 & S_0 & \cdots & S_{M-2} & H_{M-2} \mathbf{A}_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ H_{-M+1} \mathbf{A}_1 & S_{-M+2} & \cdots & S_0 & H_0 \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \times \underbrace{\begin{bmatrix} y_M \\ y_{M-1} \\ \vdots \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}}_{y_{0,M}} = \quad (2.78) \\ & = \begin{bmatrix} H_1 \mathbf{B}_1 & H_1 \mathbf{B}_0 + H_2 \mathbf{B}_1 & \cdots & H_M \mathbf{B}_0 \\ H_0 \mathbf{B}_1 & H_0 \mathbf{B}_0 + H_1 \mathbf{B}_1 & \cdots & H_{M-1} \mathbf{B}_0 \\ H_{-1} \mathbf{B}_1 & H_{-1} \mathbf{B}_0 + H_0 \mathbf{B}_1 & \cdots & H_{M-2} \mathbf{B}_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{-M+1} \mathbf{B}_1 & H_{-M+1} \mathbf{B}_0 + H_{-M+2} \mathbf{B}_1 & \cdots & H_0 \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_M \\ u_{M-1} \\ \vdots \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}}_{u_{0,M}} \end{aligned}$$

Από το πρώτο και το τελευταίο block της εξίσωσης, παίρνουμε τις οριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση του (2.1) έτσι ώστε να έχουμε λύση:

$$\begin{aligned} & H_1 \mathbf{A}_1 y_M + S_2 y_{M-1} + \cdots + S_M y_1 + H_M \mathbf{A}_0 y_0 = \\ & = (H_1 \mathbf{B}_1) u_M + (H_1 \mathbf{B}_0 + H_2 \mathbf{B}_1) u_{M-1} + \cdots + \end{aligned}$$

$$+(H_{M-1}\mathbf{B}_0 + H_M\mathbf{B}_1)u_1 + (H_M\mathbf{B}_0)u_0 \quad (2.79)$$

και

$$\begin{aligned} & H_{-M+1}\mathbf{A}_1y_M + S_{-M+2}y_{M-1} + \dots + S_0y_1 + H_0\mathbf{A}_0y_0 = \\ & (H_{-M+1}\mathbf{B}_1)u_M + (H_{-M+1}\mathbf{B}_0 + H_{-M+2}\mathbf{B}_1)u_{M-1} + \dots + \\ & + (H_0\mathbf{B}_0 + H_1\mathbf{B}_1)u_1 + (H_0\mathbf{B}_0)u_0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι πίνακες S_i , $i = 0, 2, 3, \dots, M$ στις σχέσεις (2.79) και (2.80) έχουν όλα τα block στηλών τους, εκτός του πρώτου και του τελευταίου, γεμισμένα με μηδενικές εισόδους, επομένως οι πιο πάνω εξισώσεις ικανοποιούνται μόνο από τις οριακές συνθήκες της μορφής (2.16).

Στη συνέχεια από τις εξισώσεις που δίνονται από τις σχέσεις (2.78) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & (H_{-q}\mathbf{A}_0)y_M + S_{-q+1}y_{M-1} + \dots + S_{-q+M-1}y_1 + (H_{-q+M-1}\mathbf{A}_0)y_0 = \\ & = (H_{-q}\mathbf{B}_1)u_M + (H_{-q}\mathbf{B}_0 + H_{-q+1}\mathbf{B}_1)u_{M-1} + \dots + \\ & + (H_{-q+M-1}\mathbf{B}_0 + H_{-q+M-1}\mathbf{B}_1)u_1 + (H_{-q+M-1}\mathbf{B}_0)u_0 \end{aligned}$$

όπου $q = 0, 1, \dots, M - 2$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} T_{1,-q} & T_{2,-q} & \dots & T_{N,-q} \\ T_{1,-q} & T_{1,-q} & \dots & T_{N-1,-q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{-N+2,-q} & T_{-N+3,-q} & \dots & T_{2,-q} \\ T_{-N+1,-q} & T_{-N+2,-q} & \dots & T_{1,-q} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E & -A_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -A_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & E & -A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N,M} \\ x_{N-1,M} \\ \vdots \\ x_{1,M} \\ x_{0,M} \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{j=-q+1}^{-q+M-1} \begin{bmatrix} F_{1,j} & 0 & \dots & 0 & Q_{N,j} \\ F_{0,j} & \delta_{i-1}I & \dots & 0 & Q_{N-1,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{-N+2,j} & 0 & \dots & \delta_{i-1}I & Q_{2,j} \\ F_{-N+1,j} & 0 & \dots & 0 & Q_{1,j} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{N,M-1-j} \\ x_{N-1,M-1-j} \\ \vdots \\ x_{1,M-1-j} \\ x_{0,M-1-j} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} T_{1,-q+M-1} & T_{2,-q+M-1} & \dots & T_{N,-q+M-1} \\ T_{0,-q+M-1} & T_{1,-q+M-1} & \dots & T_{N-1,-q+M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{-N+2,-q+M-1} & T_{-N+3,-q+M-1} & \dots & T_{2,-q+M-1} \\ T_{-N+1,-q+M-1} & T_{-N+2,-q+M-1} & \dots & T_{1,-q+M-1} \end{bmatrix} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \begin{bmatrix} -A_1 & -A_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -A_1 & -A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N,0} \\ x_{N-1,0} \\ \vdots \\ x_{1,0} \\ x_{0,0} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} T_{1,-q} & T_{2,-q} & \cdots & T_{N,-q} \\ T_{1,-q} & T_{1,-q} & \cdots & T_{N-1,-q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{-N+2,-q} & T_{-N+3,-q} & \cdots & T_{2,-q} \\ T_{-N+1,-q} & T_{-N+2,-q} & \cdots & T_{1,-q} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N,M} \\ u_{N-1,M} \\ \vdots \\ u_{1,M} \\ u_{0,M} \end{bmatrix} + \\
 & + \sum_{j=-q}^{-q+M-2} \left\{ \begin{bmatrix} T_{1,j} & T_{2,j} & \cdots & T_{N,j} \\ T_{0,j} & T_{1,j} & \cdots & T_{N-1,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{-N+2,j} & T_{-N+3,j} & \cdots & T_{2,j} \\ T_{-N+1,j} & T_{-N+2,j} & \cdots & T_{1,j} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 & B_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_1 & B_0 \end{bmatrix} + \right. \\
 & + \begin{bmatrix} T_{1,j+1} & T_{2,j+1} & \cdots & T_{N,j+1} \\ T_{0,j+1} & T_{1,j+1} & \cdots & T_{N-1,j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{-N+2,j+1} & T_{-N+3,j+1} & \cdots & T_{2,j+1} \\ T_{-N+1,j+1} & T_{-N+2,j+1} & \cdots & T_{1,j+1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N,M-1-j} \\ u_{N-1,M-1-j} \\ \vdots \\ u_{1,M-1-j} \\ u_{0,M-1-j} \end{bmatrix} + (2.81) \\
 & + \begin{bmatrix} T_{1,-q+M-1} & T_{2,-q+M-1} & \cdots & T_{N,-q+M-1} \\ T_{0,-q+M-1} & T_{1,-q+M-1} & \cdots & T_{N-1,-q+M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{-N+2,-q+M-1} & T_{-N+3,-q+M-1} & \cdots & T_{2,-q+M-1} \\ T_{-N+1,-q+M-1} & T_{-N+2,-q+M-1} & \cdots & T_{1,-q+M-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 & B_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_1 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N,0} \\ u_{N-1,0} \\ \vdots \\ u_{1,0} \\ u_{0,0} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ισοδύναμα παίρνοντας την i - γραμμή των άνωθεν εξισώσεων για $q = 0, 1, \dots, M-2$ και $i = 0, 1, \dots, N-2$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & T_{-i,-q} E x_{N,M} - T_{-i+N-1,-q} A_2 x_{0,M} + \sum_{k=0}^{N-2} (-T_{-i+k,-q} A_2 + T_{-i+k+1,-q} E) x_{N-1-k,M} + \\
 & + \sum_{j=1-q}^{M-q} \left\{ (T_{-i,j} E - T_{-i,j-1} A_1) x_{N,M-q+1-j} + (-T_{-i+N-1,j} A_2 - T_{-i+N-1,j-1} A_0) x_{0,M-q+1-j} \right\} + \\
 & + x_{N-1+i,M-1-q} - T_{-i,M-1-q} A_1 x_{N,M} - \sum_{k=0}^{N-2} (-T_{-i+k,-q} A_2 + T_{-i+k+1,-q} E) x_{N-1-k,M} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1-q}^{M-q} (T_{-i,j} E - T_{-i,j-1} A_1) x_{N,M-q+1-j} + (-T_{-i+k,M-1-q} A_0 - T_{-i+k+1,M-1-q} A_1) x_{N-1-k,0} - \\
 & \quad - T_{-i+N-1,M-1-q} A_0 x_{0,0} = \sum_{k=0}^{N-1} T_{-i+k,-q} B_2 u_{N-k,M} + \\
 & \quad + \sum_{j=-q}^{M-2-q} \sum_{k=0}^{N-2} \{T_{-i+k,j} B_0 + T_{-i+k+1,j} B_1 + T_{-i+k+1,j+1} B_2\} u_{N-k-1,M-1-j} + \\
 & \quad + \sum_{j=-q}^{M-2-q} \left\{ (T_{-i,j} B_1 + T_{-i,j+1} B_2) u_{N,M-1-j} + (T_{-i+N-1,j} B_0 + T_{-i+N-1,j+1} B_2) u_{0,M-1-j} \right\} + \\
 & \quad + (T_{-i,M-1-q} B_1) u_{N,0} + (T_{-i+N-1,M-1-q} B_0) u_{0,0} + (T_{-i+k,M-1-q} B_0 + T_{-i+k+1,M-1-q} B_1) u_{N-1-k,0}
 \end{aligned}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας στην θέση των p τα $N-1+i$ και με τα $M-1-q$ για τα q είναι προφανές πώς καταλήγουμε στο πιο κάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.11

Αν ισχύει $\det G(z_1, z_2) \neq 0$, τότε η μοναδική συμμετρική λύση του του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου (2.1) με επιτρεπτές οριακές συνθήκες (2.16) δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned}
 x_{p,q} & = -T_{N-1-p,1+q-M} E x_{N,M} + T_{2(N-1)-p,1+q-M} A_2 x_{0,M} + \\
 & \quad + \sum_{k=0}^{N-2} (T_{N-1-p+k,1+q-M} A_2 - T_{N-p+k,1+q-M} E) x_{N-1-k,M} + \\
 & \quad + \sum_{j=q+2-M}^{q+1} \left\{ (-T_{N-1-p,j} E + T_{N-1-p,j-1} A_1) x_{N,q+2-j} + (-T_{2(N-1)-p,j} A_2 - T_{2(N-1)-p,j-1} A_0) x_{0,q+2-j} \right\} + \\
 & \quad + T_{N-1-p,q} A_1 x_{N,0} + \sum_{k=0}^{N-2} \{T_{N-1-p+k,q} A_0 + T_{N-p+k,q} A_1\} x_{N-1-k,0} + T_{2(N-1)-p,q} A_0 x_{0,0} + \\
 & \quad + \sum_{k=0}^{N-1} T_{N-1-p+k,q+1-M} B_2 u_{N-k,M} + \tag{2.82} \\
 & \quad + \sum_{j=q+1-M}^{q-1} \sum_{k=0}^{N-2} \{T_{N-1-p+k,j} B_0 + T_{N-p+k,j} B_1 + T_{N-p+k,j+1} B_2\} u_{N-k-1,M-1-j} + \\
 & \quad + \sum_{j=q+1-M}^{q-1} \left\{ (T_{N-1-p,j} B_1 + T_{N-1-p,j+1} B_2) u_{N,M-1-j} + (T_{2(N-1)-p,j} B_0 + T_{2(N-1)-p,j+1} B_2) u_{0,M-1-j} + \right. \\
 & \quad \left. + (T_{2(N-1)-p,j} B_0 - T_{2(N-1)-p,j+1} B_2) u_{0,M-1-j} \right\} + T_{N-1-p,q} B_1 u_{N,0} + (T_{2(N-1)-p,q} B_0) u_{0,0} +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-2} \{T_{N-1+p+k,q} B_0 + T_{N-p+k,q} B_1\} u_{N-1-k,0}$$

Με τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιώντας το πρώτο και το τελευταίο block γραμμών των πινάκων των εξισώσεων (2.81) και για ($i = -1, N-1$ και $q = 0, 1, \dots, M-2$) ή

($q = -1, M-1$ και $i = -1, 0, 1, \dots, N-2, N-1$) παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις που ορίζουν τις επιτρεπτές συνοριακές συνθήκες σε όρους των block πινάκων:

$$\begin{aligned} & T_{-i,-q} E x_{N,M} - T_{-i+N-1,-q} A_2 x_{0,M} + \sum_{k=0}^{N-2} (-T_{-i+k,-q} A_2 + T_{-i+k+1,-q} E) x_{N-1-k,M} + \\ & + \sum_{j=1-q}^{M-q} \left\{ (T_{-i,j} E - T_{-i,j-1} A_1) x_{N,M-q+1-j} + (-T_{-i+N-1,j} A_2 - T_{-i+N-1,j-1} A_0) x_{0,M-q+1-j} \right\} - \\ & - T_{-i,M-1-q} A_1 x_{N,0} - \sum_{k=0}^{N-2} \{T_{-i+k,M-1-q} A_0 + T_{-i+k+1,M-1-q} A_1\} x_{N-1-k,0} - \\ & - T_{-i+N-1,M-1-q} A_0 x_{0,0} = \sum_{k=0}^{N-1} T_{-i+k,-q} B_2 u_{N-k,M} + \\ & + \sum_{j=-q}^{M-2-q} \sum_{k=0}^{N-2} \{T_{-i+k,j} B_0 + T_{-i+k+1,j} B_1 + T_{-i+k+1,j+1} B_2\} u_{N-k-1,M-1-j} + \quad (2.83) \\ & + \sum_{j=-q}^{M-2-q} \left\{ (T_{-i,j} B_1 + T_{-i,j+1} B_2) u_{N,M-1-j} + (T_{-i+N-1,j} B_0 + T_{-i+N-1,j+1} B_2) u_{0,M-1-j} \right\} + \\ & + (T_{-i,M-1-q} B_1) u_{N,0} + (T_{-i+N-1,M-1-q} B_0) u_{0,0} + \sum_{k=0}^{N-2} \{T_{-i+k,M-1-q} B_0 + T_{-i+k+1,M-1-q} B_1\} u_{N-1-k,0} \cdot \blacktriangle \end{aligned}$$

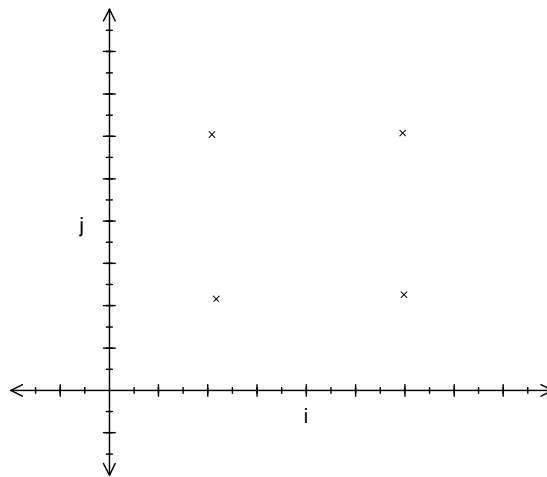
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αναγκαίες και ικανές συνθήκες έτσι ώστε το ιδιόμορφο μοντέλο (2.1) να έχει λύση είναι οι αρχικές και τελικές συνθήκες και η ακολουθία εισόδων να επαληθεύουν τις σχέσεις (2.79), (2.80) και (2.83).

2.7 Εφαρμογή δισδιάστατου ιδιόμορφου μοντέλου.

Τα ιδιόμορφα δισδιάστατα μοντέλα έχουν ευρύτερο φάσμα εφαρμογών παρά τα δισδιάστατα μοντέλα της μορφής χώρου καταστάσεων. Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύεται ότι τα δισδιάστατα ιδιόμορφα μοντέλα, μπορούν να περιγράψουν μη αναδρομικές μάσκες (Nonrecursible Masks). Είναι γνωστό (Bose, 1982), ότι οι μη

αναδρομικές μάσκες δεν μπορούν να αναπαρασταθούν στην μορφή δισδιάστατων μεταβλητών κατάστασης. Ωστόσο, τέτοιου είδους μάσκες που εμφανίζονται στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνας, αντιμετωπίζονται και επιλύονται εύκολα μέσω των ιδιόμορφων δισδιάστατων μοντέλων.

Θεωρούμε την μη αναδρομική μάσκα που περιγράφεται από την πιο κάτω γραφική παράσταση.



Γραφική Παράσταση 2. 1

Όπου «x» απεικονίζεται το αντιστάθμισμα εξόδου του 1, και όπου «ο» απεικονίζεται το αντιστάθμισμα εισόδου του 1.

Η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση της μη αναδρομικής μάσκας δίνεται από την:

$$y(i, j) = y(i-1, j-1) + y(i-1, j+1) + y(i+1, j-1) + y(i+1, j+1) + u(i, j)$$

όπου $u(i, j)$ είναι το διάνυσμα εισόδου και $y(i, j)$ το διάνυσμα εξόδου.

Σύμφωνα με τους Lewis και Mertzios (1991):

Χρησιμοποιώντας τον δισδιάστατο μετασχηματισμό-z η πιο πάνω εξίσωση γίνεται:

$$(1 - z_1^{-1} z_2^{-1} - z_1^{-1} z_2 - z_1 z_2^{-1} - z_1 z_2) Y(z_1, z_2) = U(z_1, z_2)$$

Τότε η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται :

$$H(z_1, z_2) = \frac{1}{(1 - z_1^{-1}z_2^{-1} - z_1^{-1}z_2 - z_1z_2^{-1} - z_1z_2)} = \frac{1}{1 - (z_1 + z_1^{-1})(z_2 + z_2^{-1})}$$

Τότε το μοντέλο κατάστασης που περιγράφεται από το block διάγραμμα του συστήματος μπορεί να γραφτεί στην μορφή του δισδιάστατου ιδιόμορφου Roesser μοντέλου:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x^{h_1}(i+1, j) \\ x^{h_2}(i+1, j) \\ x^{h_3}(i+1, j) \\ x^{v_1}(i, j+1) \\ x^{v_2}(i, j+1) \\ x^{v_3}(i, j+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x^{h_1}(i, j) \\ x^{h_2}(i, j) \\ x^{h_3}(i, j) \\ x^{v_1}(i, j) \\ x^{v_2}(i, j) \\ x^{v_3}(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j)$$

και η εξίσωση εξόδου δίνεται από την:

$$y(i, j) = [0 \ 0 \ 0 \ | \ 1 \ 1 \ 0] x(i, j) + u(i, j).$$

Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.2 το μοντέλο είναι ισοδύναμο με το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο.

$$\text{Όπου } x(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{h_1}(i, j) \\ x^{h_2}(i, j) \\ x^{h_3}(i, j) \\ x^{v_1}(i, j) \\ x^{v_2}(i, j) \\ x^{v_3}(i, j) \end{bmatrix}, \quad A_1 = [E_1 \quad 0] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$A_2 = [0 \quad E_2] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad A_0 = -A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right],$$

$$B_0 = -B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως το Roesser μοντέλο γράφεται στην μορφή του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου:

$$0 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] x(i+1, j) + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] x(i, j+1) +$$

$$+ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] x(i, j) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j)$$

Να βρούμε την απόκριση $y(1,1)$ του μοντέλου, για μηδενικές οριακές συνθήκες και διάνυσμα εισόδου $u(i, j) = 2^{i+j}$ στο ορθογώνιο $[0,1] \times [0,1]$.

Αρχικά βρίσκουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $G(z_1, z_2)$:

$$G = G(z_1, z_2) = [Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc} -z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow G(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} -z_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ελέγχουμε αν η ορίζουσα του είναι διάφορη του μηδέν:

$$\Rightarrow \det[G(z_1, z_2)] = \det \begin{bmatrix} -z_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1 \neq 0$$

Άρα το μοντέλο έχει λύση. Έπειτα βρίσκουμε τον αντίστροφο πίνακα του $G(z_1, z_2)$ για να βρούμε τους θεμελιώδεις προς τα πίσω πίνακες.

$$G^{-1}(z_1, z_2) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{z_1 z_2^2 + z_2 + z_1}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{1 + z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_1 + z_1 z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} \\ \frac{-z_1 z_2^2 - z_1}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{-1 - z_2 z_1 - z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{-z_1 - z_1^2 z_2 - z_1 z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} \\ \frac{-1 - z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_1 + z_1 z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{-1 - z_1 z_2 - z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} \\ \frac{1}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_1}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_1^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} \\ \frac{z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_1 z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_1^2 z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} \\ \frac{z_2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_1 z_2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_1 z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} \\ \frac{1}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} \\ \frac{z_1^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_1^2 z_2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_1^2 z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} \\ \frac{z_1}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_1 z_2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_1 z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} \\ \frac{-z_1 - z_2 - z_1^2 z_2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{1 + z_1^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{-z_2 - z_1^2 z_2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} \\ \frac{z_2 + z_1^2 z_2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{-1 - z_1^2 - z_1 z_2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{z_2 + z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} \\ \frac{-1 - z_1^2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{-z_2 - z_1^2 z_2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} & \frac{-1 - z_1^2 - z_1 z_2}{-z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_2 z_1 - 1} \end{array} \right]$$

Με την βοήθεια τη εντολής Series στο Mathematica βρίσουμε το ανάπτυγμα του Laurent στο άπειρο:

$$G^{-1}(z_1, z_2) = \sum_{p=-n_1}^{\infty} \sum_{q=-n_2}^{\infty} T_{pq} z_1^{-p} z_2^{-q} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-z_2 + O[z_2]^2) + (-1 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 & (-1 + O[z_2]^2) + (z_2 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 \\ z_1 + O[z_1]^2 & 1 + O[z_1]^2 \\ 1 + (-z_2 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 & (-1 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 \\ (1 + O[z_2]^2) + (-z_2 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 & (-1 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 \\ O[z_2]^2 + O[z_2]^3 z_1 + O[z_1]^2 & O[z_2]^2 z_1 + O[z_1]^2 \\ (-z_2 + O[z_2]^2) + O[z_2]^2 z_1 + O[z_1]^2 & (z_2 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (-1 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 & (1 + O[z_2]^2) + (-z_2 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 \\ z_1 + O[z_1]^2 & O[z_1]^2 \\ 1 + O[z_1]^2 & (1 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 \\ O[z_1]^2 & (z_2 + O[z_2]^2) + (1 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 \\ O[z_1]^2 & (-z_2 + O[z_2]^2) + O[z_2]^2 z_1 + O[z_1]^2 \\ O[z_1]^2 & (1 + O[z_2]^2) + (-z_2 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (z_2 + O[z_2]^2) + O[z_2]^2 z_1 + O[z_1]^2 & O[z_2]^2 + O[z_2]^3 z_1 + O[z_1]^2 \\ O[z_1]^2 & O[z_1]^2 \\ (z_2 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 & O[z_2]^2 z_1 + O[z_1]^2 \\ (-1 + O[z_2]^2) + (z_2 + O[z_2]^2)z_1 + O[z_1]^2 & (z_2 + O[z_2]^2) + O[z_2]^2 z_1 + O[z_1]^2 \\ (1 + O[z_2]^2) + O[z_2]^2 z_1 + O[z_1]^2 & (-z_2 + O[z_2]^2) + O[z_2]^2 z_1 + O[z_1]^2 \\ (z_2 + O[z_2]^2) + O[z_2]^2 z_1 + O[z_1]^2 & (1 + O[z_2]^2) + O[z_2]^2 z_1 + O[z_1]^2 \end{bmatrix},$$

όπου $O[z_1]^2$ και $O[z_2]^2$ οι όροι δεύτερης και μεγαλύτερης τάξης των όρων z_1 και z_2 αντίστοιχα.

Τότε οι θεμελιώδεις προς τα πίσω πίνακες είναι :

$$T_{0,0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_{-1,0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 T_{-1,-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{0,-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 T_{1,-1} = T_{-1,1} = T_{1,0} = T_{0,1} = T_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από την (2.65α) η λύση του μοντέλου είναι:

$$\begin{aligned}
 x(1,1) &= T_{0,0}B_0u(1,1) + T_{0,-1}B_0u(1,2) + T_{-1,0}B_0u(2,1) + T_{-1,-1}B_0u(2,2) + \\
 &+ T_{1,0}B_1u(1,1) + T_{1,-1}B_1u(1,2) + T_{0,0}B_1u(2,1) + T_{0,-1}B_1u(2,2) + \\
 &+ T_{-1,0}B_1u(3,1) + T_{-1,-1}B_1u(3,2) + T_{0,1}B_2u(1,1) + T_{0,0}B_2u(1,2) + \\
 &+ T_{0,-1}B_2u(1,3) + T_{-1,1}B_2u(2,1) + T_{-1,0}B_2u(2,2) + T_{-1,-1}B_2u(2,3) + \\
 &+ T_{1,1}[A_1 \ B_1] \begin{bmatrix} x(1,0) \\ u(1,0) \end{bmatrix} + T_{0,1}[A_1 \ B_1] \begin{bmatrix} x(2,0) \\ u(2,0) \end{bmatrix} + T_{-1,1}[A_1 \ B_1] \begin{bmatrix} x(3,0) \\ u(3,0) \end{bmatrix} + \\
 &+ T_{0,1}[A_0 \ B_0] \begin{bmatrix} x(1,0) \\ u(1,0) \end{bmatrix} + T_{-1,1}[A_0 \ B_0] \begin{bmatrix} x(2,0) \\ u(2,0) \end{bmatrix} + T_{1,1}[A_2 \ B_2] \begin{bmatrix} x(0,1) \\ u(0,1) \end{bmatrix} + \\
 &+ T_{1,0}[A_2 \ B_2] \begin{bmatrix} x(0,2) \\ u(0,2) \end{bmatrix} + T_{-1,-1}[A_2 \ B_2] \begin{bmatrix} x(0,3) \\ u(0,3) \end{bmatrix} + T_{1,0}[A_0 \ B_0] \begin{bmatrix} x(0,1) \\ u(0,1) \end{bmatrix} + \\
 &+ T_{1,-1}[A_0 \ B_0] \begin{bmatrix} x(0,2) \\ u(0,2) \end{bmatrix} + T_{1,1}[A_0 \ B_0] \begin{bmatrix} x(0,0) \\ u(0,0) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x(1,1) = & T_{0,0}B_0u(1,1) + T_{0,-1}B_0u(1,2) + T_{-1,0}B_0u(2,1) + T_{-1,-1}B_0u(2,2) + T_{1,0}B_1u(1,1) + \\
 & + T_{1,-1}B_1u(1,2) + T_{0,0}B_1u(2,1) + T_{0,-1}B_1u(2,2) + T_{-1,0}B_1u(3,1) + T_{-1,-1}B_1u(3,2) + \\
 & + T_{0,1}B_2u(1,1) + T_{0,0}B_2u(1,2) + T_{0,-1}B_2u(1,3) + T_{-1,1}B_2u(2,1) + T_{-1,0}B_2u(2,2) + \\
 & + T_{-1,-1}B_2u(2,3) + T_{1,1}B_1u(1,0) + T_{0,1}B_1u(2,0) + T_{-1,1}B_1u(3,0) + T_{0,1}B_0u(1,0) + \\
 & + T_{-1,1}B_0u(2,0) + T_{1,1}B_2u(0,1) + T_{1,0}B_2u(0,2) + T_{1,-1}B_2u(0,3) + T_{1,0}B_0u(0,1) + \\
 & + T_{1,-1}B_0u(0,2) + T_{1,1}B_0u(0,0) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x(1,1) = & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^2 + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^3 + \\
 & + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^4 = \begin{bmatrix} 2e^3 \\ 0 \\ e^4 \\ e^4 - e^2 \\ 0 \\ e^3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Τότε η απόκριση του μοντέλου στο ορθογώνιο $[0,1] \times [0,1]$ δίνεται από την:

$$\begin{aligned}
 y(1,1) = & [0 \ 0 \ 0 \mid 1 \ 1 \ 0]x(1,1) + u(1,1) \Rightarrow \\
 & [0 \ 0 \ 0 \mid 1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 2e^3 \\ 0 \\ e^4 \\ e^4 - e^2 \\ 0 \\ e^3 \end{bmatrix} + e^2 = e^4. \quad \triangle
 \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟΠΙΚΗ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ, ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ, ΕΦΙΚΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο που ακολουθεί θα ασχοληθούμε με τις ιδιότητες των δισδιάστατων γραμμικών συστημάτων τόσο των μοντέλων του χώρου καταστάσεων, όσο και των γενικευμένων ιδιόμορφων μοντέλων. Ιδιότητες οι οποίες έχουν πολύ σημαντικές πρακτικές συνέπειες τόσο στην ανάλυση, αλλά και ειδικότερα στην σχεδίαση των σύγχρονων συστημάτων αυτόματου ελέγχου. Θα αναλύσουμε βασικές έννοιες, όπως η τοπική ελεγχσιμότητα (local controllability), η τοπική παρατηρησιμότητα (local observability), η τοπική εφικτότητα (local reachability) και η τοπική ανακατασκευασιμότητα (local reconstructibility), και θα ορίσουμε αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τις έννοιες αυτές για το κάθε μοντέλο. Θα παρατηρήσουμε ότι όπως και στα μονοδιάστατα συστήματα έτσι και στα δισδιάστατα συστήματα υπάρχει δυαδικότητα μεταξύ των εννοιών της τοπικής ελεγχσιμότητας και παρατηρησιμότητας επομένως για κάθε θεώρημα και λήμμα που αφορά την ελεγχσιμότητα του συστήματος υπάρχει ένα αντίστοιχο θεώρημα που αφορά την παρατηρησιμότητα. Δυαδικότητα η οποία επεκτείνεται και ανάμεσα στην τοπική εφικτότητα και αναδομησιμότητα όπως θα δούμε για τα ιδιόμορφα μοντέλα.

3.2 Ιδιότητες των δισδιάστατων μοντέλων χώρου καταστάσεων

3.2.1 Τοπική ελεγχσιμότητα και παρατηρησιμότητα του Roeser Μοντέλου στο χώρο καταστάσεων

Η έννοια της ελεγχσιμότητας όπως είδαμε στα μονοδιάστατα συστήματα αναφέρεται ουσιαστικά στο ερώτημα του κατά πόσο είναι εφικτό να ελέγξουμε ή να

κατευθύνουμε την κατάσταση x με τη βοήθεια της εισόδου u . Η έννοια αυτή επεκτείνεται στα δισδιάστατα μοντέλα.

Το Roesser μοντέλο στο χώρο καταστάσεων όπως είδαμε στο κεφάλαιο 1 περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (3.1\alpha)$$

$$y(i, j) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j) \quad (3.1\beta)$$

και τις οριακές συνθήκες:

$$x^h(0, j), x^v(i, 0) \quad \text{για } i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1\gamma)$$

Καταρχήν ας ορίσουμε τον χώρο ενδιαφέροντος στον οποίον εφαρμόζονται και οι ιδιότητες των δισδιάστατων μοντέλων.

Ορισμός 3.1

Για $(h, k) < (r, p)$ το ορθογώνιο $[h, k] \times [r, p]$ ορίζεται ως εξής:

$$[h, k] \times [r, p] = \{(i, j) \in Z \times Z, (h, k) \leq (i, j) \leq (r, p)\}. \quad (3.2)$$

Ορισμός 3.2

Το Roesser μοντέλο στο χώρο καταστάσεων είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0, 0] \times [h, k]$, αν και μόνο αν για οριακές συνθήκες $x^h(0, j)$, $x^v(i, 0)$, για $i \in [0, h]$ και $j \in [0, k]$ και κάθε διάνυσμα $s \in R^n$ ($n = n_1 + n_2$), υπάρχει ακολουθία εισόδων $u(i, j)$, $(0, 0) \leq (i, j) \leq (h, k)$ έτσι ώστε να ισχύει $x(h, k) = s$.

Θεώρημα 3.1

Το Roesser μοντέλο στο χώρο καταστάσεων είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0, 0] \times [h, k]$, όπως ορίστηκε στην (3.2), αν και μόνο αν ισχύει:

$$\text{rank} [C(h, k)] = n, \quad (3.3)$$

όπου $C(h, k)$ είναι ο πίνακας ελεγχιμότητας και ορίζεται:

$$[C(h, k)] = [M(0, 1) \quad M(1, 0) \quad \dots \quad M(i, j) \quad \dots \quad M(h, k)] \quad (3.4\alpha)$$

και

$$M(i, j) = A^{i-1, j} B^{1,0} + A^{i, j-1} B^{0,1} . \quad (3.4\beta)$$

Απόδειξη:

Γνωρίζοντας ότι η λύση ενός Roesser Μοντέλου δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} &= \sum_{k_1=0}^i A^{i-k_1, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^j A^{i, j-k_2} \begin{bmatrix} x^{h(0, k_2)} \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i, j)} \left[A^{i-k_1-1, j-k_2} B^{1,0} + A^{i-k_1, j-k_2-1} B^{0,1} \right] u(k_1, k_2) \end{aligned}$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιθυμητή τελική κατάσταση είναι $x(h, k) = s$, μπορούμε να γράψουμε την λύση ως εξής :

$$\begin{aligned} s - \sum_{i=0}^h A^{h-i, k} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(i, 0) \end{bmatrix} - \sum_{j=0}^k A^{h, k-j} \begin{bmatrix} x^{h(0, j)} \\ 0 \end{bmatrix} &= \sum_{(0,0) \leq (i, j) < (h, k)} M(h-i, k-j) u(i, j) = \\ &= \begin{bmatrix} M(0,1) & M(1,0) & \cdots & M(i, j) & \cdots & M(h, k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(h, k-1) \\ u(h-1, k) \\ \vdots \\ u(h-i, k-j) \\ \cdots \\ u(0,0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της τοπικής ελεγχιμότητας παρατηρούμε ότι το Roesser Μοντέλο είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h, k]$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι συνθήκες (3.3). ▲

Θεώρημα 3.2

Το Roesser μοντέλο είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h, k]$ αν και μόνο ο πίνακας

$$W(h, k) = C(h, k) C^T(h, k) \quad (3.5)$$

είναι θετικά ορισμένος.

Απόδειξη:

Ας ορίσουμε το διάνυσμα

$$v = C^T(h, k)r, \quad r \in R^n$$

Τότε

$$\|v\|^2 = v^T v = r^T C(h, k) C^T(h, k) r = r^T W(h, k) r$$

Παρατηρούμε ότι ο $W(h, k)$ είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν ικανοποιείται η συνθήκη $: rank[C(h, k)] = n$, που όπως αποδείξαμε στο πιο πάνω Θεώρημα εξασφαλίζει και την τοπική ελεγχιμότητα του μοντέλου μας στο ορθογώνιο $[0, 0] \times [h, k]$. Επομένως αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι το RM τοπικά ελέγξιμο, στο ορθογώνιο $[0, 0] \times [h, k]$, είναι ο πίνακας $W(h, k)$, είναι θετικά ορισμένος. ▲

Παρατήρηση 3.1.

Από το Θεώρημα A1 (βλέπε Παράρτημα) προκύπτει ότι το Roesser μοντέλο είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0, 0] \times [h, k]$, $(h, k) > (n_1, n_2)$, μόνο εάν το μοντέλο μας είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0, 0] \times [n_1, n_2]$. ▲

Παράδειγμα 3.1

Παίρνουμε το Roesser μοντέλο της μορφής του χώρου καταστάσεων από την εφαρμογή του Κεφαλαίου 1 με πίνακες $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ και θέλουμε να δούμε αν στο ορθογώνιο $[0, 0] \times [1, 1]$ είναι τοπικά ελέγξιμο το μοντέλο μας.

Υπολογίζουμε τους πίνακες:

$$M(0, 1) = A^{-1,1} B^{1,0} + A^{0,0} B^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$M(1, 0) = A^{0,0} B^{1,0} + A^{1,-1} B^{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M(1,1) = A^{0,1}B^{1,0} + A^{1,0}B^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M(1,1) = A^{0,1}B^{1,0} + A^{1,0}B^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από την (3.4α) βρίσκουμε τον πίνακα $C(1,1)$,

$$[C(1,1)] = [M(0,1) \quad M(1,0) \quad M(1,1)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε την τάξη του πίνακα: $rank[C(1,1)] = 2$

Και παρατηρούμε ότι ο πίνακας έχει πλήρη τάξη συνεπώς η συνθήκη (3.3) ικανοποιείται και το μοντέλο μας είναι τοπικά ελέγξιμο.

Η ελεγχσιμότητα του μοντέλου μας σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2 ελέγχεται και με την ακόλουθη διαδικασία:

$$W(1,1) = C(1,1)C^T(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $W(1,1)$ είναι θετικά ορισμένος τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2 το μοντέλο μας είναι τοπικά ελέγξιμο. △

3.2.2 Τοπική παρατηρησιμότητα (Local Observability) του Roesser Μοντέλου στο χώρο καταστάσεων

Η έννοια της παρατηρησιμότητας, αποτελεί την συμπληρωματική έννοια της ελεγχσιμότητας. Στα μονοδιάστατα συστήματα πραγματεύεται το ερώτημα του κατά πόσο είναι εφικτό να προσδιοριστούν τα n στο πλήθος στοιχεία του διανύσματος κατάστασης x με την μέτρηση της εξόδου y κατά τη διάρκεια ενός πεπερασμένου χρονικού διαστήματος.

Ορισμός 3.3

Το Roesser μοντέλο είναι τοπικά παρατηρήσιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h,k]$, αν και μόνο αν δεν υπάρχει αρχικό διάνυσμα κατάστασης $x(0,0) \neq 0$, έτσι ώστε για

μηδενικές εισόδους $u(i, j) = 0$, για $(0,0) \leq (i, j) \leq (h, k)$ και μηδενικές οριακές συνθήκες $x^h(0, j) = 0$, $x^v(i, 0) = 0$ για $j \in [1, k]$, $i \in [1, h]$, το διάνυσμα εξόδου να είναι και αυτό μηδέν $y(i, j) = 0$, για $(0,0) \leq (i, j) \leq (h, k)$.

Θεώρημα 3.3

Το Roesser μοντέλο είναι τοπικά παρατηρήσιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h, k]$ αν και μόνο αν ο πίνακας παρατηρησιμότητας $O(h, k)$ έχει πλήρη τάξη γραμμών:

$$\text{rank} [O(h, k)] = n, \quad (3.6)$$

$$\text{όπου } [O(h, k)] = \begin{bmatrix} C \\ CA^{1,0} \\ CA^{0,1} \\ \vdots \\ CA^{i,j} \\ \vdots \\ CA^{h,k} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Απόδειξη:

Εφαρμόζουμε μηδενική είσοδο $u(i, j) = 0$, $(0,0) \leq (i, j) \leq (h, k)$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες $x^h(0, j) = 0$, για $j \in [1, k]$ και $x^v(i, 0) = 0$, για $i \in [1, h]$ στο μοντέλο μας. Από την απόκριση του μοντέλου μας που δίνεται από την σχέση:

$$y(i, j) = [C_1 \quad C_2] \left\{ \sum_{k_1=0}^i A^{i-k_1, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_1=0}^i A^{i, j-k_1} \begin{bmatrix} x^{h(0, k_2)} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) \leq (i, j)} \left[A^{i-k_1-1, j-k_2} B^{1,0} + A^{i-k_1, j-k_2-1} B^{0,1} \right] u(k_1, k_2) \Big\} + Du(i, j)$$

έχουμε:

$$y(i, j) = CA^{i,j} x(0,0), \quad \text{για } i, j \geq 0 \quad (3.8)$$

Αν $y(i, j) = 0$, για $(0,0) \leq (i, j) \leq (h, k)$, η (3.8) μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$O(h, k) x(0,0) = 0 \quad (3.9)$$

Στην περίπτωση ο πίνακας παρατηρησιμότητας $O(h, k)$ έχει πλήρη τάξη γραμμών, από την (3.9) συνεπάγεται ότι το διάνυσμα αρχικής κατάστασης είναι μηδέν, έτσι το μοντέλο μας είναι παρατηρήσιμο. Αντίθετα αν ο πίνακας παρατηρησιμότητας

$O(h,k)$ δεν έχει πλήρη τάξη γραμμών, δηλαδή $\text{rank}[O(h,k)] < n$, τότε για να ισχύει η (3.9) πρέπει να υπάρχει διάνυσμα κατάστασης διάφορο του μηδέν ($x(0,0) \neq 0$), έτσι το μοντέλο είναι μη παρατηρήσιμο. ▲

Θεώρημα 3.4

Το Roesser μοντέλο είναι τοπικά παρατηρήσιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h,k]$ αν και μόνο ο πίνακας

$$V(h,k) = O^T(h,k)O(h,k) \quad (3.10)$$

είναι θετικά ορισμένος.

Απόδειξη:

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του Θεωρήματος 3.2:

Ας ορίσουμε το διάνυσμα

$$v' = O(h,k)r, \quad r \in R^n$$

τότε

$$\|v'\|^2 = (v')^T v' = r^T O^T(h,k)O(h,k)r = r^T V(h,k)r$$

Παρατηρούμε ότι ο $V(h,k)$ είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν ικανοποιείται η συνθήκη: $\text{rank}[O(h,k)] = n$, που όπως αποδείξαμε στο πιο πάνω Θεώρημα εξασφαλίζει και την τοπική ελεγχιμότητα του μοντέλου μας στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h,k]$. ▲

Παρατήρηση 3.2.

Από το Θεώρημα A1 (βλέπε Παράρτημα) προκύπτει ότι το Roesser Μοντέλο είναι τοπικά παρατηρήσιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h,k]$, για $(h,k) > (n_1, n_2)$, μόνο εάν το μοντέλο μας είναι τοπικά παρατηρήσιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [n_1, n_2]$. ▲

Παράδειγμα 3.2

Να βρούμε αν το Roesser μοντέλο του παραδείγματος 3.1, είναι παρατηρήσιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [1,1]$.

Θεωρούμε $C = [C_1 \ C_2] = [1 \ 1]$

$$CA^{1,0} = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 1], \quad CA^{0,1} = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} = [0.5 \ 0.4],$$

$$CA^{1,1} = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = [0.5 \ 0.9]$$

Τότε:

$$[O(1,1)] = \begin{bmatrix} C \\ CA^{1,0} \\ CA^{0,1} \\ CA^{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 0.9 \end{bmatrix}, \text{ είναι προφανές ότι η τάξη του πίνακα } O(1,1) \text{ είναι}$$

2, τότε η συνθήκη (3,7) ικανοποιείται με αποτέλεσμα τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3 το μοντέλο μας είναι τοπικά παρατηρήσιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [1,1]$.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ο πίνακας

$$V(1,1) = O^T(1,1)O(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0.9 & 1.4 \\ 1 & 1 & 0.4 & 0.9 \\ 0.9 & 0.4 & 0.41 & 0.61 \\ 1.4 & 0.9 & 0.61 & 1.06 \end{bmatrix},$$

είναι θετικά ορισμένος, συνεπώς και το μοντέλο μας παρατηρήσιμο σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4. △

3.2.3 Τοπική ελεγχιμότητα στο Fornasini-Marchesini I Μοντέλο

Θεωρούμε το F-MM I όπως περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\hat{x}(i+1, j+1) = \hat{A}_0 \hat{x}(i, j) + \hat{A}_1 \hat{x}(i+1, j) + \hat{A}_2 \hat{x}(i, j+1) + \hat{B}u(i, j) \quad (3.11a)$$

$$y(i, j) = \hat{C} \hat{x}(i, j) \quad (i, j \geq 0) \quad (3.11b)$$

Ορισμός 3.4:

Το F-MM I είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h,k]$ αν και μόνο αν για κάθε σύνολο οριακών συνθηκών $x(i,0)$ με $i \in [0,h]$ και $x(0,j)$ για $j \in [0,k]$ και κάθε διάνυσμα $x_f \in R^n$, υπάρχει ακολουθία εισόδων $u(i,j)$, $(0,0) \leq (i,j) \leq (h,k)$ έτσι ώστε $x(h,k) = x_f$.

Θεώρημα 3.5

Το F-MM I είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h,k]$ αν και μόνο αν ισχύει:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & A_{21}^{1,0} B & A_{21}^{0,1} B & \dots & A_{21}^{h-2,k} B & A_{21}^{h-1,k} B \end{bmatrix} = n, \quad (3.12)$$

όπου

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{i,j} & A_{12}^{i,j} \\ A_{21}^{i,j} & A_{22}^{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & A_0 + A_2 A_1 \\ I_n & A_1 \end{bmatrix}^{i,j}$$

Απόδειξη:

Γνωρίζοντας ότι η λύση ενός F-MM I δίνεται από τον τύπο:

$$x(i,j) = \sum_{k=0}^i A_{22}^{i-k,j} x(k,0) + \sum_{l=0}^j A_{21}^{i,j-1} \left[x(0,l+1) - \widehat{A}_1 x(0,l) \right] + \sum_{(0,0) \leq (k,l) < (i,j)} A_{21}^{i-k-1,j-l} \widehat{B} u(k,l)$$

για $(i,j) \geq (0,0)$,

όπου

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{k,l} & A_{12}^{k,l} \\ A_{21}^{k,l} & A_{22}^{k,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_2 & \widehat{A}_0 + \widehat{A}_2 \widehat{A}_1 \\ I_n & \widehat{A}_1 \end{bmatrix}^{k,l} = A^{k,l} \quad (3.13)$$

Και λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιθυμητή τελική κατάσταση είναι $x(h,k) = x_f$ μπορούμε να γράψουμε την λύση στην μορφή

$$x_f - \sum_{i=0}^h A^{h-i,k} x(i,0) - \sum_{j=0}^k A^{h,k-j} x(0,j+1) - A_1 x(0,j) = \sum_{(0,0) \leq (i,j) < (h,k)} A_{21}^{h-i-1,k-j} B u(i,j) =$$

$$= \begin{bmatrix} B & A^{1,0} B & A^{0,1} B & \dots & A^{h-2,k} B & A^{h-1,k} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(h,k-1) \\ u(h-1,k) \\ \vdots \\ u(h-i,k-j) \\ \dots \\ u(0,0) \end{bmatrix}$$

Από τον ορισμό της τοπικής ελεγχιμότητας παρατηρούμε ότι το F-MM I είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h,k]$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι συνθήκες (3.12). ▲

Παρατήρηση 3.3

Με παρόμοιο τρόπο όπως στο RM, μπορούμε να δείξουμε ότι στο F-MM II ο πίνακας μεταφοράς $A^{i,j}$, με το $i+j \geq n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $A^{i,j}$ με $i+j \leq n$. Από αυτό προκύπτει ότι το F-MM II είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h,k]$, για $h+k \geq n$, μόνο ένα το μοντέλο μας είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [\bar{h}, \bar{k}]$, για $\bar{h} + \bar{k} < n$. ▲

Παράδειγμα 3.3

Έστω το F-MM I

$$\hat{x}(i+1, j+1) = \hat{A}_0 \hat{x}(i, j) + \hat{A}_1 \hat{x}(i+1, j) + \hat{A}_2 \hat{x}(i, j+1) + \hat{B}u(i, j)$$

με
$$\hat{A}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Να ελέγξουμε αν στο ορθογώνιο $[0,0] \times [2,2]$ είναι τοπικά ελέγξιμο.

Οι πίνακες μετάβασης υπολογίζονται από την σχέση:

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{i,j} & A_{12}^{i,j} \\ A_{21}^{i,j} & A_{22}^{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & A_0 + A_2 A_1 \\ I_n & A_1 \end{pmatrix}^{i,j} = A^{i,j}$$

τότε
$$A^{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{i,j}$$

$$A^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ τότε } A_{21}^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ τότε } A_{21}^{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{1,1} = A^{1,0} A^{0,1} A^{0,1} A^{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ τότε } A_{21}^{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Τότε

$$\begin{bmatrix} B & A_{21}^{1,0} B & A_{21}^{0,1} B & A_{21}^{1,1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ παρατηρούμε ότι ο πίνακας έχει πλήρη}$$

τάξη, από το Θεώρημα 3.5 συνεπάγεται η ελεγχσιμότητα για το F-MM I. \triangle

3.2.4 Τοπική ελεγχσιμότητα στο Fornasini-Marchesini II Μοντέλο

Θεωρούμε το F-MM II που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x(i+1, j+1) = A_1 x(i, j+1) + A_2 x(i+1, j) + B_1 u(i, j+1) + B_2 u(i+1, j) \quad (3.14\alpha)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j) \quad (i, j \geq 0) \quad (3.14\beta)$$

Ορισμός 3.5

Το F-MM I είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h,k]$, αν και μόνο αν για κάθε οριακές συνθήκες $x(i,0)$ $x(0,j)$, για $i \in [0,h]$ και $j \in [0,k]$ και κάθε διάνυσμα $x_f \in R^n$, υπάρχει ακολουθία εισόδων $u(i,j)$, $(0,0) \leq (i,j) \leq (h,k)$ έτσι ώστε $x(h,k) = x_f$. \blacktriangle

Θεώρημα 3.6

Το F-MM II είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h,k]$ αν και μόνο αν ισχύει:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & A^{1,0}B_1 & A^{0,1}B_2 & \dots & A^{h-1,k}B_1 + A^{h,k-1}B_2 \end{bmatrix} = n. \quad (3.15)$$

Απόδειξη:

Η λύση του F-MM II δίνεται από την σχέση:

$$x(i, j) = \sum_{k=0}^i A_{22}^{i-k,j} x(k, 0) + \sum_{l=0}^j A_{21}^{i,j-1} \left[x(0, l+1) - \widehat{A}_1 x(0, l) \right] + \sum_{(0,0) \leq (k,l) < (i,j)} A_{21}^{i-k-1,j-l} \widehat{B}u(k, l)$$

για $(i, j) \geq (0, 0)$,

όπου
$$A^{i,j} = A_1 A^{i-1,j} + A_2 A^{i,j-1}$$

Επειδή η επιθυμητή τελική κατάσταση είναι $x(h, k) = x_f$ μπορούμε να γράψουμε την λύση ως:

$$\begin{aligned} x_f - \sum_{i=0}^{h-1} A^{i,k} x(h-i, 0) - \sum_{j=0}^{k-1} A^{h,j} x(0, k-j) &= \\ = \sum_{(0,0) \leq (i,j) < (h,k)} \left[A^{i-1,j} B_1 + A^{i,j-1} B_2 \right] u(h-i, k-j) &= \\ = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & A^{1,0}B_1 & A^{0,1}B_2 & \dots & A^{h-1,k}B_1 + A^{h,k-1}B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(h-1, k) \\ u(h, k-1) \\ u(h-2, k) \\ u(h, k-2) \\ \dots \\ u(0, 0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της τοπικής ελεγχιμότητας παρατηρούμε ότι το F-MM II είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h,k]$ αν και μόνο αν ικανοποιείται η συνθήκη (3.15). ▲

Παράδειγμα 3.4

Έστω το F-MM II:

$$x(i+1, j+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x(i, j+1) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(i+1, j) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(i+1, j) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(i, j+1)$$

$$\text{με } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

είναι ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [2,2]$

$$A^{1,0} = [A_1]^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A^{0,1} = [A_2]^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^{1,1} = A_1 A^{0,1} + A_2 A^{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{0,2} = A_1 A^{-1,2} + A_2 A^{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{2,0} = A_1 A^{1,0} + A_2 A^{2,-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{1,2} = A_1 A^{0,2} + A_2 A^{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{2,1} = A_1 A^{1,1} + A_2 A^{2,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}$$

Από το Θεώρημα 3.6 έχουμε:

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & A^{1,0}B_1 & A^{0,1}B_2 & A^{0,2}B_1 & A^{2,0}B_2 & A^{1,2}B_1 & A^{2,1}B_2 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 5 & -14 & 14 \end{bmatrix}$$

Ελέγχουμε αν ο πίνακας μας έχει πλήρη τάξη.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & A^{1,0}B_1 & A^{0,1}B_2 & A^{0,2}B_1 & A^{2,0}B_2 & A^{1,2}B_1 & A^{2,1}B_2 \end{bmatrix} = 2.$$

Τότε το μοντέλο μας είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [2,2]$. \triangle

3.2.5 Τοπική παρατηρησιμότητα (Local Observability) στο Fornasini-Marchesini Μοντέλο I

Ορισμός 3.6

Το F-MM I είναι τοπικά παρατηρήσιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h,k]$, αν και μόνο αν δεν υπάρχει τοπικό αρχικό διάνυσμα κατάστασης $x(0,0) \neq 0$ έτσι ώστε για μηδενικές εισόδους $u(i,j) = 0$, για $(0,0) \leq (i,j) \leq (h,k)$ και μηδενικές οριακές συνθήκες

$x(0, j) = 0$, για $j \in [1, k]$ και $x(i, 0) = 0$, για $i \in [1, h]$, διάνυσμα εξόδου να είναι και αυτό μηδέν $y(i, j) = 0$, για $(0, 0) \leq (i, j) \leq (h, k)$.

Θεώρημα 3.7

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το F-MM I τοπικά παρατηρήσιμο στο ορθογώνιο $[0, 0] \times [h, k]$ είναι :

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA^{1,0} \\ CA^{0,1} \\ \vdots \\ CA^{i,j} \\ \vdots \\ CA^{h,k} \end{bmatrix} = n, \quad (3.16)$$

Απόδειξη:

Εφαρμόζουμε για

$$u(i, j) = 0, \text{ για } (0, 0) \leq (i, j) \leq (h, k)$$

και $x(0, j) = 0$, για $j \in [1, k]$, $x(i, 0) = 0$, για $i \in [1, h]$,

από το Θεώρημα 1.6 το διάνυσμα κατάσταση του F-MM I δίνεται από την:

$$x(i, j) = A^{i,j} x(0, 0) \quad (3.17)$$

Αντικαθιστώντας την (3.17) στην γενική απόκριση του F-MM I παίρνουμε:

$$y(i, j) = CA^{i,j} x(0, 0), \text{ για } (0, 0) \leq (i, j) \leq (h, k) \quad (3.18)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η έξοδος του F-MM I είναι μηδέν, δηλ $y(i, j) = 0$, για $(0, 0) \leq (i, j) \leq (h, k)$, η πιο πάνω σχέση μπορεί να γραφτεί σαν:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA^{1,0} \\ CA^{0,1} \\ \vdots \\ CA^{i,j} \\ \vdots \\ CA^{h,k} \end{bmatrix} x(0, 0) = 0 \quad (3.19)$$

Στην περίπτωση που ισχύει η (3.16) τότε από την (3.19) προκύπτει ότι $x(0, 0) = 0$.

Αντίθετα αν:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA^{1,0} \\ CA^{0,1} \\ \vdots \\ CA^{i,j} \\ \vdots \\ CA^{h,k} \end{bmatrix} < n, \quad (3.20)$$

τότε για να ισχύει η (3.19) πρέπει να υπάρχει διάνυσμα κατάστασης $x(0,0) \neq 0$. ▲

Παρατήρηση 3.4.

Από τη στιγμή που ο πίνακας μετάβασης $A^{i,j}$, με $i+j \geq n$, είναι γραμμικός συνδυασμός του $A^{i,j}$, με $i+j \leq n$, προκύπτει ότι το F-MM II είναι τοπικά παρατηρήσιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [h,k]$, για $h+k \geq n$, μόνο τότε το μοντέλο μας είναι τοπικά παρατηρήσιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [\bar{h}, \bar{k}]$, για $\bar{h} + \bar{k} < n$. ▲

Παράδειγμα 3.5

Να ελέγξουμε αν το F-MM I του παραδείγματος 3.4 με πίνακες:

$$\text{με } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0]$$

είναι τοπικά παρατηρήσιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [1,1]$.

Υπολογίζουμε τους πίνακες:

$$CA^{1,0} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0], \quad CA^{0,1} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [1 \ -1],$$

$$CA^{1,1} = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = [6 \ 0] \quad \begin{bmatrix} C \\ CA^{1,0} \\ CA^{0,1} \\ CA^{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix},$$

παρατηρούμε ότι η τάξη του πίνακα ελεγχιμότητας είναι 2, τότε η συνθήκη (3.16) ικανοποιείται με αποτέλεσμα το μοντέλο μας είναι τοπικά παρατηρήσιμο στο ορθογώνιο $[0,0] \times [1,1]$.

△

3.3 Ιδιότητες των διδιάστατων γενικευμένων ιδιόμορφων μοντέλων

Στην παράγραφο που ακολουθεί θα παρουσιάσουμε τις έννοιες της ελεγχιμότητας και εφικτότητας και αναδομησιμότητας στα γενικευμένα ιδιόμορφα μοντέλα. Θα ορίσουμε αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την τοπική ελεγχιμότητα, εφικτότητα, αναδομησιμότητα ενός γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου, χωρίς να χρειάζεται ο υπολογισμός των θεμελιωδών πινάκων που είναι χρονοβόρος.

3.4.1 Τοπική ελεγχιμότητα του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου (Local Controllability)

Θεωρούμε το γενικευμένο ιδιόμορφο

μοντέλο (GSM) το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$$Ex(i+1, j+1) = A_0x(i, j) + A_1x(i+1, j) + A_2x(i, j+1) + B_0u(i, j) + B_1u(i+1, j) + B_2u(i, j+1) \quad (3.21\alpha)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j) \quad (3.21\beta)$$

Με επιτρεπτές οριακές συνθήκες:

$$x(i, 0) = x_{i0} \text{ και } x(0, j) = x_{0j} \quad \text{για } i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

Ορισμός 3.7

Το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο (GSM) (3.21) είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0, h] \times [0, k]$ αν για κάθε σύνολο αποδεκτών οριακών συνθηκών, υπάρχει ακολουθία διανυσμάτων εισόδου $u(i, j)$, για $(0, 0) \leq (i, j) < (h + n_1 + 1, k + n_2 + 1)$ τέτοια ώστε το διάνυσμα κατάστασης $x(h, k) = 0$. ▲

Αν εφαρμόσουμε τον 2-D μετασχηματισμό z στο ιδιόμορφο μοντέλο (3.21)

$Z(Ex(i+1, j+1)) = Z(A_0x(i, j) + A_1x(i+1, j) + A_2x(i, j+1) + B_0u(i, j) + B_1u(i+1, j) + B_2u(i, j+1))$
για $x(0, 0) \neq 0$ και οριακές συνθήκες $x(i, 0) = 0$ και $x(0, j) = 0$ για $i, j > 0$ τότε:

$$\begin{aligned}
 & \left[E - A_0 z_1^{-1} z_2^{-1} - A_1 z_2^{-1} - A_2 z_1^{-1} \right] X = \\
 & = \left[B_0 z_1^{-1} z_2^{-1} + B_1 z_2^{-1} + B_2 z_1^{-1}, -B_1 z_2^{-1}, B_2 z_1^{-1} \right] \begin{bmatrix} U(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\ U(0, z_2^{-1}) \\ U(z_1^{-1}, 0) \end{bmatrix} - Ex(0,0) \Leftrightarrow \\
 & \bar{G}X = \bar{H}\bar{U} - Ex(0,0) \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
 \bar{G} &= \bar{G}(d_1, d_2) = [E - A_0 d_1 d_2 - A_1 d_2 - A_2 d_1] \\
 \bar{H} &= \bar{H}(d_1, d_2) = [B_0 d_1 d_2 + B_1 d_2 + B_2 d_1, -B_1 d_2, B_2 d_1] \\
 \bar{U} &= \bar{U}(d_1, d_2) = \begin{bmatrix} U(d_1, d_2) \\ U(0, d_2) \\ U(d_1, 0) \end{bmatrix}, \text{ και } d_1 = z_1^{-1}, \quad d_2 = z_2^{-1}
 \end{aligned}$$

όπου $X(d_1, d_2)$, $U(d_1, d_2)$, $U(d_1, 0)$, $U(0, d_2)$, $X(z_1, 0)$, $X(0, z_2)$ είναι αντίστοιχα οι 2-D μετασχηματισμοί-z των συναρτήσεων $x(i, j)$, $u(i, j)$, $u(i, 0)$, $u(0, j)$, $x(i, 0)$ και $x(0, j)$.

Τότε η τοπική ελεγχιμότητα μπορεί να οριστεί και ως εξής:

Ορισμός 3.8

Το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο είναι τοπικά ελέγξιμο, αν για κάθε $x(0,0)$, υπάρχει πολυωνυμικό διάνυσμα \bar{U} , έτσι ώστε το

$$X = \bar{G}^{-1}(\bar{H}\bar{U} - Ex(0,0)) \tag{3.24}$$

να είναι πολυωνυμικό διάνυσμα. ▲

Θεώρημα 3.8

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- 1) Το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο είναι τοπικά ελέγξιμο.
- (2) Υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $\bar{P} = \bar{P}(d_1, d_2)$, $\bar{Q} = \bar{Q}(d_1, d_2)$ έτσι ώστε:

$$\overline{GP} + \overline{HQ} = E \quad (3.25)$$

$$(3) \quad \text{rank} \left[\overline{G}, \overline{H}' \right] = \text{rank} E, \quad \forall d_1, d_2 \in C, \quad d_1 = z_1^{-1}, \quad d_2 = z_2^{-1} \quad (3.26)$$

όπου
$$H' = H'(d_1, d_2) = [B_0 d_1 d_2, B_1 d_2, B_2 d_1].$$

Απόδειξη:

(2)→(1) Έστω ότι ισχύει η (3.25) και ότι επιπλέον:

$$\overline{U} = \overline{Q}x(0,0) \quad (3.27)$$

Αντικαθιστώντας την (3.27) στην εξίσωση (3.24) και χρησιμοποιώντας την (3.25), η

$$(3.24) \text{ γίνεται: } X = \overline{G}^{-1} \left[(\overline{HQ} - E)x(0,0) \right] = -\overline{P}x(0,0)$$

Επομένως το X είναι όντως ένα πολυωνυμικό διάνυσμα και βάσει του Ορισμού 3.8 το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο είναι τοπικά ελέγξιμο.

(1) → (2) Ας θεωρήσουμε δεδομένη την πρόταση (1), δηλαδή ότι το GSM είναι τοπικά ελέγξιμο, τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 3.8 υπάρχει ένα πολυωνυμικό διάνυσμα \overline{U} έτσι ώστε το X, το οποίο δίνεται από την εξίσωση (3.24), να είναι πολυωνυμικό διάνυσμα. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x(0,0) \neq 0$ υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες \overline{P} , \overline{Q} έτσι ώστε:

$$\overline{U} = \overline{Q}x(0,0) \quad \text{και} \quad X = -\overline{P}x(0,0) \quad (3.28)$$

Αντικαθιστώντας την (3.28), στην (3.23), αυτή γίνεται:

$$(\overline{GP} + \overline{HQ} - \overline{E})x(0,0) = 0 \quad (3.29)$$

Τότε από την (3.29) προκύπτει η (3.25) φτάνει να ικανοποιείται για κάθε διάνυσμα κατάστασης $x(0,0)$.

(2) → (3) Γράφουμε την (3.25) στην μορφή:

$$\left[\overline{G} \quad \overline{H} \right] \begin{bmatrix} \overline{P} \\ \overline{Q} \end{bmatrix} = E \quad (3.30)$$

Από την σχέση (3.30) φαίνεται ότι από την (3.25) συνεπάγεται η (3.26).

(3) \rightarrow (2) Αν ισχύει η (3.26), τότε υπάρχουν οι πολυωνυμικοί πίνακες \bar{P} , \bar{Q} , που με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών, ικανοποιείται η (3.25). \blacktriangle

Παρατήρηση 3.5.

Από την σχέση (3.24) προκύπτει ότι αν ο πίνακας \bar{G} είναι unimodular και αν ο πίνακας $L\bar{G}^{-1}$ είναι πολυωνυμικός πίνακας, τότε για κάθε $x(0,0)$ τα \bar{H} , X είναι πολυωνυμικά διανύσματα για κάθε πολώνυμο \bar{U} . Γενικά το διάνυσμα X δεν είναι ένα πολυωνυμικό διάνυσμα για κάθε $x(0,0)$. \blacktriangle

Παρατήρηση 3.6.

Η ακολουθία διανυσμάτων εισόδου $u(i, j)$ η οποία μεταφέρει το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο από την αρχική κατάσταση $x(0,0)$ στο μηδέν, μπορεί να βρεθεί από την σχέση (3.27). Ο πίνακας \bar{Q} μπορεί να υπολογιστεί από την πραγματοποίηση ικανών στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών του πίνακα $\begin{bmatrix} \bar{G} & \bar{H} \end{bmatrix}$. \blacktriangle

Θεώρημα 3.9

Το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0, h] \times [0, k]$ αν και μόνο αν ισχύει

$$\text{rank} R_{hk} = \text{rank} \begin{bmatrix} R_{hk} & P_{hk} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

όπου

$$R_{hk} = \begin{bmatrix} M_0, M_1^1, \dots, M_{\bar{h}}^1, M_1^2, \dots, M_{\bar{k}}^2, M_{11}, \dots, M_{1\bar{k}}, M_{21}, \dots, M_{\bar{h}\bar{k}} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$M_0 = T_{h,k} B_0,$$

$$M_p^1 = T_{h-p,k} B_0 + T_{h-p+1,k} B_1 \quad p = 1, \dots, \bar{h} \text{ και } \bar{h} = h + n_1 + 1$$

$$M_q^2 = T_{h,k-q} B_0 + T_{h,k-q+1} B_2, \quad q = 1, \dots, \bar{k} \text{ και } \bar{k} = k + n_2 + 1$$

$$M_{pq} = T_{h-p,k-q} B_0 + T_{h-p+1,k-q} B_1 + T_{h-p,k-q+1} B_2 \quad p = 1, \dots, \bar{h} \text{ και } q = 1, \dots, \bar{k}$$

$$P_{hk} = \begin{bmatrix} P_0, P_1^1, \dots, P_{\bar{h}}^1, P_1^2, \dots, P_{\bar{k}}^2 \end{bmatrix}, \quad P_0 = T_{h,k} A_0,$$

$$P_p^1 = T_{h-p,k} A_0 + T_{h-p+1,k} A_1 \quad \mu\epsilon \quad p = 1, \dots, \bar{h}, \quad P_q^2 = T_{h,k-q} A_0 + T_{h,k-q+1} A_2 \quad \mu\epsilon \quad q = 1, \dots, \bar{k}$$

Απόδειξη:

Χρησιμοποιώντας την προς τα εμπρός λύση του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου που δίνεται από τις εξισώσεις (2.55) και θέτοντας το διάνυσμα κατάστασης $x(h, k) = 0$, λαμβάνουμε:

$$R(h, k) = \begin{bmatrix} u(0,0) \\ u(1,0) \\ \vdots \\ u(\bar{h},0) \\ u(0,1) \\ \vdots \\ u(0,\bar{k}) \\ u(1,1) \\ \vdots \\ u(1,\bar{k}) \\ u(2,1) \\ \vdots \\ u(\bar{h},\bar{k}) \end{bmatrix} = -P(h, k) \begin{bmatrix} x(0,0) \\ x(1,0) \\ x(2,0) \\ \vdots \\ x(\bar{h},0) \\ x(0,1) \\ x(0,2) \\ \vdots \\ x(0,\bar{k}) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

και από την σχέση (3.33) και για επιτρεπτές οριακές συνθήκες (3.22), το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0, h] \times [0, k]$ αν και μόνο αν η συνθήκη (3.31) ικανοποιείται. ▲

Παράδειγμα 3.6

Να ελέγξουμε αν το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο του παραδείγματος 2.1 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(i+1, j+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(i+1, j) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(i, j+1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(i, j) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(i+1, j) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(i, j+1)$$

με πίνακες:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{00} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{10} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο } [0,1] \times [0,1].$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.9 για να είναι ελέγξιμο το μοντέλο, πρέπει να

$$\text{ικανοποιείται η συνθήκη (3.31): } \text{rank}[R_{11}] = \text{rank}[R_{11} \quad P_{11}]$$

Από τις σχέσεις (3.32) υπολογίζουμε τους πίνακες R_{11} , P_{11} .

$$\bar{h} = h + n_1 + 1 = 3, \bar{k} = k + n_2 + 1 = 3, p = 1, \dots, 3, q = 1, \dots, \bar{k}.$$

$$R_{11} = \begin{bmatrix} M_0 & M_1^1 & M_2^1 & M_3^1 & M_1^2 & M_2^2 & M_3^2 & M_{11} \\ M_{12} & M_{13} & M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_0 = T_{1,1}B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1^1 = T_{0,1}B_0 + T_{1,1}B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$M_2^1 = T_{-1,1}B_0 + T_{0,1}B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3^1 = T_{-2,1}B_0 + T_{-1,1}B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1^2 = T_{1,0}B_0 + T_{1,1}B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2^2 = T_{1,-1}B_0 + T_{1,0}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3^2 = T_{1,-2}B_0 + T_{1,-1}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = T_{0,0}B_0 + T_{1,0}B_1 + T_{0,1}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = T_{0,-1}B_0 + T_{1,-1}B_1 + T_{0,0}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{13} = T_{0,-2}B_0 + T_{1,-2}B_1 + T_{0,-1}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = T_{-1,0}B_0 + T_{0,0}B_1 + T_{-1,1}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$M_{22} = T_{-1,-1}B_0 + T_{0,-1}B_1 + T_{-1,0}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{23} = T_{-1,-2}B_0 + T_{0,-2}B_1 + T_{-1,-1}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = T_{-2,0}B_0 + T_{-1,0}B_1 + T_{-2,1}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{32} = T_{-2,-1}B_0 + T_{-1,-1}B_1 + T_{-2,0}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{33} = T_{-2,-2}B_0 + T_{-1,-2}B_1 + T_{-2,-1}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} P_0 & P_1^1 & P_2^1 & P_3^1 & P_1^2 & P_2^2 & P_3^2 \end{bmatrix} \quad P_0 = T_{1,1}A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1^1 = T_{0,1}A_0 + T_{1,1}A_1 = T_{0,1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2^1 = T_{-1,1}A_0 + T_{0,1}A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_3^1 = T_{-2,1}A_0 + T_{-1,1}A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1^2 = T_{1,0}A_0 + T_{1,1}A_2 = T_{1,0} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2^2 = T_{1,-1}A_0 + T_{1,0}A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_3^2 = T_{1,-2}A_0 + T_{1,-1}A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[R_{11} \quad P_{11}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε τις τάξεις των πινάκων R_{11} και $[R_{11} \ P_{11}]$: $rankR_{11} = 2$ και $rank[R_{11} \ P_{11}] = 2$.

Η συνθήκη (3.31) ικανοποιείται, συνεπώς το μοντέλο μας είναι τοπικά ελέγξιμο στο ορθογώνιο $[0,1] \times [0,1]$.

3.4.2 Τοπική εφικτότητα (Local Reachability) του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου

Ορισμός 3.9

Το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο είναι τοπικά εφικτό (locally reachable) στο ορθογώνιο $[0, h] \times [0, k]$ αν για τις αποδεκτές οριακές συνθήκες (3.22) και για κάθε διάνυσμα $x_f \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει ακολουθία διανυσμάτων εισόδου:

$$\underline{u}(\bar{h}, \bar{k}) := \{u(0,0), \dots, u(0, \bar{k}), u(1,0), \dots, u(1, \bar{k}), u(2,0), \dots, u(\bar{h}-1, \bar{k}), u(\bar{h},0), \dots, u(\bar{h}, \bar{k}-1)\}$$

όπου $\bar{h} = h + n_1$ και $\bar{k} = k + n_2$, έτσι ώστε να ισχύει $x(h, k) = x_f$.

Θεώρημα 3.10

Το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο είναι τοπικά εφικτό στο ορθογώνιο $[0, h] \times [0, k]$ αν και μόνο αν

$$rankR_{hk} = n. \tag{3.34}$$

Ο πίνακας R_{hk} δίνεται από τις σχέσεις (3.32).

Απόδειξη:

Εφαρμόζοντας την εξίσωση $x(h, k) = x_f$ στην προς τα εμπρός λύση του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου (2.55), τότε η (2.55) γράφεται ως:

$$\begin{aligned}
 x_f - \sum_{p=1}^{\bar{h}} (T_{h-p,k-1} A_1 + T_{h-p-1,k-1} A_0) x(p,0) - \sum_{q=1}^{\bar{k}} (T_{h-1,k-q} A_2 + T_{h-1,k-q-1} A_0) x(,q) - T_{h-1,k-1} A_0 x(0,0) = \\
 = R_{hk} \begin{bmatrix} u(0,0) \\ u(1,0) \\ \vdots \\ u(\bar{h},0) \\ u(0,1) \\ \vdots \\ u(0,\bar{k}) \\ u(1,1) \\ \vdots \\ u(1,\bar{k}) \\ \vdots \\ u(\bar{h},\bar{k}) \end{bmatrix} \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

Από τη σχέση που βρήκαμε και από τις οριακές συνθήκες προκύπτει ότι το μοντέλο μας είναι τοπικά εφικτό στο ορθογώνιο $[0, h] \times [0, k]$ αν και μόνο αν ισχύει $rank R_{hk} = n$. ▲

Ορισμός 3.10

Το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο είναι τοπικά εφικτό αν για κάθε διάνυσμα $x_f \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει πολυωνυμικό διάνυσμα $\bar{U} = \bar{U}(z_1, z_2)$ έτσι ώστε το

$$X = \bar{G}^{-1} (H' \bar{U} - E x_f)$$

να είναι πολυωνυμικό διάνυσμα, όπου $\bar{G} = \bar{G}(d_1, d_2) = [E - A_0 d_1 d_2 - A_1 d_2 - A_2 d_1]$ και $H' = H'(d_1, d_2) = [B_0 d_1 d_2, B_1 d_2, B_2 d_1]$.

Θεώρημα 3.11

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (1) Το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο είναι τοπικά εφικτό.
- (2) Υπάρχει ένα μη πραγματικό διάνυσμα σειρών $v \neq 0$ έτσι ώστε να ισχύει

$$v G^{-1} H' = 0 \quad (3.36)$$

για όλα τα $z_1, z_2 \in C$, όπου

$$G = G(z_1, z_2) := [Ez_1 \quad z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2],$$

$$H' = H'(z_1, z_2) := [B_0 + B_1z_1 + B_2z_2 \quad -B_1z_1 \quad -B_2z_2].$$

(3) Υπάρχει ένα μη-πολυωνυμικό διάνυσμα $w = w(z_1, z_2)$, έτσι ώστε

$$wG = pv \tag{3.37α}$$

$$wH' = 0 \tag{3.37β}$$

όπου $p = p(z_1, z_2)$ είναι ένα μη μηδενικό πολυωνυμικό διάνυσμα και v είναι ένα μη μηδενικό πραγματικό διάνυσμα σειρών.

$$(4) \quad \text{rank} [F_{00}, F_{01}, \dots, F_{0m_2}, F_{10}, \dots, F_{1m_2}, F_{20}, \dots, F_{m_1m_2}] = n, \tag{3.38}$$

$$\text{όπου} \quad \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} F_{ij} z_1^i z_2^j = (\text{Adj}G)H', \quad m_1 \leq n, \quad m_2 \leq n \tag{3.39}$$

Απόδειξη:

(1) \leftrightarrow (2) Από το ανάπτυγμα Laurent στο άπειρο του αντίστροφου πίνακα G^{-1} που δίνεται από την σχέση

$$G^{-1} = \sum_{p=-n_1}^{\infty} \sum_{q=-n_2}^{\infty} T_{pq} z_1^{-p} z_2^{-q} \quad \text{για} \quad \det G \neq 0$$

η εξίσωση (3.36) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$vG^{-1}H' = \sum_{p=-n_1}^{\infty} vT_{pq} [B_0 z_1^{-(p+1)} z_2^{-(q+1)} + B_1 z_1^{-p} z_2^{-(q+1)} + B_2 z_1^{-(p+1)} z_2^{-q} \quad -B_1 z_1^{-p} z_2^{-(q+1)} \quad -B_2 z_1^{-(p+1)} z_2^{-q}]$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.32) και λαμβάνοντας υπόψη ότι η ακολουθία προς τα εμπρός θεμελιωδών πινάκων $\{T_{p,q}\}$ ικανοποιεί το Θεώρημα Cayley-Hamilton είναι προφανή η ισοδυναμία των προτάσεων (1) και (2).

(2) \leftrightarrow (3) Από την σχέση (3.37α) έχουμε

$$w = pvG^{-1}. \tag{3.40}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση αυτή στην (3.37β) παίρνουμε:

$$pvG^{-1}H' = 0 \tag{3.41}$$

σχέση από την οποία προκύπτει για $p \neq 0$ η (3.36).

Για να δείξουμε το αντίστροφο, δηλαδή ότι από την πρόταση (2) συνεπάγεται η πρόταση (3) θεωρούμε ότι ισχύει η σχέση (3.36) και ας ορίσουμε

$$w = v(\text{Adj}G)G = pv, \text{ για } p = \det G, \quad (3.42)$$

και από την εξίσωση (3.36) που την έχουμε θεωρήσει δεδομένη προκύπτει

$$wH' = 0 \quad (3.43)$$

Επομένως και οι προτάσεις (2) και (3) είναι ισοδύναμες.

(2)↔(4) Από την σχέση

$$vG^{-1}H' = \frac{v(\text{Adj}G)GH'}{\det G} = \frac{1}{\det G} \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} vF_{ij}z_1^i z_2^j, \quad (3.44)$$

που δείχνει την ισοδυναμία των σχέσεων (3.36) και (3.38) και κατά συνέπεια και των προτάσεων (2) και (4). ▲

Παρατήρηση 3.7.

Από τις σχέσεις (3.31) και (3.34) παρατηρούμε ότι η τοπική ελεγχσιμότητα προκύπτει από την τοπική εφικτότητα, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή αν το μοντέλο είναι τοπικά εφικτό τότε είναι και τοπικά ελέγξιμο, ενώ στην περίπτωση που το μοντέλο δεν είναι τοπικά εφικτό, μπορεί αυτό να είναι τοπικά ελέγξιμο.

Παράδειγμα 3.7

Να ελέγξουμε αν το GSM του παραδείγματος 2.1 είναι τοπικά εφικτό στο ορθογώνιο $[0,1] \times [0,1]$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.10 το γενικευμένο ιδίμορφο μοντέλο είναι τοπικά εφικτό, αν η συνθήκη (3.34) ικανοποιείται. Όπως είδαμε στο παράδειγμα 3.5 ισχύει: $\text{rank}R_{11} = 2$, συνεπώς το GSM είναι τοπικά εφικτό στο ορθογώνιο $[0,1] \times [0,1]$. △

3.4.3 Τοπική ανακατασκευασιμότητα (Local Reconstructibility) του γενικευμένου ιδιόμορφου μοντέλου

Ορισμός 3.11

Το GSM ονομάζεται τοπικά αναδομήσιμο (local reconstructible) αν μπορεί να οριστεί το τοπικό διάνυσμα ημικατάστασης του $x(0,0)$ όταν το διάνυσμα εισόδου $u(i,j)$ και το διάνυσμα εξόδου $y(i,j)$ του GSM είναι γνωστά για $(i,j) \in S_k$, όπου S_k είναι ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων μικρότερα του $(0,0)$ και ορίζεται ως εξής :

$$S_k = \{(i,j) : i < 0, j < 0 \text{ και } i+j < -\kappa, \kappa > 0\} \quad (3.45)$$

Θεώρημα 3.12

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (1) Το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο είναι τοπικά αναδομήσιμο (reconstructible).
- (2) Υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $P' = P'(d_1, d_2)$, $Q' = Q'(d_1, d_2)$ έτσι ώστε:

$$P'\bar{G} + Q'C = I, \quad (3.46)$$

όπου $\bar{G} = \bar{G}(d_1, d_2) = [E - A_0 d_1 d_2 - A_1 d_2 - A_2 d_1]$

- (3) Για όλα τα $d_1, d_2 \in C$ ισχύει

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{G}(d_1, d_2) \\ C \end{bmatrix} = n \quad (3.47)$$

Απόδειξη:

Ας θεωρήσουμε ότι για όλα τα i, j έχουμε μηδενικό διάνυσμα εισόδου $u(i,j) = 0$, καθώς επίσης ότι ισχύει η σχέση (3.46), τότε μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\begin{bmatrix} P' & Q' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{G} \\ C \end{bmatrix} = I \quad (3.48)$$

Από τις εξισώσεις του ιδιόμορφου μοντέλου (3.21) εφαρμόζοντας για $u(i,j) = 0$ τότε παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} \bar{G} \\ C \end{bmatrix} x(i,j) = \begin{bmatrix} 0 \\ y(i,j) \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση αυτή με τον πίνακα $\begin{bmatrix} P' & Q' \end{bmatrix}$ και χρησιμοποιώντας την σχέση (3.48), η (3.49) γράφεται σαν

$$x(i, j) = Q' y(i, j) \quad (3.50)$$

και στην συγκεκριμένη ιδιαίτερη περίπτωση για αρχική κατάσταση έχουμε

$$x(0, 0) = Q' y(0, 0) \quad (3.51)$$

Κατά συνέπεια το αρχικό διάνυσμα κατάστασης $x(0, 0)$ μπορεί να οριστεί όταν το $y(i, j)$ είναι γνωστό για $(i, j) \in S_k$ για κάποια θετικά k .

Αντίστροφα αν θεωρήσουμε ότι η πρόταση (1) ισχύει δηλαδή ότι το GSM είναι τοπικά αναδομήσιμο τότε ισχύει η (3.51) δηλαδή $x(0, 0) = Q' y(0, 0)$ για κάποιο πολυωνυμικό πίνακα Q' .

Αν λάβουμε υπόψη ότι $y(0, 0) = Cx(0, 0)$, τότε η (3.51) μπορεί να γραφτεί σαν

$$x(0, 0) = Q' Cx(0, 0) \quad (3.52)$$

Από το γεγονός ότι θεωρήσαμε ότι η πρόταση (1) ισχύει, προκύπτει ότι για μηδενική είσοδο $u(i, j) = 0$ έχουμε

$$\bar{G}x(0, 0) = 0 \quad (3.53)$$

και κατά συνέπεια από την (3.53) έχουμε για κάποιο πολυωνυμικό πίνακα P'

$$P' \bar{G}x(0, 0) = 0 \quad (3.54)$$

Από τις σχέσεις (3.52) και (3.54) έχουμε

$$\left(P' \bar{G} + Q' C - I \right) x(0, 0) = 0 \quad (3.55)$$

Από την οποία συνεπάγεται η σχέση (3.48) αρκεί να ισχύει η (3.55) για κάθε $x(0, 0)$.

(2) \rightarrow (3) Γράφουμε την $P' \bar{G} + Q' C = I$ στην μορφή:

$$\begin{bmatrix} P' & Q' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{G} \\ C \end{bmatrix} = I.$$

Από αυτή τη την μορφή της σχέσης παρατηρούμε ότι η (3.47) προκύπτει από την (3.46). Επομένως και η πρόταση (3) συνεπάγεται από την (2).

Αντίστροφα αν ισχύει η (3.47) τότε υπάρχουν οι πολυωνυμικοί πίνακες P' , Q' που με την βοήθεια των στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών, ικανοποιείται η (3.46).



Παράδειγμα 3.8

Να ελέγξουμε αν το γενικευμένο ιδιόμορφο μοντέλο του παραδείγματος 2.1 με

$$\text{πίνακες: } E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } C = [0 \quad 1], \text{ είναι τοπικά αναδομήσιμο στο ορθογώνιο } [0,1] \times [0,1]. \text{ Από}$$

το Θεώρημα 3.12 βλέπουμε ότι το ιδιόμορφο μοντέλο είναι αναδομήσιμο αν ισχύει η συνθήκη (3.47).

Αρχικά υπολογίζουμε τον πίνακα $\begin{bmatrix} \bar{G}(d_1, d_2) \\ C \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \bar{G} &= \bar{G}(d_1, d_2) = [E - A_0 d_1 d_2 - A_1 d_2 - A_2 d_1] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d_1 d_2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d_2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d_1 = \begin{bmatrix} d_2 & 1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Τότε:
$$\begin{bmatrix} \bar{G}(d_1, d_2) \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 & 1 \\ 0 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στην συνέχεια βρίσκουμε την τάξη του πίνακα $\begin{bmatrix} \bar{G}(d_1, d_2) \\ C \end{bmatrix}$: $\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{G}(d_1, d_2) \\ C \end{bmatrix} = 2$.

Παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη (3.47), συνεπώς το ιδιόμορφο μοντέλο είναι αναδομήσιμο στο ορθογώνιο $[0,1] \times [0,1]$. △

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Aplevich J. D. & Miri S.A. , (1998), *Equivalence of n-Dimensional Roesser and Fornasini-Marchesini Models*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **43**, 401-405.
- [2] Gregor J., (1992), *On the Singular Fornasini-Marchesini Model of 2-D Discrete Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **37**, No. 5, 636-639.
- [3] Fornasini Ettore and Marchesini Giovanni, (1976), *State-Space Realization Theory of 2-D Filters*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-**21**, No. 4, 484-492.
- [4] Fornasini Ettore and Marchesini Giovanni, (1986), *Structure and Properties of 2-D Systems*, Multidimensional Systems, Techniques and applications, Vol. **29**.
- [5] Fornasini E., Sebek M. & Bisiacco M., (1988), *Controllability and Reconstructibility Conditions for 2-D Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **33**, 496-499.
- [6] Kaczorek Tadeusz, (1988), *The Singular General Model of 2-D Systems and its Solutions*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **33**, No.11, 1060-1091.
- [7] Kaczorek Tadeusz, (1990), *General Response Formula and Minimum Energy Control for the Singular Model of 2-D Linear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **35**, No 35, 433-436.
- [8] Kaczorek Tadeusz, (1992), *Local Controllability, Reachability, and Reconstructibility of the General Singular Model of 2-D Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **37**, No 10, 1527-1530.
- [9] Kaczorek Tadeusz, (1993), *Acceptable Input Sequences for Singular 2-D Linear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **38**, No 9, 1391-1394.
- [10] Karampetakis N. , (2005), *On the Solution of the General Singular of the 2-D Systems*, Proceeding of the 16th IFAC World Congress 2005, Praha, Czech Republic, July 4-8, 2005 (presentation).

- [11] Karampetakis N. , (2005), *On the Solution of the Implicitl Roesser model*, Proceeding of the 13th Mediterranean Conference on Control and Automation, Limassol, Cyprus, June 27-29, (presentation).
- [12] Kurek J., (1985), *The General State-Space Model for the 2-D Linear Digital System*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **Ac-30**, 600-602.
- [13] Lewis, F.L., (1992), *A Review of 2-D Implicit*, IEEE Trans.Automat.Control, Vol. **28**, No 2, 345-354.
- [14] Lewis, F.L. and B.G. Mertzios, (1991), *On the analysis of two-Dimensional Discrete Singular Systems*. Circuit Systems and Signal Pro.
- [15] Marszalek Wieslaw, (1984), *Two-Dimensional State-Space Discrete Models for Hyperbolic Partial Differential Equations*, Appl. Math. Modelling, Vol. **8**, 11-14.
- [16] Roesser Robert, (1975), *A Discrete State-Space Model for Linear Systems Image Processing*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **AC-20**, No. 1, 1-10.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

A1. Υπολογισμός του πίνακα μετάβασης

Ο υπολογισμός του πίνακα μετάβασης $A^{i,j}$ χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις (1.11), όταν έχουμε να κάνουμε με μεγάλα i και j , είναι πολύπλοκος και χρονοβόρος. Για τον λόγο αυτό, για την εύρεση του πίνακα μετάβασης $A^{i,j}$, χρησιμοποιούμε έναν αλγόριθμο βασισμένο στο θεώρημα Cayley-Hamilton που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια καθώς και κάποια προκαταρκτικά θεωρήματα και λήμματα:

Θεώρημα A1 (2-D αλγόριθμος διαίρεσης)

Κάθε πολυώνυμο $w(z_1, z_2)$ μπορεί να εκφραστεί στην πιο κάτω μορφή:

$$w(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^{n_1} q_{1i}(z_2) p_{i,-1}(z_1, z_2) + \sum_{j=1}^{n_2} q_{2j}(z_1) p_{-1,j}(z_1, z_2) + m(z_1, z_2) p(z_1, z_2) + r(z_1, z_2) \quad (A1)$$

για βαθμό του πολυώνυμου $r(z_1, z_2)$ μικρότερο από τον βαθμό του πολυώνυμου

$$p(z_1, z_2) \quad \text{deg } r(z_1, z_2) < \text{deg } p(z_1, z_2).$$

όπου $p_{i,-1}(z_1, z_2)$, $p_{-1,j}(z_1, z_2)$ δίνονται από τις σχέσεις (1.25)

Απόδειξη:

Ας θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$w(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} b_{ij} z_1^i z_2^j \quad (A2)$$

όπου $N_1 \geq n_1$ και $N_2 \geq n_2$.

Κάθε όρος του πολυωνύμου $w(z_1, z_2)$, βαθμού $(i, j) \geq (n_1, n_2)$ μπορεί να αναχθεί με την αφαίρεση των όρων $b_{ij} z_1^{i-n_1} z_2^{j-n_2} p(z_1, z_2)$ από αυτό. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία μέχρι να εξαλειφθούν όλοι οι όροι, βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου με το (n_1, n_2) , το πολυώνυμο γίνεται

$$w(z_1, z_2) - m(z_1, z_2) p(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} c_{ij} z_1^i z_2^j \quad (A3)$$

όπου $c_{ij} = 0$ για $i \geq n_1$ και $j \geq n_2$ ενώ για κάποια $(0 \leq i < N_1$ και $0 \leq j < n_2)$ ή $(0 \leq i < n_1$ και $0 \leq j < N_2)$ έχουμε $c_{ij} \neq 0$. Κάθε όρος της σχέσης (A3) του βαθμού (k, l) , με $k \geq n_1$ και $l = n_2 - j$ μπορεί να διαγραφεί αφαιρώντας τα $c_{kl} z_1^{k-n_1} p_{-1,j}(z_1, z_2)$ από αυτό. Θεωρούμε ότι η διαδικασία αναγωγής εκτελείται για $j = 1, 2, \dots, n_2$ απαλείφοντας τους όρους βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου με $(n_1 + 1, n_2 - j)$ μετά από κάθε βήμα. Μια παρόμοια διαδικασία επαναλαμβάνεται για τα πολυώνυμα $p_{i,-1}(z_1, z_2)$ για $i = 1, 2, \dots, n_1$. Και τα αποτελέσματα που απομένουν δίνονται στην μορφή:

$$r(z_1, z_2) = w(z_1, z_2) - m(z_1, z_2) p(z_1, z_2) + \sum_{i=1}^{n_1} q_{1i}(z_2) p_{i,-1}(z_1, z_2) - \sum_{j=1}^{n_2} q_{2j}(z_1) p_{-1,j}(z_1, z_2)$$

με βαθμό του πολυωνύμου $r(z_1, z_2)$ μικρότερο του n_1 και n_2 : $\deg r(z_1, z_2) < (n_1, n_2)$. ▲

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$q_{1i}(z_2) = \sum_{k=0}^{N_2-n_2-1} (q_{1i})_k z_2^k, \quad q_{2j}(z_1) = \sum_{l=0}^{N_1-n_1-1} (q_{2j})_l z_1^l \quad \text{και} \quad m(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{N_1-n_1} \sum_{j=0}^{N_2-n_2} m_{ij} z_1^i z_2^j$$

η εξίσωση (A1) γίνεται

$$w(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{N_2-n_2} q_{-i,j} p_{i,-j}(z_1, z_2) + \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=1}^{N_1-n_1} q_{i,-j} p_{-i,j}(z_1, z_2) + \sum_{i=0}^{N_1-n_1} \sum_{j=0}^{N_2-n_2} m_{ij} p_{-i,-j}(z_1, z_2) + r(z_1, z_2) \quad (A4)$$

όπου $q_{-ij} = (q_{1i})_{j-1}$ και $q_{i,-j} = (q_{2j})_{i-1}$

Από το Θεώρημα A1 και τις σχέσεις 1.25 του ορισμού 1.5 προκύπτει ότι αν το διαταγμένο ζεύγος (z_1^0, z_2^0) είναι ένα ζευγάρι ιδιοτιμών του πίνακα A τότε ισχύει

$$w(z_1^0, z_2^0) = r(z_1^0, z_2^0) \quad (A5)$$

Από την σχέση (A2) ορίζουμε τον πίνακα

$$w(A) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} b_{ij} A^{i,j} \quad (A6)$$

Και από την σχέση (A4) προκύπτει ότι

$$w(A) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{N_2-n_2} q_{-i,j} p_{i,-j}(A) + \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=1}^{N_1-n_1} q_{i,-j} p_{-i,j}(A) + \sum_{i=0}^{N_1-n_1} \sum_{j=0}^{N_2-n_2} m_{ij} p_{-i,-j}(A) + r(A)$$

Τότε από το Θεώρημα A1 και από τις ιδιότητες του πίνακα μετάβασης, όπως έχουν οριστεί στο κεφάλαιο 1 έχουμε:

$$p_{i,j}(A) = 0, \quad (\text{για } i < 0 \text{ ή } j < 0) \text{ και } (\text{για } i = j = 0)$$

Συνεπώς ισχύει από το θεώρημα A1 :

$$w(A) = r(A) \quad (A7)$$

Το σύνολο των 2-D διακριτών ιδιοτιμών του πίνακα A είναι $(n_1 + 1)(n_2 + 1) - 1$ ή αν το $p(z_1, z_2)$ είναι διαχωρίσιμο τότε ισούται με τον αριθμό των συντελεστών στο

$$r(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} r_{ij} z_1^i z_2^j, \text{ με } r_{n_1 n_2} = 0$$

Συνεπώς για δοσμένο πολυώνυμο $w(z_1, z_2)$, λύνουμε το σύνολο των $(n_1 + 1)(n_2 + 1) - 1$ εξισώσεων:

$$w(z_{1i}, z_{2j}) = r(z_{1i}, z_{2j}), \quad \text{για } (0,0) < (i, j) \leq (n_1, n_2)$$

για να βρούμε τους συντελεστές των $r(z_{1i}, z_{2j})$.

Και καταλήγουμε για την εύρεση του πίνακα μετάβασης στον πιο κάτω τυποποιημένο αλγόριθμο:

Αλγόριθμος 1. Εύρεσης του πίνακα μετάβασης (transition matrix)

Βήμα 1: Βρίσκουμε το 2-D χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(z_1, z_2)$ του πίνακα A και υπολογίζουμε τις (z_{1k}, z_{2l}) ιδιοτιμές του.

Βήμα 2: Αν οι 2-D ιδιοτιμές του (z_{1k}, z_{2l}) είναι διακεκριμένες τότε λύνω το σύνολο των εξισώσεων:

$$z_{1k}^i z_{2l}^j = r(z_{1k}, z_{2l}) \text{ για } (0,0) < (k,l) < (n_1, n_2)$$

και βρίσκω του συντελεστές $r_{k,l}$ του $r(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} r_{kl} z_1^k z_2^l$, όπου $r_{n_1 n_2} = 0$

Βήμα 3: Χρησιμοποιώντας τον τύπο $A^{i,j} = \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} r_{kl} A^{k,l}$ βρίσκουμε τον πίνακα μεταφοράς $A^{i,j}$ για $(i, j) \geq (n_1, n_2)$.

Παράδειγμα A.1

Βρείτε τον πίνακα μετάβασης $A^{i,j}$, $(i, j) \geq (n_1, n_2)$ για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 1: Βρίσκουμε το 2-D χαρακτηριστικό πολυώνυμο για τον πίνακα A , το οποίο έχει την μορφή: $p(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 - 3 & 0 \\ 2 & z_2 - 2 \end{bmatrix} = (z_1 - 3)(z_2 - 2)$

Τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι:

$$\{(z_{1i}, z_{2j}) : (0,0) < (i, j) \leq (n_1, n_2)\} = \{(3,0), (0,2), (3,2)\}.$$

Βήμα 2: Τότε το πολυώνυμο $r(z_1, z_2)$ έχει την μορφή:

$$r(z_1, z_2) = r_{10}z_1 + r_{01}z_2 + r_{00}.$$

Αντικαθιστώντας τις 2-D ιδιοτιμές στην εξίσωση:

$$r_{10}z_1 + r_{01}z_2 + r_{00} = z_1^i z_2^j$$

Παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$3r_{10} + r_{00} = 0, \quad 2r_{01} + r_{00} = 0, \quad 3r_{10} + 2r_{01} + r_{00} = 3^i 2^j$$

Οι λύσεις των εξισώσεων είναι:

$$r_{10} = 3^{i-1} 2^j, \quad r_{01} = 3^i 2^{j-1}, \quad r_{00} = -3^i 2^j$$

και

$$r(z_1, z_2) = 3^{i-1} 2^j z_1 + 3^i 2^{j-1} z_2 - 3^i 2^j = 3^{i-1} 2^{j-1} (2z_1 + 3z_2 - 6I)$$

Βήμα 2: Χρησιμοποιώντας τον τύπο: $A^{i,j} = \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} r_{kl} A^{k,l}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 A^{i,j} &= 3^{i-1}2^{j-1} (2A^{1,0} + 3A^{0,1} - 6I) = 3^{i-1}2^{j-1} \left(2 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= 3^i 2^j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{για } (i, j) \geq (1, 1). \quad \triangle
 \end{aligned}$$

Αν το 2-D χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(z_1, z_2)$ είναι διαχωρίσιμο και οι 2-D ιδιοτιμές του είναι το σύνολο $\{(z_{1i}, z_{2j}) : (0, 0) < (i, j) \leq (n_1, n_2)\}$ (Λήμμα 1.2), τότε για να βρούμε τον πίνακα μεταφοράς ακολουθούμε τον ακόλουθο αλγόριθμο:

Αλγόριθμος 2. Εύρεσης του πίνακα μετάβασης (transition matrix)

Βήμα 1: Βρίσκουμε το 2-D χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(z_1, z_2)$ του πίνακα A και υπολογίζουμε το σύνολο των ιδιοτιμών του $\{(z_{1i}, z_{2j}) : (0, 0) < (i, j) \leq (n_1, n_2)\}$.

Βήμα 2: Χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$v_{i,j}(z_1, z_2) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n_1} \frac{z_1 - z_{1k}}{z_{1i} - z_{1k}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{n_2} \frac{z_2 - z_{2l}}{z_{2j} - z_{2l}} \quad (A8)$$

βρίσκουμε τα $v_{i,j}$, για $(0, 0) < (i, j) \leq (n_1, n_2)$.

Βήμα 3: Υπολογίζουμε τα $z_{i,j}$ από τη σχέση: $z_{i,j} = v_{i,j}(A)$ για $(0, 0) < (i, j) \leq (n_1, n_2)$

Βήμα 4: Χρησιμοποιώντας την πιο κάτω σχέση βρίσκω τον $f(A)$

$$f(A) = \sum_{(0,0) < (i,j) \leq (n_1, n_2)} z_{i,j} f(z_{1i}, z_{2j}), \quad \text{για } f(z_1, z_2) = z_1^i z_2^j \quad (A9)$$

Παράδειγμα A.2

Βρείτε τον πίνακα μετάβασης $A^{i,j}$, $(i, j) \geq (n_1, n_2)$ για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ του παραδείγματος A1.}$$

Βήμα 1: Το 2-D χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(z_1, z_2)$ του πίνακα A έχει την μορφή

$$\begin{aligned}
 p(z_1, z_2) &= \begin{bmatrix} z_1 - 3 & 0 \\ 2 & z_2 - 2 \end{bmatrix} = (z_1 - 3)(z_2 - 2) \text{ και το σύνολο των ιδιοτιμών είναι οι:} \\
 &\{(z_{1i}, z_{2j}) : (0, 0) < (i, j) \leq (n_1, n_2)\} = \{(3, 0), (0, 2), (3, 2)\}.
 \end{aligned}$$

Βήμα 2: Λαμβάνοντας υπόψη ότι $z_{1,0} = z_{2,0} = 0$, $z_{1,1} = 3$, $z_{2,1} = 2$ και χρησιμοποιώντας την σχέση (A8) έχουμε:

$$v_{1,1}(z_1, z_2) = \frac{z_1 - z_{10}}{z_{11} - z_{10}} \frac{z_2 - z_{20}}{z_{21} - z_{20}} = \frac{z_1}{3} \frac{z_2}{2} = \frac{1}{6} z_1 z_2$$

Δεν χρειάζεται να βρούμε τα $v_{1,0}$ και $v_{0,1}$ από την στιγμή που ισχύει $z_{1k}^i z_{2l}^j = 0$, για $k = l = 0$.

Βήμα 3: Έχουμε $z_{1,1} = v_{1,1}(A) = \frac{1}{6} A^{1,1} = \frac{1}{6} (A^{1,0} A^{0,1} + A^{0,1} A^{1,0}) =$

$$= \frac{1}{6} (A^{1,0} A^{0,1} + A^{0,1} A^{1,0}) = \frac{1}{6} \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Βήμα 3: Χρησιμοποιώντας τον τύπο (A9) για $f(z_1, z_2) = z_1^i z_2^j$, παίρνουμε:

$$A^{i,j} = \sum_{(0,0) < (k,l) \leq (1,1)} z_{i,j} z_{1k}^i z_{2l}^j = z_{1,1} z_{11}^i z_{21}^j = 3^i 2^j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{για } (i, j) \geq (1,1)$$

και όπως παρατηρούμε είναι το ίδιο αποτέλεσμα με το παράδειγμα A.1. △